# Sokszínű matematika

# 10

*A kötet hátsó borítójának belsején egyedi kód található, melyet a* ***www.mozaweb.hu*** *oldalon aktiválhatsz. Az aktiválás hozzáférést biztosít a kiadvány elektronikus változatához a honlapon található feltételekkel.*






# Sokszínű matematika

Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

# sokszínű Matematika

## FELADATGYŰJTEMÉNY 10

**Gyakorló és érettségire felkészítő feladatokkal**

*Megoldásokkal*

**Hatodik, változatlan kiadás**

Mozaik Kiadó – Szeged, 2015

*A könyvet írta:* Árki Tamás · *középiskolai tanár*
Konfárné Nagy Klára · *középiskolai tanár*
Kovács István · *középiskolai tanár*
Trembeczki Csaba · *középiskolai tanár*
Dr. Urbán János · *középiskolai tanár*

*Lektorálta:* Biróné Füle Zsuzsanna · *középiskolai tanár*
Kunovszki István · *középiskolai tanár*
Tóthné Bertalan Éva · *középiskolai tanár*

*Felelős szerkesztő:* Tóth Katalin
*Borítóterv, tipográfia:* Reményfy Tamás
*Ábrák:* Becsei György, Horváth Péter
*Fotók:* Mozaik Archívum
*Műszaki szerkesztő:* Horváth Péter

KERETTANTERV:
MOZAIK Kerettantervrendszer 17/2004 (V. 20.) OM rendelet
OM Kerettanterv 17/2004 (V. 20.) OM rendelet 3. sz. melléklet

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, ill. rövidített változat kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában (fotokópia, mikrofilm vagy más hordozó) nem sokszorosítható.




*Engedélyszám:* KHF/7824-13/2010
*ISBN* 978 963 697 612 5
*Copyright:* Mozaik Kiadó – Szeged, 2009

# Tisztelt Olvasó!

Feladatgyűjtemény-sorozatunk egyedülálló a középiskolai matematika feladatgyűjtemények között. A könyvek felépítése pontosan követi a *Sokszínű matematika* tankönyvcsalád köteteinek szerkezetét, így akik ezekből a tankönyvekből tanulnak, közvetlenül alkalmazhatják az órai munka és az önálló gyakorlás, sőt az érettségi felkészülés során is.

Ugyanakkor – mivel a feladatgyűjtemények felépítése természetesen megfelel a tantárgy belső logikájának és az iskolákban általánosan alkalmazott kerettanterveknek – minden nehézség nélkül használhatják azok is, akik más tankönyvekből tanulják, illetve tanítják a matematikát.

A feladatok nagy száma és változatossága miatt a tanulók bőségesen találnak a maguk számára kitűzött szintnek megfelelő gyakorlási lehetőséget. Így a tankönyveket és a feladatgyűjteményt együtt használva kellő jártasságot szerezhetnek a feladatmegoldásban.

Az egyes fejezetek végén található *Vegyes feladatok* áttekintést adnak az adott fejezet anyagából, ezért jól segíthetik az átfogóbb számonkérés előtti felkészülést.

## A feladatok nehézségének jelölése

Minden fejezetben három különböző szintre bontva találjuk a feladatokat:

2184 **Gyakorló feladatok:** olyan feladatok, amelyek – akár a tanórákon, akár házi feladatként – elősegítik a megtanult ismeretek elmélyítését. *(narancssárga színű feladatsorszám)*

2430 **Középszintű feladatok:** az adott témakörben más témákhoz is kapcsolódó problémák, melyek megoldása elősegíti a tantárgy komplex ismeretanyagának ismétlését, a matematikai kompetenciák elsajátítása mellett azok alkalmazását. *(kék színű feladatsorszám)*

2796 **Emelt szintű feladatok:** az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, melyek nemcsak megoldásuk nehézségében különböznek az előzőektől, hanem felvillantják a matematika szépségét is. *(bordó színű feladatsorszám)*

## A feladatok sorszámozása

A feladatgyűjtemények feladatainak sorszámozása a tankönyvcsalád egyes köteteire utal.

A 9. évfolyam feladatai az 1001-es, a 10. évfolyam feladatai a 2001-es, a 11. évfolyamé a 3001-es, a 12. évfolyamé pedig a 4001-es sorszámtól kezdődnek. A 12.-es kötetben a négy év anyagát áttekintő rendszerező összefoglalás feladatai az 5001-es sorszámtól indulnak, ezáltal segíti a feladatok közötti válogatást az érettségire történő felkészüléskor.

## Megoldások

A feladatgyűjtemény minden feladat megoldását tartalmazza. A gyakorló feladatok esetén csak a végeredményt közöljük, más esetekben pedig annyira részletezzük a megoldásokat, amennyire azt pedagógiai szempontból szükségesnek tartottuk.

A kitűzött feladatok megoldásához jó munkát és jó tanulást kívánunk!

*A szerzők*





# TARTALOMJEGYZÉK




Bevezető ..... 5
A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések ..... 8

## 10.1. *Gondolkodási módszerek* (2001–2091)

MEGOLDÁS

Szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel ..... 10 ..... 100
Skatulyaelv ..... 12 ..... 102
Sorba rendezés I. (különböző elemek) ..... 13 ..... 104
Sorba rendezés II. (több típusba tartozó azonos elemek) ..... 13 ..... 105
Kiválasztás és sorba rendezés I. (különböző elemek) ..... 16 ..... 109
Kiválasztás és sorba rendezés II. (lehetnek azonos elemek is) ..... 16 ..... 109
Vegyes feladatok ..... 18 ..... 112





## 10.2. *A gyökvonás* (2092–2148)

Racionális számok, irracionális számok ..... 20 ..... 114
A négyzetgyökvonás azonosságai, alkalmazásaik ..... 21 ..... 115
Számok *n*-edik gyöke, a gyökvonás azonosságai ..... 25 ..... 122
Vegyes feladatok ..... 27 ..... 124

## 10.3. *A másodfokú egyenlet* (2149–2248)

A másodfokú egyenlet és függvény ..... 29 ..... 127
A másodfokú egyenlet megoldóképlete ..... 30 ..... 129
A gyöktényezős alak. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés ..... 32 ..... 132
Másodfokúra visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek, másodfokú egyenletrendszerek ..... 33 ..... 134
Másodfokú egyenlőtlenségek ..... 34 ..... 136
Paraméteres másodfokú egyenletek ..... 35 ..... 142
Négyzetgyökös egyenletek és egyenlőtlenségek ..... 36 ..... 144
A számtani és mértani közép, szélsőérték feladatok ..... 37 ..... 150
Másodfokú egyenletre vezető problémák ..... 38 ..... 152
Vegyes feladatok ..... 39 ..... 155





## 10.4. *Geometria* (2249–2632)

Körrel kapcsolatos ismeretek ..... 41 ..... 158
Párhuzamos szelők és szelőszakaszok tétele, szögfelezőtétel ..... 44 ..... 169
Hasonlósági transzformációk, alakzatok hasonlósága ..... 46 ..... 174
Arányossági tételek a derékszögű háromszögben és a körben ..... 50 ..... 183



A hasonlóság néhány alkalmazása a terület- és térfogatszámításban ... 52 ... 189
Vegyes feladatok I. ... 54 ... 194
Távolságok meghatározása hasonlóság segítségével, hegyesszögek szögfüggvényei ... 56 ... 200
Összefüggések hegyesszögek szögfüggvényei között, nevezetes szögek szögfüggvényei ... 58 ... 204
Háromszögek különböző adatainak meghatározása szögfüggvények segítségével ... 60 ... 207
Síkbeli és térbeli számítások a szögfüggvények segítségével ... 62 ... 211
Vegyes feladatok II. ... 64 ... 219
Vektorok (emlékeztető), vektorok felbontása különböző irányú összetevőkre ... 66 ... 225
Vektorok alkalmazása a síkban és a térben ... 69 ... 229
Vektorok a koordináta-rendszerben, vektor koordinátái, műveletek koordinátákkal adott vektorokkal ... 71 ... 236
Vegyes feladatok III. ... 72 ... 239



## 10.5. *Szögfüggvények* (2633–2730)

A szinusz- és koszinuszfüggvény definíciója, egyszerű tulajdonságai ... 75 ... 244
A szinuszfüggvény grafikonja ... 75 ... 244
A koszinuszfüggvény grafikonja, egyenletek, egyenlőtlenségek ... 77 ... 252
A tangens- és kotangensfüggvény ... 80 ... 261
Összetett feladatok és alkalmazások ... 81 ... 264
Geometriai alkalmazások ... 82 ... 268
Vegyes feladatok ... 83 ... 271



## 10.6. *Valószínűség-számítás* (2731–2814)

Események ... 86 ... 279
Műveletek eseményekkel ... 87 ... 280
Kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség ... 90 ... 281
A valószínűség klasszikus modellje ... 90 ... 281
Vegyes feladatok ... 96 ... 291





## A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések

| Jelölés | Magyarázat |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | a természetes számok halmaza |
| $\mathbb{Z}$ | az egész számok halmaza |
| $\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^-$ | a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza |
| $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}^*$ | a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza |
| $\mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Q}^-$ | a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza |
| $\mathbb{R}$ | a valós számok halmaza |
| $\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^-$ | a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza |
| $a \in A$; $b \notin A$ | $a$ eleme az $A$ halmaznak; $b$ nem eleme az $A$ halmaznak |
| $A \subseteq B$ | $A$ halmaz részhalmaza $B$ halmaznak |
| $C \subset D$ | $C$ halmaz valódi részhalmaza $D$ halmaznak |
| $E \not\subset F$ | $E$ halmaz nem részhalmaza $F$ halmaznak |
| $A \cup B$; $C \cap D$; $E \setminus F$ | $A$ és $B$ halmaz uniója; $C$ és $D$ halmaz metszete; $E$ és $F$ halmaz különbsége |
| $\emptyset$, $\{\}$ | üres halmaz |
| $\overline{A}$ | az $A$ halmaz komplementere |
| $\lvert A \rvert$ | az $A$ halmaz elemszáma |
| $A \Rightarrow B$; $C \Leftrightarrow D$ | ha $A$, akkor $B$; $C$ akkor és csak akkor, ha $D$ |
| $[a; b]$ | $a$, $b$ zárt intervallum |
| $[a; b[$ | $a$, $b$ balról zárt, jobbról nyitott intervallum |
| $]a; b]$ | $a$, $b$ balról nyitott, jobbról zárt intervallum |
| $]a; b[$ | $a$, $b$ nyitott intervallum |
| $n!$ | $n$ faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ |
| $f: x \mapsto$ | az $f$ függvény hozzárendelési szabálya |
| $f(x_0)$ | az $f$ függvény helyettesítési értéke az $x_0$ helyen |
| $\lvert x \rvert$ | az $x$ szám abszolút értéke |
| $[x]$ | az $x$ szám egészrésze |
| $\{x\}$ | az $x$ szám törtrésze |
| $\sqrt{x}$ | az $x$ szám négyzetgyöke |
| $\sqrt[n]{x}$ | az $x$ szám $n$-edik gyöke |
| $a \mid b$ | az $a$ szám osztója a $b$ számnak |
| $(a, b)$ | az $a$ és $b$ szám legnagyobb közös osztója |
| $[a, b]$ | az $a$ és $b$ szám legkisebb közös többszöröse |
| $\overrightarrow{AB}$ | az $A$ pontból $B$ pontba mutató vektor |
| $\vec{a}$, $\vec{0}$ | $a$ vektor, nullvektor |
| $\sphericalangle$ | szög |

# Feladatok




Gondolkodási módszerek 10

A gyökvonás 20

A másodfokú egyenlet 29

Geometria 41

Szögfüggvények 75

Valószínűség-számítás 86





# 10.1. GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK

## Szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel

**2001** Egészítsük ki az alábbi mondatokat a megadott szavakkal, számokkal úgy, hogy igazzá váljanak. Keressük meg az összes megoldást.

*a)* *Ha egy szám …, akkor …*
(prím, természetes, egész, racionális, irracionális, valós, $\sqrt{2}$, 2, $2^2$)

*b)* *Ha egy négyszög …, akkor …*
(négyzet, téglalap, paralelogramma, rombusz, trapéz, deltoid)

*c)* Ha egy számnak osztója …, akkor osztója … is.
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)

*d)* Ha egy szám többszöröse …-nak, akkor többszöröse …-nak is.
(5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21)

**2002** Fogalmazzuk át a következő állításokat *ha valami …, akkor …* formába.

*a)* Minden bogár rovar.

*b)* Minden holló fekete.

**2003** Fogalmazzuk át a következő állításokat *minden … …* formába.

*a)* Ha egy négyszög négyzet, akkor az egyenlő oldalú.

*b)* Ha egy szám osztható 6-tal, akkor osztható 3-mal is.

**2004** – *Ha holnap esni fog az eső, akkor nem a strandra megyünk, hanem meghívlak moziba* – ígéri a fiú a lánynak. Mit kell tennie ahhoz, hogy ígéretét megtartsa, ha:

*a)* másnap esik az eső;

*b)* másnap süt a nap?

**2005** *Ha a film eleje jó, akkor végignézem.*

Döntsük el, hogy az alábbi szituációkban igaz-e az előbbi kijelentés.

*a)* A film eleje jó volt, és végig is néztem.

*b)* Bár a film nem kezdődött jól, azért megnéztem.

*c)* A film eleje jó volt, de nem néztem meg.

*d)* A film eleje nem volt jó, és nem is néztem meg.

**2006** Az alábbi képeken három futballmeccs eredményei szerepelnek. Adjuk meg az összes részeredményt, ami szükséges volt a végeredmények kialakulásához.










**2007** Adott a következő állítás: *Ha valamely négyszögnek van egy párhuzamos oldalpárja, akkor az paralelogramma.*

*a)* Döntsük el, igaz-e az állítás.

*b)* Fogalmazzuk meg az állítás megfordítását. Igaz-e az állítás megfordítása?

*c)* Mire cseréljük az állításban a *paralelogramma* szót, hogy az állítás és megfordítása is igaz legyen?



**2008** Pitagorasz tételét így is megfogalmazhatjuk: *Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével.* Bontsuk ezt az állítást két *ha …, akkor …* következtetésre. Hogyan nevezzük a háromszög oldalait? Hol van a derékszög?

**2009** Olvassuk el az állításokat, majd oldjuk meg az alattuk levő feladatokat.

*A*: *Ha egy négyszög paralelogramma, akkor középpontosan szimmetrikus.*

*B*: *Ha egy háromszög tengelyesen szimmetrikus, akkor szabályos.*

*C*: *Ha egy háromszög derékszögű, akkor a köré írt kör középpontja az egyik oldal felezőpontja.*

*a)* Fogalmazzuk meg az állítások megfordítását.

*b)* Döntsük el az állításokról és megfordításaikról, hogy melyik igaz, melyik hamis.

*c)* Mondjuk ki egy mondatban a *C* állítást és megfordítását. Kezdjük így: *Egy háromszög pontosan akkor …, ha …* Hogyan nevezzük a kitüntetett oldalt? Mi az állítás neve?

**2010** Bazsa Rózsa virágárus öt kosárból piros és fehér rózsákat árul. A kosarakban vegyesen vannak a virágok. *Ha ezt a kosarat eladom, akkor kétszer annyi piros rózsám marad, mint fehér* – gondolja magában. Melyik kosárra gondolt Bazsa Rózsa? (A kosarak alá a bennük levő virágok számát írtuk.)




**2011** Egy kisállat-kereskedésben a vevőnek megtetszik az egyik papagáj. A kereskedő azonnal dicsérni kezdi az állatot: *Ez a legkedvesebb madarunk. Mindent elismétel, amit csak hall.* Két héttel később azonban a vevő felháborodva hozza vissza azzal, hogy a kereskedő hazudott neki, mert folyamatosan beszél a madárhoz, de az vagy hallgat, vagy összevissza énekel. Erre persze a kereskedő kéri ki magának, hogy ő ugyan igazat mondott! Kinek van igaza?

**2012** Játsszuk a következő játékot! Készítünk gyufaszálból két kupacot, az egyikben 4, a másikban 6 szál gyufával. Az egyik játékos elvesz valamennyit az egyik kupacból, majd tesz kétszer annyit a másik kupacba. A másik játékos is ezt teszi, majd addig folytatják a műveletet egymást váltogatva, amíg egyenlő nem lesz a két kupacban a gyufák száma. (Gyakorlatilag bármennyi gyufaszál a rendelkezésükre áll.) Az nyer, akinek a lépése után a két kupacban egyenlő lesz a gyufák száma. Ki lesz a győztes: aki kezd, vagy aki másodiknak rakosgat?

**2013** Hányast kap a *mindent megtanuló diák,* ha a *megtanulhatatlan matematikából* felelteti a tanár?

**2014** Gabriella és Péter előtt van egy kupacban 100 szál gyufa. Felváltva vesznek el belőle legalább 3, legfeljebb 6 szálat. Az nyer, aki után a másik már nem tud elvenni a kupacból szabályosan. Kinek van nyerő stratégiája, ha Gabriella kezd? Mi ez a stratégia?

**2015** Gabi és Peti módosították az előbbi játék feltételeit (Gabi unta, hogy mindig veszít). Van előttük az asztalon egy kupacban 100 gyufaszál. Felváltva vesznek el belőle, de egyszerre csak 3, 4 vagy 5 szál gyufát. Az veszít, aki már nem tud szabályosan gyufát elvenni a kupacból. Segítsünk Gabinak, hogy sikerélménye legyen! Kezdjen, vagy hagyja Petit kezdeni? Hogyan játsszon, ha nyerni szeretne?

**2016** Frédi és Béni, a két kőkorszaki szaki kirándulni vitték Vilmát és Irmát a Yellowstone Nemzeti Parkba. Sokáig ott maradtak, közben besötétedett. Most éppen egy kidőlt fán kellene átkelniük minél gyorsabban – zárás után az őrök kiengedik a kardfogú tigriseket –, azonban csak egy lámpájuk van, amit nem dobálhatnak. Sajnos a fa egyszerre csak két főt bír el, lámpa nélkül pedig egyikük sem mer rajta átkelni. Hogyan oldják meg a dolgot 17 perc alatt, ha a hölgyek a legbátrabbak, legjobban





pedig Frédi fél az átkeléstől? Az átkelés Frédinek 10 percig, Béninek 5 percig, Vilmának 2 percig, Irmának 1 percig tart. Természetesen egy lassabb és egy gyorsabb illető átkelésekor a lassabb sebességével tudnak csak együtt haladni.

**2017** Az osztály a következő játékot játssza. A tanár felírja az 1, 2, 3, …, 30 számokat a táblára, majd a tanulók egyesével kimennek a táblához, és két tetszőlegesen választott számot letörölnek, visszaírva a különbségüket. Aki után az egyetlen 0 szám marad a táblán, annak a tanár beír egy ötöst. Jószívű-e a tanár?

## Skatulyaelv

**2018** Egy osztályba 36 tanuló jár. Igazoljuk, hogy van:

*a)* legalább 6 diák, akinek születésnapja a hét ugyanazon napjára esik;

*b)* legalább 2 tanuló, akinek születésnapja a hónap ugyanazon napjára esik.

**2019** Egy iskolába 618 diák iratkozott be szeptemberben. Mutassuk meg, hogy van:

*a)* legalább 2 tanuló, akik az év ugyanazon a napján születtek;

*b)* legalább 12 tanuló, akik az év ugyanazon a hetében látták meg a napvilágot.

*c)* Minimálisan hány gyereknek kellene az iskolába járni, hogy mindkét állítás igaz legyen?

**2020** A rulettkeréken 0-tól 36-ig vannak jelölve a számok. A 0 zöld színű, a többinek a fele piros, a fele fekete. Legalább hány számot válasszunk ki közülük véletlenszerűen, ha azt akarjuk, hogy biztosan legyen köztük három:

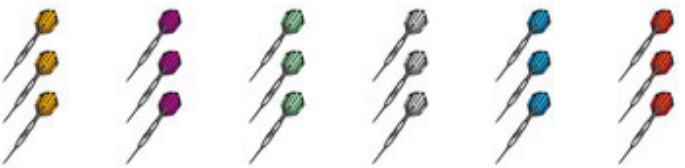
*a)* egyforma színű; *b)* különböző színű?

**2021** Télapó zsákjában 7 különböző fajta ajándék van, mindegyikből ugyanannyi darab. Legalább hány ajándékkal kelt útra, ha legkevesebb 36 darabot kell kivennie a zsákból ahhoz, hogy biztos legyen közöttük 6 egyforma játék?

**2022** Mutassuk meg, hogy öt darab 1000-nél nagyobb prímszám között van kettő, amelyeknek utolsó számjegye megegyezik.

**2023** A krampusz zsákjában összesen 30 virgács van. A virgácsok többfélék, de mindegyik fajtából ugyanannyi van. Hányféle virgácsot hozott magával a krampusz, ha ahhoz, hogy biztosan legyen köztük 3 egyforma, legalább 11-et elő kell vennie a zsákból?

**2024** A 33,5 cm átmérőjű dartstáblára egy hattagú baráti társaság dobálja az ábrán látható nyilakat, mindenki más színnel játszik. Feltételezzük, hogy a dobások mindig eltalálják a táblát, és benne is maradnak.



*a)* Mutassuk meg, hogy a táblán minden forduló után van két nyíl, amelyek legfeljebb 29 cm-re vannak egymástól. (Fordulónak vagy körnek nevezzük, ha egy játékos egymás után eldobta a saját három nyilát az üres táblára.)

Az utolsó kör végén minden játékos a táblában hagyja a nyilait.

*b)* Igazoljuk, hogy ekkor legalább két pár nyíl van, amelyek távolsága 11,9 cm-nél kisebb.



**2025** Ha megállítunk az utcán 10 embert és megkérdezzük, hogy idén a hét melyik napjára esik a születésnapjuk, akkor az alábbiak közül mire érdemes fogadnunk? (Mi az, ami biztosan teljesül?)

*a)* Lesz köztük kettő, akik ugyanazt a napot mondják.

*b)* Lesz köztük három, akik ugyanazt a napot mondják.

*c)* Lesz legalább három olyan nap, amit legalább egy fő mond.

*d)* Lesz legalább két olyan nap, amit legfeljebb egy fő mond.

**2026** Igazoljuk, hogy öt négyzetszám között vagy van öttel osztható, vagy van kettő, amelyek különbsége tízzel osztható.

**2027** Adjuk meg $n$ értékét, ha igaz rá a következő: $n$ négyzetszám között vagy van héttel osztható, vagy van köztük kettő, melyek különbsége héttel osztható.

## Sorba rendezés I. (különböző elemek)

**2028** Juli néni minden évben pontosan egy-egy sort vet az alábbi növényekből. Hány évig kertészkedhet, ha elhatározza, hogy minden évben más sorrendben ülteti egymás mellé a növénysorokat?



**2029** Hányféleképpen alkothat hatosfalat egy kézilabdacsapat pályán lévő 6 mezőnyjátékosa?

**2030** Peti kisvasutat kapott ajándékba, a készlethez egy mozdony és négy különböző kocsi járt. Hányféle sorrendben akaszthatja a mozdony után a kocsikat Peti?

**2031** Zsuzsinak tulipános, rózsás, hóvirágos és liliomos teásbögréje van, mindegyikből egy-egy darab. Hányféleképpen teheti őket sorba egymás mellé a polcra?

**2032** Peti észrevette, hogy az ajándékba kapott kisvasút négy különböző kocsiját akár a mozdony elé is kapcsolhatja. Hányféle sorrendben állíthatja össze így a mozdonyból és a négy különböző kocsiból álló szerelvényt Peti?

**2033** Robi barátom egyik polcán hat különböző film sorakozik DVD-n. Hányféle sorrendben teheti a polcra egymás mellé őket?

**2034** A hagyományos mutatós óra számlapján véletlenszerűen összekevertük a számokat, majd úgy fordítottuk a számlapot, hogy a 12-es legyen felül. Hányféle különböző számlapot kaphatunk így?

## Sorba rendezés II. (több típusba tartozó azonos elemek)

**2035** Érmegyűjtő Ernőnek az ábrán látható egyforma Lajos-aranyai és azonos Ferenc József korabeli ezüst koronái vannak. Hányféleképp teheti egymás mellé őket a vitrinben? Írjuk fel a lehetőségeket.







**2036** Hányféle sorrendben állhat a rajtvonalra négy lány és öt fiú futó a mezei futóversenyen, ha csak a nemüket vesszük figyelembe?

**2037** Hányféleképpen olvashatjuk ki az alábbi táblázatból Barnabás nevét, ha a bal felső saroktól csak jobbra és lefelé lépkedhetünk a betűkön?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| B | A | R | N | A | B |
| A | R | N | A | B | Á |
| R | N | A | B | Á | S |

**2038** Beának van három cicás, kettő kutyás és négy zsiráfos bögréje (az egyfajta bögrék egyformák). Hányféle sorrendben teheti a konyhaszekrényben egymás mellé Bea a bögréit?

**2039** Juli néni minden évben pont négy sor sárgarépát, öt sor epret és egy sor tököt ültet. Hány évig kertészkedhet, ha évente más sorrendben akarja egymás mellé ültetni a növénysorokat?

**2040** Hányféle sorrendben lehet leírni a *Badacsonytomaj* városának nevében szereplő:

*a)* mássalhangzókat; *b)* magánhangzókat; *c)* összes betűt?

A dupla mássalhangzókat egy betűnek számítjuk.

**2041** Hány különböző olyan ötjegyű számot írhatunk fel a hármas számrendszerben, melyben két egyes jegy szerepel, viszont nem szerepel zérus?

**2042** Robi DVD-gyűjteményében van négy családi vígjáték, hat sci-fi és két krimi (mind különböző).

*a)* Hányféleképpen teheti az összes filmet egymás mellé?

*b)* Hányféleképpen teheti őket sorba a polcra, ha az egyes típusú filmeket a feladat szövegében szereplő *vígjáték – sci-fi – krimi* sorrendben teszi egymás mellé?

*c)* Hányféleképpen teheti őket sorba a polcra, ha csak annyit tudunk, hogy az azonos fajta DVD-ket egymás mellé rakja?

d) Hányféleképp teheti őket egymás mellé, ha csak a filmek típusát vesszük figyelembe a sorba rakáskor? *(Ebben az esetben a kategórián belüli filmeket nem különböztetjük meg.)*

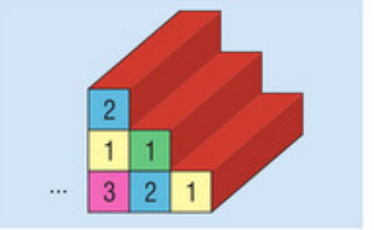
**2043** Egy kör alakú asztal mellett négy szék van: egy az ajtó felől, egy az ablak alatt, egy a fal mellett és egy a kandalló előtt. Számoljuk ki, hányféleképp foglalhat helyet az asztal körül négy fő, ha:

*a)* figyelembe vesszük, hogy ki ül az ajtó, az ablak, a fal, illetve a kandalló felől.

*b)* csak az asztal melletti sorrendjüket vesszük figyelembe valamilyen körbejárás szerint.

*c)* csak annyit veszünk figyelembe, hogy ki kinek a szomszédja.

**2044** Az ábrán látható „számlépcsőt” a pontok irányába akármeddig folytathatjuk. Minden téglájába egy pozitív egész számot írunk: jobbról balra az első fok téglájába az 1, a második oszlop két téglájába az 1, 2; a harmadik oszlop három téglájába az 1, 2, 3 számokat és így tovább. Az oszlopokon belül mi döntünk, hogy melyik szám melyik téglába kerüljön.




Hányféleképp számozhatjuk a téglákat, ha a lépcsőnek:

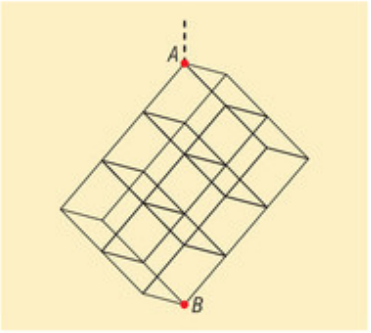
*a)* három foka; *b)* négy foka;

*c)* $n$ foka van, ahol $n$ pozitív egész?

**2045** Ernő nemrég kezdett érméket gyűjteni, eddig csupa különböző érméje van. Legutóbbi találkozásunkkor a következő kijelentést tette: *Ha még kettő, az eddigiektől és egymástól is különböző érmét megszerzek, akkor 20-szor többféleképpen tudom őket a vitrinben, sorba egymás mellé tenni, mint most.* Hány darabos gyűjteménye van érmegyűjtő Ernőnek?



**2046** Peti szobájában, az egyik sarkánál fogva, az ábrán látható hurkapálcából készült rács lóg a plafonról. Egy kis katicabogár a szaggatottal jelölt kötélen mászik le. Elérve a rácsot az $A$ csúcsban megpihen, majd választ a lefelé vivő lehetőségek közül. Minden rácspontban ugyanezt teszi. Hány különböző úton juthat le $A$-ból $B$-be, ha lefelé haladva mindig közelebb kerül a $B$ csúcshoz?




**2047** A vurstliban a körhinta tetejét fedő vászon úgy készült, hogy a nagy, kör alakú vásznat $n$ darab sorszámozott, egybevágó körcikkre osztották, majd $n$ számú különböző színű festékkel megfestették az egyes részeket. Hányféleképpen színezhették a vásznat, ha:

*a)* figyelembe vették, hogy az első, második, …, $n$-edik körcikkben milyen szín szerepel?

*b)* csak a színek sorrendjét vették figyelembe adott körüljárás szerint?

*c)* csak azokat az eseteket tekintették különbözőnek, ahol legalább egy szín legalább egy szomszédja más, mint a többi esetben?

**2048** Egy kilenc fokú lépcsőn szaladunk fel: a lépcsőfokokat vagy egyesével, vagy kettesével szedjük. Hányféleképp mehetünk fel a lépcsőn az egyes és kettes lépések sorrendjét figyelembe véve?

**2049** Érmegyűjtő Ernő már három egyforma Lajos-arany boldog tulajdonosa. Az interneten alkudozik néhány egyforma, ám az övétől különböző Lajos korabeli érmére. Nem tudja pontosan, hogy hány darabra számíthat, csak ennyit írt az eladó sejtelmesen neki: *A meglévőkkel együtt 84-féleképpen teheti majd sorba egymás mellé a vitrinben a Lajosokat.* Hány arannyal gazdagodik Ernő gyűjteménye, ha nyélbe ütik az üzletet?

**2050** Kriszta jó időben a kerti grillen süti a vacsorát: csirkemellfilé-, szalonna- és gyümölcskockákat húz nyársra, egy pálcikára mindig 8-at.

*a)* Hányféle sorrendben állíthat össze egy nyársat az említett ételekből, ha mindhárom összetevőt használja és legalább 4 darab csirkemellkockát szeretne feltűzni?

Tételezzük fel, hogy Kriszta nagyon sok főre készíti a nyársakat.

*b)* Hány darab csirkemell-, szalonna- és gyümölcskockát kell vágnia, ha az összes, a fenti feltételeknek megfelelő nyársat el akarja készíteni? Hány kilogrammot kell vennie az egyes ételekből, ha minden ételdarabka tömege 10 gramm? *(Az azonos fajta ételek kockáit azonosnak tekintjük. Az egyes darabokat sorban egymás után tűzzük a pálcára.)*

**2051** *a)* Legyen $A = \{$minden pozitív egész $n$ esetén $n$ különböző elem összes különböző sorba rendezései számának utolsó jegye$\}$. Mennyi az $A$ halmaz elemszáma?

*b)* Az $f$ függvény hozzárendelési szabálya $f\colon \mathbb{Z}^+ \to A$, $f$ $n$-hez rendeli az $n$ különböző elem összes különböző sorba rendezései számának utolsó számjegyét. Ábrázoljuk az $f$ függvényt.

**2052** Egy $n$ egység magas számlépcsőt egymás mellé épített, mindig eggyel több téglából álló oszlopok alkotnak, a $k$. oszlopban $1, 2, \ldots, k$ darab egymásra tett téglával (mint a 2044. feladatban). Az egyes oszlopok tégláiba rendre az 1; az 1, 2; az 1, 2, 3; …; végül az $1, 2, \ldots, n$ számokat írjuk valamilyen sorrendben.

*a)* Hány téglából áll az $n$ fokú számlépcső?

*b)* Mennyi az $n$ értéke, ha tudjuk, hogy a lehetséges téglaszámozások száma pontosan 5 nullára végződik?

*c)* Van-e olyan $n$ érték, amelyre a fenti válasz pontosan 6 nullára végződik?





## Kiválasztás és sorba rendezés I. (különböző elemek)

**2053** A televízió-stúdióban öten jelentkeznek egy játékra a közönség soraiból: Alfréd, Bettina, Cecília, Dániel és Erik. Ötük közül végül két főt választanak ki, és őket a díszlet előtt egymás mellé állítják. Hányféleképp alakulhat a kint állók sorrendje? Írjuk fel a kialakuló párokat.

**2054** Edina délután öt vendéget vár, akiket egy hosszú lócára fog leültetni a kerti lugasban. Hogy ne fázzanak meg, a kilenc különböző mintájú párnájából tesz a lócára ötöt. Hányféleképpen helyezheti el a párnákat a padon?

**2055** Egy pénzintézet három részből álló logójában az oldalt látható színekből akarnak használni hármat: más és más színű a háttér, a felirat és a madár szeme. A grafikus az összes lehetséges összeállítást elkészíti. Hány mintát nyújt át a megrendelőnek?




**2056** A motorverseny egyik futamán huszonegy versenyző indult.

*a)* Hányféle sorrend alakulhatott ki a verseny végére, ha közben senki sem esett ki, és nem volt holtverseny?

*b)* Hányféleképpen állhattak volna a dobogóra a versenyzők közül hárman, ha véletlenszerűen alakul ki a végeredmény és nincs holtverseny?

**2057** Az online levelező rendszer csak akkor enged használni egy jelszót, ha az pontosan 7 különböző karaktert tartalmaz (a karakter lehet számjegy, vagy a 26 betűs angol ábécé betűje; a kis- és nagybetűket nem különböztetik meg). Hány különböző jelszó készíthető ilyen feltételekkel?

**2058** Az autóverseny 20 indulójából csak az első nyolc beérkező kap pontot: az első tízet, a második nyolcat, a harmadik hatot, a negyediktől kezdve pedig minden következő eggyel kevesebbet. Hányféleképpen kaphatják meg a pontokat a versenyzők, ha nincs holtverseny és minden versenyző célba ér?

**2059** Az egyórás rádióműsorban a 10 perc beszélgetést mindig másik 2 perces zeneszám követi. A szerkesztő 30 számból válogathat. Hányféle sorrendben játszhatnak le zenéket a mai műsorban, ha egy rövidebb zenével kezdenek és egy rövidebb zenével fejezik be az adást?

**2060** A *FUVOLÁS* szó betűiből kisorsolunk négyet, és egymás után írjuk őket. Hányféle különböző betűsort kaphatunk így?

## Kiválasztás és sorba rendezés II. (lehetnek azonos elemek is)

**2061** A piacon az egyik árus minden reggel kitesz öt szem gyümölcsöt a mérlege elé. Ezek lehetnek meggy, cseresznye vagy szőlőszemek, akár mind ugyanaz is. Hányféle sorrendben teheti ki portékáját a mérleg elé?

**2062** Az ábrán látható egyszerű számzár minden tárcsája 1-től 9-ig van számozva. Hány különböző beállítás lehetséges ezen a záron?




**2063** Gábor elfelejtette, hogy kémiából dolgozatot írnak. A 7 kérdés mindegyikére *A*, *B* vagy *C* válasz közül kellett választani egyet. Hányféleképpen tölthette ki Gábor véletlenszerűen a tesztet?



**2064** Pistának van egy *POCAK* nevű kis üzlete az utcában. Hogy jobban felhívja rá a figyelmet, az ábrán látható fényreklámot készíttette. A reklámban a betűk a *P*-től indulva sorban, de véletlenszerűen jobbra vagy lefelé haladva villannak fel. Hány különböző úton futhat le a fényreklám?

P O C A K
O C A K
C A K
A K
K

**2065** A rulettkeréken 0-tól 36-ig szerepelnek az egész számok. Egyik este Laci a rulettasztal mellett állva titokban ötös csoportokba rendezve feljegyzi a pörgetések eredményeit. Hány különböző ötös csoportot vethet papírra Laci?

**2066** Egy dobókockával addig dobunk, míg prímszámot nem kapunk. A kapott prímet feljegyezzük. Ezt megismételjük még háromszor, a prímeket sorban egymás után írva. Hány különböző négyjegyű szám lehet az eljárás eredménye?

**2067** Hány különböző négyjegyű számot írhatunk fel hármas számrendszerben, ha nincs a felhasznált jegyek között a zérus?

**2068** Pille Panna osztályfőnök a 28 fős 9/D osztályban. Ki szeretné osztani az osztálytitkár, gazdasági felelős, kultúrfelelős és sportos tisztségeket. Ehhez egy kalapban összegyűjti minden diák nevét, majd:

*a)* visszatevés nélkül; *b)* visszatevéssel

húzat a kalapból minden tisztségre egy főt. Hányféleképpen alakulhat az osztályban a „vezetők" személye az említett módszerekkel?

**2069** *a)* Egy négytárcsás számzár minden tárcsáján 0-tól 6-ig vannak jelölve a számok. Hányféle különböző beállítás lehetséges?

*b)* Hány különböző négyjegyű pozitív egész képezhető a 0, 1, …, 6 jegyekből? Egy számjegyet többször is felhasználhatunk.

**2070** Gabi, Peti, Tomi, Eszter és Csabi fagyizni mennek. Mindegyikük csupán egy gombócot kér a cukrászda 20 különböző ízű fagylaltjából (jó nagy gombócot mérnek). Hányféleképpen rendelhetnek, ha a fenti sorrendben járulnak a pulthoz és:

*a)* mindannyian más ízű fagylaltot kérnek;

*b)* vannak legalább ketten, akik egyforma ízű fagylaltot kérnek?

**2071** *a)* Hány olyan 6 jegyű szám képezhető a tízes számrendszerben, amelyben van legalább két egyforma számjegy?

*b)* Hány olyan 12 jegyű szám képezhető a hatos számrendszerben, amelyben van legalább két egyforma számjegy?

*c)* Hány olyan 6 jegyű szám képezhető a tizenkettes számrendszerben, amelyben nincs két egyforma számjegy?

**2072** Magyarországon 1994-ig az ábrán látható rendszámtáblatípust használták. A betűkhöz az angol ábécé 26 betűjét, a számokhoz a 0, 1, 2, …, 9 jegyeket használták fel. Manapság a három betű és három szám formát használjuk: AAA-000.




*a)* Legfeljebb hány különböző rendszámot adhattak ki régebben hazánkban?

*b)* Mondjuk meg a mai érték pontos meghatározása nélkül, hogy hányszorosára növekedett az érvényes rendszámok száma a változtatással.

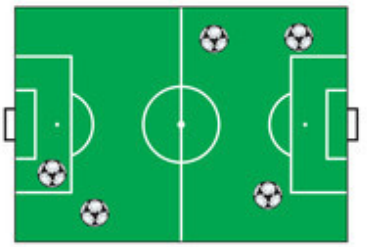




**2073** Érmegyűjtő Ernőt életében először meghívták egy olyan kiállításra, ahol néhány érmèjét ő is bemutathatja. Ernőnek 15 olyan különböző érméje van, amely az adott korszakból származik, de ezek közül csak néhányat állíthat ki. Így zsörtölődött: *Ha megengednék, hogy eggyel több érmét állítsak ki, 12-szer annyiféleképp tudnám őket sorba rakni, mint így.* Hány érmét állíthat ki Ernő ezen a kiállításon?

**2074** Egy távoli bolygó távoli kis országában – ahol angol ábécét és arab számjegyeket, 10-es számrendszert használnak – most vezetik be a rendszámot a bolygóközi űrhajókra. A magyarországihoz hasonló három betű és három szám formát fogják alkalmazni. Hány betűt és hány számjegyet használjanak fel, ha pontosan 8000 űrhajóra való rendszámot akarnak előállítani?

**2075** A nagypályás focimeccs első félidejében a hazai játékosok az ábrán jelzett helyekről végeztek el egy-egy szabadrúgást. Hányféleképpen végezhették ezeket sorban egymás után a játékosok, ha legalább egy szabadrúgást a kapus rúgott? *(A kapus akár az összeset is rúghatta, mint bármelyik csapattársa. Mindkét csapatban 11 játékos játszott, csere nem volt az első félidőben.)*



**2076** A labdarúgó-mérkőzés második félidejében a vendégegyüttes mezőnyjátékosai időrendben 7 szögletet rúgtak. Nem tudjuk pontosan, de Bekkem Dávid ezek közül legfeljebb 5-öt rúgott. Hányféle sorrendben rúghatták a szögleteket a vendégegyüttes játékosai ennyi információ alapján? *(A második félidőt 10 mezőnyjátékos játszotta végig a vendégcsapatban.)*

**2077** Kriszta grillen süti a vacsorát. Rájött, hogy egy nyárson csak 7 ételkocka fér el: csirkemell-, szalonna- vagy gyümölcskockák. Hányféle sorrendben állíthat össze egy nyársat, ha legfeljebb 4 csirkemellkockát szeretne rá felfűzni? *(Akár azt is megengedve, hogy egy nyárson csak egyféle étel legyen. Az egyes ételdarabokat sorban egymás után tűzi a pálcára.)*

## Vegyes feladatok

**2078** Fogalmazzunk meg következtető mondatot, amelyben a madarak csicsergése:

*a)* szükséges; *b)* elégséges; *c)* szükséges és elégséges

feltétele a tavasznak.

**2079** Adjunk meg szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltételeket arra vonatkozóan, hogy:

*a)* egy sokszög négyzet; *b)* egy szám osztható 12-vel.

**2080** A fogorvosi rendelő 7:30-kor nyitott. Most háromnegyed nyolc van és 17-en várakoznak. Bizonyítsuk be, hogy volt két páciens, akiknek az érkezése között nem telt el egy perc.

**2081** Hányféleképpen írhatjuk fel egy kör mentén sorban a magyar ábécé rövid magánhangzóit?

**2082** Egy tíz számot tartalmazó CD-t hallgatunk. Hányféle sorrendben csendülhetnek fel a zeneszámok, ha véletlenszerű sorrendet állítottunk be a lejátszón?

**2083** Hányféleképp írhatjuk le az *ÖKÖRKÖR* szó betűit?

**2084** Egy közös kiránduláson három egypetéjű ikerpár sorakozik fel egy fényképhez. Hányféle sorrendet különböztethet meg az, aki csak felületesen ismeri az ikreket?



**2085** Egy osztály tagjairól a következőket tudjuk. Egyrészt ha a hét adott napján (pl. kedden) született valaki az osztályból, akkor azon a napon (kedden) még pontosan hat osztálytársa látta meg a napvilágot. Másrészt akárhogyan is választunk ki öt főt, biztosan lesznek ketten, akik ugyanazon a napon születtek. Hány fős az osztály?

**2086** A magyar kártya 4 színt, és színenként 4 különböző számozott és 4 különböző figurás kártyalapot tartalmaz. Hányféleképpen tehetjük sorba a 32 darabos magyar kártyacsomag lapjait, ha:

*a)* minden lapot figyelembe veszünk külön-külön;

*b)* csak a színeket vesszük figyelembe;

*c)* a figurákat és a számokat vesszük figyelembe?

**2087** Egy szöcske egy háromszög mellett várakozik. Egyszer csak ráugrik a háromszög egyik csúcsára, majd még hétszer ugrál a csúcsokon. Hányféle sorrendben ugrálhat a csúcsokon, ha:

*a)* ugyanarra a csúcsra is visszaérkezhet, amiről elugrott?

*b)* sosem ugrik vissza arra a csúcsra, amin éppen tartózkodott?

**2088** Egy kosaras edzés után gyakorolja a büntetődobást. Tíz alkalommal dob rá, minden dobása 50%-os eséllyel talál célba. Ha egy külső szemlélő felírná, hogy az egyes dobások sikerültek vagy sem, hányféle jelsorozatot kaphatna?

**2089** Egy 30 fős osztályban mindenki vesz pontosan egy tombolajegyet, ám csak 6 különböző ajándék van. Hányféleképp érhet véget a sorsolás?

**2090** Új játékot állítottak be a céllövöldében: egy kör alakú korongból 10 hurkapálca áll ki, mindegyik végén más és más ajándékkal. A korong forog, így kell a hurkapálcákat eltalálni. Gábornak ma hatalmas szerencséje van, mert négy lövéssel eltalált négy ajándékot. Hányféle sorrendben lőhette ki az ajándékokat?

**2091** Egy cukrászda hűtőpultjában már csak 12 darab, különböző sütemény található. Az egyik vendég néhány, de minimum egy süteményt kér belőlük egy keskeny tálcára, amelyre legfeljebb 4 darab fér egymás mellé. Hányféle sorrendben kerülhetnek a sütemények a hűtőpultból a keskeny tálcára?

# 10.2. A GYÖKVONÁS

## Racionális számok, irracionális számok

**2092** Írjuk fel tizedes tört alakban a következő számokat:

*a)* $\frac{21}{8}$; *b)* $\frac{37}{16}$; *c)* $\frac{29}{6}$; *d)* $\frac{7}{12}$; *e)* $\frac{5}{11}$; *f)* $\frac{10}{7}$;

*g)* $\frac{20}{13}$; *h)* $\frac{5}{17}$.

**2093** Írjuk fel két egész szám hányadosaként a következő tizedes törteket:

*a)* 0,764; *b)* 2,1973; *c)* $2,\dot{5}$; *d)* $4,\dot{1}\dot{7}$; *e)* $0,\dot{7}6\dot{4}$; *f)* $0,76\dot{4}$;

*g)* $0,7\dot{6}\dot{4}$; *h)* $3,\dot{1}53\dot{4}$; *i)* $5,\dot{9}$.

**2094** Bizonyítsuk be, hogy a következő számok irracionálisak:

*a)* $\sqrt{5}$; *b)* $\sqrt{3}+2$; *c)* $1+\sqrt{5}$; *d)* $3-\sqrt{3}$; *e)* $\sqrt{15}$.

**2095** A számegyenesen szerkesszük meg a következő számok helyét:

*a)* $\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt{5}$; *c)* $\sqrt{15}$; *d)* $\sqrt{24}$; *e)* $\sqrt{11}-2$; *f)* $3-\sqrt{3}$;

*g)* $2-\frac{\sqrt{7}}{2}$; *h)* $\sqrt{60}$; *i)* $\sqrt{2009}$.

**2096** Adjunk meg négy olyan irracionális számot, amelyek csak az 1, 2 és 3 számjegyeket tartalmazzák és értékük:

*a)* 1 és 2 között van; *b)* 10 és 20 között van; *c)* nagyobb 30-nál.

**2097** Számoljuk ki, hogy milyen számjegy áll a következő törtek tizedes tört alakjában a tizedes vessző után a 2009. helyen:

*a)* $\frac{41}{16}$; *b)* $\frac{11}{3}$; *c)* $\frac{13}{6}$; *d)* $\frac{5}{9}$; *e)* $\frac{25}{7}$; *f)* $\frac{12}{17}$.

**2098** Adjunk meg három racionális és két irracionális számot, amelyek 5,99 és 6 között vannak.

**2099** Döntsük el, hogy mely állítások igazak és melyek hamisak.

*a)* Két racionális szám összege mindig racionális.

*b)* Két irracionális szám összege mindig irracionális.

*c)* Két racionális szám szorzata mindig racionális.

*d)* Két racionális szám szorzata lehet egész szám.

*e)* Két irracionális szám szorzata mindig irracionális.

*f)* Van két olyan irracionális szám, melyek szorzata egész szám.

*g)* Egy racionális és egy irracionális szám összege mindig irracionális.

*h)* Van olyan racionális szám, melynek reciproka irracionális.

*i)* Van olyan irracionális szám, amelynek tizedes tört alakjában egy jegytől kezdve csak nullák állnak.




## A négyzetgyökvonás azonosságai, alkalmazásaik

**2100** Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, melyen az alábbi kifejezések értelmezhetők:

*a)* $\sqrt{2x-1}$; *b)* $\sqrt{2x}-1$; *c)* $\sqrt{-x}$; *d)* $\sqrt{6-4x}$;

*e)* $\sqrt{6}-4x$; *f)* $\sqrt{2x-3}+\sqrt{1-x}$; *g)* $\sqrt{\dfrac{5x-1}{x+3}}$; *h)* $\dfrac{\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+3}}$;

*i)* $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+3}$; *j)* $\sqrt{(x-2)\cdot(x+3)}$; *k)* $\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{x^2+5}$.

**2101** Végezzük el a következő műveleteket:

*a)* $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; *c)* $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}$; *d)* $\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$;

*e)* $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$; *f)* $\sqrt{75}\cdot\sqrt{3}$; *g)* $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$; *h)* $\sqrt{45}\cdot\sqrt{5}$;

*i)* $\dfrac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{3}}$; *j)* $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5^3}$; *k)* $\sqrt{2^5}\cdot\sqrt{2^3}$; *l)* $\dfrac{\sqrt{7^3}}{\sqrt{7^5}}$;

*m)* $\sqrt{7^3}\cdot\sqrt{7^5}$; *n)* $(\sqrt{11})^3\cdot\sqrt{11}$; *o)* $\dfrac{(\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3})^3}$; *p)* $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{8}-\sqrt{2})$;

*q)* $\sqrt{3}\cdot(\sqrt{27}+\sqrt{3})$.

**2102** A műveletek elvégzésével döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb:

*a)* $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}$ vagy $\sqrt{15}\cdot\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt{11}\cdot\sqrt{7}$ vagy $\sqrt{6}\cdot\sqrt{13}$;

*c)* $\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}$ vagy $\dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{2}}$; *d)* $\dfrac{\sqrt{140}}{\sqrt{7}}$ vagy $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}$;

*e)* $\dfrac{\sqrt{65}}{\sqrt{5}}$ vagy $\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}$; *f)* $\dfrac{\sqrt{180}}{\sqrt{6}}$ vagy $\dfrac{\sqrt{150}}{\sqrt{5}}$;

*g)* $\dfrac{\sqrt{184}}{\sqrt{8}}$ vagy $\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}}$; *h)* $\dfrac{(\sqrt{3})^5}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ vagy $\sqrt{\dfrac{18}{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5^3}}{\sqrt{15}}$;

*i)* $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{27}}\cdot\sqrt{\dfrac{6^3}{128}}\cdot\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{10}}$ vagy $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\dfrac{15^3}{135}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{125}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3^3}}$.

**2103** Végezzük el a következő műveleteket:

*a)* $\sqrt{5-\sqrt{21}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{21}}$; *b)* $\sqrt{\sqrt{29}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{29}-2}$;

*c)* $\sqrt{7+\sqrt{24}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{24}}$; *d)* $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{19}+\sqrt{3}}$;

*e)* $\sqrt{\sqrt{31}-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{31}+\sqrt{6}}$; *f)* $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$;

*g)* $\left(\sqrt{8-\sqrt{15}}+\sqrt{8+\sqrt{15}}\right)^2$; *h)* $\left(\sqrt{11+\sqrt{21}}-\sqrt{11-\sqrt{21}}\right)^2$;

*i)* $\left(\sqrt{15-\sqrt{56}}+\sqrt{\sqrt{56}+15}\right)^2$; *j)* $\left(\sqrt{\sqrt{89}-\sqrt{8}}-\sqrt{\sqrt{89}+\sqrt{8}}\right)^2$;

*k)* $\left(\sqrt{\sqrt{41}-\sqrt{5}}-\sqrt{\sqrt{41}+\sqrt{5}}\right)^2$.

**2104** Végezzük el a következő műveleteket:

*a)* $(\sqrt{6}+3)\cdot(2+3\cdot\sqrt{6})$;
*b)* $(2\cdot\sqrt{2}-1)\cdot(3+\sqrt{2})$;
*c)* $(\sqrt{10}+3)\cdot(\sqrt{10}-3)$;
*d)* $(\sqrt{13}-1)\cdot(\sqrt{13}+1)$;
*e)* $(\sqrt{17}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{17}+\sqrt{3})$;
*f)* $(4\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{7})\cdot(4\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{7})$;
*g)* $(3\cdot\sqrt{2}-4)^2$;
*h)* $(6+2\cdot\sqrt{3})^2$;
*i)* $(5-2\cdot\sqrt{5})^2$;
*j)* $(\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{3})^2$.

**2105** A kifejezések átalakításával döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb:

*a)* $5\cdot\sqrt{3}$ vagy $6\cdot\sqrt{2}$;
*b)* $6\cdot\sqrt{3}$ vagy $7\cdot\sqrt{2}$;
*c)* $10\cdot\sqrt{5}$ vagy $9\cdot\sqrt{6}$;
*d)* $3\cdot\sqrt{11}$ vagy $2\cdot\sqrt{23}$;
*e)* $3\cdot\sqrt{8}$ vagy $6\cdot\sqrt{2}$;
*f)* $8\cdot\sqrt{7}$ vagy $15\cdot\sqrt{2}$;
*g)* $\frac{\sqrt{72}}{6}$ vagy $\frac{\sqrt{200}}{10}$;
*h)* $\frac{\sqrt{120}}{4}$ vagy $\frac{\sqrt{190}}{5}$;
*i)* $\frac{\sqrt{70}}{10}$ vagy $\frac{\sqrt{6}}{3}$;
*j)* $\frac{\sqrt{21}}{3}$ vagy $\frac{2\cdot\sqrt{15}}{5}$.

**2106** Végezzük el a következő műveleteket:

*a)* $\sqrt{72}-\sqrt{32}-\sqrt{8}$;
*b)* $\sqrt{48}-\sqrt{27}+\sqrt{75}$;
*c)* $\sqrt{125}-\sqrt{45}-\sqrt{20}$;
*d)* $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{98}$;
*e)* $\sqrt{12}+\sqrt{108}-\sqrt{147}$;
*f)* $(\sqrt{27}+\sqrt{2}-\sqrt{12})\cdot(\sqrt{8}+\sqrt{3}-\sqrt{18})$;
*g)* $(\sqrt{80}-\sqrt{3}-\sqrt{45})\cdot(\sqrt{75}+\sqrt{5}-\sqrt{48})$;
*h)* $(\sqrt{98}+\sqrt{108}-\sqrt{8}-\sqrt{147})\cdot(\sqrt{32}-\sqrt{48}+\sqrt{75}+\sqrt{2})$;
*i)* $(\sqrt{180}+\sqrt{112}-\sqrt{45}-\sqrt{28})\cdot(\sqrt{63}-\sqrt{20}-\sqrt{175}+\sqrt{125})$;
*j)* $(4\cdot\sqrt{a}-6\cdot\sqrt{9a}+7\cdot\sqrt{a}+5\cdot\sqrt{4a})$, $a\geq 0$;
*k)* $(5\cdot\sqrt{12y}-2\cdot\sqrt{300y}+3\cdot\sqrt{75y}-5\cdot\sqrt{3y})$, $y\geq 0$;
*l)* $(2\cdot\sqrt{50x}+\sqrt{18x}+3\cdot\sqrt{2x}-\sqrt{8x})$, $x\geq 0$.

**2107** Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét:

*a)* $\frac{4}{\sqrt{5}}$;
*b)* $\frac{9}{\sqrt{2}}$;
*c)* $\frac{12}{\sqrt{3}}$;
*d)* $\frac{21}{\sqrt{7}}$;
*e)* $\frac{3}{2\cdot\sqrt{6}}$;
*f)* $\frac{6}{5\cdot\sqrt{3}}$;
*g)* $\frac{14}{3\cdot\sqrt{7}}$;
*h)* $\frac{13}{3\cdot\sqrt{10}}$;
*i)* $\frac{y}{\sqrt{x}}$;
*j)* $\frac{5x}{2\cdot\sqrt{x}}$;
*k)* $\frac{a}{3\cdot\sqrt{y}}$;
*l)* $\frac{y}{5\cdot\sqrt{y}}$.

**2108** Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét:

*a)* $\frac{8}{\sqrt{5}+2}$;
*b)* $\frac{12}{\sqrt{3}-1}$;
*c)* $\frac{15}{2-\sqrt{7}}$;
*d)* $\frac{10}{\sqrt{6}+1}$;
*e)* $\frac{22}{2\cdot\sqrt{3}-1}$;
*f)* $\frac{11}{3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{17}}$;
*g)* $\frac{10}{4\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{3}}$;
*h)* $\frac{67}{5\cdot\sqrt{7}-6\cdot\sqrt{3}}$;
*i)* $\frac{2\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{2}}$;
*j)* $\frac{5}{\sqrt{x}+1}$;
*k)* $\frac{a}{\sqrt{a}-1}$;
*l)* $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

**2109** Végezzük el a következő műveleteket:

*a)* $\frac{3\cdot\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}-\frac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

*b)* $\frac{5+4\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{2-2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$;

*c)* $\frac{4-2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}}+\frac{3\cdot\sqrt{5}-1}{2\cdot\sqrt{5}}$;

*d)* $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$;

*e)* $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$;

*f)* $\frac{3\cdot\sqrt{2}+4}{3\cdot\sqrt{2}-4}+\frac{3\cdot\sqrt{2}-4}{3\cdot\sqrt{2}+4}$;

*g)* $\frac{4+\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}+3}+\frac{\sqrt{5}-4}{2\cdot\sqrt{5}-3}$;

*h)* $\frac{2}{\sqrt{a}-1}+\frac{1}{\sqrt{a}+1}$;

*i)* $\frac{2}{x-1}-\frac{3}{\sqrt{x}-1}+\frac{5}{\sqrt{x}+1}$;

*j)* $\frac{3\cdot\sqrt{y}-2}{\sqrt{y}+1}-\frac{y+1}{y-1}-\frac{2\cdot\sqrt{y}-4}{\sqrt{y}-1}$.

**2110** A négyzetgyök alá vitellel írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket. (A változók pozitívak.)

*a)* $3\cdot\sqrt{\frac{5}{9}}$;

*b)* $5\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}$;

*c)* $0{,}1\cdot\sqrt{10}$;

*d)* $(\sqrt{7}-1)\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1}}$;

*e)* $x\cdot\sqrt{x}$;

*f)* $y^2\cdot\sqrt{y}$;

*g)* $2a^2\cdot\sqrt{3ab}$;

*h)* $b\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$;

*i)* $\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{b}}$.

**2111** Melyik szám a nagyobb?

*a)* $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ vagy $2\cdot\sqrt{6}$;

*b)* $3\cdot\sqrt{3}$ vagy $\frac{7}{\sqrt{12}-\sqrt{5}}$.

**2112** Végezzük el a következő műveleteket:

*a)* $\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})\cdot(20-2\cdot\sqrt{84})}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$;

*b)* $\left(\frac{6}{\sqrt{5}+2}+\frac{2}{\sqrt{20}-4}\right)\cdot(10+7\cdot\sqrt{5})$.

**2113** Számítsuk ki a következő kifejezések értékét, ha $x=\frac{1}{5}$:

*a)* $\frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$;

*b)* $\frac{3\cdot\sqrt{x}+1}{2\cdot\sqrt{x}-5}+\frac{3\cdot\sqrt{x}-1}{5+2\cdot\sqrt{x}}$.

**2114** Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget:

$$\frac{125+51\cdot\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}=\left(\frac{1}{5-2\cdot\sqrt{6}}\right)^2.$$

**2115** Mely valós $x$ értékek esetén igaz, hogy:

*a)* $\sqrt{4x^2-12x+9}=2x-3$;

*b)* $\sqrt{4x^2-12x+9}=3-2x$.

**2116** Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza $\sqrt{2x+1}$ és $\sqrt{2x\cdot(2x+1)}$, ahol $x\in\mathbb{N}^+$.

*a)* Mekkorák a háromszög oldalai, ha $x=4$?

*b)* Mekkora a háromszög átfogója, ha $x=7$?

*c)* Bizonyítsuk be, hogy a háromszög átfogójának hossza mindig pozitív egész szám lesz.

**2117** Közelítő értékek alkalmazása nélkül állapítsuk meg, hogy az $A$, illetve $B$ szám közül melyik a nagyobb, ha:

*a)* $A=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ és $B=\dfrac{\sqrt{20}-\sqrt{8}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

*b)* $A=\sqrt{50}-\sqrt{12}$ és $B=\dfrac{20-\sqrt{96}}{\sqrt{8}}$;

*c)* $A=\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ és $B=\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

**2118** Átalakításokkal mutassuk meg, hogy:

$$\sqrt{35+2\cdot\sqrt{34}}-\sqrt{35-2\cdot\sqrt{34}}=2.$$

**2119** Számítsuk ki a kifejezések helyettesítési értékét a változók adott értéke esetén:

*a)* $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}$, ha $a=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ és $b=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$;

*b)* $\dfrac{1+a}{1+\sqrt{1+a}}+\dfrac{1-a}{1-\sqrt{1-a}}$, ha $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**2120** A változók mely értékei esetén értelmezettek a következő kifejezések? Hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket.

*a)* $\dfrac{a^2\cdot b\cdot\sqrt{b}-\sqrt{a^2\cdot b^5}}{a\cdot(b-a)^2\cdot\sqrt{b^3}}$;

*b)* $\dfrac{a-\sqrt{a}-2}{a-5\cdot\sqrt{a}+6}$;

*c)* $\dfrac{\dfrac{a\cdot\sqrt{a}+b\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}}{a-b}+\dfrac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

*d)* $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$.

**2121** Zsebszámológép használata nélkül végezzük el a következő gyökvonást:

$$\sqrt{1+2006\cdot\sqrt{1+2007\cdot\sqrt{1+2008\cdot\sqrt{1+2009\cdot2011}}}}.$$

**2122** Fejezzük ki $a$-val és $b$-vel az:

*a)* $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{x-7}$ kifejezést, ha $x=\dfrac{a^4+20a^2+16}{4a^2}$ és $0<a\le 2$;

*b)* $g(x)=\dfrac{b}{x}-\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}$ kifejezést, ha $x=\dfrac{a^2+b^2}{2b}$ és $a>0$, $b>0$;

*c)* $h(x)=\dfrac{2\cdot\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ kifejezést, ha $x=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$ és $a>0$.

**2123** Mely pozitív egész $n$ értékekre teljesül:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=9.$$

**2124** Hány olyan $x$ valós szám van, amelyre a valós számok halmazán értelmezett alábbi függvény értéke egész szám?

$$f(x)=\sqrt{x^2+100}-\sqrt{x^2+1}.$$



## Számok *n*-edik gyöke, a gyökvonás azonosságai

**2125** Mennyi a következő gyökvonások eredménye?

*a)* $\sqrt[3]{27}$; *b)* $\sqrt[7]{-1}$; *c)* $\sqrt[5]{-32}$; *d)* $\sqrt[3]{-64}$;

*e)* $\sqrt[4]{81}$; *f)* $\sqrt[4]{625}$; *g)* $\sqrt[4]{10000}$; *h)* $\sqrt[3]{343}$;

*i)* $\sqrt[3]{-343}$; *j)* $\sqrt[6]{1000000}$; *k)* $\sqrt[3]{-1000000}$; *l)* $\sqrt[8]{256}$;

*m)* $\sqrt[4]{256}$; *n)* $\sqrt[10]{1024}$; *o)* $\sqrt[5]{-1024}$; *p)* $\sqrt[4]{4096}$;

*q)* $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$; *r)* $\sqrt[5]{-\frac{32}{243}}$; *s)* $\sqrt[3]{-0{,}001}$; *t)* $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$;

*u)* $\sqrt[3]{0{,}027}$; *v)* $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$; *w)* $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$.

**2126** Végezzük el a következő műveleteket:

*a)* $\sqrt[3]{x^3}$; *b)* $\sqrt[6]{a^6}$; *c)* $\sqrt[7]{b^7}$; *d)* $\sqrt[3]{(-x)^3}$;

*e)* $\sqrt[4]{(-x)^4}$; *f)* $\sqrt[3]{x^6}$; *g)* $\sqrt[3]{x^{21}}$; *h)* $\sqrt[5]{x^{15}}$;

*i)* $\sqrt[6]{x^{24}}$; *j)* $\sqrt[8]{a^{16}}$; *k)* $\sqrt[4]{x^{20}}$; *l)* $\sqrt[6]{x^{30}}$;

*m)* $\sqrt[3]{-64x^{15}}$; *n)* $\sqrt[9]{(3x)^{27}}$; *o)* $\sqrt[4]{25\sqrt[5]{x^{100}}}$.

**2127** Zsebszámológép használata nélkül végezzük el a következő műveleteket ($x$, $y$, $a$, $b > 0$):

*a)* $\sqrt[3]{45 \cdot 75}$; *b)* $\sqrt[5]{972} \cdot \sqrt[5]{8}$; *c)* $\sqrt[4]{8 \cdot 36} \cdot \sqrt[4]{36 \cdot 2}$; *d)* $\sqrt[6]{5^4 \cdot 3^3} \cdot \sqrt[6]{5^2 \cdot 3^3}$;

*e)* $\sqrt[3]{\frac{ab}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{24b^2}{a}}$; *f)* $\sqrt[5]{\frac{x^2y}{2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{x^3y^4}{16}}$; *g)* $\sqrt[5]{64} : \sqrt[5]{2}$; *h)* $\sqrt[3]{\frac{8}{3}} : \sqrt[3]{\frac{9}{8}}$;

*i)* $\sqrt[3]{16x^4} : \sqrt[3]{2x}$; *j)* $\sqrt[4]{\frac{4x^7}{9y^3}} : \sqrt[4]{\frac{3x^2}{4y^7}}$.

**2128** Zsebszámológép használata nélkül végezzük el a következő számításokat:

*a)* $\sqrt[3]{7+\sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$; *b)* $\sqrt[3]{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9-\sqrt{17}}$;

*c)* $\sqrt[3]{\sqrt{131}-\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{131}+\sqrt{6}}$; *d)* $\sqrt[3]{\sqrt{41}-7} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{41}+7}$;

*e)* $\sqrt[4]{6-\sqrt{20}} \cdot \sqrt[4]{6+\sqrt{20}}$; *f)* $\sqrt[4]{\sqrt{90}-3} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{90}+3}$;

*g)* $\sqrt[5]{\sqrt{68}-10} \cdot \sqrt[5]{10+\sqrt{68}}$; *h)* $\sqrt[11]{9+4\cdot\sqrt{5}} \cdot \sqrt[11]{4\cdot\sqrt{5}-9}$.

**2129** Döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb:

*a)* $2 \cdot \sqrt[3]{23}$ vagy $3 \cdot \sqrt[3]{7}$; *b)* $3 \cdot \sqrt[3]{5}$ vagy $2 \cdot \sqrt[3]{17}$;

*c)* $3 \cdot \sqrt[3]{51}$ vagy $5 \cdot \sqrt[3]{11}$; *d)* $3 \cdot \sqrt[4]{5}$ vagy $2 \cdot \sqrt[4]{25}$;

*e)* $4 \cdot \sqrt[4]{4}$ vagy $3 \cdot \sqrt[4]{13}$; *f)* $3 \cdot \sqrt[5]{13}$ vagy $2 \cdot \sqrt[5]{99}$.

**2130** Végezzük el a következő összevonásokat:

*a)* $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{250}$; *b)* $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{625} + \sqrt[3]{135}$;

*c)* $\sqrt[4]{1875} - \sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{48}$; *d)* $\sqrt[4]{162} + \sqrt[4]{512} - \sqrt[4]{32}$;

*e)* $\sqrt[3]{27x^4} + \sqrt[3]{8x^4} - \sqrt[3]{x^4}$; *f)* $\sqrt[4]{16x^7} + \sqrt[4]{81x^7} - \sqrt[4]{x^7}$ $(x > 0)$;

*g)* $\sqrt[5]{a^6} + \sqrt[5]{32a^6} + \sqrt[5]{243a^6}$; *h)* $\sqrt[3]{a^{10}} - \sqrt[3]{8a^{10}} + \sqrt[3]{64a^{10}} + \sqrt[3]{27a^{10}}$.

**2131** Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, melyen a következő kifejezések értelmezhetők. Írjuk fel egyetlen gyökjellel a kifejezéseket.

*a)* $\sqrt[3]{7 \cdot \sqrt[4]{7}}$; *b)* $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{7}$; *c)* $\sqrt[5]{3 \cdot \sqrt{3}}$; *d)* $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}}}$;

*e)* $\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^5}}$; *f)* $\sqrt[3]{b^2 \cdot \sqrt[3]{b}}$; *g)* $\sqrt[7]{x^3 \cdot \sqrt[5]{x}}$; *h)* $\sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}}$;

*i)* $\sqrt[5]{x^3 \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[5]{x^4}}}$; *j)* $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}$; *k)* $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^3}}$; *l)* $\dfrac{\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x}}$;

*m)* $\dfrac{\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt{x}}$.

**2132** Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőit:

*a)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$; *b)* $\dfrac{6}{\sqrt[4]{3}}$; *c)* $\dfrac{15}{\sqrt[5]{5}}$; *d)* $\dfrac{15}{\sqrt[4]{3^3}}$; *e)* $\dfrac{25}{\sqrt[5]{5^2}}$; *f)* $\dfrac{12}{\sqrt[6]{2}}$;

*g)* $\dfrac{5a}{3 \cdot \sqrt[3]{a}}$; *h)* $\dfrac{3a}{2 \cdot \sqrt[3]{a^2}}$; *i)* $\dfrac{7}{6 \cdot \sqrt[5]{a^3}}$.

**2133** Írjuk fel kisebb kitevőjű gyök segítségével a következő kifejezéseket:

*a)* $\sqrt[9]{8}$; *b)* $\sqrt[10]{32}$; *c)* $\sqrt[6]{3^2}$; *d)* $\sqrt[10]{100000}$;

*e)* $\sqrt[6]{8x^6y^{27}z^9}$; *f)* $\sqrt[25]{a^{10}b^{15}c^{20}}$; *g)* $\sqrt[4]{4a^8b^{12}c^6}$.

**2134** Rendezzük nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$\sqrt{2};\ \sqrt[3]{3};\ \sqrt[4]{4};\ \sqrt[5]{5}.$$

**2135** Döntsük el, hogy mely egyenlőségek igazak és melyek hamisak:

*a)* $\sqrt[3]{(-11)^3} = -11$; *b)* $\sqrt[4]{(-11)^4} = -11$; *c)* $\sqrt[5]{a^{15}} = a$; *d)* $\sqrt[3]{(-a)^{12}} = -a^4$.

**2136** Mely valós számok esetén igaz a következő egyenlőség:

*a)* $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} + \sqrt{x^2} + \sqrt{4 - 4x + x^2} = x + 1$;

*b)* $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} + \sqrt{x^2} + \sqrt{4 - 4x + x^2} = 3x - 3$;

*c)* $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} + \sqrt{x^2} + \sqrt{4 - 4x + x^2} = 1 - x$.

**2137** A változók mely értékei esetén vannak értelmezve a következő kifejezések? Hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

*a)* $\left(\dfrac{a \cdot \sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} - \dfrac{x \cdot \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) : \sqrt[4]{(a-x) \cdot (a^2-x^2)}$;

*b)* $\dfrac{x \cdot \sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} + 3\dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x \cdot \sqrt[3]{x} - 1}$; *c)* $\dfrac{a-x}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} - \left(\dfrac{a + \sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ax}} - \sqrt[4]{ax}\right)$;

*d)* $\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt[4]{bx^3} + \sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} + \sqrt[4]{bx}\right)^2 + bx + 3}{\sqrt{bx} + 3}$.

**2138** *a)* Mutassuk meg, hogy a $\sqrt[4]{17 + 12 \cdot \sqrt{2}} - \sqrt[4]{17 - 12 \cdot \sqrt{2}}$ egész szám.

*b)* Az $a$, $b$ és $c$ pozitív egész számokra igaz, hogy $a^2 - c \cdot b^2 = 1$. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sqrt[4]{a + b \cdot \sqrt{c}} - \sqrt[4]{a - b \cdot \sqrt{c}}$ különbség értéke egész szám, akkor az $a$ szám 16-tal osztva 1 maradékot ad.



## Vegyes feladatok

**2139** Döntsük el, hogy mely állítások igazak és melyek a hamisak az alábbiak közül:

*a)* Az $\frac{n}{8}$ véges tizedes tört, ha $n \in \mathbb{N}$.

*b)* A $\sqrt{13}+2\cdot\sqrt{3}$ irracionális szám reciproka $\sqrt{13}-2\cdot\sqrt{3}$.

*c)* A $\sqrt[3]{2}$ irracionális szám.

*d)* A pozitív számok ötödik gyöke kisebb az eredeti számnál.

*e)* A negatív számok harmadik gyöke kisebb az eredeti számnál.

*f)* Ha $\sqrt[3]{a}=x$, akkor $\sqrt[3]{8a}=2x$.

*g)* A $\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[3]{3}}$ nagyobb, mint $\sqrt{3}$.

*h)* $\sqrt{13+4\cdot\sqrt{10}}=\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{2}$.

**2140** A változók mely értékei esetén igazak a következő egyenlőségek:

*a)* $\sqrt[3]{a^6}=a^2$; *b)* $\sqrt[4]{b^{12}}=b^3$; *c)* $\sqrt[5]{c^{10}}=(-c)^2$; *d)* $\sqrt[4]{d^4}=-d$;

*e)* $\sqrt[6]{x^3}=\sqrt{x}$.

**2141** Melyik szám a nagyobb:

*a)* $\sqrt[4]{5}$ vagy $\sqrt[5]{4}$; *b)* $\sqrt[3]{2}$ vagy $\sqrt{3}$; *c)* $\sqrt{8}\cdot\sqrt[3]{3}$ vagy $\sqrt[6]{18}\cdot\sqrt[3]{16}$?

**2142** Végezzük el a következő műveleteket:

*a)* $\sqrt{3}\cdot(\sqrt{75}+\sqrt{108})$; *b)* $\sqrt[3]{4}\cdot(\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{16})$;

*c)* $\frac{2\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{4\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; *d)* $\frac{12}{\sqrt[3]{3}}+\frac{6\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}}$;

*e)* $\sqrt[5]{7+5\cdot\sqrt{2}}\cdot\sqrt[5]{7-5\cdot\sqrt{2}}$; *f)* $(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5})\cdot(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25})$;

*g)* $\frac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[4]{a^3}}$; *h)* $(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x})^2-(\sqrt[3]{x}+1)^2$;

*i)* $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}$.

**2143** Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a következő kifejezéseket (a gyökjel alatti változók csak pozitív értéket vehetnek fel):

*a)* $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}$; *b)* $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}$; *c)* $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[5]{5}$; *d)* $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$;

*e)* $\sqrt[4]{\frac{5}{6}}\cdot\sqrt[3]{\frac{36}{25}}$; *f)* $\sqrt{\frac{2^3}{3}}:\sqrt[5]{\frac{2^7}{3^4}}$; *g)* $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{a}}$; *h)* $\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}$.

**2144** Végezzük el a következő műveleteket:

*a)* $(\sqrt{5}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[4]{125})\cdot\sqrt{5}$; *b)* $(\sqrt[4]{25}+\sqrt[3]{4}-\sqrt{5})\cdot\sqrt[4]{2}$;

*c)* $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[4]{a^3})\cdot\sqrt{a}$; $a>0$.

**2145** Adott $a=\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$. Zsebszámológép használata nélkül számítsuk ki $a^2-4\cdot\sqrt{7}\cdot a$ értékét.

**2146** Egy befektetésnél az a tapasztalat, hogy havonta az átlagos haszon a befektetés harmadik gyökével arányos.

*a)* Mennyi az arányossági tényező, ha 1 000 000 Ft befektetése esetén átlagosan 500 Ft a havi haszon?

*b)* Mennyi lesz a haszon havonta, ha 2 000 000 Ft-ot fektetünk be?

*c)* Mekkora legyen a befektetésünk, ha havonta 1 500 Ft-os haszonhoz szeretnénk jutni?

**2147** Az $l$ hosszúságú fonálinga lengés ideje $t = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$, ahol $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, gravitációs állandó. Hogyan változik az inga lengésideje, ha a hosszát:

*a)* 2-szeresére növeljük; *b)* harmadára csökkentjük.

*c)* Hányszorosára kell növelnünk a hosszát, ha a lengésidőt szeretnénk háromszorozni?

**2148** Legyen $H$ az $a + b \cdot \sqrt{2}$ alakban felírható számok halmaza, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$.

*a)* Igaz-e, hogy $H$ tartalmazza az egész számokat?

*b)* Bizonyítsuk be, hogy bármely két $H$-beli szám összege és szorzata is eleme $H$-nak.

*c)* A $\sqrt{27 - 10 \cdot \sqrt{2}}$ szám eleme-e a $H$ halmaznak?

*d)* Keressünk $H$-nak olyan elemét, melynek reciproka is eleme $H$-nak.

# 10.3. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

## A másodfokú egyenlet és függvény

**2149** Alakítsuk teljes négyzetté a következő kifejezéseket:

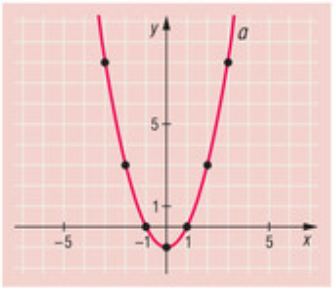
*a)* $x^2 - 2x + 4$; *b)* $x^2 - 6x + 10$; *c)* $x^2 + 4x + 1$;
*d)* $x^2 - 12x + 11$; *e)* $x^2 + 16x + 4$; *f)* $x^2 - 20x + 7$;
*g)* $x^2 - 3x + 2$; *h)* $x^2 + 5x + 1$; *i)* $2x^2 - 8x + 13$;
*j)* $3x^2 - 12x + 7$; *k)* $-x^2 - 10x + 2$; *l)* $-x^2 + 8x + 3$.

**2150** Ábrázoljuk az alábbi, valós számokon értelmezett függvényeket. Adjuk meg a függvények zérushelyeit és szélsőértékeit.

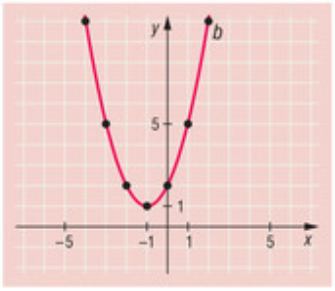
*a)* $a(x) = x^2 - 8x + 18$; *b)* $b(x) = x^2 + 2x - 3$; *c)* $c(x) = x^2 - 2x - 8$;
*d)* $d(x) = x^2 + 10x + 24$; *e)* $e(x) = x^2 - 10x + 25$; *f)* $f(x) = x^2 - 12x + 27$;
*g)* $g(x) = 2x^2 + 4x + 3$; *h)* $h(x) = 2x^2 - 12x + 10$; *i)* $i(x) = -x^2 + 6x - 5$;
*j)* $j(x) = 2x^2 - 7x + 6$; *k)* $k(x) = -x^2 - 10x - 21$; *l)* $l(x) = -3x^2 - 12x - 9$.

**2151** Írjuk fel annak a másodfokú függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonja az ábrán látható. Állapítsuk meg a függvények zérushelyeit.

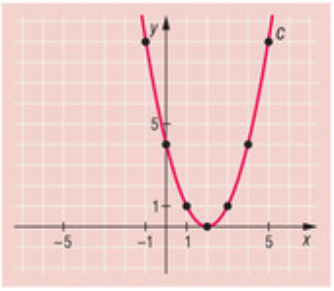
*a)*



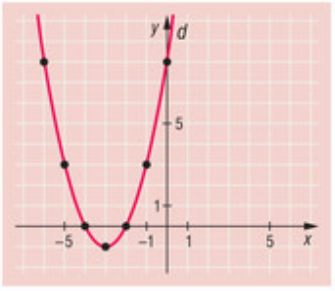

*b)*



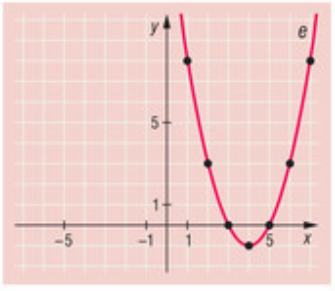

*c)*



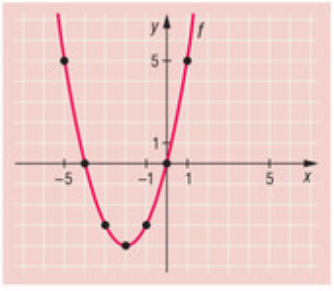

*d)*



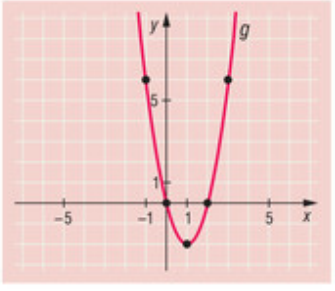

*e)*



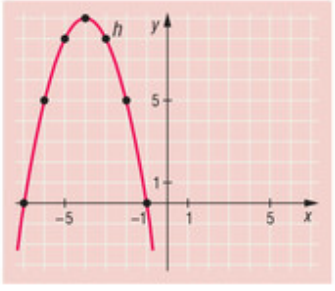

*f)*




*g)*




*h)*



**2152** Határozzuk meg a $c$ paraméter értékét úgy, hogy a következő függvények zérushelyeinek száma 0, 1, illetve 2 legyen.

*a)* $f(x) = x^2 + 6x + c$; *b)* $g(x) = x^2 - 8x + c$; *c)* $h(x) = x^2 - 5x + c$.

**2153** Határozzuk meg a $p$ paraméter értékét úgy, hogy a következő kifejezések helyettesítési értéke minden valós $x$ helyen pozitív legyen.

*a)* $x^2 - 14x + p$; *b)* $2x^2 - 6x + p$; *c)* $5x^2 - 8x + p$.

**2154** Adott a valós számokon értelmezett $f(x) = x^2 + bx + c$ másodfokú függvény. Határozzuk meg a $b$ és $c$ paraméter értékét úgy, hogy:

*a)* a függvény minimumának értéke 1 legyen az $x = 2$ helyen;

*b)* a függvény minimumának értéke 0 legyen az $x = 5$ helyen;

*c)* a függvény minimumának értéke $-3$ legyen az $x = -3$ helyen.

**2155** Adott a $[-3; 3]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x^2 - 4x$ függvény.

*a)* Adjuk meg a függvény zérushelyeit.

*b)* Adjuk meg a függvény szélsőértékeit.

*c)* Mely intervallumokon növekvő, illetve csökkenő a függvény?

**2156** Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2x^2 - bx + 18$ másodfokú függvény.

*a)* Milyen $b$ érték esetén lesz a függvény egyik zérushelye $x = 3$?

*b)* Milyen $b$ értékek esetén nincs a függvénynek zérushelye?

*c)* Van-e olyan $b$ érték, hogy a függvény minimumának értéke 10, az $x = 1$ helyen?

## A másodfokú egyenlet megoldóképlete

**2157** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

*a)* $3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = 0$; *b)* $3 \cdot (2x - 3) \cdot (5 - x) = 0$; *c)* $3 \cdot (3x - 2) \cdot (6 - 2x) = 0$;

*d)* $7x \cdot (5x - 2) = 0$; *e)* $x^2 = 400$; *f)* $x^2 = 144$;

*g)* $x^2 - 169 = 0$; *h)* $x^2 + 100 = 0$; *i)* $2x^2 - 200 = 0$;

*j)* $2x^2 - 98 = 0$; *k)* $3x^2 - 48 = 0$; *l)* $-x^2 + 121 = 0$.

**2158** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

*a)* $x^2 - 5x = 0$; *b)* $x^2 + 7x = 0$; *c)* $x^2 + 3x = 0$;

*d)* $3x^2 - 4x = 0$; *e)* $4x^2 = 15x$; *f)* $14x^2 = 7x$;

*g)* $7x^2 = -9x$; *h)* $3x^2 = 17x$.

**2159** Oldjuk meg teljes négyzetté alakítással a következő egyenleteket:

*a)* $x^2 - 6x + 8 = 0$; *b)* $x^2 + 4x - 12 = 0$; *c)* $x^2 + 8x + 12 = 0$;

*d)* $x^2 + 12x + 27 = 0$; *e)* $x^2 - 14x + 50 = 0$; *f)* $x^2 + 12x + 20 = 2x + 11$;

*g)* $x^2 + 19x - 1 = 11x + 8$; *h)* $3x^2 - 5x + 53 = 2x^2 + 9x + 5$; *i)* $x^2 - 6x + 51 = 10x + 12$.

**2160** Oldjuk meg a megoldóképlet felhasználásával a következő egyenleteket:

*a)* $x^2 + 3x - 4 = 0$; *b)* $x^2 + 4x - 5 = 0$; *c)* $x^2 - 8x + 15 = 0$;

*d)* $x^2 - 4x - 21 = 0$; *e)* $2x^2 - 5x - 12 = 0$; *f)* $2x^2 - 20x + 50 = 0$;

*g)* $2x^2 + 7x - 15 = 0$; *h)* $3x^2 - 5x - 2 = 0$; *i)* $3x^2 + 11x + 6 = 0$;

*j)* $4x^2 + 15x - 4 = 0$; *k)* $12x^2 - 41x + 35 = 0$; *l)* $13x^2 + 11x + 4 = 0$;
*m)* $15x^2 + x - 6 = 0$; *n)* $20x^2 - 31x - 7 = 0$; *o)* $63x^2 + 2x - 1 = 0$;
*p)* $-x^2 + 14x - 49 = 0$; *q)* $-6x^2 + 5x + 4 = 0$; *r)* $-12x^2 + x + 35 = 0$.

**2161** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

*a)* $(x+2)\cdot(2x-3) + x - 4 = -6$; *b)* $(x+1)\cdot(x-2) - 3\cdot(x+5) = 3 - 5x$;
*c)* $(3x+1)\cdot(2x-3) - 2\cdot(x+1) = 7x + 1$; *d)* $(2x+1)\cdot(x-4) - (x+2)\cdot(3x-4) = -6x$;
*e)* $(5x+7)\cdot(x-1) + (5x+3)\cdot(x+4) = 26x + 8$;
*f)* $(2x-3)\cdot(x+8) + (5x-3)\cdot(2x+7) = -36x + 99$;
*g)* $2\cdot(x-3)\cdot(3x+2) - 3\cdot(x+1)\cdot(x-2) + 8x = 0$;
*h)* $(2x-7)\cdot(x+3) + (7x-1)\cdot(2x+5) = 46x - 29$;

*i)* $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{3x+1}{8} = 2$; *j)* $\frac{3x-2}{5} - \frac{4-3x}{x} = x$;
*k)* $\frac{3x+2}{x} - \frac{x+2}{2x} = x + 1$; *l)* $\frac{2x+3}{x} + \frac{x-5}{x-1} = 2$;
*m)* $\frac{3x-1}{x+3} + \frac{3-2x}{x-3} = 2$; *n)* $\frac{x+1}{x-2} - \frac{2x-1}{x+2} = 3$;
*o)* $\frac{3x+5}{x-3} - \frac{2x-1}{x+3} = \frac{11x-13}{x^2-9}$; *p)* $\frac{2x+1}{x-1} - \frac{x+3}{x+1} + \frac{x+5}{x^2-1} = 3$.

**2162** Oldjuk meg az adott számhalmazon a következő egyenleteket:

*a)* $\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{100}{x^2-25}$, $x \in \mathbb{R}$; *b)* $\frac{2x+1}{x+4} - \frac{x-1}{x-4} + \frac{8}{x^2-16} = 0$, $x \in \mathbb{R}$;
*c)* $\frac{3x+1}{3x-1} - \frac{x+1}{3x+1} = \frac{1}{9x^2-1}$, $x \in \mathbb{R}$; *d)* $\frac{x+4}{2x-1} + \frac{3x-4}{2x+1} - \frac{x^2-5x}{4x^2-1} = 2$, $x \in \mathbb{R}$;
*e)* $1 - \frac{6-y}{3y^2-12} = \frac{1}{2-y} - \frac{1}{y-2}$, $y \in \mathbb{R}^-$; *f)* $2\cdot\frac{12+6a}{a^2-9} - 5\cdot\frac{a}{3+a} + \frac{a+7}{3-a} = 0$, $a \in \mathbb{R}^+$;
*g)* $\frac{16+2b}{3b^2-12} - \frac{b-1}{4+2b} = \frac{-2b-1}{6-3b}$, $b \in \mathbb{Q}$; *h)* $4\cdot\frac{1}{d^2+2d} = \frac{d}{d^2-4} - \frac{1}{d^2-2d}$, $d \in \mathbb{N}$;
*i)* $21\cdot\frac{1}{25+e^2-10e} - 2\cdot\frac{e}{e-5} + \frac{6+3e}{e+2} = 0$, $e \in \mathbb{N}$;
*j)* $\frac{y}{y-3} + \frac{2}{y+1} - \frac{4y}{y^2-2y-3} = 0$, $y \in \mathbb{Z}^-$.

**2163** A $c$ paraméter mely értékeire lesz az $5x^2 - 4x + c = 0$ egyenletnek:
*a)* két különböző valós megoldása; *b)* egy valós megoldása?
*c)* Milyen $c$ esetén nincs valós gyök?

**2164** Az $ax^2 + 6x - 1 = 0$ egyenletben határozzuk meg az $a$ paraméter értékét úgy, hogy:
*a)* az egyenlet egyik megoldása $x = -3$ legyen;
*b)* az egyenletnek egy valós megoldása legyen;
*c)* az egyenletnek két különböző valós megoldása legyen;
*d)* az egyenletnek ne legyen valós megoldása.

**2165** Az $mx^2 - (2m+1)\cdot x + m - 3 = 0$ egyenletben határozzuk meg az $m$ valós paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek:

*a)* egy valós gyöke legyen. Mi lesz ekkor az egyenlet megoldása?

*b)* két különböző valós megoldása legyen;

*c)* ne legyen valós megoldása.

**2166** Bizonyítsuk be, hogy az $5x^2 - 2\cdot(5k+3)\cdot x + 5k^2 + 6k + 1 = 0$ egyenlet gyökeinek különbsége $k$ minden értékére ugyanakkora.

**2167** Milyen összefüggés áll fenn az $a$, $b$, $c$ számok között, ha a következő egyenletnek van valós megoldása? Mi lesz ekkor a megoldás?

$$(a^2 + b^2 + c^2)\cdot x^2 + 2\cdot(a - b + c)\cdot x + 3 = 0.$$

## A gyöktényezős alak. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés

**2168** Alakítsuk szorzattá a következő másodfokú kifejezéseket:

*a)* $x^2 + x - 6$; *b)* $x^2 + 7x + 12$; *c)* $x^2 + 2x - 35$; *d)* $x^2 + 16x + 60$;

*e)* $x^2 - 16x + 64$; *f)* $2x^2 + 7x + 17$; *g)* $2x^2 - 3x - 9$; *h)* $2x^2 + 28x + 98$;

*i)* $3x^2 + 8x + 4$; *j)* $6x^2 + 7x - 5$; *k)* $-2x^2 - 9x + 18$; *l)* $-12x^2 + 13x + 4$.

**2169** Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei:

*a)* 3 és 4; *b)* $-2$ és 7; *c)* $-3$ és $-6$; *d)* 1 és $-5$;

*e)* 6 és $-6$; *f)* 21 és 12; *g)* 0 és $-4$; *h)* $\frac{2}{3}$ és $\frac{1}{2}$;

*i)* $\frac{1}{3}$ és $-\frac{2}{5}$; *j)* $-\frac{3}{4}$ és $-\frac{1}{5}$; *k)* $-\frac{4}{3}$ és $\frac{7}{10}$; *l)* $-\frac{7}{8}$ és $\frac{13}{9}$.

**2170** Írjunk fel olyan egész együtthatós másodfokú egyenletet, amelynek egyik gyöke:

*a)* 2; *b)* $-3$; *c)* $\frac{2}{3}$; *d)* $-\frac{3}{4}$;

*e)* $\frac{22}{13}$; *f)* $\sqrt{3}$; *g)* $2 - \sqrt{3}$; *h)* $7 + 3\cdot\sqrt{2}$.

**2171** Egyszerűsítsük a következő törteket:

*a)* $\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 2x - 8}$; *b)* $\frac{3x^2 - 13x - 10}{2x^2 - 7x - 15}$; *c)* $\frac{2x^2 + 3x - 5}{2x^2 + 11x + 15}$; *d)* $\frac{10x^2 - 13x - 3}{-8x^2 + 14x - 3}$.

**2172** A $2x^2 + 5x - 1 = 0$ egyenlet megoldása nélkül határozzuk meg:

*a)* a gyökök összegét; *b)* a gyökök szorzatát;

*c)* a gyökök reciprokainak összegét; *d)* a gyökök négyzetösszegét.

*e)* Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei az adott egyenlet gyökeinek ellentettjei.

*f)* Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei kettővel kisebbek, mint az adott egyenlet gyökei.

**2173** Az egyenletek megoldása nélkül határozzuk meg az $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$ és az $x_1^2 + x_2^2$ kifejezés értékét a következő egyenletek valós gyökeinek segítségével:

*a)* $x^2 + 7x + 12 = 0$; *b)* $-2x^2 - x + 6 = 0$; *c)* $2x^2 + 3x - 5 = 0$.

**2174** Határozzuk meg $p$ értékét úgy, hogy az $x^2 + px - 15 = 0$ egyenlet gyökeire teljesüljön:

$$x_1^2 + x_2^2 = 34.$$

**2175** Egyszerűsítsük a következő törteket:

*a)* $\dfrac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 - 4xy + 3y^2}$; *b)* $\dfrac{2x^2 + 5xy - 3y^2}{2x^2 + 3xy - 2y^2}$; *c)* $\dfrac{x^2 + (3 - 2y) \cdot x - 6y}{x^2 - (1 + 2y) \cdot x + 2y}$;

*d)* $\dfrac{6x^2 + (15 + 4y) \cdot x + 10y}{6x^2 + (4y - 9) \cdot x - 6y}$.

**2176** Az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet két gyöke $x_1$ és $x_2$. Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{és} \quad y_2 = x_1^3 + x_2^3.$$

## Másodfokúra visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek, másodfokú egyenletrendszerek

**2177** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

*a)* $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; *b)* $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; *c)* $x^4 + x^2 - 20 = 0$;

*d)* $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$; *e)* $x^4 - 20x^2 - 125 = 0$; *f)* $x^4 + 11x^2 + 28 = 0$;

*g)* $64x^4 - 20x^2 + 1 = 0$; *h)* $25x^4 + 74x^2 - 3 = 0$; *i)* $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$;

*j)* $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$; *k)* $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$; *l)* $x^6 - 4x^3 - 5 = 0$.

**2178** Mely valós számpárok elégítik ki a következő egyenletrendszereket?

*a)* $\left.\begin{matrix} x + 2y = 3 \\ x^2 + y = 2 \end{matrix}\right\}$; *b)* $\left.\begin{matrix} x - y = 4 \\ 3x - y^2 = 8 \end{matrix}\right\}$; *c)* $\left.\begin{matrix} x^2 - 2y = 2 \\ x + 3y = 5 \end{matrix}\right\}$;

*d)* $\left.\begin{matrix} 2x^2 + 3y = -1 \\ x - 5y = 6 \end{matrix}\right\}$; *e)* $\left.\begin{matrix} x + y = 7 \\ x \cdot y = 10 \end{matrix}\right\}$; *f)* $\left.\begin{matrix} 2x - y = 1 \\ x \cdot y = 6 \end{matrix}\right\}$;

*g)* $\left.\begin{matrix} x + 3y = 7 \\ x \cdot y = 2 \end{matrix}\right\}$; *h)* $\left.\begin{matrix} y - 4x = 9 \\ x \cdot y = -2 \end{matrix}\right\}$; *i)* $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + 5y = 14 \end{matrix}\right\}$;

*j)* $\left.\begin{matrix} 2x + y = -3 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{matrix}\right\}$.

**2179** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

*a)* $(x - 2)^4 - 5 \cdot (x - 2)^2 + 4 = 0$; *b)* $(x + 3)^4 - 7 \cdot (x + 3)^2 - 18 = 0$;

*c)* $(x + 5)^4 - 13 \cdot (x + 5)^2 - 48 = 0$; *d)* $36 \cdot (x - 3)^4 - 13 \cdot (x - 3)^2 + 1 = 0$.

**2180** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

*a)* $(x^2 + 6x) \cdot (x^2 + 6x + 4) - 77 = 0$; *b)* $(x^2 - 4x) \cdot (x^2 - 4x - 3) - 10 = 0$;

*c)* $(x^2 - 2x)^2 - 11x^2 + 22x + 24 = 0$.

**2181** Mely valós számpárok elégítik ki a következő egyenletrendszereket?

*a)* $\left.\begin{aligned} x\cdot y-2x+y&=2\\ x\cdot y&=-8\end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} 5x^2+4y^2&=49\\ 2x^2-y^2&=17\end{aligned}\right\}$; *c)* $\left.\begin{aligned} x+y&=5\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}&=\frac{1}{6}\end{aligned}\right\}$;

*d)* $\left.\begin{aligned} \frac{1}{x-2}+\frac{3}{2-y}&=1\\ 2y+x&=2\end{aligned}\right\}$; *e)* $\left.\begin{aligned} x\cdot y&=-8\\ x^2+y^2&=20\end{aligned}\right\}$; *f)* $\left.\begin{aligned} x\cdot y&=6\\ 2x^2-3y^2&=6\end{aligned}\right\}$;

*g)* $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+x+y&=32\\ x^2-y^2+x-y&=28\end{aligned}\right\}$; *h)* $\left.\begin{aligned} x^2+x\cdot y&=12\\ y^2+x\cdot y&=-3\end{aligned}\right\}$.

**2182** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

*a)* $2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$; *b)* $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$.

**2183** Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

*a)* $x^3-2x^2-11x+12=0$; *b)* $x^3-7x-6=0$;

*c)* $x^3+7x^2+2x-40=0$.

## Másodfokú egyenlőtlenségek

**2184** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

*a)* $x^2-49>0$; *b)* $x^2-100\le 0$; *c)* $x^2-36\ge 0$;

*d)* $x^2-400<0$; *e)* $x^2+114\ge 0$; *f)* $x^2+2\le 0$;

*g)* $x^2-15\le 0$; *h)* $x^2-7\ge 0$; *i)* $x^2+3x\ge 0$;

*j)* $2x^2+5x<0$; *k)* $3x^2-8x>0$; *l)* $x^2-5x\le 0$.

**2185** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

*a)* $x^2+6x-7<0$; *b)* $x^2-2x-8\ge 0$; *c)* $x^2-9x+18<0$;

*d)* $x^2-8x+19\le 0$; *e)* $x^2+7x+6>0$; *f)* $x^2+6x+10>0$;

*g)* $2x^2-x-6\le 0$; *h)* $4x^2+12x+5<0$; *i)* $3x^2-8x+7\ge 0$;

*j)* $15x^2+11x+2>0$; *k)* $35x^2-46x+15\le 0$; *l)* $2x^2+3x+3<0$.

**2186** Mely egész számok esetén teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

*a)* $x^2-5x-6<0$; *b)* $x^2+x-20\le 0$; *c)* $x^2+2x-15\le 0$;

*d)* $x^2+6x+10>0$; *e)* $x^2+2x-35\le 0$; *f)* $-x^2-x+12\ge 0$;

*g)* $-x^2-9x+10>0$; *h)* $-x^2-4x+12\ge 0$; *i)* $-x^2-4x+96\ge 0$.

**2187** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

*a)* $x^3+x^2-12x\le 0$; *b)* $-2x^3-7x^2+15x>0$; *c)* $x^4+4x^2-32\ge 0$;

*d)* $x^4-10x^2+9<0$.

**2188** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

*a)* $\frac{x+5}{x^2+7}<0$; *b)* $\frac{-x^2+3x+18}{x-4}>0$; *c)* $\frac{x^2-x-6}{x^2-x-2}\ge 0$; *d)* $\frac{x^2-7x+15}{x^2+7x-18}\le 0$;

*e)* $\frac{x^2-8x+15}{x^2-3x-4}<0$; *f)* $\frac{2x^2-7x-4}{x^2+x-6}\le 0$; *g)* $\frac{x^2-16}{x^2-2x-24}\le 0$; *h)* $\frac{2x^2+x-15}{-x^2+15x-50}\ge 0$.

**2189** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

*a)* $\frac{(x-5)\cdot(x-2)}{3-x}>0$; *b)* $\frac{x-1}{x-2}\geq\frac{x-2}{x-1}$; *c)* $1+\frac{5}{x-2}<\frac{x-1}{2+x}$;

*d)* $1+\frac{3}{2+2x}\leq\frac{1}{x}$; *e)* $\frac{-5}{4x^2-4x+1}>0$; *f)* $\frac{6}{6-5x-x^2}\geq 0$.

**2190** Mely valós $x$ értékek esetén igaz, hogy $x+7\geq|x^2-3x-10|$?

**2191** Adjuk meg a valós számok lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők:

*a)* $\frac{\sqrt{x^2-3x-28}}{\sqrt{x^2+3x-18}}$; *b)* $\sqrt{\frac{x^2-3x-28}{x^2+3x-18}}$.

**2192** Melyek azok az egész számokból álló $x$, $y$, $z$ számhármasok, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség-rendszer?

$$\left.\begin{aligned}3x^2+2yz&\leq 1+y^2\\3y^2+2xz&\leq 1+z^2\\3z^2+2xy&\leq 1+x^2\end{aligned}\right\}.$$

## Paraméteres másodfokú egyenletek

**2193** A $p$ valós paraméter mely értékeire lesznek az adott egyenlet gyökei egyenlők? Ellenőrizzük a megoldást.

$$x^2-8px+2x+15p^2-2p-7=0.$$

**2194** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, ha $b$ valós paraméter:

*a)* $x^2+5bx-14b^2=0$; *b)* $x^2+(3-4b)\cdot x-12b=0$;

*c)* $6x^2+13bx-5b^2=0$; *d)* $bx^2+(4b^2-2)\cdot x-8b=0$.

**2195** Vizsgáljuk meg, hogy mely $b$ paraméterértékek esetén hány megoldása lesz a következő egyenletnek:

*a)* $2x^2+2bx+b+4=0$; *b)* $bx^2-8x+10-b=0$.

**2196** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, ha $b$ valós paraméter:

*a)* $\frac{4x+b}{x-3b}+\frac{3x+7b}{x+3b}=\frac{8x^2+6b^2}{x^2-9b^2}$; *b)* $\frac{x}{x^2+bx+b^2}-\frac{3b^2}{x^3-b^3}=\frac{1}{b-x}$.

**2197** A $b$ paraméter mely értékei esetén lesz minden valós $x$-re pozitív a következő kifejezés:

*a)* $x^2-2bx+2b+15$; *b)* $bx^2+bx-4x+4-b$.

**2198** Határozzuk meg a $b$ paraméter értékét úgy, hogy a következő kifejezés értéke minden valós $x$ helyen negatív legyen:

*a)* $bx^2+bx+3x+b+3$; *b)* $bx^2-12x+15-b$.

**2199** Melyek azok a $b$ valós számok, amelyekre a következő egyenletnek pontosan egyik gyöke esik a $]0;1[$ intervallumba:

$$(b^2+1)\cdot x^2+(b+1)\cdot x-2=0?$$

# Négyzetgyökös egyenletek és egyenlőtlenségek

**2200** Mely valós számok a megoldásai a következő egyenleteknek?

*a)* $\sqrt{x+4}=3$; *b)* $\sqrt{x-5}=9$; *c)* $\sqrt{2x-3}=1$;

*d)* $3+\sqrt{4x+3}=0$; *e)* $7-\sqrt{4x+11}=0$; *f)* $\sqrt{8x-13}-8=0$;

*g)* $\sqrt{4x-5}=\sqrt{x+1}$; *h)* $\sqrt{5x+1}=\sqrt{7x+1}$; *i)* $\sqrt{3x-4}=\sqrt{x-2}$;

*j)* $\sqrt{6x+7}=\sqrt{x+2}$; *k)* $\sqrt{13x+5}=\sqrt{24x-3}$; *l)* $\sqrt{5x-6}=\sqrt{1-2x}$.

**2201** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

*a)* $\sqrt{x+6}=x$; *b)* $\sqrt{x+2}=x-4$; *c)* $\sqrt{3x+1}=x-1$;

*d)* $\sqrt{2x+8}=x+4$; *e)* $\sqrt{7-3x}=1-x$; *f)* $\sqrt{3x+4}=2x-4$;

*g)* $\sqrt{5x+4}=2x+2$; *h)* $\sqrt{3x-5}=x-1$; *i)* $\sqrt{5x+5}=2x-3$;

*j)* $\sqrt{x^2+2x+9}=2x+3$; *k)* $1-2x=\sqrt{x^2-5x+11}$; *l)* $\sqrt{x^2+3x+9}=3x-8$.

**2202** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

*a)* $\sqrt{3x+1}\geq 2$; *b)* $\sqrt{2x-3}<4$; *c)* $\sqrt{4x-3}>-1$; *d)* $\sqrt{5x-2}>1$;

*e)* $\sqrt{3x-4}<-2$; *f)* $\sqrt{7x+1}\leq 3$; *g)* $\sqrt{8-2x}\geq 3$; *h)* $\sqrt{3-x}<5$.

**2203** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

*a)* $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=5$; *b)* $\sqrt{5x-6}-\sqrt{x+1}=1$;

*c)* $\sqrt{3x+3}+\sqrt{2x+6}=2$; *d)* $\sqrt{6x+1}+\sqrt{8x}=4$;

*e)* $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+8}$; *f)* $\sqrt{5x+4}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{9+x}$;

*g)* $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+2}=\sqrt{x-6}$; *h)* $\sqrt{6-x}+\sqrt{x+4}=\sqrt{1-5x}$.

**2204** Mely valós számokra igazak a következő egyenletek?

*a)* $2x^2-\sqrt{x^2-2x+1}=0$; *b)* $\sqrt{x^2+2x+1}=2\cdot\sqrt{x^2-2}$;

*c)* $\sqrt{9-6x+x^2}=10-\sqrt{4-4x+x^2}$.

**2205** Oldjuk meg a valós számhalmazon a következő egyenleteket. Ellenőrizzük a megoldásokat.

*a)* $\sqrt{x^2-9}-(x^2-9)=-6$; *b)* $4\cdot\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\sqrt{x+2}=\sqrt{x}$.

**2206** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

*a)* $\sqrt{3x+1}>x+1$; *b)* $\sqrt{5-x}\leq x-3$;

*c)* $\sqrt{13-2x}\leq x+1$; *d)* $\sqrt{2x+15}>-x$;

*e)* $\sqrt{x^2+2x+10}\geq 2x-1$; *f)* $\sqrt{x^2+2x-8}\leq 16+2x$.

**2207** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

*a)* $\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}=6$; *b)* $2x^2-3x-1+\sqrt{2x^2-3x+5}=0$;

*c)* $\sqrt{x-6\cdot\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-8-2\cdot\sqrt{x-9}}=2$; *d)* $\sqrt{x+3}+6\cdot\sqrt{x-3}=7\cdot\sqrt[6]{x^3-3x^2-9x+27}$.

**2208** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$|1-\sqrt{x-2}|\cdot(-x^2+4x-3)=1.$$

**2209** A $p$ paraméter mely értékei esetén van megoldása a következő egyenletnek?

$$\sqrt{x+2}=p-2x.$$

## A számtani és mértani közép, szélsőérték feladatok

**2210** Mennyivel nagyobb a következő számok számtani közepe a mértani közepüknél:

*a)* 3 és 27; *b)* 12 és 27; *c)* 20 és 45; *d)* 40 és 90;
*e)* 10 és 15; *f)* 20 és 22; *g)* 13 és 345; *h)* 56 és 2010?

**2211** *a)* Két szám számtani közepe 23, a kisebb szám 20. Mennyi a nagyobb szám?

*b)* Két szám mértani közepe 23, a kisebb szám 20. Mennyi a nagyobb szám?

*c)* Két szám számtani közepe 50, a nagyobb szám 70. Mennyi a kisebb szám?

*d)* Két szám mértani közepe 50, a nagyobb szám 70. Mennyi a kisebb szám?

**2212** Egy téglalap oldalai 8 cm és 18 cm hosszúságúak. Mekkora annak a négyzetnek az oldala, amelynek a területe megegyezik a téglalap területével?

**2213** *a)* Géza autóval 2 óra 24 perc alatt tett meg 150 km-t. Mennyi volt az átlagsebessége?

*b)* József autóval egy órán át 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, majd két órán át 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladt. Mennyi volt az átlagsebessége?

*c)* Tibor a 150 km-es útszakasz első harmadát 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a második harmadát 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, az utolsó harmadát 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel tette meg. Mennyi volt az átlagsebessége?

**2214** A gazdasági válság hatására 2008 novemberében 20%-kal, decemberben pedig 4%-kal csökkent az üzemanyagok ára. A két hónapot tekintve átlagosan hány %-os volt havonta a csökkenés?

**2215** Két négyzet kerületének összege 200 cm. Mennyi a négyzetek területösszegének minimuma?

**2216** Egy téglalap alakú kertet 100 méter hosszú kerítéssel szeretnénk körbekeríteni.

*a)* Mekkorának válasszuk a téglalap oldalait, hogy területe a lehető legnagyobb legyen?

*b)* Ha a téglalap egyik oldala egyenes vízpart, ahová nem kell kerítés, akkor mekkorának válasszuk az oldalakat ahhoz, hogy a terület maximális legyen?

**2217** A négyzet alakú járólapok minden oldala 20 cm, ilyen lapokból a lehető legkisebb kerületű téglalapot szeretnénk kirakni úgy, hogy minden lapot felhasználunk és a lapokat nem lehet elvágni. Mekkorának válasszuk a téglalap oldalait, ha:

*a)* 100 darab; *b)* 200 darab járólap áll a rendelkezésünkre?

**2218** A tengeren egy hajó déli irányban halad 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, egy másik kelet felé tart 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. A hajók egy-egy egyenes mentén haladnak az egyenesek metszéspontja felé. Déli 12 órakor az első hajó 400 km-re, a második 300 km-re van a két egyenes metszéspontjától.

*a)* Mennyi a két hajó távolsága 12 órakor, illetve 13 órakor?

*b)* Ha megállás nélkül haladnak, mikor lesznek egymáshoz a legközelebb?

*c)* Mennyi lesz a két hajó között a legkisebb távolság?

**2219** Legyenek $a$ és $b$ olyan valós számok, hogy $a > b$ és $a \cdot b = 1$. Bizonyítsuk be, hogy:

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2 \cdot \sqrt{2}.$$

## Másodfokú egyenletre vezető problémák

**2220** Két szám különbsége 12. Melyik ez a két szám, ha:

*a)* szorzatuk 45; *b)* négyzetösszegük 314;

*c)* a nagyobb számot a kisebbel osztva hányadosuk 10-zel kisebb, mint a kisebbik szám?

**2221** Két szám összege 20. Melyik ez a két szám, ha:

*a)* szorzatuk 36; *b)* négyzetösszegük 208;

*c)* négyzetük különbsége 200?

**2222** Ernő Liverpoolból sportrelikviákat hozott a barátainak ajándékba. A sapkák darabját annyi euróért vette, ahányat vásárolt. Ha 3 eurós poharakat vett volna, hárommal több embernek tud ajándékot hozni és még 1 euró meg is marad. Hány sapkát vásárolt Ernő?

**2223** Két négyzet területének összege 493 $cm^2$. Az egyik négyzet oldala 5 cm-rel nagyobb, mint a másik négyzeté. Mekkorák a négyzet oldalai?

**2224** A spanyol labdarúgó-bajnokság őszi idényében, amikor minden csapat egyszer játszott mindegyikkel, összesen 190 mérkőzésre került sor. Hány csapat vett részt a bajnokságban?

**2225** Egy téglalap egyik oldala 3 dm-rel több a másik háromszorosánál. Az átló 1 dm-rel hosszabb, mint a nagyobb oldal. Mekkorák a téglalap oldalai?

**2226** Két szomszédos szám szorzata 56-tal több, mint az összegük tízszerese. Melyik ez a két szám?

**2227** Egy társaság kerékpártúrán vesz részt. Az egyik napon 80 km-t haladtak. Ha óránként 4 km-rel többet tettek volna meg, 1 órával hamarabb értek volna célba. Mekkora sebességgel kerékpároztak és mennyi ideig tartott az út?

**2228** Anya és lánya együtt két óra alatt takarítja ki a lakást. Mennyi idő alatt végeznének külön-külön, ha az anyának három órával kevesebb időre van szüksége a takarításhoz, mint a lányának?

**2229** Eszter 4000 Ft-ért virágpalántákat vásárol. Ha a darabonként 90 Ft-tal olcsóbb petúniát választja 9-cel többet tud megvenni, mint a drágább muskátliból. Mennyibe kerül a muskátlipalánta, és hány darabot tud venni a pénzéből?

**2230** *a)* Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek 50-szer annyi átlója van, mint oldala?

*b)* Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek 50-nel több átlója van, mint oldala?

*c)* Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek 119 átlója van,

**2231** A téglalap alakú monitor képernyőjének oldalai 34 cm és 27 cm. A képernyő körül minden oldalon azonos szélességű műanyag keret van, melynek területe 28,5%-a a képernyő területének. Milyen széles a keret?

**2232** Egy autógyár két szerelőcsarnokában 400-400 darab egyforma gépkocsit szerelnek össze. A modernebb részleg naponta öttel több autót képes elkészíteni, mint a másik. Hány napig dolgozott egyik-egyik üzemrész, és hány autót gyártottak naponta külön-külön, ha összesen 36 napot dolgoztak?

**2233** Egy osztályban két képviselőt választanak az iskolai diákönkormányzat tagjai közé. Valaki megjegyzi: *Ha kétszer annyian lennénk, mint ahányan vagyunk, 852-vel több lehetőségünk lenne a két ember kiválasztására.* Hányan vannak az osztályban?

**2234** Egy 100 és 200 közötti egész szám számjegyeinek összege 12. Ha a számot elosztjuk jegyeinek szorzatával a hányados és a maradék is 6 lesz. Melyik ez a háromjegyű szám?

**2235** Egy társaságban nők és férfiak vannak, összesen 27-en, a nők vannak többen. Érkezéskor mindenki mindenkit üdvözöl: a nők puszit adnak egymásnak, a férfiak kezet fognak egymással, a nőknek a férfiak kezet csókolnak.

*a)* Melyik üdvözlési formából volt több: puszából vagy kézfogásból?

*b)* Hány kézfogás történt, ha 182 kézcsókra került sor?

**2236** Egy ajándékboltban a karácsonyi vásárra készülve bizonyos termékek árát felemelik.

*a)* Az ezüst fakanál sikeres terméknek bizonyult, ezért két alkalommal emelték fel az árát, másodszor kétszer annyi százalékkal, mint először. A kétszeri áremelés után az ezüst fakanál 32%-kal lett drágább. Hány százalékkal emelték az árát az egyes esetekben?

*b)* Az arany fakanál árát is felemelték karácsony előtt. Ami megmaradt annak az árát januárban feleannyi százalékkal csökkentették, mint amennyivel emelték. A kétszeri árváltozás után az arany fakanál 8%-kal lett drágább. Hány százalékkal emelték az arany fakanál árát karácsony előtt?

**2237** Egy kísérlet során a 45 méter magas kilövő állványról függőlegesen fellőnek egy rakétát. A rakéta földtől való távolságát méterben az alábbi függvény adja meg:

$$h(t) = -5t^2 + 40t + 45,$$

ahol $t$-vel a kilövés kezdetétől eltelt időt jelöljük másodpercben.

*a)* Milyen magasan lesz a rakéta a kilövés után 2 másodperccel?

*b)* Milyen magasra repül fel a rakéta?

*c)* Mennyi idő telik el, amíg földet ér?

## Vegyes feladatok

**2238** Oldjuk meg az adott számhalmazon az egyenleteket:

*a)* $(7-x)\cdot(2x+3)=0,\ x\in\mathbb{Z}$;

*b)* $(2x-5)\cdot(x-\sqrt{2})=0,\ x\in\mathbb{Q}$;

*c)* $5\cdot(3-x)\cdot(x+3)=0,\ x\in\mathbb{N}$;

*d)* $\left(y-\frac{5}{2}\right)\cdot(3y-15)=0,\ y\in\mathbb{Z}$.

**2239** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

*a)* $6x^2+7x-3=0$;

*b)* $(x+4)^2+2\cdot(x+3)\cdot(x+1)-5\cdot(x+5)=3x$;

*c)* $\frac{3x-3}{x+2}+\frac{x-7}{x-2}-\frac{6x+3}{x^2-4}=1$;

*d)* $4x^4-37x^2+9=0$;

*e)* $(2x^2-3x)\cdot(2x^2-3x+5)=14$;

*f)* $\sqrt{2x+7}=x+4$;

*g)* $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{5x-1}$;

*h)* $|x^2-6x+5|=x-1$;

*i)* $x^6-9x^3+8=0$.

**2240** Mely valós számok esetén igazak a következő egyenlőtlenségek:

*a)* $10x^2-x-3\le 0$;

*b)* $16x^2-2x-3>0$;

*c)* $-12x^2+17x+5\ge 0$;

*d)* $\frac{x^2+5x+4}{2x^2+7x+6}\le 0$;

*e)* $\sqrt{4x+3}<2$;

*f)* $\sqrt{4x+3}\ge 2x$.

**2241** Mely egész számokra igaz, hogy

*a)* $(x-3)^2 > 4$; *b)* $(x-2)^2 \le x-2$; *c)* $(x+2)^2 - 1 > -2x-5$?

**2242** Egy derékszögű háromszög területe 30 cm$^2$, átfogója 13 cm hosszú. Mekkorák a háromszög befogói?

**2243** Két konvex sokszögnek összesen 68 átlója van. A belső szögeik összege 27 000. Hány oldalúak a sokszögek?

**2244** Legyen $A$ a valós számoknak az a részhalmaza, melynek elemeire teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\sqrt{6x+7} \ge x+2.$$

Legyen $B$ a valós számoknak az a részhalmaza, melynek $b$ elemeire igaz, hogy:

$$\frac{7}{b^2-2b} \ge 0.$$

*a)* Adjuk meg az $A$ és $B$ halmazokat.

*b)* Igaz-e, hogy $A \cup B = \mathbb{R}$?

*c)* Határozzuk meg az $A \cap B$ halmazt.

**2245** Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékeit. Melyek az adott függvények zérushelyei?

*a)* $f(x) = -x^2 - 5x + 6$; *b)* $g(x) = 10x^2 - 20x + 20$.

**2246** Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben azon $P(x; y)$ pontok halmazát, melyeknek koordinátáira igaz, hogy:

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 + y^2 &= 33 \\ 3y^2 - 5x^2 &= 55 \end{aligned}\right\}.$$

**2247** *a)* Az egyenlet megoldása nélkül határozzuk meg a következő egyenlet gyökeinek négyzetösszegét:

$$3x^2 + 7x + 1 = 0.$$

*b)* A tízes számrendszerbeli 371-et egy másik számrendszerbe átírva 563-at kapunk. Hányas számrendszerbe írtuk át a számot?

*c)* Határozzuk meg a következő egyenletben a hiányzó számjegyet:

$$\overline{3x71} = 371x^2 - 1141x + 1.$$

**2248** Bizonyítsuk be, hogy a következő egyenletnek a $b$ paraméter minden valós értékére van valós megoldása:

$$(b-2)\cdot x^2 + (b+1)\cdot x + 3 = 0.$$



# 10.4. GEOMETRIA

## Körrel kapcsolatos ismeretek

**2249** Számítsuk ki a körcikk területét, valamint a határoló körív hosszát, ha a sugár 8 cm, a középponti szöge pedig

*a)* 15°; *b)* 60°; *c)* 115°; *d)* 150°; *e)* 270°; *f)* 300°.

**2250** Mekkora az 5 cm sugarú körcikk középponti szögének mértéke fokban, illetve radiánban, ha a határoló körív hossza

*a)* 5 cm; *b)* 8 cm; *c)* 12 cm; *d)* 25 cm?

**2251** Számítsuk ki a körcikk sugarát és középponti szögének mértékét fokban és radiánban, ha területe 32 $cm^2$, illetve határoló körívének hossza

*a)* 8 cm; *b)* 11,7 cm; *c)* 13,85 cm.

**2252** Számítsuk ki a körgyűrűcikk alakú színházi nézőtér alapterületét, ha középponti szöge 50°, a határoló körívek sugara 20 m, illetve 70 m.

**2253** Mekkora kerületi szög nyugszik azon a köríven, amelyhez tartozó középponti szög nagysága

*a)* 16°; *b)* 31°; *c)* 70°; *d)* 180°; *e)* 210°; *f)* 350°?

**2254** Mekkora középponti szög nyugszik azon a köríven, amelyhez tartozó kerületi szög nagysága

*a)* 10°; *b)* 35°; *c)* 90°; *d)* 150°; *e)* 160°; *f)* 175°?

**2255** Mekkora középponti, illetve kerületi szög nyugszik azon a köríven, amelynek hossza a kör kerületének

*a)* $\frac{1}{3}$-a; *b)* $\frac{3}{5}$-e; *c)* $\frac{11}{12}$-e; *d)* 50%-a; *e)* 75%-a?

**2256** A kör egy rögzített körívéhez tartozó középponti szög 70°-kal nagyobb, mint a rajta nyugvó kerületi szög. Számítsuk ki a köríven nyugvó középponti és kerületi szögek nagyságát.

**2257** A kör egy rögzített körívéhez tartozó középponti és kerületi szög nagyságának

*a)* az összege; *b)* a különbsége

pontosan 80°. Számítsuk ki a középponti és a kerületi szögek nagyságát.

**2258** A kör egy húrja a kört két körszeletre bontja. A húr a kör középpontjából

*a)* 15°-os; *b)* 37°-os; *c)* 50°-os

szög alatt látszik. Mekkora szögben látszik a húr a kisebb körszeletet határoló körív pontjaiból?

**2259** Egy háromszög köré írható kör sugara 15 cm. A háromszög csúcsai a kört három olyan körívre bontják, amelyek hosszának aránya

*a)* 2 : 3 : 7; *b)* 1 : 7 : 10; *c)* 7 : 8 : 9.

Számítsuk ki a háromszög szögeit, valamint a keletkező körívek hosszát az egyes esetekben.

**2260** Egy körhöz két pontjában érintőket húzunk. Mekkora szöget zárnak be az érintők, ha az érintési pontokat összekötő húr a kör középpontjából

*a)* 20°-os; *b)* 60°-os; *c)* 130°-os szögben látszik?





**2261** A hegyesszögű $ABC$ háromszög köré írt köréhez a háromszög csúcsaiban érintőket húzunk. Az érintőegyenesek által közrefogott háromszög két szöge 70° és 84°. Számítsuk ki az $ABC$ háromszög szögeinek nagyságát.

**2262** Vegyünk fel egy szakaszt. Szerkesszük meg a síkban azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekből a szakasz

*a)* 75°-os; *b)* 135°-os; *c)* 150°-os szög alatt látszik.

Hol helyezkednek el az egyes esetekben azok a síkbeli pontok, amelyekből a szakasz a megadott szögnél nagyobb, illetve kisebb szögben látszik?

**2263** Vegyünk fel egy négyzetet. Szerkesszük meg azokat a pontokat, amelyekből a négyzet két szemközti oldala 60°-os szögben látszik.

**2264** A hegyesszögű $ABC$ háromszög $C$ csúcsánál lévő szöget jelölje $\gamma$. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontja illeszkedik az $AB$ szakasz $180° - \gamma$ szögű egyik látószögkörívére. Igaz-e hasonló állítás a derékszögű, illetve a tompaszögű háromszögre?

**2265** Bizonyítsuk be, hogy az $n$ oldalú szabályos sokszög középpontja illeszkedik a sokszög bármely oldalához tartozó $\frac{360°}{n}$ szögű egyik látószögkörívére.

**2266** Előfordulhat-e, hogy egy húrnégyszögben a szögek úgy aránylanak egymáshoz, mint

*a)* 3 : 5 : 4 : 4; *b)* 2 : 5 : 4 : 4?

Ha igen, adjuk meg a szögeket, ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nem.

**2267** Egy húrnégyszög adott körüljárási irány szerinti szögeinek aránya

*a)* 3 : 2 : 3 : 4; *b)* 3 : 2 : 9 : 10; *c)* 5 : 20 : 31 : 16.

Számítsuk ki a négyszög szögeit.

**2268** Mekkorák annak a húrnégyszögnek a szögei, amelynek két külső szögének nagysága

*a)* 35°, 120°; *b)* 70°, 65°; *c)* 85°, 155°.

**2269** Bizonyítsuk be, hogy a húrnégyszög bármely belső szöge ugyanakkora, mint a szemközti külső szöge.

**2270** Bizonyítsuk be, hogy a húrnégyszög oldalainak felezőmerőlegesei egy pontban metszik egymást.

**2271** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög két csúcsa, valamint a belőlük kiinduló magasságvonalak talppontjai húrnégyszöget alkotnak. Hol van a négyszög köré írt kör középpontja?

**2272** Számítsuk ki, hogy milyen távolságra van a Föld felszínén mérve Budapest az Egyenlítőtől, ha tudjuk, hogy a város északi szélessége 47,5°, és a Föld sugara 6370 km. Az eredményt egész km-re kerekítve adjuk meg!

**2273** Számítsuk ki, hogy milyen távolságra halad a Föld felszínén mérve a Baktérítő a Ráktérítőtől. Az eredményt egész km-re kerekítve adjuk meg! (A Föld sugara 6370 km, a Ráktérítő északi szélessége 23°27', a Baktérítő déli szélessége 23°27'.)

**2274** Egy szabályos háromszög alakú zárt kert oldalának hossza 14 méter. A gazda a kert egyik oldalának felezőpontjában (a kerítésen belül) leszúrt egy karót, majd egy 7 méter hosszú kötéllel a karóhoz kötötte kecskéjét. Mekkora területen legelhet a jószág?

**2275** Bizonyítsuk be, hogy a szabályos sokszög egyik oldala, az oldal végpontjaitól különböző csúcsokból ugyanakkora szög alatt látszik. Számítsuk ki a szög mértékét, ha a sokszög oldalainak száma

*a)* 5; *b)* 6; *c)* 12; *d)* $n$.



**2276** Egy szabályos sokszög egyik oldala a köré írt kört két ívre bontja. Mekkora szög alatt látszik a kisebb körív pontjaiból a sokszög oldala, ha az oldalak száma

*a)* 5; *b)* 6; *c)* 12; *d)* $n$?

**2277** Egy szabályos hatszög minden második csúcsát összekötjük. Mekkora szög alatt látszódnak a behúzott szakaszok a hatszög középpontjából? Bizonyítsuk be, hogy a kapott szakaszok szabályos háromszöget alkotnak.

**2278** Mekkora szöget zár be egy szabályos nyolcszög egy csúcsából kiinduló legrövidebb és leghosszabb átlója egymással?

**2279** Számítsuk ki annak a körnek a sugarát, amelynek egy 10 cm hosszú húrja a körvonal egy pontjából

*a)* 30°-os; *b)* 45°-os; *c)* 150°-os szög alatt látszik.

**2280** Egy $r$ sugarú körben elhelyezünk egy

*a)* $r$; *b)* $r \cdot \sqrt{2}$; *c)* $2r$ hosszúságú húrt.

Mekkora szög alatt látszódnak az egyes húrok a kör középpontjából, illetve a körvonal pontjaiból?

**2281** Adjunk szerkesztési eljárást a háromszög szerkesztésére, ha a szokásos jelölések mellett adottak az

*a)* $a$, $\alpha$, $m_a$; *b)* $a$, $\alpha$, $b$.

**2282** A kalózok az általuk zsákmányolt láda aranyat egy lakatlan szigeten ásták el. Később elfelejtették, hogy pontosan hová is rejtették a kincset, csak arra emlékeztek, hogy a szigeten álló két rendkívül magas fát összekötő ösvényt a kincs helyéről 60°-os szögben lehetett látni. Egy másik kalóz azt is megjegyezte, hogy az ösvény felezőpontjától hány méter távolságra ástak. Adjunk szerkesztési eljárást a kincs helyének meghatározására. Legfeljebb hány helyen kell gödröt ásni ahhoz, hogy mindenképpen megtalálják az aranyat rejtő ládát?

**2283** Egy galériában a 2 méter széles festmény előtt, a fallal párhuzamosan, attól 2,4 m távolságra biztonsági kötelet feszítettek ki, hogy a látogatók ne menjenek túl közel a festményhez.

*a)* Hány olyan pont van a kötél mentén, amelyből a festmény 45°-os szög alatt látszik?

*b)* A festménytől milyen távolságra kell a kötelet vezetni ahhoz, hogy a kötél mentén pontosan egy olyan pont legyen, amelyből a festményt 45°-os szögben lehet látni?

**2284** Egy húrnégyszög három szögének mértéke úgy aránylik egymáshoz, mint a 3 : 5 : 2-höz. Számítsuk ki a négyszög szögeit. Hány megoldása van a feladatnak?

**2285** Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha valamelyik oldala a másik két csúcsból ugyanakkora szög alatt látszik.

**2286** Egy húrtrapézba olyan kör írható, amely a trapéz minden oldalát érinti. Számítsuk ki az érintőkör sugarát, ha a trapéz alapjai 8 cm, illetve 18 cm hosszúak.

**2287** Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

*a)* Van konkáv húrnégyszög.

*b)* A húrnégyszög átlója a négyszöget egy hegyesszögű és egy tompaszögű háromszögre bontja.

*c)* Ha egy trapéz húrnégyszög, akkor szárai egyenlő hosszúak.

*d)* Ha egy trapéz szárai egyenlő hosszúak, akkor húrtrapéz.

*e)* A paralelogrammák közül csak a téglalap húrnégyszög.

*f)* A rombuszok közül csak a négyzet húrnégyszög.

*g)* A húrnégyszögben van tompaszög.

*h)* Ha egy húrnégyszögben nincsen 90°-os szög, akkor két tompaszöge van.





**2288** Adott az $ABCD$ húrnégyszög. Az $A$ kezdőpontú $AB$, illetve a $D$ kezdőpontú $DC$ félegyeneseken felveszünk egy $E$, illetve egy $F$ pontot úgy, hogy az $EF$ egyenes párhuzamos az $AD$ egyenessel, továbbá az $ABCD$ négyszög köré írt körrel nincs közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy az $E, F, C, B$ pontok egy körre illeszkednek.

**2289** Adjunk szerkesztési eljárást a háromszög szerkesztésére, ha a szokásos jelölések mellett adottak az

*a)* $a,\ \alpha,\ b + c$; *b)* $a,\ \alpha,\ b - c$.

**2290** Egy egyenes völgyhíddal párhuzamosan hosszú, szintén egyenes főút vezet. Adjunk szerkesztési eljárást a főút mentén olyan pont szerkesztésére, amelyből a völgyhíd a lehető legnagyobb szög alatt látszik. Indokoljuk meg a szerkesztés helyességét.

**2291** Vegyünk fel egy kört, és rögzítsük egy $AB$ húrját. Tekintsük azokat az $ABC$ háromszögeket, amelyeknek $C$ csúcsa illeszkedik az adott körre. Milyen alakzatot ír le az $ABC$ háromszögbe írt kör középpontja, ha a $C$ pont befutja a körvonalat?

**2292** Tükrözzük egy hegyesszögű háromszög magasságpontját a háromszög valamelyik

*a)* oldalegyenesére; *b)* oldalának felezőpontjára.

Bizonyítsuk be, hogy a tükörkép mindkét esetben illeszkedik a háromszög köré írt körre. Vizsgáljuk meg, hogy érvényesek maradnak-e az állítások derékszögű, illetve tompaszögű háromszögre is.

**2293** Az $ABCD$ húrnégyszög átlóinak $M$ metszéspontját merőlegesen vetítjük a négyszög oldalaira. A vetületi pontok legyenek rendre $P, Q, R, S$.

*a)* Bizonyítsuk be, hogy a $PQRS$ négyszög érintőnégyszög.

*b)* Bizonyítsuk be, hogy ha az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor a $PQRS$ négyszög is húrnégyszög.

**2294** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írt kör egy tetszőleges pontjából a háromszög oldalegyeneseire állított merőlegesek talppontjai egy egyenesre illeszkednek. Ezt az egyenest a köré írt kör adott pontjához tartozó Simson-egyenesnek nevezik.

## Párhuzamos szelők és párhuzamos szelőszakaszok tétele, szögfelezőtétel

**2295** Egy $O$ csúcspontú szög szárait két párhuzamos egyenessel elmetszettük úgy, hogy a csúcstól számítva az egyik száron a metszéspontok rendre $A, B$, a másik száron pedig $C, D$. Töltsük ki az alábbi táblázat hiányzó rovatait, ha $OA = a$, $AB = b$, $OC = c$, $CD = d$, illetve $AC = x$ és $BD = y$.

| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 cm | 4 cm | 3 cm | | 7 cm | |
| 2 cm | | 3 cm | | 4 cm | 9 cm |
| 3 cm | 6 cm | | 4 cm | | 8 cm |

**2296** Adott egy $AB$ szakasz. Adjunk szerkesztési eljárást a szakaszon olyan $P$ pont szerkesztésére, amelyre teljesül, hogy az $\frac{AP}{PB}$ tört értéke

*a)* $\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{1}{3}$; *c)* $\frac{3}{5}$.



**2297** Adjunk szerkesztési eljárást a szabályos háromszög szerkesztésére, ha kerülete egy adott szakasz hosszával egyenlő.

**2298** Adjunk szerkesztési eljárást a háromszög szerkesztésére, ha oldalainak aránya $2:3:4$, továbbá kerülete egy adott szakasz hosszával egyenlő.

**2299** Osszunk fel egy szakaszt két olyan részre, amelyek hosszának aránya megegyezik egy négyzet oldalának és átlójának arányával.

**2300** Egy szimmetrikus trapéz alapjainak hossza 6 cm és 15 cm, szárai 7 cm hosszúak. Számítsuk ki a trapéz kiegészítő háromszögének oldalait.

**2301** Egy trapéz rövidebb alapjának hossza 7 cm, kiegészítő háromszögének két másik oldala 2 cm és 6 cm hosszú. Számítsuk ki a trapéz szárainak hosszát, ha a másik alapjának hossza 15 cm.

**2302** Az $ABCD$ trapéz $AD$ szárának hossza 5 cm. A trapéz $DCE$ kiegészítő háromszögének $DE$ oldala 17,5 cm hosszú. Számítsuk ki a trapéz alapjainak hosszát, ha tudjuk, hogy az $AB$ alap 4 cm-rel hosszabb a $CD$ alapnál.

**2303** Az $ABCD$ paralelogramma $AB$ oldalának hossza 12 cm. Az $AB$ oldal $B$ ponton túli meghosszabbítására illeszkedő $E$ pontra teljesül, hogy $BE = 4$ cm. Számítsuk ki, hogy milyen arányban osztja az $ED$ egyenes a paralelogramma $BC$ oldalát.

**2304** Egy derékszögű háromszögbe téglalapot írunk úgy, hogy a téglalap két szomszédos oldala egy-egy befogóra, egy további csúcsa pedig az átfogóra esik. Az átfogóra illeszkedő csúcs az átfogót $1:4$ arányban osztja. Számítsuk ki a téglalap területét, ha a háromszög befogóinak hossza 16 cm és 30 cm. Hány különböző téglalap felel meg a feladat feltételeinek?

**2305** Egy egyenlő szárú háromszög alapja 10 cm, szárai 13 cm hosszúságúak. Mekkora részekre osztja az alaphoz tartozó magasságot az alapon fekvő egyik szög szögfelezője?

**2306** Egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóinak hossza 10 cm. Mekkora részekre osztja az egyik hegyesszög szögfelezője a szemközti befogót?

**2307** Barnabás szeret kirándulni a hegyekben. Egyik alkalommal egy egyenes, meredek úton csak 2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel tudott felkapaszkodni a hegytetőre. Útja során két nagy fa mellett is elhaladt, amelyek egymástól 300 méterre voltak. Térképéről leolvasta, hogy az első fa 45 méter magas. Milyen magas a másik a fa, ha az első fától fél óra kellett, hogy a hegytetőre érjen, és onnan a két fa csúcsát pontosan egy vonalban látta?

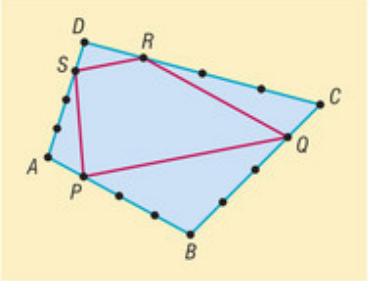
**2308** Aladár egy vízszintes terepen álló, ipari létesítmény magasságát szeretné megmérni. Megfigyelte, hogy ha az építménytől egyenes vonalban távolodik, akkor 120 métert megtéve egy 7 méter magas fához ér, míg ha még 30 métert továbbmegy, akkor olyan pontba érkezik, ahonnan a fa, valamint a létesítmény tetejét egy vonalban látja. Milyen magas az ipari létesítmény, ha Aladár szemmagassága pontosan 2 méter?

**2309** Az $ABCD$ konvex négyszög oldalainak negyedelő pontjai közül néhányat az ábra szerint összekötöttünk, így a $PQRS$ négyszöget kaptuk.

*a)* Bizonyítsuk be, hogy a $PQRS$ négyszög trapéz.

*b)* Számítsuk ki a $PQRS$ trapéz alapjainak hosszát, ha az $ABCD$ négyszög $AC$ átlója 20 cm hosszúságú.

*c)* Igaz marad-e az *a)* részfeladatban megfogalmazott állítás, ha az $ABCD$ négyszög konkáv?







**2310** Egy trapéz alapjainak hossza 6 cm, illetve 12 cm.

*a)* Bizonyítsuk be, hogy a trapéz átlói 1 : 2 arányban osztják egymást.

*b)* Számítsuk ki az átlók metszéspontján átmenő, a trapéz alapjaival párhuzamos egyenes trapézba eső szakaszának hosszát.

**2311** Az $ABC$ háromszög oldalainak hossza: $AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $AB = 7$ cm. Az $AB$ oldal $F$ felezőpontján át párhuzamost húzunk a $C$ csúcsból induló szögfelezővel, mely a $BC$ oldalt $D$-ben, az $AC$ oldal egyenesét $E$-ben metszi.

*a)* Mekkora részekre osztja a $C$ csúcsból induló szögfelező az $AB$ oldalt?

*b)* Számítsuk ki a $BD$, valamint az $AE$ szakaszok hosszát.

**2312** Egy derékszögű háromszögben a befogók hosszának aránya 15 : 8, az átfogója pedig 34 cm hosszúságú.

*a)* Számítsuk ki a hosszabb befogóhoz tartozó szögfelező hosszát.

*b)* Mekkora távolságra van a háromszögbe írható kör középpontja a derékszögű csúcstól?

**2313** Az $ABCD$ trapéz alapjainak hossza: $AB = 14$ cm, $CD = 9$ cm, valamint magassága 15 cm. A szárakat öt egyenlő részre osztjuk, majd az osztópontok közül a rövidebb alaphoz legközelebb lévőket összekötjük.

*a)* Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ trapézt két trapézra bontottuk.

*b)* Számítsuk ki a keletkező két trapéz közös alapjának hosszát.

*c)* Számítsuk ki a két trapéz területét.

**2314** Az $ABCD$ téglalap alakú kert oldalai: $AB = 40$ m, $BC = 42$ m. A telek tulajdonosa három gyermeke között a következők alapján kívánja szétosztani a kertet. Az $ABC$ háromszög $BC$ oldalához tartozó $AE$ szögfelezőjével levágja az $ABE$ háromszög alakú részt a legkisebb gyermekének. Az $ACD$ háromszög $CD$ oldalához tartozó $AF$ szögfelezőjével levágja az $AFD$ háromszög alakú részt a középső gyermeke részére, míg a maradék, négyszög alakú részt legidősebb gyermekének szánja. A kert hány százalékához jutnak így hozzá az egyes testvérek?

## Hasonlósági transzformációk, alakzatok hasonlósága

**2315** Vegyünk fel egy háromszöget, valamint a belsejében egy pontot. Kicsinyítsük a háromszöget az adott pontból a

*a)* felére; *b)* harmadára; *c)* $-\frac{1}{2}$-szeresére.

**2316** Vegyünk fel egy háromszöget, valamint a háromszögön kívül egy pontot. Nagyítsuk a háromszöget a pontból a

*a)* kétszeresére; *b)* $-2$ -szeresére.

**2317** Vegyünk fel egy $AB$ szakaszt, továbbá egy azzal párhuzamos, fele akkora hosszúságú $A'B'$ szakaszt. Szerkesszünk olyan pontot, amelyre vonatkozó középpontos hasonlóság az $AB$ szakaszt az $A'B'$ szakaszba viszi át, ha tudjuk, hogy az $A$, $B$, $A'$, $B'$ pontok nem illeszkednek egy egyenesre. Hány ilyen pont található a síkban?

**2318** Vegyünk fel egy háromszöget, majd szerkesszük meg a középvonalait. Szerkesszünk olyan pontot, amelyre vonatkozó középpontos hasonlóság a háromszöget a középvonalak alkotta háromszögbe viszi át. Mekkora a középpontos hasonlóság aránya?



**2319** Vegyünk fel egy pontot, egy szakaszt, valamint egy vele nem párhuzamos egyenest. Szerkesszük meg a szakasz adott pontra vonatkozó, középpontosan hasonló képét úgy, hogy egyik végpontja az egyenesre illeszkedjen. Hány megoldása van a feladatnak?

**2320** Adott két különböző sugarú kör, amelyeknek nincsen közös pontjuk. Adjunk szerkesztési eljárást olyan pont szerkesztésére, amelyre vonatkozó középpontos hasonlóság a nagyobb kört a kisebbe viszi át. Hány megoldása van a feladatnak? Hogyan módosul a feladat megoldhatósága, ha a két kör sugara egyenlő?

**2321** Zsuzsi gyalogtúrát tervez barátaival. Turistatérképén lemérve a tervezett útvonal hossza 57 cm. Mennyi idő alatt teszi meg a társaság a kiválasztott túraútvonalat, ha óránként átlagosan 3,8 km-t haladnak, továbbá Zsuzsi térképe 1 : 40 000 méretarányú?

**2322** Az alábbi állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis.

*a)* Bármely két szabályos háromszög hasonló.

*b)* Bármely két kör hasonló.

*c)* Ha két egyenlő szárú háromszögben egy-egy szög megegyezik, akkor a két háromszög hasonló.

*d)* Két egyenlő szárú háromszög hasonló, ha száraik által bezárt szögük egyenlő.

*e)* Ha két téglalapban az átlók ugyanakkora szöget zárnak be, akkor a téglalapok hasonlók.

*f)* Két rombusz hasonló, ha átlóik aránya megegyezik.

*g)* Két négyszög hasonló, ha megfelelő szögeik megegyeznek.

*h)* Ha két szabályos sokszögnek ugyanannyi oldala van, akkor a két sokszög hasonló egymáshoz.

**2323** Hasonlók-e egymáshoz az $ABC$ és $A'B'C'$ háromszögek, ha az

*a)* $AB = 2$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 6$ cm, valamint $A'B' = 5$ cm, $B'C' = 15$ cm, $A'C' = 15$ cm;

*b)* $AB = 1{,}5$ dm, $BC = 20$ cm, $AC = 3$ dm, valamint $A'B' = 75$ cm, $B'C' = 10$ dm, $A'C' = 150$ cm;

*c)* $AB = 10$ cm, $BC = 20$ cm, $AC = 15$ cm, valamint $A'B' = 6$ cm, $B'C' = 12$ cm, $A'C' = 8$ cm.

**2324** Egy háromszög oldalai 3 cm, 4 cm, illetve 6 cm. Mekkorák a hozzá hasonló háromszög oldalai, ha a

*a)* kerülete 19,5 cm; *b)* legrövidebb oldala 10,5 cm;

*c)* leghosszabb és legrövidebb oldalának különbsége 6 cm;

*d)* leghosszabb és legrövidebb oldalának összege 45 cm?

**2325** Egy négyszög adott sorrendben vett oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint 4 : 3 : 5 : 6-hoz. Határozzuk meg a hozzá hasonló négyszög oldalait, ha a

*a)* kerülete 72 cm; *b)* leghosszabb oldala 36 cm;

*c)* leghosszabb és legrövidebb oldalának összege 20 cm.

**2326** Az $ABC$ háromszögben az $AC = BC$. A háromszög $A$ csúcsából induló szögfelezője a $BC$ oldalt a $D$ pontban metszi. Mekkorák az $ABC$ háromszög szögei, ha a $BDA$ háromszög hasonló az $ABC$ háromszöghöz?

**2327** Az $ABC$ hegyesszögű háromszögben az $AB = 15$ cm. A háromszög $CA$ és $CB$ oldalait három egyenlő részre osztjuk. A $CA$ oldal $C$-hez közelebbi, valamint a $CB$ oldal $B$-hez közelebbi osztópontján át egyenest fektetünk; az egyenes a háromszög $AB$ oldalegyenesét a $D$-pontban metszi. Számítsuk ki a $BD$ szakasz hosszát.

**2328** Milyen arányban osztják egymást a trapéz átlói, ha alapjainak hossza 5 cm és 35 cm?

**2329** Egy trapéz átlói 1 : 5 arányban osztják egymást. Mekkora a trapéz hosszabb alapja, ha rövidebb alapja 12 cm hosszúságú? Oldjuk meg a feladatot, ha az átlók $p : q$ arányban osztják egymást ($p < q$).





**2330** Egy trapéz alapjainak hossza $a$ és $c$. A trapézt a szárakat összekötő, középvonalával párhuzamos egyenessel két hasonló négyszögre bontjuk. Fejezzük ki az egyenes trapézba eső szakaszának hosszát $a$-val, illetve $c$-vel.

**2331** Egy trapéz két alapjának hossza úgy aránylik egymáshoz, mint 3 : 7-hez, valamint egyik szára 20 cm. Milyen távolságra van a trapéz kiegészítő háromszögének trapézon kívüli csúcsa az ismert szár rövidebb alapra illeszkedő végpontjától?

**2332** Az $ABCD$ paralelogramma alakú parkon át két út húzódik; az egyik az $AC$ átló mentén halad, a másik az $AD$ oldalt 2 : 3 arányban osztó pontot köti össze a park $B$ csúcsával. Milyen arányban metszi egymást a két út?

**2333** Egy nagyváros külterületén új lakónegyed épült, melyet egy 1 : 1500 méretarányú térképen ábrázolva, 8 cm, illetve 10 cm oldalú téglalapot kapunk. A lakónegyed köré állandó szélességű járdát is terveznek.

*a)* Hány $m^2$ területet foglal el az új lakónegyed?

*b)* Hány $m^2$ járdát kell építeni, ha a szélessége 2 méter?

**2334** Vegyünk fel egy kört. Adjunk szerkesztési eljárást olyan háromszög szerkesztésére, amelynek az oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint 2 : 3 : 4-hez, továbbá

*a)* köré írható köre az adott kör; *b)* beírható köre az adott kör.

**2335** Adjunk szerkesztési eljárást a háromszög szerkesztésére, ha ismertek szögei, valamint adott egy szakasz, amelynek hossza a háromszög kerületével egyenlő.

**2336** Adjunk szerkesztési eljárást a háromszög szerkesztésére, ha adott egy szakasz, melynek hossza a háromszög kerületével egyenlő, továbbá ismerjük egyik szögét. A szöget közrefogó két oldal úgy aránylik egymáshoz, mint 2 : 3-hoz.

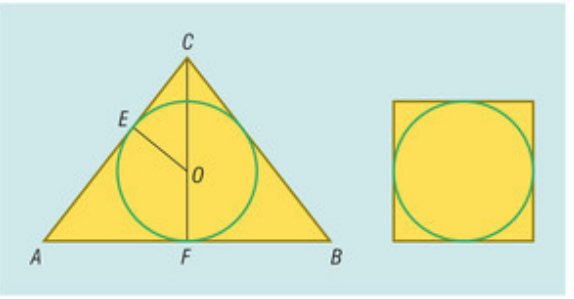
**2337** Az $ABC$ hegyesszögű háromszögben meghúzzuk az $AB$, valamint a $BC$ oldalakhoz tartozó magasságokat, amelyeknek talppontjai rendre $D$, illetve $E$.

*a)* Bizonyítsuk be, hogy a $BCD$ háromszög hasonló a $BAE$ háromszöghöz.

*b)* Mekkora részekre osztja az $E$ pont a háromszög $BC$ oldalát, ha az $ABC$ háromszög egyenlő szárú, $AB$ alapjának hossza 12 cm, $CD$ magasságának hossza pedig 8 cm?

**2338** Egy 60°-os szög szárait egy 10 cm sugarú kör érinti. Mekkora annak a körnek a sugara, amelyik szintén érinti a szögszárakat, továbbá az adott kört? Hány megoldása van a feladatnak?

**2339** Henger alakú díszgyertyák alapkörének átmérője 12 cm. A gyertyákat egyesével szeretnék becsomagolni. Kétféle csomagolási terv ötlete merül fel: az egyik szerint a gyertyákat olyan dobozba csomagolnák, amelynek alja egy 24 cm hosszú alappal rendelkező egyenlő szárú háromszög, amelynek az oldalait a gyertya alaplapja érintené; míg a másik szerint a négyzet alapú doboz lenne a legmegfelelőbb (ld. ábra).




*a)* Bizonyítsuk be, hogy az ábrán szereplő $OEC$, valamint $AFC$ háromszögek hasonlók egymáshoz.

*b)* Számítsuk ki az ábrán szereplő $ABC$ háromszög alaphoz tartozó $CF$ magasságát.

*c)* Hány százalékkal nagyobb a háromszög alapú doboz alapterülete a négyzet alapú doboz alapterületénél?



**2340** Egy tóparti település sétányán két különböző méretű, kör alakú zenepavilont építettek, amelyekből kizárólag főszezonban és esténként zenészek szórakoztatják a járókelőket. A kisebb sugara 5 méter, a nagyobbé 7 méter, a középpontjaik pedig 300 méter távolságra vannak egymástól. A település építészei azt javasolják, hogy a pavilonokat két egyenes sétaúttal kössék össze, amelyek a középpontokat összekötő szakaszon metszik egymást, és amelyek pontosan a pavilonok mellett haladnak el, vagyis érintik azokat.

*a)* A kisebb pavilon középpontjától milyen távolságra metszik egymást a kialakítandó sétautak?

*b)* Összesen milyen hosszú a két tervezett sétaút?

**2341** Az $ABC$ háromszög oldalainak hossza: $AB = 12$ cm, $BC = 18$ cm, $AC = 20$ cm. A háromszögbe rombuszt írunk úgy, hogy egyik csúcsa egybeesik a háromszög egyik csúcsával, a közös csúcsnál lévő oldalai a háromszög egy-egy oldalára, a szemközti csúcsa pedig a háromszög szemközti oldalára illeszkedik.

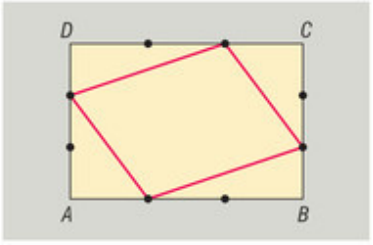
*a)* Hányféleképpen írhatunk így rombuszt a háromszögbe?

*b)* Számítsuk ki az egyes esetekben a rombusz oldalának hosszát.

**2342** A hegyesszögű $ABC$ háromszögben az $AB = 20$ cm, a $C$ csúcs az $AB$ oldaltól 12 cm távolságra van. A háromszögbe olyan téglalapot írunk, amelynek egyik oldala a háromszög $AB$ oldalára, az ezzel párhuzamos oldal egy-egy végpontja pedig az $AC$ és $BC$ oldalakra illeszkedik. Számítsuk ki a téglalap oldalainak hosszát, ha tudjuk, hogy a szomszédos oldalainak az aránya $3:5$. Hány megoldása van a feladatnak?

**2343** Egy egyenlő szárú háromszög alapja 24 cm, a hozzá tartozó magasság hossza 15 cm. A háromszögbe téglalapot írunk, amelynek egyik 8 cm hosszú oldala illeszkedik a háromszög alapjára, a másik két csúcsa pedig a háromszög egy-egy szárán található. Számítsuk ki a téglalap másik oldalának hosszát.

**2344** Egy téglalap szomszédos oldalainak megfelelő harmadolópontjait az ábra szerint összekötjük, és így a téglalap csúcsai mellett egy-egy háromszöget levágunk.



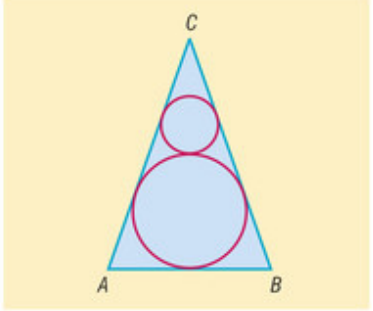

*a)* Mekkora a téglalapból visszamaradó négyszög oldalainak a hossza, ha a téglalap oldalai 18 cm, illetve 12 cm hosszúak?

*b)* Milyen speciális négyszög marad vissza a téglalapból?

**2345** Adott egy egyenlő szárú háromszög. Adjunk szerkesztési eljárást olyan kör szerkesztésére, amely érinti a háromszög szárait, valamint a háromszög köré írható kört.

**2346** Az $ABC$ egyenlő szárú háromszögben a $C$ csúcsnál derékszög van. Húzzuk meg az $A$ csúcsból kiinduló súlyvonal egyenesét, amelynek a háromszög köré írt körrel való ($A$-tól különböző) metszéspontja legyen $D$. Bizonyítsuk be, hogy $AD = 3 \cdot BD$.

**2347** Egy gyárban egyenlő szárú háromszög alakú vastag kartonból kör alakú céltáblákat készítenek. Egy-egy kartonból két különböző méretű kört vág ki a gép, amelyek érintik egymást, valamint az ábrán látható módon a háromszög oldalait is. A kisebb céltábla sugara 50 cm, a nagyobbé 1 méter.




*a)* Számítsuk ki a karton oldalainak hosszát.

*b)* Hány százalék veszteséggel dolgozik a gép?





**2348** Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz alapjai: $AB = 7$ cm, $CD = 13$ cm. A trapézba kör írható, amely a $BC$ szárat $E$, a $DA$ szárat $F$ pontban érinti.

*a)* Számítsuk ki a trapéz szárainak hosszát.

*b)* Bizonyítsuk be, hogy az $EF$ szakasz párhuzamos a trapéz alapjaival.

*c)* Számítsuk ki az $EF$ szakasz hosszát.

**2349** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontja, súlypontja és köré írt körének középpontja egy egyenesre illeszkednek. Ezt az egyenest a háromszög Euler-egyenesének nevezik. Számítsuk ki, hogy a súlypont milyen arányban osztja a magasságpont és a háromszög köré írt körének középpontja közti szakaszt.

**2350** Egy háromszög köré írt körét a háromszög magasságpontjából, mint középpontból, a felére kicsinyítjük. Az így keletkező kört a háromszög Feuerbach-körének nevezik. Bizonyítsuk be, hogy a Feuerbach-kör tartalmazza a következő kilenc pontot: a háromszög oldalfelező pontjait, a háromszög magasságainak talppontjait, valamint a háromszög csúcsait a magasságponttal összekötő szakaszok felezőpontjait.

## Arányossági tételek a derékszögű háromszögben és a körben

**2351** Számítsuk ki a kör sugarát, ha a 12 cm hosszúságú húrja egy 9 cm magasságú körszeletet vág le a körből.

**2352** Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 3 cm, illetve 5 cm. Mekkora részekre bontja az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót? Mekkora távolságra van a derékszögű csúcs az átfogótól?

**2353** Adjunk az egységnyi hosszúságú szakasz ismeretében szerkesztési eljárást olyan szakasz szerkesztésére, amelynek hossza

*a)* $\sqrt{5}$; *b)* $\sqrt{12}$.

**2354** Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogót két olyan szakaszra bontja, amelyek hossza 8 cm, illetve 24 cm. Mekkorák a háromszög befogói?

**2355** Egy derékszögű háromszög egyik befogója 13 cm, amelynek átfogóra eső merőleges vetülete 12 cm. Számítsuk ki a háromszög hiányzó oldalait, valamint az átfogójához tartozó magasságát.

**2356** Egy derékszögű háromszög átfogóját a hozzá tartozó magasság $2:5$ arányban osztja két részre. A háromszög befogóira kifelé négyzeteket szerkesztünk. Határozzuk meg a két négyzet területének arányát.

**2357** Adott egy szabályos háromszög. Adjunk szerkesztési eljárást olyan négyzet szerkesztésére, amelynek területe egyenlő a háromszög területével.

**2358** Adjunk szerkesztési eljárást négyzet szerkesztésére, amelynek területe megegyezik egy olyan téglalap területével, amelynek oldalai 3 cm, illetve 5 cm hosszúak.

**2359** Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz alapjai: $AB = 15$ cm, $CD = 5$ cm. A trapéz $AC$ átlója merőleges a trapéz $BC$ szárára. Számítsuk ki a trapéz területét.

**2360** Milyen hosszú érintő húzható a körhöz abból a pontból, amelyen keresztül húzott szelő szakaszai úgy aránylanak egymáshoz, mint $1:4$-hez, továbbá tudjuk, hogy az egyik szelőszakasz 12 cm-rel hosszabb, mint a másik?



**2361** Adott körhöz egy külső pontból 10 cm hosszúságú érintő húzható. A ponton át olyan szelőt húzunk a körhöz, amelynek rövidebb szelőszakasza és húrja úgy aránylik egymáshoz, mint 1 : 3-hoz. Számítsuk ki a szelőszakaszok hosszát.

**2362** Egy 5 cm sugarú körhöz egy külső ponton keresztül olyan szelőt húzunk, amelynek a körrel vett metszéspontjai közül a ponthoz közelebbi megfelezi a hosszabb szelőszakaszt. A pontból a körhöz $\sqrt{10}$ cm hosszúságú érintőszakasz húzható.

*a)* Mekkora távolságra van a pont a kör középpontjától?

*b)* Mekkora távolságra halad a szelő a kör középpontjától?

**2363** Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 1 : 3. A befogók átfogóra eső merőleges vetületeire kifelé egy-egy négyzetet szerkesztünk. Határozzuk meg a két négyzet területének arányát.

**2364** Egy derékszögű háromszög átfogóját a hozzá tartozó magasság 25 : 144 arányban osztja két részre. A háromszög rövidebb befogójának hossza 6,5 cm. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai?

**2365** Egy derékszögű háromszög befogói 15, illetve 36 cm hosszúak.

*a)* Mekkora részekre bontja az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót?

*b)* Számítsuk ki az átfogóhoz tartozó szögfelező hosszát.

*c)* Számítsuk ki a háromszögbe írható kör sugarát.

*d)* Mekkora távolságra van a háromszögbe írható kör középpontja a derékszögű csúcstól?

**2366** Két egybevágó derékszögű háromszög alakú kartonból deltoid alakú papírsárkányt készítünk úgy, hogy a háromszögeket átfogójuk mentén illesztjük egymáshoz. Az elkészült sárkányt átlói mentén egy-egy nádszállal megerősítjük. A felhasznált háromszög befogóinak aránya 5 : 12, átfogója 117 cm hosszúságú.

*a)* Milyen hosszú nádszálak szükségesek a sárkány megerősítéséhez?

*b)* A nádszálak milyen hosszúságú részekre bontják egymást?

Az eredményeket egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg!

**2367** Egy $r$ sugarú, $O$ középpontú körhöz húzunk két párhuzamos érintőt, majd behúzzuk a kör egy további érintőjét is, amelyből a két párhuzamos kimetszi a $PQ$ szakaszt.

*a)* Bizonyítsuk be, hogy a $PQO$ háromszög derékszögű.

*b)* Bizonyítsuk be, hogy a $PQ$ szakaszt tartalmazó érintő érintési pontja két olyan részre osztja a $PQ$ szakaszt, amelyeknek mértani közepe $r$.

**2368** Az $O$ középpontú, $r$ sugarú körhöz húzzunk érintőt a középponttól $c$ távolságra lévő $P$ pontból; az érintési pontot jelölje $E$. Húzzuk meg továbbá a $P$ és $O$ pontokra illeszkedő szelőt; a körrel való metszéspontjait jelölje $A$, illetve $B$.

*a)* Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével.

*b)* Fejezzük ki a szelőszakaszok hosszát $c$ és $r$ segítségével.

*c)* Alkalmazzuk a körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tételét. Milyen nevezetes geometriai tétel állítását olvashatjuk ki a felírt összefüggésből?

**2369** Az $ABC$ derékszögű háromszögben az $AC$ befogó 60°-os szöget zár be az $AB$ átfogóval. A $B$ ponton át olyan egyenest húzunk, amely a háromszög köré írt körét $D$-ben, az $A$ kezdőpontú $AC$ félegyenest pedig $E$-ben metszi, továbbá $EC = ED = 6$ cm.

*a)* Bizonyítsuk be, hogy az $ABE$ háromszög szabályos.

*b)* Számítsuk ki az $ABC$ háromszög köré írt kör sugarát.





**2370** Egy derékszögű háromszög alakú park befogóinak hossza: 160 méter, illetve 120 méter. A park szélein, valamint az átfogójához tartozó magassága mentén egyenes sétautak húzódnak. Az utóbbi sétaút a parkot két részre vágja szét.

*a)* Számítsuk ki, hogy milyen hosszú sétával lehet a park egy-egy részét az utak mentén körbesétálni.

A park mindkét felében egy-egy szökőkút építését tervezik úgy, hogy a kutak az adott rész mentén húzódó sétautak mindegyikétől egyenlő távolságra legyenek.

*b)* Számítsuk ki, hogy a szökőkutak milyen távolságra lesznek egymástól. Az eredményt egész méterre kerekítve adjuk meg!

**2371** Az $ABC$ hegyesszögű háromszög $AB$ és $AC$ oldalai fölé kifelé félköröket szerkesztünk. A háromszög $AC$ oldalához tartozó magasságvonal talppontja $Q$, az $AC$ oldalra rajzolt félkörrel való metszéspontja $N$. A háromszög $AB$ oldalához tartozó magasságvonal talppontja $P$, az $AB$ oldalra rajzolt félkörrel való metszéspontja pedig $M$.

*a)* Készítsünk ábrát a feladat szövege alapján. *b)* Bizonyítsuk be, hogy $AP \cdot AB = AQ \cdot AC$.

*c)* Bizonyítsuk be, hogy az $A$ csúcs ugyanolyan távolságra van az $M$ és $N$ pontoktól.

**2372** Az $ABCD$ derékszögű érintőtrapéz $AB$ és $CD$ alapjainak ($AB > CD$) összege 20 cm. A trapézba írt kör középpontja $O$. A beírt körnek az alapokra nem merőleges $AD$ szárral vett érintési pontja negyedeli az $AD$ szárat.

*a)* Bizonyítsuk be, hogy az $OAD$ háromszög derékszögű.

*b)* Számítsuk ki a trapézba írható kör sugarának és az alapokra nem merőleges szár hosszának arányát.

*c)* Számítsuk ki a trapéz szárainak hosszát egy tizedesjegy pontossággal.

**2373** Az $ABC$ nem egyenlő szárú hegyesszögű háromszög $BC$ oldalának felezőpontja $F$, az $A$ csúcsból induló szögfelező a $BC$ oldalt $G$-ben metszi. Az $A$, $G$, $F$ pontokon átmenő körnek az $AB$, illetve az $AC$ oldallal vett, $A$-tól különböző metszéspontjai rendre $B_1$, illetve $C_1$. Bizonyítsuk be, hogy $BB_1 = CC_1$.

**2374** Bizonyítsuk be a körhöz húzott szelőszakaszok tételének alábbi megfordítását: ha egy $P$ csúcspontú szög egy-egy szárán úgy jelöljük ki az $A$, $B$, illetve az $A'$, $B'$ pontokat, hogy $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$ teljesüljön, akkor az $A$, $B$, $A'$, $B'$ pontok egy körre illeszkednek.

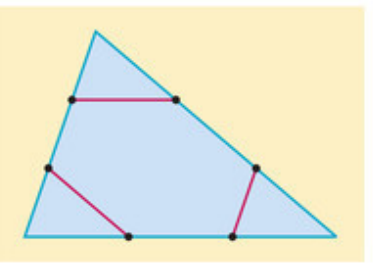
## A hasonlóság néhány alkalmazása a terület- és térfogatszámításban

**2375** Egy háromszög oldalainak hossza 21 cm, 28 cm, illetve 35 cm.

*a)* Bizonyítsuk be, hogy a leghosszabb oldalhoz tartozó magasság a háromszöget két hasonló háromszögre bontja.

*b)* Számítsuk ki a létrejövő két háromszög területének arányát.

**2376** Egy háromszög alakú virágágyásba négyféle virágot szeretnénk ültetni, ezért azt az oldalak harmadolópontjai mentén négy részre osztottuk. Liliomot a középső, hatszög alakú részbe ültetünk. Számítsuk ki, hogy ez hányadrésze a teljes virágágyásnak. (➡)



**2377** Három kör sugarának összege 20 cm. Számítsuk ki a körök sugarát, ha területük aránya

*a)* $1:16:36$; *b)* $2:3:4$.



**2378** Egy szabályos sokszög szomszédos oldalfelező pontjait összekötjük, így egy újabb sokszöget kapunk. Számítsuk ki a beírt sokszög és a kiindulásul vett sokszög területének arányát, ha az oldalak száma:

*a)* 3; *b)* 4; *c)* 6.

**2379** Az $ABCD$ trapéz alapjainak hossza: $AB = 18$ cm, $CD = 12$ cm. A trapéz átlói az $E$ pontban metszik egymást.

*a)* Számítsuk ki az $ABE$ és a $CDE$ háromszögek területének arányát.

*b)* Számítsuk ki az $ABE$ és a $CDE$ háromszögek területét, ha a trapéz területe 150 $cm^2$.

*c)* Mekkora a $BCE$, valamint a $DAE$ háromszögek területe?

**2380** András téglatest alakú akváriumának méretei 50 cm, 30 cm, 20 cm. Béla akváriuma hasonló András akváriumához, és 3,375-szer annyi víz tárolására alkalmas, mint Andrásé. Határozzuk meg Béla akváriumának méreteit.

**2381** Az ásványvizet műanyag palackokban, különböző kiszerelésben hozzák forgalomba. Egy cég üzletpolitikája szerint a különböző méretű palackoknak egymáshoz hasonlóknak kell lenniük. Hányszor olyan magas egy kétliteres palack, mint egy negyedliteres?

**2382** Egy gúla magassága 15 cm. A gúlát az alaplapjával párhuzamos síkkal egy kisebb gúlára, valamint egy csonkagúlára vágtuk szét. A csonkagúla, valamint az eredeti gúla térfogatának aránya $\frac{117}{125}$.

*a)* Milyen magas a kisebb gúla?

*b)* Számítsuk ki a kisebb gúla, valamint az eredeti gúla felszínének arányát.

**2383** Egy szabályos háromszög oldala 12 cm. Az egyik oldallal párhuzamos egyenes a háromszöget két olyan síkidomra bontja, amelyeknek a területe megegyezik. Számítsuk ki a keletkező két síkidom kerületének arányát.

**2384** Egy szabályos háromszög oldala 12 cm. A háromszög egy rögzített oldalával párhuzamos egyenes a háromszöget két olyan részre bontja, amelyek területének aránya $1 : 3$.

*a)* Hány ilyen párhuzamos húzható?

*b)* Milyen hosszúságú az egyenesnek a háromszögbe eső darabja az egyes esetekben?

**2385** Egy hegyesszögű háromszög alakú mezőgazdasági terület $AB$ oldala a $C$ csúcstól 500 méter távolságra található. A területet két, az $AB$ oldallal párhuzamosan kiépített út három részre osztja, melyek közül a két út közötti rész a földterületnek 68%-a, a másik két rész területe megegyezik. Számítsuk ki, hogy az utak a $C$ csúcstól milyen távolságra haladnak.

**2386** A kockacukrot az egyik gyártó olyan téglatest alakú dobozban hozza forgalomba, amelyben mind a 6 sorban ugyanannyi kockacukor található, mégpedig 6-szor 9-es elrendezésben. Zsuzsi egyik alkalommal megfigyelte, hogy a dobozban maradt kockacukrokból olyan téglatestet tud építeni, amelyik hasonló az eredeti, hiánytalan dobozhoz. Az ép dobozban megtalálható kockacukrok hányadrésze maradt Zsuzsi dobozában, ha tudjuk, hogy minden kockacukrot beépített, és a dobozból már néhány kockacukrot korábban elfogyasztott? Hány megoldása van a feladatnak?

**2387** Egy gúla alaplapjának területe 30 $cm^2$. A gúlát az alaplapjával párhuzamos síkokkal három egyenlő térfogatú részre vágjuk.

*a)* Számítsuk ki, hogy a metszősíkok a gúla csúcsától milyen távolságra találhatók, ha a gúla magassága 18 cm.

*b)* Mekkora területű síkidomokat metszenek ki a síkok a gúlából?

Az eredményeket egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg!





**2388** A Varázsgömb Kft. földgömbök forgalmazásával foglalkozik. A földgömb, amit árusítanak 32 cm sugarú, és olyan kocka alakú kartonba csomagolják, amelybe a gömb pontosan belefér, azaz a dobozba helyezett gömb a doboz minden lapját érinti.

*a)* Számítsuk ki, hogy hány $m^2$ karton szükséges 10 000 doboz elkészítéséhez.

A Kft. számára a raktározás komoly költségekkel jár, ezért úgy döntöttek, hogy a legyártott földgömbök számát nem változtatják, de a gömb sugarát 24 cm-re csökkentik.

*b)* Hányszorosára változik a dobozok elkészítéséhez szükséges karton mennyisége a földgömb sugarának csökkentése után?

*c)* Igaz-e, hogy a csökkentés után feleakkora raktárban is elférnek a becsomagolt földgömbök?

**2389** Az $ABC$ háromszög $AB$ oldalának egy belső pontján át párhuzamosokat húzunk az $AC$, valamint a $BC$ oldalakkal. A két párhuzamos a háromszöget két kisebb háromszögre, valamint egy négyszögre bontja. A keletkező két háromszög területe 4 $cm^2$, illetve 9 $cm^2$. Számítsuk ki az $ABC$ háromszög területét.

**2390** Az $ABCD$ konvex négyszög belsejében jelöljünk ki egy tetszőleges $P$ pontot. Az $ABP$, $BCP$, $CDP$, illetve $DAP$ háromszögek súlypontját jelölje rendre $E$, $F$, $G$, illetve $H$.

*a)* Bizonyítsuk be, hogy az $EFGH$ négyszög paralelogramma.

*b)* Számítsuk ki az $EFGH$, valamint az $ABCD$ négyszögek területének arányát.

**2391** Az $ABC$ derékszögű háromszög befogói: $AC = 12$ cm, $BC = 5$ cm. A háromszög $C$ csúcsából húzott szögfelező az átfogót a $D$ pontban metszi. Az $A$ csúcson át a $CD$ szögfelezővel húzott párhuzamos a $BC$ befogó egyenesét az $E$ pontban metszi.

*a)* Bizonyítsuk be, hogy az $AEC$ háromszög egyenlő szárú.

*b)* Számítsuk ki az $AECD$ négyszög területét.

## Vegyes feladatok I.

**2392** Egy háromszög két szögének nagysága 25° és 35°. A háromszög minden csúcsában érintőt húzunk a háromszög köré írt körhöz.

*a)* Keressünk érintő szárú kerületi szögeket a kialakult ábrában.

*b)* Számítsuk ki az érintők által közrefogott háromszög belső szögeinek nagyságát.

**2393** Az $ABC$ hegyesszögű háromszög $A$, illetve $B$ csúcsából kiinduló magasságvonalainak talppontja rendre $E$, illetve $F$. A két magasságvonal az $M$ pontban metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy a $CFME$ négyszög húrnégyszög. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög köré írható kör középpontja illeszkedik a négyszög egyik átlójára.

**2394** Egy trapéz belső szögfelezőiről tudjuk, hogy négyszöget fognak közre. Milyen speciális négyszög keletkezik?

**2395** Egy paralelogramma belső szögfelezőiről tudjuk, hogy négyszöget fognak közre. Igaz-e, hogy a keletkező négyszög húrnégyszög? Számítsuk ki a négyszög szögeit.

**2396** Egy szimmetrikus trapéz alapjai 5 cm és 15 cm hosszúak. A trapéz egyik átlóját felosztjuk 3 : 1 arányban úgy, hogy az osztópont a hosszabb alaphoz legyen közelebb, majd a kapott ponton át párhuzamost húzunk az alapokkal.

*a)* Milyen arányban osztják egymást a trapéz átlói?

*b)* Számítsuk ki az alapokkal párhuzamosan húzott egyenes átlók közé eső szakaszának hosszát.



**2397** Az $ABCD$ paralelogramma $AB$ alapjának $A$ végpontját összekötjük a $CD$ alap felezőpontjával. Milyen arányban osztja a behúzott szakasz a trapéz $BD$ átlóját?

**2398** Az $ABC$ háromszög $AB$ oldalának egy tetszőleges $P$ belső pontján át párhuzamost húzunk a háromszög $C$ csúcsát is tartalmazó súlyvonalával. A párhuzamos az $AC$, illetve $BC$ egyeneseket rendre a $D$, illetve $E$ pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a $PD$ és $PE$ szakaszok hosszának összege kétszer akkora, mint a háromszög $C$ csúcsából induló súlyvonalának hossza.

**2399** Az $ABCD$ téglalapban: $AB = 9$ cm, $BC = 6$ cm. A téglalap $D$ csúcsából merőlegest állítunk az $AC$ átlóra, mely az átlót $E$-ben, az $AB$ oldalt $G$-ben metszi.

*a)* Bizonyítsuk be, hogy az $ADE$, valamint a $GDA$ háromszögek hasonlók a $CAB$ háromszöghöz.

*b)* Számítsuk ki az $ADE$, valamint a $GDA$ háromszögek oldalait.

**2400** Egy 10 cm sugarú körhöz egy külső ponton keresztül húzott szelő a kör középpontjától 6 cm távolságra halad. Milyen hosszúságú érintőszakaszok húzhatók a pontból a körhöz, ha tudjuk, hogy a szelő rövidebb szelőszakasza 4 cm hosszú?

**2401** Egy húrnégyszög legnagyobb és legkisebb szögének különbsége 140°. Másik két szöge közül a nagyobb másfélszerese a kisebbnek. Számítsuk ki a négyszög szögeit.

**2402** Adott hegyesszögű $ABC$ háromszög $AB$ és $AC$ oldalaira kifelé szerkesszünk szabályos háromszögeket. A kapott szabályos háromszögek köré írható körök az $A$ ponton kívül a $P$ pontban metszik még egymást.

*a)* Mekkora szögben látszódnak az $ABC$ háromszög oldalai a $P$ pontból?

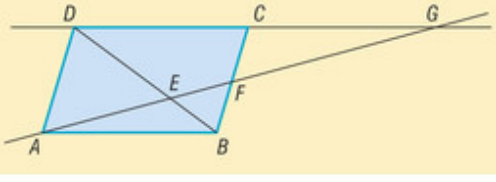
*b)* Bizonyítsuk be, hogy a $BC$ oldalra kifelé rajzolt szabályos háromszög köré írt kör szintén átmegy a $P$ ponton.

**2403** Az $ABCD$ húrnégyszög $BD$ átlója a négyszöget két háromszögre bontja. Bizonyítsuk be, hogy a két háromszög magasságpontjai, valamint a $BD$ átló végpontjai szintén húrnégyszöget alkotnak.

**2404** Adjunk szerkesztési eljárást téglalap szerkesztésére, ha két szomszédos oldalának hossza úgy aránylik egymáshoz, mint 3 : 2-höz, továbbá a téglalap egyik oldala egy adott háromszög kiválasztott oldalára, az ezzel párhuzamos oldalának két végpontja a háromszög egy-egy további oldalára illeszkedik. Hány megoldása van a feladatnak?

**2405** Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög valamelyik magasságvonala a háromszöget két hasonló háromszögre bontja, akkor a háromszög vagy egyenlő szárú, vagy derékszögű.

**2406** Az $ABCD$ paralelogramma $A$ csúcsán át egyenest húzunk, amely a $BD$ átlót $E$-ben, a $BC$ oldalt $F$-ben, végül a $CD$ oldal egyenesét $G$-ben metszi.




*a)* Keressünk az ábrán az $AED$ háromszöghöz hasonló háromszöget.

*b)* Keressünk az ábrán a $GDE$ háromszöghöz hasonló háromszöget.

*c)* Bizonyítsuk be, hogy $AE^2 = EF \cdot EG$.

**2407** *a)* Bizonyítsuk be a körhöz belső pontból húzott szelőszakaszok tételének alábbi változatát. Ha egy körlap valamely $P$ belső pontján át két húrt húzunk, amelyek végpontjai $A$, $B$, illetve $A'$, $B'$, akkor $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$.

*b)* Fejezzük ki a $PA \cdot PB$ szorzat értékét a kör $r$ sugara, valamint a $P$ pont és a kör középpontja közötti $x$ távolság segítségével.

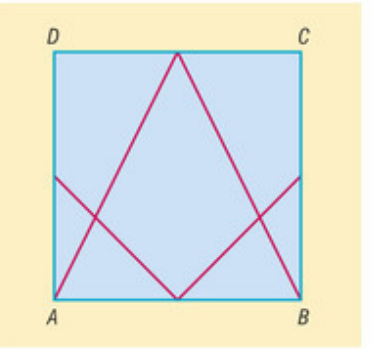




**2408** Barnabás egy négyzet alakú kartonból papírsárkányt készített. A papírt az ábrán látható vágások mentén szabdalta szét, majd a középen kialakuló négyszöget használta fel a sárkány megépítéséhez. A vágások csak a négyzet csúcsait és oldalfelező pontjait érintették.

*a)* Hány százaléka a sárkány területe a kiindulásul vett kartonlap területének?

*b)* Mekkora a sárkány területe, ha a négyzet oldala 3 méter?




**2409** Jelöljük a hegyesszögű $ABC$ háromszög $B$, illetve $C$ csúcsának a háromszög szemközti oldalára eső merőleges vetületét $B'$-vel, illetve $C'$-vel. Bizonyítsuk be, hogy az $A$ csúcsból a $B'C'$ egyenesre állított merőleges egyenes átmegy az $ABC$ háromszög köré írt kör középpontján.

**2410** Az $ABCD$ húrnégyszög $AC$ átlóján jelöljük ki a $P$ pontot úgy, hogy $ABP\sphericalangle = CBD\sphericalangle$ teljesüljön.

*a)* Bizonyítsuk be, hogy a $BP$ szakasz az $ABC$ háromszöget két olyan háromszögre vágja szét, amelyek közül az egyik hasonló az $ABD$, a másik hasonló a $BCD$ háromszöghöz.

*b)* Bizonyítsuk be Ptolemaiosz következő tételét: a húrnégyszögben a szemközti oldalak szorzatösszege egyenlő az átlók szorzatával.

## Távolságok meghatározása hasonlóság segítségével, hegyesszögek szögfüggvényei

**2411** Egy 80 cm magas bot árnyéka 50 cm hosszú. Milyen magas az az épület, amelynek az árnyéka ugyanebben az időben

*a)* 25 m; *b)* 40 m; *c)* 70 m?

**2412** Egy csákányos sífelvonó, amely másodpercenként 2,8 m utat tesz meg, 3 perc 30 másodperc alatt ér fel a hegytetőre. Milyen magasra visz a felvonó, ha az emelkedési szög végig 30°?

**2413** Egy nyeregtetős ház alapja olyan téglalap, amelynek két oldala 15 és 30 m hosszú. Az északi és a déli oldalon a tető síkja a vízszintessel egyaránt 45°-os szöget zár be. Mekkora a padlástér legnagyobb magassága, ha a padlástérnek a keresztmetszete egy olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja 15 m?

**2414** Jelölje $a$ és $b$ egy derékszögű háromszög befogóit, $c$ pedig az átfogót. Az $a$ oldallal szemben $\alpha$, a $b$ oldallal szemben $\beta$ szög van.

Adjuk meg a táblázat hiányzó adatait ($x > y$ és $x$, $y$ pozitív).

| $a$ | $b$ | $c$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\sin\beta$ | $\cos\beta$ | $\operatorname{tg}\beta$ | $\operatorname{ctg}\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 cm | 40 cm | | | | | | | | | |
| | 35 m | 37 m | | | | | | | | |
| 33 dm | | 65 dm | | | | | | | | |
| 2,1 km | 5,4 km | | | | | | | | | |
| $x-y$ | $2\cdot\sqrt{x\cdot y}$ | | | | | | | | | |



**2415** Szerkesszük meg azt a hegyesszöget, amelynek

*a)* szinusza: $\frac{4}{5}$; 0,7; $\frac{1}{\sqrt{5}}$;

*b)* koszinusza: $\frac{1}{3}$; 0,12; $\frac{2}{\sqrt{11}}$;

*c)* tangense: $\frac{1}{2}$; 4; 0,9; $\frac{3}{\sqrt{2}}$;

*d)* kotangense: $\frac{7}{3}$; 2; 0,6; $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

**2416** Adjuk meg a következő hegyesszögek szinuszának, koszinuszának, tangensének és kotangensének értékeit négy tizedesjegy pontossággal:

*a)* 78°54'; 28°12'; 13°41';

*b)* 54,6°; 36,8°, 47,4°;

*c)* $\frac{\pi}{10}$; $\frac{\pi}{18}$; $\frac{2\pi}{5}$.

**2417** Határozzuk meg két tizedesjegy pontossággal az $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ és $\delta$ hegyesszögeket, ha

*a)* $\sin\alpha = 0{,}0828$; 0,7843; 0,5481;

*b)* $\cos\beta = 0{,}4692$; 0,8753; 0,9622;

*c)* $\operatorname{tg}\gamma = 2{,}255$; 4,342; 0,534;

*d)* $\operatorname{ctg}\delta = 0{,}3553$; 3,456; 1,397.

**2418** Jelölje $a$ és $b$ egy derékszögű háromszög befogóit, $c$ pedig az átfogót. Az $a$ oldallal szemben $\alpha$, a $b$ oldallal szemben $\beta$ szög van. Adjuk meg a táblázat hiányzó adatait.

| $a$ | $b$ | $c$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|
| 41 cm | 13 cm | | | |
| | 12 cm | 52 cm | | |
| 10 dm | | | 12° | |
| | | 16 m | | 54°12' |
| | | $c$ | $\alpha$ | |

**2419** Egy mélygarázsba vezető, egyenes lehajtó 8 m hosszú. Milyen mélyre visz a lehajtó, ha a lejtő a vízszintessel 17°-os szöget zár be?

**2420** Egy emelkedő a vízszintessel 12°-os szöget zár be, és a vízszintesre eső merőleges vetülete 200 m. Milyen magasra visz az emelkedő?

**2421** Egy hegyi út emelkedése 12%. Milyen hosszú az út, ha 300 méter magasra visz?

**2422** Mekkora szögben érkeznek a napsugarak a talajra, ha egy függőleges rúd árnyéka 75%-a a rúd hosszának?

**2423** Egy csavar átmérője 9 mm. Milyen magas egy csavarmenet, ha emelkedési szöge 5°?

**2424** A szegedi fogadalmi templom toronyórája az előtte lévő tér szintje felett 72 méterre van. A torony lábától 50 méterre milyen emelkedési szögben látszik az óra?

**2425** Egy közvetlenül a folyó partján álló épület 20 m magasan levő ablakából a folyó szélességét 80°-os szög alatt látjuk. Milyen széles a folyó?

**2426** A Budapest Sportarénában rendezett koncerten a színpad felett 12 méter magasan az énekest 17° depressziószög alatt látjuk. Milyen távol van tőlünk az énekes?

**2427** Egy 3 m hosszú létrát a teherbíró képessége miatt csak úgy szabad a falhoz támasztani, hogy annak a vízszintessel bezárt szöge legalább 66° legyen. Legfeljebb mekkora távolságra lehet a létra alja a faltól?

**2428** Egy derékszögű háromszög kerülete 70 cm, egyik hegyesszöge 50°. Mekkorák a háromszög oldalai?





**2429** Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszögének szinusza $\frac{5}{13}$, a területe 1,2 m$^2$.

*a)* Mekkora ennek a hegyesszögnek a koszinusza?

*b)* Mekkorák a háromszög oldalai?

**2430** Mekkorák annak a derékszögű háromszögnek a hegyesszögei, amelyben a befogókhoz tartozó súlyvonalak hossza $\sqrt{52}$ cm és $\sqrt{73}$ cm?

**2431** Egy derékszögű háromszög $\alpha$ hegyesszögével szemben lévő befogójának és az átfogójának hossza egy-egy irracionális, a szög melletti befogójának hossza egy racionális szám. Az $\alpha$ szög melyik szögfüggvényének értékéről állíthatjuk biztosan, hogy irracionális szám?

**2432** Adjuk meg a $\operatorname{tg} 22{,}5^\circ$ pontos értékét.

**2433** Egy szög és pótszöge szinuszának különbsége 0,2.

*a)* Adjuk meg ezeknek a szögeknek a közelítő nagyságát két tizedesjegy pontossággal.

*b)* Szerkesszük meg ezt a két szöget.

**2434** Az $ABC$ derékszögű háromszögben $C$ csúcsnál van a derékszög. Az átfogóhoz tartozó magasság és a súlyvonal hosszának aránya 12 : 37. Számítsuk ki a derékszögű háromszög hegyesszögei szinuszának pontos értékét.

**2435** Adjuk meg a $\sin 18^\circ$ pontos értékét.

**2436** Egy derékszögű háromszög $\alpha$ hegyesszögével szemben lévő befogójának hossza 13 cm, a másik befogó hossza centiméterekben mérve páratlan természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy $\sin\alpha$ irracionális szám.

**2437** Vegyünk fel egy $ABC$ derékszögű háromszöget, amelynek befogói $AB = BC = 1$ egység. Az $AC$-re emeljünk $C$-ben merőlegest, és jelöljünk ki rajta egy $C_1$ pontot úgy, hogy $CC_1$ hossza 1 egység legyen. Ezután az $AC_1$-re emeljünk $C_1$-ben merőlegest, és jelöljünk ki rajta egy $C_2$ pontot úgy, hogy $C_1C_2$ hossza is 1 egység legyen. Ezt többször végrehajtva az $ABC, ACC_1, \ldots, AC_{n-2}C_{n-1}$ derékszögű háromszögeket kapjuk. A derékszögű háromszögek $A$-nál levő szögei legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ($\alpha_1 = 45^\circ$). Bizonyítsuk be, hogy

$$\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \ldots + \operatorname{tg}\alpha_n \geq \operatorname{ctg}\alpha_n.$$

## Összefüggések hegyesszögek szögfüggvényei között, nevezetes szögek szögfüggvényei

**2438** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket ($\alpha$ hegyesszög):

*a)* $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$;

*b)* $(1 - \cos\alpha)\cdot(1 + \cos\alpha)$;

*c)* $\dfrac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha} + \cos\alpha$;

*d)* $\cos\alpha \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$;

*e)* $\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

*f)* $\dfrac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

**2439** Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:

*a)* $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

*b)* $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

*c)* $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = 1$;

*d)* $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = 1$.



**2440** Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét:

*a)* $\sin 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \sin 50^\circ + \cos^2 50^\circ$;

*b)* $(1 - \cos 10^\circ) \cdot (1 + \sin 80^\circ) + \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 10^\circ}$;

*c)* $\cos^2 20^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 20^\circ + \operatorname{ctg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ + \sin^2 70^\circ$.

**2441** Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét zsebszámológép használata nélkül:

*a)* $3 \cdot \sin 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ$;

*b)* $\sin 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$;

*c)* $\dfrac{\cos 30^\circ - \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ - \cos 45^\circ}$;

*d)* $\sin^2 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \cos^2 60^\circ$;

*e)* $\sin^2 30^\circ - 2 \cdot \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$;

*f)* $\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$;

*g)* $(\operatorname{tg} 15^\circ - 1) \cdot (\operatorname{tg} 30^\circ - 1) \cdot (\operatorname{tg} 45^\circ - 1) \cdot (\operatorname{tg} 60^\circ - 1) \cdot (\operatorname{tg} 75^\circ - 1)$.

**2442** A táblázatban megadtuk néhány hegyesszög egy szögfüggvényének értékét. Adjuk meg a szögek többi szögfüggvényének értékeit a hegyesszögek kiszámítása nélkül ($0 < a < 1$, $b > 1$).

| $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{3}{5}$ | | | |
| | 0,2 | | |
| | | 4 | |
| | | | $\frac{1}{3}$ |
| $a$ | | | |
| | | $\sqrt{b^2-1}$ | |

**2443** Mely $\alpha$ hegyesszögekre igaz, hogy:

*a)* $\sin\alpha > \cos\alpha$;

*b)* $\operatorname{ctg}\alpha > \operatorname{tg}\alpha$.

**2444** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

*a)* $\dfrac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

*b)* $2 \cdot (\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3 \cdot (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$.

**2445** Határozzuk meg a következő kifejezés pontos értékét:

$$\left(1 - \cos\frac{\pi}{12}\right) \cdot \left(1 + \sin\frac{5\pi}{12}\right) + \cos\frac{5\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}.$$

**2446** Milyen $x$ hegyesszögekre teljesül a $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$ egyenlőség?

**2447** Adjuk meg a 72° szögfüggvényeinek pontos értékét.

**2448** Legyen $\alpha$ egy tetszőleges hegyesszög. Határozzuk meg a $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ kifejezés maximumát.

**2449** Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha$ egy hegyesszög, akkor:

$$1 < \sin\alpha + \cos\alpha \leq \sqrt{2}.$$

**2450** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$2 \cdot (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha)^2 - (\sin^8\alpha + \cos^8\alpha).$$

**2451** Van-e olyan $\alpha$ hegyesszög, amelyre teljesül, hogy

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 5?$$





# Háromszögek különböző adatainak meghatározása szögfüggvények segítségével

**2452** Egy egyenlő szárú háromszög alapja 20 cm, szárai 25 cm hosszúak. Mekkorák a háromszög szögei?

**2453** Egy egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága 20 cm, az alap felezőpontjából a szárra bocsátott merőleges hossza 12 cm. Hány fokosak a háromszög szögei?

**2454** Egy óra 22 cm hosszú ingája két szélső helyzetében 17°-os szöget zár be. Mekkora az inga végpontjának két szélső helyzete közötti távolság?

**2455** Egy lombseprű egy pontból kiinduló egyenként 38 cm hosszú 9 darab foga egymással egyenlő szögeket zár be. A két szélső fog végeinek egymástól mért távolsága 40 cm. Mekkora szöget zár be két szomszédos fog?

**2456** Egy egyenlő szárú háromszög alapja 42 cm, szárszöge 50°. Az alapot mindkét irányban a szár hosszával meghosszabbítjuk. Mekkorák az így keletkezett háromszög oldalai?

**2457** A következő táblázatban szabályos sokszögek néhány adatát adtuk meg. Töltsük ki a táblázatot ($R$, $r$, $a$ pozitívak, $n > 2$ természetes szám).

| Oldalak száma ($n$) | Egy oldal hossza ($a$) | Beírt kör sugarának hossza ($r$) | Köré írt kör sugarának hossza ($R$) |
|---|---|---|---|
| 5 | 10 cm | | |
| 12 | | | 7 cm |
| 9 | | 9 cm | |
| $n$ | $a$ | | |
| $n$ | | $r$ | |
| $n$ | | | $R$ |

**2458** Egy 24 cm sugarú körben levő 30 cm hosszú húrhoz mekkora középponti szög tartozik?

**2459** Egy 6 cm sugarú körben mekkora húrhoz tartozik 40°-os kerületi szög?

**2460** Mekkora annak a körnek a sugara, amelynek 7 cm hosszúságú húrjához 32°17' kerületi szög tartozik?

**2461** Egy 10 cm sugarú körben mekkora lehet az a kerületi szög, amely egy 7 cm hosszúságú húrhoz tartozik?

**2462** Egy háromszög egyik oldala 4 cm hosszú. Mekkora lehet az oldallal szemközti szög, ha a háromszög köré írt körének sugara 5 cm?

**2463** Egy háromszög két oldala 20 dm és 43 dm hosszú, az általuk közbezárt szög:

*a)* 72°; *b)* 90°; *c)* 130°.

Mekkora a háromszög területe?

**2464** Egy egyenlő szárú háromszög területe 100 cm$^2$ és a szárszöge 52°30'. Mekkorák a háromszög oldalai?



**2465** Egy paralelogramma két oldalának hossza 10 cm és 42 cm. Az általuk bezárt szög:
*a)* 38°; *b)* 90°; *c)* 140°.
Mekkora a paralelogramma területe?

**2466** Egy paralelogramma átlói 50 cm és 45 cm hosszúak, az átlók hajlásszöge 32°. Mekkora a paralelogramma területe?

**2467** Mekkora egy 10 cm oldalhosszúságú szabályos
*a)* tízszög; *b)* hétszög; *c)* $n$-szög területe?

**2468** Hány százaléka egy 8 cm sugarú körbe írt szabályos hatszög területének egy 6 cm sugarú körbe írt szabályos nyolcszög területe?

**2469** Egy háromszög két szöge 43° és 64°. A háromszög területe 120 $cm^2$. Mekkora a háromszög köré írható körének a sugara?

**2470** Egy derékszögű háromszögbe írt kör sugara 2 cm, egyik hegyesszöge 35°. Mekkorák a háromszög oldalai?

**2471** Egy egyenlő szárú háromszögben az alap és a szár hosszának az összege 20 cm. Az alapon fekvő szögek nagysága 72°35'. Mekkorák a háromszög oldalai?

**2472** Egy egyenlő szárú háromszög alapja 50 cm hosszú, az alapon fekvő szögek nagysága 43°12'. Mekkora a háromszög:
*a)* egyik szára; *b)* területe;
*c)* beírt körének a sugara; *d)* köré írt körének a sugara?

**2473** Egy háromszög két szöge 54° és 65°, a köré írható körének sugara 20 cm.
*a)* Mekkora a háromszög területe?
*b)* Adjuk meg a háromszög legrövidebb magasságának hosszát.
*c)* Mekkora a háromszög kerülete?
*d)* Mekkora a háromszög beírt körének sugara?

**2474** Egy 50 m széles futballpálya széléről a partjelző mekkora szögben látja a 735 cm szélességű kaput, ha az oldalvonalnak abban a pontjában áll, ahonnan a kaput a legnagyobb szögben lehet látni?

**2475** Egy szabályos nyolcszög oldala 10 cm. Mekkora a nyolcszög
*a)* beírt körének a sugara? *b)* köré írt körének a sugara? *c)* területe?
*d)* Mekkora részekre osztják a leghosszabb átlót a rá merőleges átlók?

**2476** Egy háromszög két súlyvonalának hossza 12 cm és 9 cm, a hajlásszögük 75°. Mekkora a háromszög területe?

**2477** Bizonyítsuk be, hogy egy hegyesszögű háromszög két oldala összegének négyzete mindig nagyobb, mint a háromszög területének nyolcszorosa.

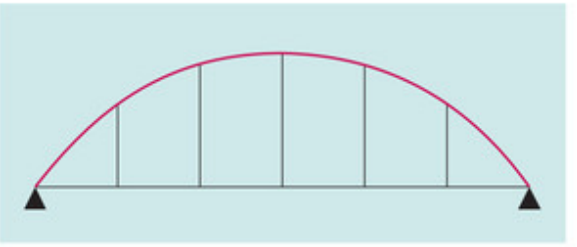
**2478** Egy hegyesszögű háromszög egyik oldala $a$, a vele szemben levő szög $\alpha$. Mekkora az $a$ oldal végpontjaiból kiinduló magasságok talppontjainak távolsága?

**2479** Egy egyenlő szárú háromszög magasságpontja az alaphoz tartozó magasságnak a csúcshoz közelebbi harmadolópontja. Mekkorák a háromszög szögei?





**2480** Egy híd két pillérének távolsága 60 m. A két pillér között olyan köríves tartószerkezetet építettek, amely a pillérektől mért 6 m távolságban 7 m magas.



*a)* Mekkora sugarú a köríves tartószerkezet?

*b)* Mekkora a tartószerkezet legnagyobb magassága?

*c)* A két pillér között 5 függőleges tartóoszlopot építettek. Adjuk meg ezek hosszát, ha a két pillér közötti távolságot a tartóoszlopok hat egyenlő részre osztják.

## Síkbeli és térbeli számítások a szögfüggvények segítségével

**2481** Mekkora lehet annak a téglalapnak a kerülete, amelynek egyik oldala 25 dm hosszú és az átlók által bezárt szög 42°?

**2482** Egy húrtrapéz magassága 10 cm, párhuzamos oldalai 12 cm és 26 cm hosszúak. Mekkorák a trapéz szögei?

**2483** Egy szimmetrikus trapéz szárai 12 cm, az egyik alapja 21 cm hosszú, a trapéz egyik szöge 43°. Mekkora lehet a trapéz másik alapja?

**2484** Egy trapéz egyik alapja 72 m, a rajta fekvő szögek 75° és 47°. Mekkora a trapéz területe, ha a magassága 28 m hosszú?

**2485** Egy szimmetrikus trapéz átlója 8 cm hosszú, ennek az átlónak az alappal bezárt szöge 40°. Mekkora a trapéz területe?

**2486** Két kör középpontjának távolsága 20 cm, a körök sugarai 5 cm, illetve 8 cm. Mekkora szöget zárnak be a körök közös külső, illetve belső érintői?

**2487** Számítsuk ki, hogy egy 12,6 cm sugarú körben mekkora egy 65°-os középponti szöghöz tartozó körszelet területe.

**2488** Mekkora területű részekre bontja a 20 cm sugarú kört egy 24 cm hosszúságú húrja?

**2489** Egy körlapból szabályos tizenkétszöget vágunk ki. Hány százalék a hulladék?

**2490** Egy gömb alakú lámpabúra a középpontjától mért 3 m távolságból 5°-os szögben látszik. Mekkora a lámpabúra átmérője?

**2491** Egy hegyre az északi és a déli oldalról két ösvény vezet, amelyek azonos szintről, egymástól légvonalban 8 km távolságra indulnak. Milyen magas a hegy, ha a két ösvény emelkedési szöge 18°24', illetve 22°43'?

**2492** Egy domb tetején 20 m magas kilátótorony van. Egy völgy egy pontjából a kilátótorony alja 47,5°, a teteje 50,2° emelkedési szögben látszik. Mekkora utat tesz meg az a varjú, amelyik a völgy ezen pontjából a kilátótorony tetejére egy egyenes mentén repül?

**2493** A tőlünk keletre fekvő hegy csúcsát 21°32' emelkedési szög alatt látjuk. Ha a vízszintes talajon 1,2 km-t délre gyalogolunk, akkora innen a csúcs 19°42' emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas a hegy?



**2494** Egy szabályos négyoldalú gúla oldaléle 20 cm, és az oldalél az alaplappal 65°-os szöget zár be.

*a)* Mekkora a gúla magassága? *b)* Mekkora az alapél?

*c)* Hány fokos szöget zár be az alaplap az oldallappal?

*d)* Mekkora szöget zár be a két szomszédos oldalél?

**2495** Egy 8 cm sugarú körhöz a középpontjától 10 cm távolságban lévő pontból érintőket húzunk.

*a)* Mekkora szöget zárnak be az érintők? *b)* Mekkora az érintőszakasz hossza?

*c)* Mekkora az érintési pontok távolsága?

**2496** Egy húrtrapézba 12 cm sugarú kör írható, a trapéz szárakhoz tartozó középvonala 26 cm hosszú. Mekkorák a trapéz szögei?

**2497** Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága az átfogót két olyan szeletre osztja, amelyek aránya 1 : 4. Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

**2498** Két kör közös külső érintőjének az érintési pontok közé eső szakasza 8 cm hosszú. A körök sugarai 4 cm és 3 cm. Mekkora szöget zárnak be a külső érintők? Milyen helyzetű a két kör egymáshoz képest?

**2499** Milyen hosszú egy motornak az ékszíja

*a)* egyenes; *b)* keresztezett

szíjhajtás esetén, ha a meghajtó tárcsakerék sugara 10 cm, a meghajtott tárcsakerék sugara 30 cm és a két tárcsakerék középpontjának távolsága 60 cm?

**2500** Egy reggel a gazda a búzaföldjén két gabonakört talált. Megmérte, hogy mindkét kör sugara 50 m és középpontjaik távolsága 80 m. Ezen a területen már nem tud termést betakarítani. Mekkora a bevételkiesés, ha hektáronként 4 tonna búzát tudott volna betakarítani és egy kg búza ára 20 Ft?

**2501** Legalább milyen magas az a hegy, amelyet a lábától mért 250 km távolságból még éppen láthatunk? (A Föld sugara 6378 km.)

**2502** A síkság egy pontjából két egymás mögött lévő hegycsúcs egy irányban látszik, a közelebbi 26°, a távolabbi 32° emelkedési szög alatt. Ha 200 méterrel közelebb haladunk a hegycsúcsok felé, a két csúcs közös 42° emelkedési szögben látszik. Milyen magasan vannak a hegycsúcsok a síkság felett?

**2503** Egy várba vezető sikló 150 m magasra visz. Az indulási pontból a vár 14° emelkedési szög alatt látszik, a pálya kezdő emelkedési szöge 11°, majd a pálya megtörik, és innen az emelkedési szög 20°. Hány méter utat tesz meg a sikló, amíg felér a várba?

**2504** Szeged földrajzi szélessége 46°15'. Ha a Földet 6378 km sugarú gömbnek tekintjük, akkor

*a)* milyen távol van Szeged a Föld tengelyétől?

*b)* hány $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel forog Szeged a Föld tengelye körül, ha 23,95 óra alatt tesz meg egy teljes fordulatot?

**2505** Egy téglalap oldalainak hossza 11 cm és 13 cm. Mindegyik csúcsánál levágunk belőle egy-egy egymással egybevágó háromszöget úgy, hogy a kapott nyolcszög egyenlő oldalú legyen, és szimmetrikus legyen a téglalap szimmetriatengelyeire. Mekkorák a nyolcszög szögei?

**2506** Az Egyetértés Párt logója egy 12 cm oldalú szabályos háromszög. A háromszög súlypontja egy olyan körnek a középpontja, amely a háromszög oldalait a csúcsok melletti negyedelő pontokban metszi. A kör területének hány százaléka esik a háromszögön kívül? Hány $cm^2$ a háromszögnek a körön kívül eső területe?

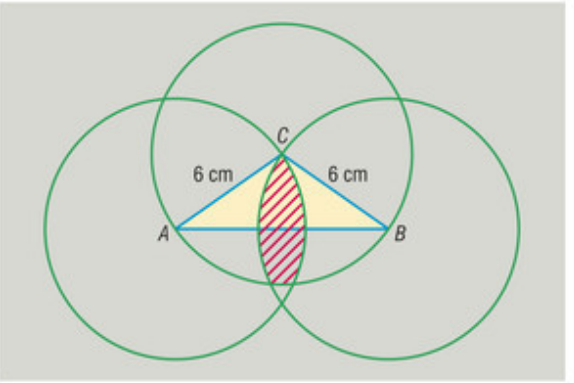




**2507** Egy 300 m sugarú, kör alakú park középpontjától 70 méterre van egy emlékmű. Az emlékműtől a park széléig, egymással egyenlő szögeket bezárva, nyolc egyenes ösvény vezet, amelyek közül a leghosszabb áthalad a park középpontján. Adjuk meg az ösvények hosszát.

**2508** Egy egyenlő szárú háromszögbe olyan négyzetet írunk, amelynek két csúcsa a háromszög alapjára, egy-egy csúcsa pedig a háromszög egy-egy szárára illeszkedik. Számítsuk ki a háromszög szögeit, ha tudjuk, hogy a négyzet területe a háromszög területének a fele.

**2509** Az egyenlő szárú $ABC$ háromszög szára 6 cm hosszú, szárszöge pedig 110°. A háromszög mindegyik csúcsa körül 6 cm sugarú kört rajzolunk. Mekkora az ábrán látható vonalkázott síkrész területe? (➡)




**2510** Egy repülőgép repülési magassága 8000 méter, repülési sebessége 700 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mennyi ideig tartózkodik egy szemlélő számára a látóhatár felett, ha északról érkezik, és délre tart? (A Földet tekintsük 6378 km sugarú gömbnek.)

## Vegyes feladatok II.

**2511** Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

*a)* $\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$;

*b)* $\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$;

*c)* $\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

*d)* $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} + \cos\alpha$;

*e)* $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$.

**2512** Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét zsebszámológép használata nélkül:

*a)* $3 \cdot \sin 30° + 3 \cdot \cos 60° \cdot \operatorname{tg} 45°$;

*b)* $\sin 30° - (\cos 60° \cdot \operatorname{ctg} 45°)^2$;

*c)* $\frac{\cos 70° - \sin 20°}{\operatorname{tg} 43°}$.

**2513** Egy hegyesszög:

*a)* szinusza $\frac{11}{61}$;

*b)* koszinusza $\frac{20}{29}$;

*c)* tangense $\frac{8}{15}$;

*d)* kotangense 3.

Adjuk meg a szög többi szögfüggvényének értékeit a hegyesszög kiszámítása nélkül.

**2514** Egy 10 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög egyik hegyesszögét négy egyenlő részre osztottuk. Mekkora részekre osztják ezek az osztóvonalak a szemközti befogót?

**2515** A hihetetlen méretekkel rendelkező tordai sóbánya trapéz keresztmetszetű Rudolf aknájának felső szintjéről a 80 méter hosszú akna alapjának túloldalát 32° depressziószög alatt láthatjuk. Milyen mély az akna?

**2516** Egy trapéz egyik alapja 20 cm, a rajta levő szögek 72° és 47°-osak. A 72°-os szög mellett levő szára 3 cm hosszú. Mekkora a trapéz másik két oldala?

**2517** Egy háromszög két oldalának aránya 3 : 4, az általuk bezárt szög 37°54', a háromszög területe 95 cm$^2$. Számítsuk ki a szóban forgó oldalakat.



**2518** Ha egy rombusz oldalfelező pontjait összekötjük, 110 $cm^2$ területű négyszöget kapunk. Mekkora a rombusz oldala, ha egyik szöge 50°?

**2519** Állítsunk merőlegeseket egy kör egy átmérőjére a harmadolópontjain keresztül. Mekkora területű részekre osztja ez a két párhuzamos egyenes a kört, ha annak sugara 12 cm?

**2520** Egy folyó partjától 100 méterre áll egy épület. Az épület egy 20 méter magasan levő ablakából a folyóra merőlegesen kitekintve, annak túlsó partját 6°10' depressziószög alatt látjuk. Milyen széles a folyó?

**2521** Egy hegy tetején álló torony a völgyből 1° szögben, a hegy teteje ugyanebből a pontból 21° emelkedési szögben látszik. Milyen magas a torony, ha a hegy 400 m magas?

**2522** Adjuk meg a következő kifejezések pontos értékét:

*a)* $\dfrac{1-2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}$;

*b)* $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$;

*c)* $\left(\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg}\alpha\right)^2-\left(\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg}\alpha\right)^2$;

*d)* $\dfrac{3\cdot\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+1}{\sin^2\alpha}$;

*e)* $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-3\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-3}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

**2523** Egy egyenlő szárú háromszög alapja 18 cm hosszú, az alapon levő szögeinek nagysága 73°.

*a)* Mekkorák a szárai?

*b)* Mekkora a szárhoz tartozó magasság hossza?

*c)* Mekkora a háromszög területe?

**2524** Egy derékszögű háromszög egyik szöge 40° és a beírható körének középpontja a derékszögű csúcstól 12 cm távol van. Mekkora a háromszög átfogója?

**2525** Egy rombusz egyik szöge 37°, oldala 15 cm hosszú.

*a)* Mekkorák a rombusz átlói?

*b)* Mekkora a rombuszba írható kör sugara?

*c)* Mekkora a rombusz területe?

**2526** Egy rombusz két szomszédos szöge $\alpha$, illetve $\beta$, az átlóinak hossza $e$, illetve $f$, és kerülete $k$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\beta}{2}}{2}=\frac{e+f}{k}.$$

**2527** Egy 10 cm sugarú kör köré írt érintőtrapéz egyik alapján fekvő szögeinek nagysága 70° és 80°.

*a)* Mekkora a trapéz területe?

*b)* Mekkorák a trapéz oldalai?

**2528** Két emelet közötti lépcsősor merőleges vetülete 10 méter. Az emeletre 22 lépcső vezet, és egy lépcső magassága 17 cm.

*a)* A lépcső mellett levő, a mozgáskorlátozottak részére kiépített korlátfelvonó mekkora szögben hajlik a vízszinteshez?

*b)* Mennyi idő alatt ér fel az emeletre a korlátfelvonó, ha másodpercenként 20 cm utat tesz meg?

**2529** Egy húrtrapéz magassága 10 cm, párhuzamos oldalai 9 cm és 15 cm hosszúak. Mekkora a trapéz köré írható kör sugara?

**2530** Egy egyenlő szárú háromszög alapja 40 cm hosszú, szárszöge 100°. Az alaphoz tartozó magasság mint átmérő fölé kört rajzolunk. Mekkora a kör és a háromszög közös részének területe?

**2531** Egy keleti irányban $600\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, állandó magasságban haladó repülőgépről egy déli irányban fekvő vár $35°$ depressziószög alatt látszik. Egy perc múlva ugyanerre a várra $25°$ depressziószög alatt tekinthetünk. Milyen magasan repül a gép?

**2532** Egy négyzetes oszlop magassága 20 cm, alapéle 5 cm. Mekkora szöget zár be egy testátló

*a)* az oldalélekkel; *b)* az alapélekkel; *c)* az oldallapokkal; *d)* az alaplapokkal?

**2533** Egy $12°$-os lejtőn álló egyenes fára úgy süt a nap, hogy a fa árnyéka a lejtő irányában lefelé 5 m. Milyen magas a fa, ha ugyanakkor egy vízszintes talajon álló egyenes cölöp árnyéka a cölöp magasságának 32 százaléka?

**2534** Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\cdot(s-c)}{s\cdot(s-a)}}$, ahol $a$, $b$ és $c$ a háromszög oldalai, $\alpha$ az $a$ oldallal szemközti szög, $s$ pedig a háromszög félkerülete.

**2535** Egy derékszögű háromszög beírt köre az átfogót olyan pontban érinti, amely $1:2$ arányban osztja az átfogót. Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

**2536** Egy 20 cm sugarú körbe olyan háromszöget írunk, amelynek két szöge $60°$ és $50°$. A háromszög oldalaira kifelé félköröket rajzolunk. A félköröknek mekkora területű része esik a 20 cm sugarú körön kívül?

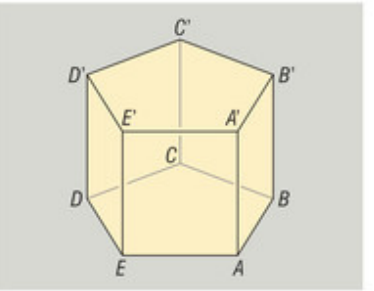
**2537** Egy hegy magasságának meghatározásához egy távolabb folyó patak egyenes partján az $A$, a $B$, és a $C$ pontokat úgy vesszük fel, hogy az $AB = BC = 700$ méter legyen. A három pontból a hegy magassága rendre $40°$, $50°$ és $60°$-os szög alatt látszik. Milyen magas a hegy?

**2538** Egy turista a hegyoldal egy pontjából a szemközti csúcsot $28°$ emelkedési szögben látja. Ugyanennek a hegycsúcsnak a tükörképét az alatta elterülő tóban $52°$ depressziószögben látja.

*a)* Milyen magasan áll a turista a tengerszint felett, ha a tó tükre 500 méterre, a szemközti hegycsúcs 2000 méterre van a tenger szintje felett?

*b)* Milyen messze van a turista légvonalban a szemközti hegycsúcstól?

**2539** Az ábrán látható $ABCDEA'B'C'D'E'$ szabályos ötszög alapú egyenes hasáb oldallapjainak $AB'$ és $BC'$ átlói mekkora szöget zárnak be, ha az alapél és az oldalél hosszának aránya $3:4$?




## Vektorok (emlékeztető), vektorok felbontása különböző irányú összetevőkre

**2540** Vegyük fel a nullvektortól és egymástól különböző nempárhuzamos $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorokat. Szerkesszük meg a következő vektorokat:

*a)* $2\cdot\vec{a}$; *b)* $-\frac{2}{3}\cdot\vec{b}$; *c)* $\sqrt{5}\cdot\vec{c}$; *d)* $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$;

*e)* $2\cdot\vec{a}-\vec{b}$; *f)* $3\cdot(\vec{a}-2\cdot\vec{c})$; *g)* $3\cdot\left(\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\cdot\vec{b}\right)$.



**2541** Egy téglalap csúcsai ebben a sorrendben: $A$, $B$, $C$ és $D$. Szerkesszük meg a következő vektorokat:

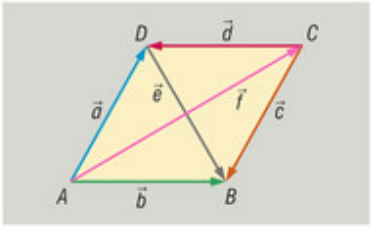
*a)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$; *b)* $2 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$; *c)* $\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$.

**2542** Írjuk egyszerűbb alakban a következő vektorokat:

*a)* $\vec{a} + 2 \cdot (\vec{a} - \vec{b})$; *b)* $\frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot (\vec{a} + 2 \cdot \vec{b} + \vec{c}) - (\sqrt{2}+1) \cdot (2 \cdot \vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

*c)* $\frac{\vec{x} - \vec{y}}{2} + 3 \cdot \vec{x} + \vec{y}$;

**2543** Az ábrán egy rombusz négy csúcsa által meghatározott hat vektor látható.




*a)* Adjuk meg az $\vec{e}$ és $\vec{f}$ vektort a $\vec{c}$ és $\vec{d}$ vektorok segítségével.

*b)* Keressünk a vektorok között olyanokat, amelyek összege $\vec{0}$.

*c)* Legyen $|\vec{e}| = 10$ cm, valamint $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok bezárt szöge 70°. Adjuk meg az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{f}$ vektorok hosszát.

**2544** Az $ABCD$ paralelogramma átlóinak $O$ metszéspontjából az $A$ és $B$ csúcsokba mutasson az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor. Fejezzük ki a paralelogramma oldalainak vektorait az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal.

**2545** Bontsuk fel a 32°-os lejtőre helyezett 200 N súlyú testre ható súlyerőt a lejtővel párhuzamos és arra merőleges összetevőkre. Számítsuk ki ezen erők nagyságát.

**2546** Az $ABCD$ paralelogramma $A$ csúcsából kiindulva vegyük fel a $\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CD}$ vektort. A sík mely pontjába mutat ez a vektor?

**2547** Három egyenlő hosszú vektor összege nullvektor. Mekkora szöget zárnak be egymással?

**2548** Egy sík három vektoráról tudjuk, hogy mindegyiknek a hossza 5 cm. E három vektor összegének mekkora lehet a minimális és maximális hossza?

**2549** Melyik vektor egyenlő az ellentettjével?

**2550** Az $ABCD$ rombusz oldala 6 cm.

*a)* Fejezzük ki az $\overrightarrow{AC}$ és a $\overrightarrow{BD}$ vektorokat az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AD}$ vektorokkal.

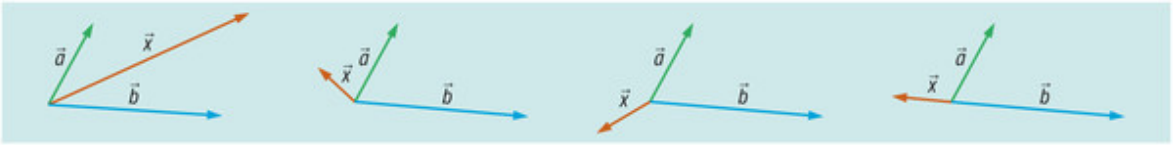
*b)* Mekkora az $\overrightarrow{AC}$ és a $\overrightarrow{BD}$ hossza, ha az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ 60°-os szöget zár be?

**2551** Az $\vec{a}$ hossza háromszorosa a $\vec{b}$ hosszának. Mekkora a két vektor által bezárt szög, ha tudjuk, hogy az $\vec{a} - \vec{b}$ vektor merőleges a $\vec{b}$ vektorra?

**2552** Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok egymással párhuzamosak. $|\vec{a}| = 3$. Mekkora a $\vec{b}$ vektor hossza, ha:

*a)* $\vec{b} = 3 \cdot \vec{a}$; *b)* $5 \cdot \vec{b} = -3 \cdot \vec{a}$; *c)* $\sqrt{2} \cdot \vec{b} = (1 + \sqrt{2}) \cdot \vec{a}$.

**2553** Adottak az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{x}$ vektorok. Bontsuk fel rajzban $\vec{x}$-et $\vec{a}$ és $\vec{b}$ irányú összetevőkre.




**2554** Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok nem párhuzamosak és egyik sem nullvektor. Határozzuk meg az $\alpha$ és a $\beta$ értékét, ha:

*a)* $2 \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} = \alpha \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$; *b)* $(\alpha - 2\beta) \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} = 2\alpha \cdot \vec{a} + 4 \cdot \vec{b}$;

*c)* $(\alpha - 2\beta) \cdot \vec{a} + (5\alpha - \beta + 27) \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

**2555** Egy $ABCD$ paralelogramma $BC$ és $CD$ oldalának felezőpontjai legyenek $E$ és $F$. Adjuk meg az $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

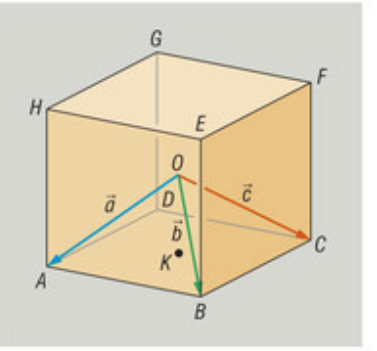
**2556** Az $ABC$ háromszögben $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, és $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Osszuk fel a háromszög $BC$ oldalát 3 egyenlő részre. Írjuk fel $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok segítségével az $A$ csúcsból a harmadolópontokba mutató vektorokat.

**2557** Az $ABC$ háromszögben $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, és $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. A háromszög $BC$ oldalát $B$-n, illetve $C$-n túl meghosszabbítottuk $BC$ hosszával. Írjuk fel $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok segítségével az $A$ csúcsból az így kapott pontokba mutató vektorokat.

**2558** Adjuk meg egy téglatest egy csúcsából kiinduló három oldalél, három lapátló és a testátló vektorainak összegét.

**2559** Az ábrán látható $ABCDEFGH$ kocka $O$ középpontjából az $A$, $B$ és $C$ csúcsokba mutató vektorok legyenek $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Fejezzük ki $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ segítségével a következő vektorokat ($K$ az $ABCD$ lap középpontja):

*a)* $\overrightarrow{OF}$; *b)* $\overrightarrow{OG}$; *c)* $\overrightarrow{OH}$; *d)* $\overrightarrow{FC}$;
*e)* $\overrightarrow{OK}$; *f)* $\overrightarrow{OD}$; *g)* $\overrightarrow{DC}$.




**2560** Egy kocka $A$ csúcsából kiinduló és az $A$-t tartalmazó lapok középpontjaiba mutató vektorok legyenek $\vec{e}$, $\vec{f}$ és $\vec{g}$. Állítsuk elő ezek segítségével az $A$ csúcsból kiinduló élvektorokat.

**2561** Az $ABC$ háromszög $AC$ és $BC$ oldalának felezőpontja $F$ és $E$ pont. Az $AB$ oldal $B$-hez közelebbi harmadolópontja $K$.

*a)* Fejezzük ki az $\overrightarrow{FE}$ és a $\overrightarrow{CK}$ vektorokat a $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorok segítségével.

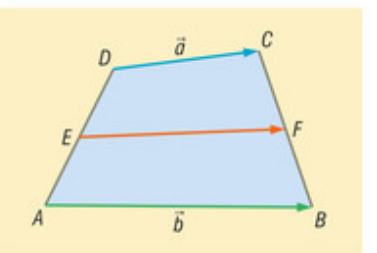
*b)* Mekkora az $\overrightarrow{FE}$ és a $\overrightarrow{CK}$ vektorok hossza, ha a háromszögben az $AB$ oldal 18 cm hosszú és $ABC\sphericalangle = BAC\sphericalangle = 70°$?

**2562** Egy tetszőleges, de rögzített $O$ vonatkoztatási pontból az $ABC$ háromszög $A$, $B$ és $C$ csúcsaiba mutató vektorok legyenek rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Tekintsük azt a középpontos hasonlóságot a síkon, amelynek középpontja a háromszög $A$ csúcsa, és a hasonlóság aránya pedig $\lambda = -\frac{1}{2}$. Az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok segítségével adjuk meg az $O$ vonatkoztatási pontból a képháromszög csúcsaiba mutató vektorokat.

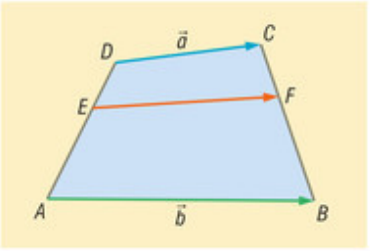
**2563** Bizonyítsuk be, hogy a szabályos $ABCDEF$ hatszögben:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2 \cdot \overrightarrow{AD}.$$

**2564** Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok az ábrán látható $ABCD$ négyszög szemközti oldalainak vektorai. Fejezzük ki a négyszög $\overrightarrow{EF}$ középvonalának vektorát az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal.



**2565** Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok az ábrán látható $ABCD$ négyszög szemközti oldalvektorai. Legyen az $E$ pont az $AD$ oldal $D$-hez közelebbi, illetve az $F$ pont a $BC$ oldal $C$-hez közelebbi harmadolópontja. Adjuk meg az $\overrightarrow{EF}$ vektort az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal.




**2566** Legyen $P$ és $Q$ az $ABC$ háromszög $AB$, illetve $AC$ oldalán két belső pont úgy, hogy $BP = CQ$. Jelölje a $BC$ oldal felezőpontját $E$, a $PQ$ szakasz felezőpontját $F$. Igazoljuk, hogy $EF$ egyenes párhuzamos az $ABC$ háromszög $A$ csúcsából induló belső szögfelezőjével.

**2567** Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder két szemközti élpárjának felezőpontjai paralelogrammát alkotnak.

## Vektorok alkalmazása a síkban és a térben

**2568** Az $ABCD$ paralelogramma síkjában adott egy $O$ pont. Fejezzük ki az $O$ pontból a $D$ csúcsba mutató vektort az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OC}$ vektorok segítségével.

**2569** Az $ABCD$ paralelogrammában $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Toljuk el a síkon a paralelogrammát $2 \cdot \overrightarrow{BC}$ vektorral. Adjuk meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok segítségével azt a vektort, amely a paralelogramma $A$ csúcsából az eltolt paralelogramma átlóinak metszéspontjába mutat.

**2570** Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges pontból egy négyszög csúcsaiba vezető vektorok összege egyenlő ugyanabból a pontból az oldalak felezőpontjaiba mutató vektorok összegével.

**2571** A sík egy $O$ pontjából az $ABC$ háromszög $A$ csúcsába az $\vec{a}$ vektor, a $B$ csúcsába a $\vec{b}$ vektor, a $BC$ oldal felezőpontjába az $\vec{f}$ vektor mutat. Állítsuk elő ezen vektorok segítségével a következő vektorokat:

*a)* $\overrightarrow{BC}$; *b)* $\overrightarrow{OC}$; *c)* $\overrightarrow{AC}$.

**2572** Egy $O$ pontból az $AB$ szakasz végpontjába mutató vektorok $\vec{a}$ és $\vec{b}$. Írjuk fel ezek segítségével az $AB$ szakasz azon $P$ pontjába mutató vektort, amelyre

*a)* $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$; *b)* $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$; *c)* $\frac{AP}{PB} = 0{,}1$; *d)* $\frac{AP}{PB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**2573** Az $ABC$ szabályos háromszög $AB$ oldalának felezőpontja $F$, a háromszög köré írt körének középpontja $O$.

*a)* Fejezzük ki az $\overrightarrow{AF}$ és $\overrightarrow{AO}$ vektorokat az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AB}$ vektorokkal.

*b)* Mekkora a $\frac{|\overrightarrow{CF}|}{|\overrightarrow{CO}|}$ arány?

**2574** Az $ABC$ háromszögben az $A$ csúcsból induló belső szögfelező a szemközti oldalt egy olyan $D$ pontban metszi, hogy $BD : DC = 3 : 4$. Adjuk meg az $\overrightarrow{AD}$ vektort $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ segítségével. Mekkora az $\frac{AB}{AC}$ arány?

**2575** Az $ABC$ háromszögben $AB : AC = 2 : 3$. Az $A$ csúcsból induló belső szögfelező a szemközti oldalt $D$ pontban metszi. Adjuk meg az $\overrightarrow{AD}$ vektort $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ segítségével.





**2576** Egy $O$ pontból az $AB$ szakasz $A$ végpontjába mutató vektor $\vec{a}$, és a szakasz egy $P$ belső pontjába mutató vektor $\vec{p}$. Fejezzük ki a szakasz $B$ végpontjába mutató vektort $\vec{a}$ és $\vec{p}$ segítségével, ha:

*a)* $\frac{AP}{PB}=\frac{3}{4}$; *b)* $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{3}$; *c)* $\frac{AP}{PB}=\frac{5}{7}$.

**2577** Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetszőleges hatszög oldalainak felezőpontjai valamilyen körüljárási irányban $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ és $F$, akkor az $ACE$ és $BDF$ háromszögek súlypontja azonos.

**2578** Egy $O$ pontból az $ABCD$ négyszög csúcsaiba mutasson rendre az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ és $\vec{d}$ vektor. Adjuk meg ezek segítségével az $ABC$ háromszög súlypontjából a $BDC$ háromszög súlypontjába mutató vektort.

**2579** Legyen az $ABC$ háromszög súlypontja $S$, az $EFG$ háromszög súlypontja $P$. Bizonyítsuk be, hogy:

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CG}=3\cdot\overrightarrow{SP}.$$

**2580** Egy $O$ pontból az $ABCD$ tetraéder csúcsaiba mutasson rendre az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ és $\vec{d}$ vektor. Adjuk meg ezek segítségével az $AB$ oldalél felezőpontjából a tetraéder súlypontjába mutató vektort.

**2581** Egy $ABCD$ tetraéderben $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$ és $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$. Tekintsük az $ABC$ alaplap éleinek felezőpontjai által meghatározott háromszög $S$ súlypontját. Fejezzük ki a $\overrightarrow{DS}$ vektort az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorokkal.

**2582** Az $ABCDE$ gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet. Legyen $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ és $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$. Fejezzük ki az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorokkal:

*a)* a $\overrightarrow{DE}$ vektort;

*b)* az $A$ csúcsból a $CE$ él felezőpontjába mutató vektort;

*c)* az $A$ csúcsból a $BCE$ oldallap súlypontjába mutató vektort.

**2583** Egy tetszőleges, de rögzített $O$ vonatkoztatási pontból az $ABC$ háromszög $A$, $B$ és $C$ csúcsaiba mutató vektorok legyenek rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Fejezzük ki az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ segítségével a háromszög súlypontjából az oldalak felezőpontjaiba mutató vektorokat. Adjuk meg ezeknek a vektoroknak az összegét.

**2584** Egy 2008 oldalú sokszög oldalainak felezőpontja rendre $F_1$, $F_2$, ..., $F_{2007}$, $F_{2008}$. Adjuk meg a következő összeget:

$$\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_3F_4}+\ldots+\overrightarrow{F_{2007}F_{2008}}+\overrightarrow{F_{2008}F_1}.$$

**2585** Igazoljuk, hogy egy tetszőleges háromszög súlyvonalainak szakaszait el lehet úgy tolni, hogy azok egy háromszög oldalait alkossák.

**2586** Határozzuk meg egy tetraéder súlypontjából a csúcsokba mutató vektorok összegét.

**2587** Egy téglatest egyik csúcsára illeszkedő három lapjának e csúcshoz tartozó átlóit hosszuk felével megnyújtjuk. Az így kapott három pont a térben meghatároz egy háromszöget. Bizonyítsuk be, hogy ennek a háromszögnek a súlypontja a téglatest kiválasztott csúcsával szemben levő csúcsa.

**2588** Bizonyítsuk be, hogy ha egy közös pontból kiinduló $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok végpontjai egy egyenesbe esnek, valamint $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem párhuzamosak, akkor $\vec{c}$ vektor előáll a következő alakban:

$$\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}+(1-\alpha)\cdot\vec{b}.$$

**2589** Bizonyítsuk be, hogy ha egy közös pontból kiinduló $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok olyanok, hogy $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem párhuzamosak, valamint a $\vec{c}$ vektor előáll $\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}+(1-\alpha)\cdot\vec{b}$ alakban, akkor az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok végpontjai egy egyenesbe esnek.



**2590** Az $ABC$ háromszög $BC$, $CA$ és $AB$ oldalain jelöljünk ki egy-egy $A'$, $B'$ és $C'$ pontot úgy, hogy ezek a pontok a megfelelő oldalakat valamely körüljárási irányban azonos arányban osszák. Bizonyítsuk be, hogy az $AA'$, $BB'$ és $CC'$ szakaszokat egy háromszöggé lehet összetolni.

**2591** Rajzoljunk egy háromszög oldalaira kifelé négyzeteket. Bizonyítsuk be, hogy a négyzeteknek a háromszög csúcsaitól különböző csúcsai olyan hatszöget határoznak meg, amelynek minden, a négyzet oldalaitól különböző oldala a háromszög egy-egy súlyvonalának kétszerese.

**2592** Az $ABC$ háromszög oldalainak hossza a szokásos jelöléssel $a$, $b$ és $c$. Egy tetszőleges, de rögzített $O$ vonatkoztatási pontból az $ABC$ háromszög $A$, $B$ és $C$ csúcsaiba mutató vektorok legyenek rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Adjuk meg az $O$ pontból a háromszög beírt körének középpontjába mutató vektort az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok segítségével.

**2593** Az $ABC$ háromszög $A$ csúcsának $B$-re, $B$ csúcsának $C$-re és $C$ csúcsának $A$-ra vonatkozó tükörképe rendre $A_1$, $B_1$ és $C_1$. Adjunk az $ABC$ háromszög szerkesztésére eljárást, ha adott $A_1$, $B_1$ és $C_1$.

**2594** Egy $ABC$ háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket rajzoltunk. Bizonyítsuk be, hogy ezen háromszögek középpontjai által meghatározott háromszög súlypontja az $ABC$ háromszög súlypontja.

## Vektorok a koordináta-rendszerben, vektor koordinátái, műveletek koordinátákkal adott vektorokkal

**2595** Szerkesszük meg a koordináta-rendszerben az alábbi helyvektorokat:

*a)* $(4; 3)$; *b)* $(-1; 3)$; *c)* $(-4; -3{,}2)$; *d)* $(\sqrt{2}; 3)$; *e)* $\left(\frac{4}{3}; \sqrt{7}\right)$.

**2596** Egy szakasz végpontjainak helyvektorai $\left(-2; \frac{3}{2}\right)$ és $\left(1; -\sqrt{5}\right)$. Ábrázoljuk a szakaszt a koordináta-rendszerben.

**2597** Határozzuk meg a $(2; 3)$, $(-4; 3)$, $(-2; -3)$ és $(p; q)$ helyvektorok tükörképeinek koordinátáit, ha azokat:

*a)* az $x$ tengelyre; *b)* az $y$ tengelyre; *c)* az origóra;

*d)* az origón áthaladó és az $x$ tengely pozitív felével 45°-os szöget bezáró egyenesre tükrözzük.

**2598** Adjuk meg a következő helyvektorok végpontjainak halmazát a koordináta-rendszerben ($x, y \in \mathbb{R}$):

*a)* $(x; 0)$; *b)* $(0; y)$; *c)* $(x; -3)$; *d)* $(2; y)$.

**2599** Határozzuk meg a négyzet csúcsainak helyvektorait, ha az oldala 10 egység hosszú, középpontja az origóban van és

*a)* egyik csúcsa az $x$ tengelyre illeszkedik;

*b)* oldalai párhuzamosak a koordináta-rendszer tengelyeivel.

**2600** Legyen $\vec{a}(2; -3)$. Adjuk meg a következő vektorok koordinátáit:

*a)* $4 \cdot \vec{a}$; *b)* $\frac{1}{3} \cdot \vec{a}$; *c)* $\vec{a} + 2 \cdot \vec{a} + 2^2 \cdot \vec{a} + 2^3 \cdot \vec{a} + 2^4 \cdot \vec{a} + 2^5 \cdot \vec{a}$.

**2601** Legyen $\vec{a}(1; -3)$, $\vec{b}\left(-0{,}5; \frac{3}{2}\right)$ és $\vec{c}(5; 3{,}4)$. Számítsuk ki a következő vektorok koordinátáit:

*a)* $\vec{a} + \vec{b}$; *b)* $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$; *c)* $5 \cdot \vec{b} + \frac{3}{2} \cdot \vec{c}$; *d)* $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4}$.





**2602** Adjuk meg az $\overrightarrow{AB}$ vektort, ha:

*a)* $A(4; 7)$ és $B(-9; 3)$; *b)* $A(9; -5)$ és $B(-8; 5)$;

*c)* $A(\sqrt{3}; 13)$ és $B(\sqrt{12}; 7)$; *d)* $A(a-1; 2b)$ és $B(2a-9; 5+b)$.

**2603** Adott a koordináta-rendszerben három pont: $A(4; 1)$, $B(-2; 5)$ és $C(5; 7)$. Adjuk meg az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{CA}$ vektorok koordinátáit. Adjuk meg az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ összegvektor koordinátáit.

**2604** Az $A(-2; 4)$ pontot a koordináta-rendszerben eltoltuk a:

*a)* $\vec{v}(5; 4)$; *b)* $\vec{v}(-2; 7)$; *c)* $\vec{v}(\sqrt{3}; 4)$; *d)* $\vec{v}(2; -4)$

vektorral. Adjuk meg az $A$ pont képének koordinátáit.

**2605** Igazoljuk, hogy az $A(4; 8)$, $B(7; 3)$, $C(9; 12)$ és $D(12; 7)$ pontok paralelogrammát határoznak meg.

**2606** Igazoljuk, hogy az $A(4; 7)$, $B(5; 9)$ és $C(2008; 4015)$ pontok egy egyenesre esnek.

**2607** Határozzuk meg a szabályos hatszög csúcsainak helyvektorait, ha az oldala 5 egység hosszú, középpontja az origóban van, és egyik csúcsa illeszkedik:

*a)* az $x$ tengelyre; *b)* az $y$ tengelyre.

**2608** Adjuk meg a következő helyvektorok végpontjainak halmazát a koordináta-rendszerben ($x \in \mathbb{R}$):

*a)* $(x; x)$; *b)* $(-x; x)$; *c)* $(x; |x|)$; *d)* $(|x|; x)$;

*e)* $(|x|; |x|)$.

**2609** Adjuk meg az összes olyan $p$ egész számot, amelyre a $\vec{v}\left(\frac{p-2}{5-p}; p^2+p-12\right)$ helyvektor mindkét koordinátája nemnegatív.

**2610** Mely $n$ egész számokra lesz a $\vec{v}\left(\frac{5n+2}{4}; \frac{n^2+6}{n-1}\right)$ vektor mindkét koordinátája egész szám?

**2611** Számítsuk ki a következő 2008 darab vektor összegének koordinátáit:

$$\overrightarrow{a_1}\left(\frac{1}{1\cdot 2}; 1\right),\ \overrightarrow{a_2}\left(\frac{1}{2\cdot 3}; 2\right),\ \overrightarrow{a_3}\left(\frac{1}{3\cdot 4}; 3\right),\ \ldots,\ \overrightarrow{a_k}\left(\frac{1}{k\cdot(k+1)}; k\right),\ \ldots,\ \overrightarrow{a_{2008}}\left(\frac{1}{2008\cdot 2009}; 2008\right).$$

## Vegyes feladatok III.

**2612** Két 10 egység hosszú vektor szöge:

*a)* 0°; *b)* 30°; *c)* 90°; *d)* 140°; *e)* 180°.

Adjuk meg a két vektor összegének a hosszát.

**2613** Adjuk meg egy szabályos

*a)* hatszög;

*b)* nyolcszög köré írható körének középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összegét.

**2614** Az $ABCD$ négyszögben $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ és $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$. Állítsuk elő ezek segítségével a $DA$ felezőpontjából $BC$ felezőpontjába mutató vektort.

**2615** Az $ABCD$ négyzetben az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokat adjuk meg az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{DB}$ vektorok lineáris kombinációjaként. Mekkora az $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$ hossza, ha a négyzet oldala 2 egység?



**2616** Közös pontból kiinduló $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokból képezzük az $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ vektort. Mutassuk meg, hogy ez a vektor párhuzamos az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor által bezárt szög szögfelezőjével.

**2617** Legyen $S$ az $ABC$ háromszög súlypontja, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ és $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$. Fejezzük ki $\vec{a}$ és $\vec{c}$ vektorok segítségével a következő vektorokat:

*a)* $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$; *b)* $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}$; *c)* $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}$.

**2618** Egy tetszőleges $O$ pontból az $ABCD$ négyszög csúcsaiba mutasson rendre az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ és $\vec{d}$ vektor. Legyen $H$ a $BC$ oldal $C$-hez közelebbi harmadolópontja és $P$ a $DC$ oldalnak az a pontja, amelyre $\frac{DP}{PC}=\frac{2}{3}$. Adjuk meg a $\overrightarrow{HP}$ vektort.

**2619** A sík egy $O$ pontjából egy $X$ pontba mutató vektor az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok segítségével $2\cdot\vec{a}-5\cdot\vec{b}$ alakban, egy $Y$ pontba mutató vektor pedig $3\cdot\vec{b}-4\cdot\vec{a}$ alakban adható meg. Adjuk meg $\vec{a}$ és $\vec{b}$ segítségével az $XY$ szakasz $X$-hez közelebbi harmadolópontjába mutató vektort.

**2620** Legyen $ABCD$ egy tetszőleges paralelogramma. Bizonyítsuk be, hogy

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{BC}.$$

**2621** A sík egy $O$ pontjából az $ABC$ háromszög $A$, $B$ és $C$ csúcsaiba mutató vektorok legyenek rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Adjuk meg az $AB$ oldal $F$ felezéspontjából, a $BC$ oldal $C$-hez közelebbi $H$ harmadolópontjába mutató vektort.

**2622** Az $ABC$ háromszög csúcsai $A(1;-3)$, $B(4;7)$ és $C(5;1)$.

*a)* Adjuk meg az $ABC$ háromszög oldalvektorainak koordinátáit.

*b)* Az origó középpontú $\lambda=-\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság az $ABC$ háromszöget az $A'B'C'$ háromszögbe viszi. Adjuk meg $A'$, $B'$ és $C'$ koordinátáit.

*c)* Toljuk el a háromszög $C$ csúcsát az $\overrightarrow{AB}$ vektorral, így a $C''$ pontba jutunk. Adjuk meg $C''$ koordinátáit.

*d)* Milyen négyszöget határoznak meg $A$, $B$, $C''$ és $C$ pontok?

**2623** Egy kutyaszán elé három kutyát kötöttek, amelyek egyenként 200 N erővel húzzák a szánt. Ha köteleik 22°-os szöget zárnak be egymással, akkor számítsuk ki a kutyák által kifejtett eredő erő nagyságát.

**2624** Az $AB$ és $CD$ szakaszok felezőpontjai $P$ és $Q$. Bizonyítsuk be, hogy $AC$, $BD$ és $PQ$ szakaszok felezőpontjai egy egyenesen vannak.

**2625** Az $ABCD$ négyszög oldalvektorainak koordinátái $\overrightarrow{AB}(3;2)$, $\overrightarrow{BC}(-2;7)$, $\overrightarrow{CD}(x;-8)$ és $\overrightarrow{DA}(9;-y)$. Adjuk meg $x$ és $y$ értékét.

**2626** Egy hatszög oldalainak felezőpontjai legyenek valamilyen körüljárási irány szerint $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$, $F_5$, $F_6$. Bizonyítsuk be, hogy az $F_1F_3F_5$, és $F_2F_4F_6$ háromszögek súlypontja azonos.

**2627** Adjuk meg $x$ értékét, ha tudjuk, hogy az $A(4;-6)$, $B(x;9)$ és $C(-7;8)$ pontok egy egyenesre esnek.

**2628** Egy sík egy tetszőleges $P$ pontját tükrözzük egy $ABCD$ paralelogramma $A$ csúcsára, majd az eredményt a $B$ csúcsra, és így körbe a paralelogramma minden egyes csúcsára. Bizonyítsuk be, hogy a negyedik tükrözés visszavisz az eredeti pontba.





**2629** Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder súlypontja felezi a szemközti élek felezőpontjait összekötő szakaszokat.

**2630** Az $ABC$ háromszög $AB$ és $AC$ oldalai fölé kifelé $ADEB$ és $CFGA$ négyzeteket írtuk. Bizonyítsuk be, hogy az $EF$ szakasz felezőpontja rajta van a $BC$ átmérőjű körön.

**2631** Az $O$ középpontú kör $AB$ és $CD$ húrjai merőlegesek egymásra és metszéspontjuk $M$. Igazoljuk, hogy

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2 \cdot \overrightarrow{OM}.$$

**2632** Az $ABC$ háromszög $AB$, $BC$ és $CA$ oldalainak a kezdőpontokhoz közelebbi harmadolópontja legyen $A_1$, $B_1$ és $C_1$. Az $A_1B_1C_1$ háromszög $A_1B_1$, $B_1C_1$ és $C_1A_1$ oldalainak a kezdőpontokhoz közelebbi harmadolópontjai legyenek $A_2$, $B_2$ és $C_2$. Bizonyítsuk be, hogy az $ABC$ és az $A_2B_2C_2$ háromszögek hasonlók. Adjuk meg az $A_2B_2C_2$ és az $ABC$ háromszögek területének arányát.




# 10.5. SZÖGFÜGGVÉNYEK

## A szinusz- és koszinuszfüggvény definíciója, egyszerű tulajdonságai

**2633** Határozzuk meg a következő szorzatok előjelét:

*a)* $\sin 100^\circ \cdot \sin 132^\circ$;
*b)* $\cos 285^\circ \cdot \cos(-316^\circ)$;
*c)* $\cos 210^\circ \cdot \sin 115^\circ$;
*d)* $\sin 3 \cdot \cos 4$.

**2634** Csak a definíció alapján, függvénytáblázat és zsebszámológép használata nélkül töltsük ki az alábbi táblázatot.

| $\alpha$ | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\cos\alpha$ | | | | | | | | | | | | | | | | |

**2635** Csak a definíció alapján, függvénytáblázat és zsebszámológép használata nélkül számítsuk ki:

*a)* $2 \cdot \cos 0^\circ + 3 \cdot \sin 90^\circ + 4 \cdot \cos 180^\circ$;
*b)* $5 \cdot \sin 270^\circ - 2 \cdot \cos 0^\circ + 3 \cdot \sin 90^\circ$;
*c)* $\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ$;
*d)* $\sin 135^\circ \cdot \cos 225^\circ \cdot \sin 300^\circ \cdot \cos 120^\circ$;
*e)* $\cos 180^\circ \cdot \sin 270^\circ + \sin 90^\circ \cdot \cos 360^\circ$.

**2636** Csak a definíció alapján, függvénytáblázat és zsebszámológép használata nélkül számítsuk ki:

*a)* $\cos\frac{5\pi}{3}$;
*b)* $\sin\frac{5\pi}{4}$;
*c)* $\sin\frac{5\pi}{6}$;
*d)* $\cos\frac{7\pi}{2}$;
*e)* $\cos\frac{7\pi}{6}$;
*f)* $\sin\frac{8\pi}{3}$;
*g)* $\cos\frac{9\pi}{4}$;
*h)* $\sin\frac{11\pi}{6}$.

**2637** Csak a definíció alapján, függvénytáblázat és zsebszámológép használata nélkül számítsuk ki:

*a)* $\sin 7\pi$;
*b)* $\cos 8\pi$;
*c)* $\sin 2009\pi$;
*d)* $\cos 2002\pi$;
*e)* $\sin(-2010\pi)$;
*f)* $\cos\left(\frac{-1111\pi}{4}\right)$;
*g)* $\cos\left(\frac{-100\pi}{3}\right)$;
*h)* $\sin\left(\frac{-100\pi}{3}\right)$.

**2638** Számítsuk ki a következő műveletek eredményét:

*a)* $\sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \cdot \sin\frac{5\pi}{6} \cdot \sin\pi$;
*b)* $\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{3\pi}{4} \cdot \cos\pi$.

## A szinuszfüggvény grafikonja

**2639** Ábrázoljuk a következő függvényeket:

*a)* $x \mapsto \sin x + 1$;
*b)* $x \mapsto \sin x - 1$;
*c)* $x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
*d)* $x \mapsto \sin(x - \pi)$;
*e)* $x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$;
*f)* $x \mapsto 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

*g)* $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \sin(x+\pi)$; *h)* $x \mapsto -\sin x$; *i)* $x \mapsto 1 - \sin x$;

*j)* $x \mapsto 3 - 2 \cdot \sin x$; *k)* $x \mapsto 2 \cdot (1 - \sin x)$; *l)* $x \mapsto \sin \frac{x}{2}$;

*m)* $x \mapsto 1 - \sin \frac{x}{2}$; *n)* $x \mapsto -\sin 2x$; *o)* $x \mapsto 1 + \sin 2x$.

**2640** A szinuszfüggvény grafikonja segítségével döntsük el, melyik nagyobb a megadott két érték közül:

*a)* $\sin \frac{1}{2}$, $\sin 1$; *b)* $\sin(-0{,}2)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; *c)* $\sin 2$, $\sin 3$;

*d)* $\sin(\pi - 2)$, $\sin 2$.

**2641** Oldjuk meg a valós számok halmazán:

*a)* $\sin x = x$; *b)* $\sin x = \pi - x$; *c)* $\sin x = x + \pi$.

**2642** Ábrázoljuk az adott intervallumon a következő függvények grafikonját:

*a)* $[-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; *b)* $[0; 2\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

*c)* $[0; 2\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; *d)* $[-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

*e)* $[-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin 2x$; *f)* $[0; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$;

*g)* $[-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin \frac{1}{2} \cdot x$; *h)* $[0; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\pi}{2}\right)$.

**2643** Ábrázoljuk és jellemezzük (növekedés, fogyás, szélsőérték szempontjából) a következő függvényeket:

*a)* $[-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2 \cdot \sin x - 1$; *b)* $[-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$;

*c)* $[-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x + |\sin x|$; *d)* $[-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |\sin x| - \sin x$.

**2644** Adjunk meg három különböző $\alpha$ szöget, amelyre igaz, hogy:

*a)* $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *b)* $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$; *c)* $\sin \alpha = \sin 53°$; *d)* $\sin \alpha = \sin 200°$.

**2645** Oldjuk meg a következő egyenleteket függvénygrafikonok felhasználásával:

*a)* $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; *b)* $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}5$; *c)* $\sin 2x = 1$; *d)* $|\sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

**2646** Függvénygrafikonok felhasználásával oldjuk meg a következő egyenleteket:

*a)* $\sin(2x + 30°) = \frac{1}{2}$; *b)* $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; *c)* $\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1$;

*d)* $-2 \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$; *e)* $\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *f)* $2 \cdot \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$;

*g)* $4 \cdot \sin^2\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) = 3$.




**2647** Válasszuk ki a következő függvények periódusát. Karikázással jelöljük.

*a)* $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$: *A)* $\pi$; *B)* $2\pi$; *C)* $\frac{\pi}{2}$;

*b)* $g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$: *A)* $2\pi$; *B)* $4\pi$; *C)* $\pi$;

*c)* $h(x)=2\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot x-\frac{\pi}{3}\right)$: *A)* $4\pi$; *B)* $\pi$; *C)* $\frac{\pi}{2}$;

*d)* $i(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)+2$: *A)* $3\pi$; *B)* $\frac{2\pi}{3}$; *C)* $\frac{3\pi}{2}$.

**2648** Határozzuk meg a következő $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvények periódusát:

*a)* $\sin\frac{x}{5}$; *b)* $\sin 4x$; *c)* $\sin 7x$;

*d)* $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; *e)* $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$; *f)* $\sin\left(5x-\frac{\pi}{2}\right)$.

**2649** Oldjuk meg függvénygrafikonok segítségével a következő egyenlőtlenségeket:

*a)* $\sin x\geq 0$; *b)* $\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$; *c)* $\sin x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$; *d)* $\sin x<-2$;

*e)* $2\cdot\sin x>-1$; *f)* $2\cdot\sin x\leq-\sqrt{3}$; *g)* $-|\sin x|<0$.

**2650** Függvénygrafikonok segítségével oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

*a)* $\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>-1$; *b)* $-2\cdot\sin\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)\leq\sqrt{2}$;

*c)* $2\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<\sqrt{3}$; *d)* $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\geq-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**2651** Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket függvénygrafikonok segítségével:

*a)* $2\cdot|\sin x|\leq 1$; *b)* $\sin^2 x\geq\frac{1}{2}$; *c)* $\sin|x|<0$.

**2652** Ábrázoljuk és jellemezzük (növekedés, fogyás, szélsőérték szempontjából) a következő függvényeket:

*a)* $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)$; *b)* $[-\pi;\pi]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x\cdot\operatorname{sgn}(\sin|x|)$;

*c)* $[-\pi;\pi]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\left|\sin|x|\right|$.

## A koszinuszfüggvény grafikonja, egyenletek, egyenlőtlenségek

**2653** Ábrázoljuk a következő függvényeket:

*a)* $x\mapsto\cos x-1$; *b)* $x\mapsto\cos x+2$; *c)* $x\mapsto\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

*d)* $x\mapsto\cos(x+\pi)$; *e)* $x\mapsto\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1$; *f)* $x\mapsto 2\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;

*g)* $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \cos(x - \pi)$; *h)* $x \mapsto -\cos x$; *i)* $x \mapsto 1 - \cos x$;

*j)* $x \mapsto 3 - 2 \cdot \cos x$; *k)* $x \mapsto 2 \cdot (1 + \cos x)$; *l)* $x \mapsto \cos\frac{x}{2}$;

*m)* $x \mapsto 1 - \cos\frac{x}{2}$; *n)* $x \mapsto -\cos 2x$; *o)* $x \mapsto 1 + \cos 2x$.

**2654** Oldjuk meg a valós számok halmazán:

*a)* $\cos x = x - \frac{\pi}{2}$; *b)* $\cos x = -x - \frac{\pi}{2}$; *c)* $\cos x = x + \frac{\pi}{2}$.

**2655** Melyik nagyobb a felsorolt két érték közül:

*a)* $\cos 1$, $\cos 1{,}5$; *b)* $\cos 1$, $\cos(-1)$; *c)* $\cos 1$, $\cos 3$.

**2656** Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

*a)* $[0; 2\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; *b)* $[-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

*c)* $[0; 2\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$; *d)* $[-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -1 - 2 \cdot \cos(x - \pi)$;

*e)* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$; *f)* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos 2x - 1$;

*g)* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; *h)* $[-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

**2657** Ábrázoljuk és jellemezzük (növekedés, fogyás, szélsőérték szempontjából) a következő függvényeket:

*a)* $[-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |\cos x| + 2$; *b)* $[-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$;

*c)* $[-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |\cos x| + \cos x$.

**2658** Adjunk meg három különböző $\alpha$ szöget, amelyre igaz, hogy:

*a)* $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *b)* $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; *c)* $\cos\alpha = \cos 40°$; *d)* $\cos\alpha = \cos 130°$.

**2659** Oldjuk meg függvénygrafikonok felhasználásával:

*a)* $\cos x = \frac{1}{2}$; *b)* $\cos x = 0$; *c)* $\cos x = 1$; *d)* $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

*e)* $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *f)* $\cos x = -5$; *g)* $\cos x = \frac{5}{3}$; *h)* $2 \cdot \cos x = -\sqrt{2}$;

*i)* $-2 \cdot \cos x = \sqrt{3}$; *j)* $\cos x = \frac{1}{3}$; *k)* $\cos x = \frac{2}{5}$.

**2660** Hol pozitívak az alábbi függvények? Oldjuk meg függvénygrafikonok segítségével.

*a)* $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; *b)* $g(x) = -\cos x$;

*c)* $h(x) = \cos\frac{x}{2}$; *d)* $i(x) = 2 \cdot (1 + \cos x)$.

**2661** Oldjuk meg a következő egyenleteket.

*a)* $\cos 2x = \frac{1}{2}$;  *b)* $\cos(2x + 60^\circ) = \frac{1}{2}$;  *c)* $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

*d)* $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;  *e)* $-2 \cdot \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$;  *f)* $2 \cdot \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$;

*g)* $4 \cdot \cos^2 x = 1$;  *h)* $\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$;  *i)* $4 \cdot \cos^2\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 3$;

*j)* $2 \cdot \cos^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 1$.

**2662** Oldjuk meg függvénygrafikon segítségével a következő egyenlőtlenségeket.

*a)* $\cos x > 0$;  *b)* $\cos x \leq 1$;  *c)* $\cos x \leq \frac{1}{2}$;

*d)* $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$;  *e)* $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;  *f)* $\cos 2x \leq -\frac{1}{2}$;

*g)* $2 \cdot \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) > \sqrt{2}$;  *h)* $2 \cdot \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\sqrt{2}$;  *i)* $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) > \frac{1}{2}$;

*j)* $\cos 4x > 0$.

**2663** Határozzuk meg a következő függvény legnagyobb értékét.

$$f\colon [0; \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x.$$

**2664** Igazoljuk, hogy az alábbi függvény páratlan.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x + \sin^3 x + 5 \cdot \cos x \cdot \sin 2x.$$

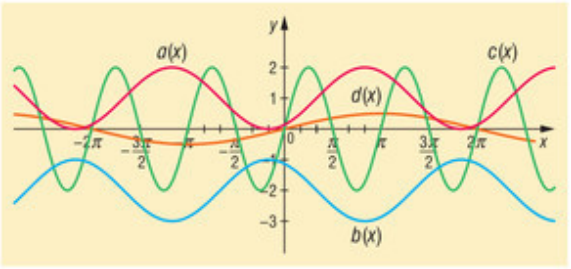
**2665** Igazoljuk, hogy a következő függvény páros.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos 4x + \sin 3x \cdot \sin x + x^2.$$

**2666** Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket.

*a)* $\sin^2 x - |\cos x| < \frac{1}{4}$;  *b)* $\frac{5 - 4 \cdot \sin^2 x}{\cos x} \leq 4$.

**2667** Állapítsuk meg az ábrázolt függvények hozzárendelési szabályát.




**2668** Határozzuk meg azokat az $x$; $y$ valós számpárokat, amelyekre fennáll a következő egyenlőség:

$$2 \cdot \cos y = x + \frac{1}{x}.$$

**2669** Oldjuk meg a következő egyenletet, és ábrázoljuk a gyököket:

$$y^2 + 2y + \cos^2 \alpha = 0.$$

**2670** Igazoljuk, hogy ha $0 < x < \frac{\pi}{4}$, akkor

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x \cdot (\cos x - \sin x)} > 8.$$

**2671** Igazoljuk, hogy ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$2 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \cos 2x \leq 5.$$

**2672** Van-e valós megoldása a következő egyenletnek?

$$4 \cdot \sin 2x + \cos x = 5.$$

## A tangens- és kotangensfüggvény

**2673** Ábrázoljuk a következő függvényeket:

*a)* $x \mapsto \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$;

*b)* $x \mapsto \operatorname{tg}(x + \pi)$, $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$;

*c)* $x \mapsto -\operatorname{tg} x$, $-\pi < x < \pi$, $x \neq -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$;

*d)* $x \mapsto 1 + \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$;

*e)* $x \mapsto \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $-\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4}$;

*f)* $x \mapsto \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $-\pi < x < \pi$, $x \neq 0$.

**2674** Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ intervallumon a következő három függvényt:

*a)* $x \mapsto \sin x$; *b)* $x \mapsto x$; *c)* $x \mapsto \operatorname{tg} x$.

**2675** Oldjuk meg függvénygrafikonok segítségével:

*a)* $\operatorname{tg} x > -1$; *b)* $|\operatorname{tg} x| < 1$; *c)* $\operatorname{ctg} x < -1$; *d)* $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$.

**2676** Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

*a)* $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{tg} x + 1$;

*b)* $[-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

*c)* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{tg} 2x$;

*d)* $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{tg}|x|$.

**2677** Oldjuk meg a valós számok körében függvénygrafikonok felhasználásával:

*a)* $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;

*b)* $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$;

*c)* $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \sqrt{3}$;

*d)* $3 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 4 \cdot \operatorname{tg} x + 1 < 0$.

**2678** Oldjuk meg a valós számok halmazán:

*a)* $\operatorname{tg} 2x > 0$; *b)* $\operatorname{tg} \frac{x}{4} < 0$; *c)* $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 1$; *d)* $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$;

*e)* $|\operatorname{tg} x| \geq 1$; *f)* $|\operatorname{ctg} x| \leq \sqrt{3}$.

**2679** Ábrázoljuk és jellemezzük monotonitás és szélsőérték szempontjából a következő függvényeket:

*a)* $f: \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left|\operatorname{tg}|x|\right|$;

*b)* $g: \left]-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right[ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

**2680** Határozzuk meg a következő függvény legkisebb értékét:

$$f\colon \left]0;\frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

Van-e a függvénynek legnagyobb értéke?

**2681** Oldjuk meg a valós számok halmazán (szükség esetén függvénygrafikon segítségével):

*a)* $\sin^2 2x + \cos^2 2x = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

*b)* $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 1$;

*c)* $\operatorname{ctg} 2x \le 1$;

*d)* $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x$.

**2682** Határozzuk meg a következő függvény maximumát:

$$f\colon \left[0;\frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R},\ f(x) = 2 \cdot \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x.$$

**2683** Igazoljuk, hogy az alábbi függvény minden $x$-re, amire értelmezve van, pozitív.

$$f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x},\quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ n \cdot \frac{\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**2684** A függvények tulajdonságainak felhasználásával oldjuk meg $0 \le x < \frac{\pi}{2}$-re a következő egyenlőtlenséget:

$$1 - \cos x < \operatorname{tg} x - \sin x.$$

**2685** Határozzuk meg a következő egyenlet legkisebb pozitív valós gyökét $10^{-2}$ pontossággal.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2 - x.$$

## Összetett feladatok és alkalmazások

**2686** Ábrázoljuk és jellemezzük (növekedés, fogyás, szélsőérték szempontjából) a következő függvényeket:

*a)* $g\colon [-\pi;\pi] \to \mathbb{R},\ g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

*b)* $h\colon \left]-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[ \to \mathbb{R},\ h(x) = \left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

**2687** Határozzuk meg a következő függvények legnagyobb és legkisebb értékét:

*a)* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin^2 x + 1$;

*b)* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 3 \cdot \sin^2 x + 4 \cdot \cos^2 x$.

**2688** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$3 \cdot \cos^2 x - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos x + 2 = 0.$$

**2689** Oldjuk meg a valós számok halmazán:

*a)* $\cos(3x - 4\pi) = \sin(\pi - x)$;

*b)* $-\sin 2x = \cos\frac{x}{2}$;

*c)* $\sin 4x = \sin 2x$;

*d)* $\cos 2x = \cos 6x$.

**2690** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1.$$

**2691** Oldjuk meg a valós számok körében az egyenletet:

$$6 \cdot \cos^2 x + 11 \cdot \sin x - 10 = 0.$$

**2692** Ábrázoljuk a következő függvény grafikonját:

$$f\colon [-\pi;\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos\left|x - \frac{\pi}{2}\right|.$$

**2693** Oldjuk meg a valós számok halmazán:

*a)* $\sin x + \sqrt{3}\cdot\cos x > 1$;

*b)* $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{4}$.

**2694** Határozzuk meg az alábbi függvény zérushelyeit:

$$f\colon [-\pi;\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin^2 x - \sin x - 2\cdot\cos^2 x.$$

**2695** A megfelelő függvénytulajdonságok felhasználásával oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{\sin^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0.$$

**2696** Vázoljuk a következő függvény grafikonját:

$$f\colon [0;\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\left|x + \frac{\pi}{6}\right| - 1.$$

**2697** A következő egyenletnek hány olyan valós gyöke van, amely a $[-\pi;\pi]$ intervallumba tartozik?

$$\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\sin x - \frac{\sqrt{3}}{4} - 1 = 0.$$

**2698** Határozzuk meg, hogy a következő függvény mely $x$ értékekre pozitív:

$$f\colon [-\pi;\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos^2 x - \frac{1}{2}.$$

**2699** Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

*a)* $\sin x\cdot\operatorname{ctg} x = 0$;

*b)* $\sin x\cdot\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x = 0$;

*c)* $3\cdot\operatorname{ctg} x = 2\cdot\cos x$;

*d)* $\sqrt{3}\cdot\sin x = 3\cdot\cos x$;

*e)* $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$;

*f)* $\cos x + \sqrt{3}\cdot\sin x = 0$;

*g)* $\cos^3 x = \cos^2 x$.

**2700** Mennyi a legkisebb pozitív periódusa a következő függvénynek:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos 2x\cdot\sin\frac{x}{2}?$$

**2701** Adjuk meg az alábbi egyenlet összes valós megoldását:

$$x^4 + 4x^2 + 2 = -2 - \cos^2 y.$$

**2702** Oldjuk meg a $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $y \in \mathbb{R}$ halmazon az alábbi egyenletet:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 6y - y^2 - 7.$$

## Geometriai alkalmazások

**2703** Egy paralelogramma két oldala 14 és 16 egység hosszúak, az általuk bezárt szög 110°. Számítsuk ki a paralelogramma területét.

**2704** Egy rombusz oldalai 10 egység hosszúak, és egyik szöge 100°. Számítsuk ki a rombusz területét.

**2705** Egy egyenlő szárú háromszög szárai 8 cm-esek, az alapon fekvő szögei 71,36°-osak. Mekkora a háromszög köré írt kör sugara és a háromszög területe?

**2706** *a)* Egy szabályos nyolcszög oldala 10 cm. Mekkora a területe és a köré írható kör sugara?
*b)* Mekkora sugarú körbe írhatunk 10 cm oldalú szabályos ötszöget?

**2707** Egy háromszög egyik oldala 6,8 cm, a vele szemközti szög 38°. Mekkora a háromszög köré írt kör sugara?

**2708** Egy szabályos kilencszög területe 1080 $dm^2$. Mekkora a köré írható kör sugara?

**2709** Mekkora kerületi szög tartozik egy 8,7 cm sugarú körben lévő 13,4 cm hosszúságú húrhoz?

**2710** Egy háromszög két súlyvonala 6 és 9 egység hosszú, az általuk bezárt szög 108°. Számítsuk ki a háromszög területét.

**2711** Három darab egyforma hosszú, a szélességű deszkából egy egyenlő szárú trapéz keresztmetszetű vályút állítanak össze. Milyen méretezés mellett lesz a keresztmetszet területe a lehető legnagyobb?

**2712** Adott egy $r$ sugarú félgömb. Azok közül a forgáskúpok közül, amelyeknek a palástja érinti a félgömböt, és az alaplapjuk a félgömb határoló körével koncentrikus kör, melyiknek lesz a legkisebb a térfogata?

**2713** Egy $r$ sugarú félkörbe trapézt írunk úgy, hogy a trapéz két párhuzamos oldala közül az egyik a félkör átmérője, a másik pedig egy ezzel párhuzamos húr. Az így kapott trapézok közül melyiknek a területe maximális?

## Vegyes feladatok

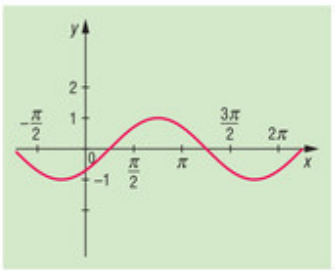
**2714** Ábrázoljuk a következő függvényt:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

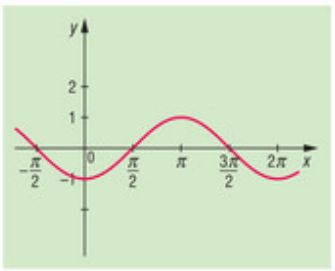
**2715** Számítsuk ki:
*a)* $\cos 5\pi$; *b)* $\sin 7\pi$; *c)* $\operatorname{tg} 800°$; *d)* $\operatorname{ctg} 500°$.

**2716** Az alábbi ábrák trigonometrikus függvények grafikonjai. Írjuk fel a függvények hozzárendelési szabályát. Adjunk meg több megoldást is.

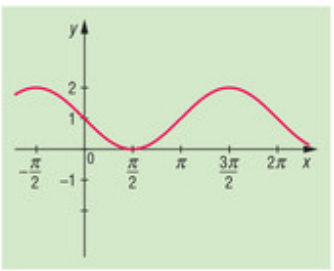
*a)*



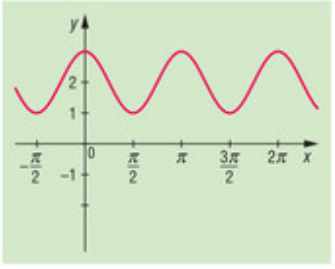

*b)*



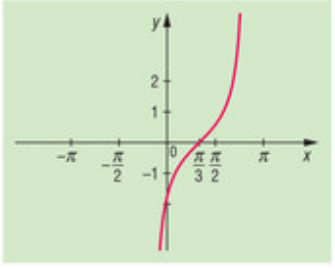

*c)*



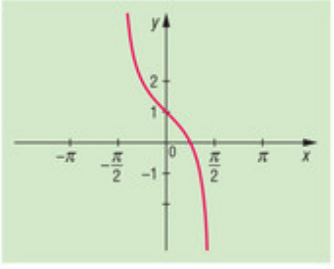

*d)*




*e)*




*f)*



**2717** Ábrázoljuk a következő függvényeket:

*a)* $x \mapsto \sin(\pi + x)$, $x \in \mathbb{R}$;

*b)* $x \mapsto -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$;

*c)* $x \mapsto \operatorname{tg}(\pi - x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$;

*d)* $x \mapsto -\operatorname{tg} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

**2718** Melyik a valós számhalmaznak az a legbővebb részhalmaza, amelyen a következő hozzárendelési szabállyal függvény adható meg?

*a)* $x \mapsto \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{2}$;

*b)* $x \mapsto \frac{\cos 2x}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}$;

*c)* $x \mapsto \frac{\sin|x|}{\cos|x|}$;

*d)* $x \mapsto \frac{\cos 2x}{2 \cdot \cos x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)}$;

*e)* $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$;

*f)* $x \mapsto \frac{\cos 2x}{\sin x \cdot (1 - \operatorname{ctg} x)}$;

*g)* $x \mapsto \sqrt{2 \cdot \sin \pi x - 1}$.

**2719** Mely pontokban metszik egymást az $f(x)$ és $g(x)$ függvény grafikonjai?

*a)* $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ és $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$;

*b)* $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ és $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$.

**2720** Határozzuk meg a valós számok halmazán értelmezett függvények értékkészletét:

*a)* $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (\sin x - 1)$;

*b)* $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$;

*c)* $h(x) = \sin x - 2$;

*d)* $i(x) = 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

**2721** Számítsuk ki a következő összegeket:

*a)* $\frac{\cos 60^\circ - \sin 60^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ}$;

*b)* $\frac{\cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ}{2 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ - 3}$;

*c)* $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \cos 80^\circ + \cos 100^\circ + \cos 120^\circ + \cos 140^\circ + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$;

*d)* $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ + \operatorname{tg} 100^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ + \operatorname{tg} 140^\circ + \operatorname{tg} 160^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ$.

**2722** Ábrázoljuk a következő egyenleteket. Előbb gondolkodjunk, azután kezdjünk neki!

*a)* $a(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin x$;

*b)* $b(x) = \cos x + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

*c)* $c(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$;

*d)* $d(x) = \cos^4 x + \sin^4 x + 2 \cdot \cos^2 x \cdot \sin^2 x$;

*e)* $e(x) = \sin x - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

**2723** Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenleteket:

*a)* $\sin|x| = |\sin x|$;

*b)* $\cos|x| = |\cos x|$;

*c)* $\operatorname{tg}|x| = |\operatorname{tg} x|$;

*d)* $\operatorname{ctg}|x| = |\operatorname{ctg} x|$.

**2724** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

*a)* $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(x+\pi)=0$;

*b)* $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg}(x+\pi)$;

*c)* $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1$;

*d)* $\sin(x-60^\circ)=\cos(x+30^\circ)$.

**2725** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket (használjunk függvénygrafikont, ha szükséges):

*a)* $\operatorname{ctg}x>\operatorname{tg}x,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$;

*b)* $\cos x<\sin x,\ 0\le x\le 2\pi$;

*c)* $\sin(x-90^\circ)<\sin(x-180^\circ),\ 90^\circ\le x\le 360^\circ$;

*d)* $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>1,\ 0\le x\le 2\pi$.

**2726** Ábrázoljuk a következő függvényeket:

*a)* $x\mapsto\left|\sin x+\frac{1}{2}\right|,\ x\in\mathbb{R}$;

*b)* $x\mapsto\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|,\ x\in\mathbb{R}$;

*c)* $x\mapsto\sqrt{1-\sin^2 x},\ x\in\mathbb{R}$.

**2727** Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

*a)* $1+\cos x=\frac{\sin x}{1-\cos x}$;

*b)* $\frac{\sin^2 x}{3}=\cos^2 x$;

*c)* $6\cdot\cos^2 x-3\cdot\sin^2 x-3\cdot\sin x\cdot\cos x=0$;

*d)* $\sqrt{3}\cdot\sin x-\cos x=0$;

*e)* $\cos x-\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg}x$;

*f)* $\cos^2 x+4\cdot\cos x=3\cdot\sin^2 x$.

**2728** Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

*a)* $\sin^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=1$;

*b)* $5\cdot(\sin x+\cos x)^2-13\cdot(\sin x+\cos x)+8=0$;

*c)* $\sin x+\cos x+2\cdot\sin x\cdot\cos x=-1$.

**2729** Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ esetén az $f(x)=\sin x$ és $g(x)=\cos x$ függvényt.

Szemléltessük a kapott ábrán a következő azonosságokat:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right);\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

**2730** Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

*a)* $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x>2$;

*b)* $\sin^4 x+6\cdot\cos^2 x-1>0$;

*c)* $\sin\pi x>\cos\pi x$;

*d)* $1+\sin x<\operatorname{tg}x+\cos x$.





# 10.6. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS

## Események

**2731** *a)* Valószínűségi kísérletnek tekinthetők-e az alábbiak?
- A tizenegyes rúgások gyakorlása a focipályán.
- A hárompontos dobáskísérlet a kosárlabdában.
- A nagymama eredeti görög vázájának laza könyökmozdulattal való leverése a polcról.
- A pohárkészítő üzemben egy adott típusú sorozatban gyártott pohár alsó polcról való leverése.

*b)* Mit tekinthetünk a fenti kísérletek kimeneteleinek?

*c)* A kísérletek eredményéhez adjunk meg elemi eseményeket.

**2732** Feldobunk egy 20 oldalú dobókockát, amelynek lapjai 1-től 20-ig számozottak és egy érmét, amelynek egyik lapja fej, a másik írás. Adjuk meg az összes elemi eseményt, ha a kísérlet kimenetelének:

*a)* a kockával dobott számot tekintjük;

*b)* a kockával dobott szám hárommal vett osztási maradékát tekintjük;

*c)* ha az érmén fejet dobtunk, akkor a kockán látható számot, ha írást, akkor a $-1$-szeresét tekintjük.

**2733** A túrórudikat készítő üzemben a kész rudik megengedett hossza 10 cm ± 5%. (Ami az előírásnak nem felel meg, azt az üzem dolgozóinak kell elfogyasztaniuk.) A gyártósor technikai felépítése miatt az elkészült rudi hossza legalább 8 cm és legfeljebb 13 cm lehet.

*a)* Valószínűségi kísérlet-e egy túrórudi legyártása?

*b)* Mit tekinthetünk elemi eseménynek? Ábrázoljuk számegyenesen.

*c)* Adjunk meg három olyan eseményt az eseménytérből, melyek nem elemi események.

**2734** Egy csomag jól megkevert magyar kártyából addig húzunk visszatevés nélkül, míg a húzott lap király nem lesz. (A magyar kártya 32 lapos, és négy különböző király van benne.) A kísérlet kimenetelének azt a sorszámot tekintjük, ahányadikra a királyt húztuk.

*a)* Írjuk fel az elemi eseményeket.

*b)* Soroljuk fel a következő eseményeket alkotó elemi eseményeket:

$A$ = {legfeljebb ötödikre király van a kezünkben},

$B$ = {legalább huszadikra húzunk királyt},

$C$ = {prím sorszámra húzunk királyt}.

*c)* Adjuk meg a fenti események komplementereit elemi eseményekkel és szövegesen is.

*d)* Adjunk meg egy-egy biztos és lehetetlen eseményt a kísérletben.

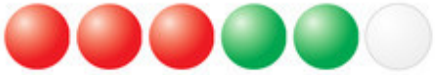
**2735** Tekintsük valószínűségi kísérletnek, hogy a hagyományos dobókockát háromszor feldobjuk, kimenetelének pedig a dobott számok összegét.

*a)* Adjuk meg az összes elemi eseményt.

*b)* Adjunk meg egy-egy biztos és lehetetlen eseményt az eseménytérben.



**2736** Egy zárt kartondobozban a képen látható számú piros, zöld, fehér golyó van. A valószínűségi kísérlet néhány golyó kihúzása, eredménye a kivett golyó színe. Adjuk meg az elemi eseményeket és eseményteret, ha:



*a)* egy golyót húzunk ki közülük;

*b)* két golyót húzunk ki közülük, a sorrendet figyelembe véve és visszatevés nélkül;

*c)* két golyót húzunk ki, a sorrendre nem figyelve visszatevés nélkül;

*d)* három golyót húzunk ki visszatevés nélkül, a sorrendre nem ügyelve;

*e)* két golyót húzunk ki visszatevéssel, de a sorrendjüket figyelembe véve.

**2737** Zsolt és Jenő kő-papír-olló játékot játszik. (A két játékos véletlenszerűen mutat egy jelet a háromból, melyek a következő sorrendben nyernek: a kő kicsorbítja az ollót, az olló elvágja a papírt, a papír becsomagolja a követ.)

*a)* Foglaljuk $3 \times 3$-as táblázatba a lehetséges kimeneteleket. Jelentse *Zs*: Zsolt nyer, *J*: Jenő nyer, *D*: döntetlen.

*b)* Hány elemi esemény bekövetkezésekor nyer Zsolt, illetve Jenő? Hány esetben lesz döntetlen a játék?

**2738** Egy kalapban hat darab 1-től 6-ig számozott cédula található. Pista és Tamás húznak egy-egy cédulát visszatevés nélkül. Az nyer, akinek a céduláján nagyobb szám van.

*a)* Ábrázoljuk táblázatban a lehetséges kimeneteleket (jelentse *P*: Pista nyer, *T*: Tamás nyer)!

*b)* Hány elemi esemény van?

*c)* Melyik kimenetelt valósítja meg több elemi esemény?

## Műveletek eseményekkel

**2739** Egy érmét háromszor feldobunk.

*a)* Adjuk meg a következő események komplementereit.

$A = \{\text{legalább egy fej}\}$,

$B = \{\text{mind írás}\}$,

$C = \{\text{pontosan kettő fej}\}$,

$D = \{\text{legalább kettő egyforma}\}$.

Vannak-e az *a)* pontban szereplő esemény között:

*b)* egyenlők; *c)* egymást kizárók, de nem komplementerek?

**2740** Egy autó most hajt át az 500 méter hosszú hídon. Tekintsük a következő eseményeket:

$A = \{\text{a híd jobb végétől legfeljebb 300 m-re van}\}$,

$B = \{\text{a híd jobb végétől legalább 200 m-re van}\}$,

$C = \{\text{a híd közepétől legfeljebb 100 m-re van}\}$.

*a)* Ábrázoljuk az eseményeket.

*b)* Ábrázoljuk a következő eseményeket:

$$A + B, \quad \overline{A} + \overline{B}, \quad A \cdot B, \quad \overline{A} \cdot \overline{B}, \quad B \cdot \overline{C}, \quad A \cdot B \cdot \overline{C}.$$





*c)* A *b)* részben szereplő események között vannak-e biztos, illetve lehetetlen események?

*d)* Az események között vannak-e egymást kizárók, de nem komplementerek, illetve komplementerek? Adjunk meg egy-egy ilyen eseménypárt.

**2741** Attila, Benjamin, Csongor, Dániel és Egon mindig egymás mellett ülve tanulnak a könyvtárban. Legyen az a valószínűségi kísérlet, hogy véletlenszerűen leülnek egymás mellé, a kimenetel pedig a diákok sorrendje. Jelentse $A$, illetve $B$ a következő eseményeket:

$A = \{\text{Attila és Egon ül a két szélén}\}$,

$B = \{\text{Benjamin, Csongor, Dániel egymás mellett ül}\}$.

*a)* Hány elemi esemény alkotja az $A$, illetve a $B$ eseményt?

*b)* Igaz-e, hogy $A \cdot B = A$?

*c)* Hány elemi esemény alkotja az $\overline{A} \cdot B$ eseményt?

**2742** Egy csomag magyar kártyát jól megkeverünk, majd húzunk egy lapot. Legyenek az alábbi események:

$A = \{\text{tököt húzunk}\}$,

$B = \{\text{tízest vagy ászt húzunk}\}$,

$C = \{\text{figurás lapot húzunk}\}$.

*a)* Adjuk meg szövegesen az alábbi eseményeket:

$$A + B, \quad A \cdot B, \quad B \cdot C, \quad A + C, \quad \overline{C} \cdot A, \quad A \cdot B \cdot C.$$

*b)* Hány elemi esemény alkotja a feladatban említett eseményeket?

**2743** Egy csomag magyar kártyát jól megkeverünk, majd húzunk egy lapot. A kísérlet kimenetele a kihúzott lap. Legyenek a következő események:

$A = \{\text{pirosat vagy makkot húzunk}\}$,

$B = \{\text{királyt húzunk}\}$,

$C = \{\text{tököt húzunk}\}$,

$D = \{\text{hetest, nyolcast, kilencest vagy tízest húzunk}\}$.

*a)* Adjuk meg az $A$, $B$, $C$, $D$ események és műveletek segítségével a következő eseményeket:

$E = \{\text{tököt vagy zöldet húzunk}\}$,

$F = \{\text{alsót, felsőt vagy ászt húzunk}\}$,

$G = \{\text{zöld királyt húzunk}\}$,

$H = \{\text{tök figurát húzunk}\}$.

*b)* Vannak-e egymást kizáró események a feladat szövegében? Keressük meg mindet!

**2744** A fiúk játék közben találták az ábrán látható, leselejtezett, színes ablaktáblát. Apró kavicsokkal célba dobnak a színes üvegekre.



Vegyük sorra a következő eseményeket:

$A = \{\text{a felső két sort találják el}\}$,

$B = \{\text{az alsó két sort találják el}\}$,

$C = \{\text{az első oszlopot találják el}\}$,

$D = \{\text{a középső két oszlopot találják el}\}$,

$E = \{\text{az utolsó két oszlopot találják el}\}$.

*a)* Jelöljük meg a táblán a következő eseményeket:

$$A + B, \quad A \cdot \overline{B}, \quad \overline{C} \cdot \overline{E}.$$



*b)* Adjuk meg az $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ események és műveletek segítségével az alábbi eseményeket:

$F = \{$a középső sort találják el$\}$,

$G = \{$az utolsó oszlopot találják el$\}$,

$H = \{$a második vagy az utolsó oszlopot találják el$\}$.

*c)* Írjuk fel az $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ események és műveletek segítségével, ha az alábbi helyeken találják el a táblát:




**2745** Egy autót háromféleképpen lehet lejtős úton megtartani: a kéziféket behúzva, sebességben hagyva vagy a kereke alá éket téve. Külön-külön mindegyik elég ahhoz, hogy az autó ne guruljon el. Benjamin napközben a ház előtti lejtős részen hagyja az autóját. Vegyük a következő három eseményt:

$A = \{$behúzta a kéziféket$\}$,

$B = \{$éket tett a kerék alá$\}$,

$C = \{$sebességben hagyta$\}$.

Adjuk meg az $A$, $B$, $C$ és a műveletek segítségével a következő eseményeket:

*a)* A kéziféket behúzta és az ék is a kerék alatt van, de nem hagyta sebességben.

*b)* Kinéz az ablakon és ott van az autó.

*c)* Kinéz az ablakon és nincs ott az autó.

*d)* Benjamin legalább két dolgot megtett, hogy ne guruljon el az autó.

*e)* Az ékkel a kutya játszik az udvaron, de az autó nem gurul el.

*f)* A *c)* esetet írjuk fel úgy is, ha az $A$, $B$, $C$ közül legalább két dolgot meg kell tenni ahhoz, hogy az autó ne guruljon el.

**2746** Az ábrán egy dartstáblát látunk. Valószínűségi kísérletnek tekintsünk egy dobást a táblára, a kimenetelének pedig a dobott pontot 1-től 20-ig (a szorzókkal és a bullal most nem foglalkozunk).




*a)* Jelöljük meg körívekkel a következő eseményeket:

$A = \{1, 5, 20\}$,

$B = \{2, 6, 10, 13, 15\}$,

$C = \{$6 és 9 mező közé eső, 20-t is tartalmazó értékek$\}$,

$D = \{$az $A$ esemény 126°-kal való elforgatása a középpont körül, pozitív irányba$\}$.

*b)* Adjuk meg elemi eseményekkel és jelöljük körcikkel is a következő eseményeket:

$A + B + C$, $\quad C \cdot \overline{A + B}$, $\quad B \cdot \overline{D}$, $\quad \overline{A + B + C + D}$.

*c)* Keressünk az eredetileg megadott $A$, $B$, $C$, $D$ események között egymást kizárókat.

*d)* Van-e olyan esemény az $A$, $B$, $C$ és $D$ között, aminek bekövetkezése maga után von egy másikat is?





## Kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség

**2747** Játsszuk le 30-szor a kő-papír-olló játékot, közben jegyezzük fel, hogy hányszor nyertünk, vesztettünk, illetve lett döntetlen az állás. Számítsuk ki az egyes kimenetelek relatív gyakoriságait is.

**2748** Az edzésen Géza 23 szabadrúgásból 12-szer, Tamás 19 kísérletből 7-szer, Ferenc 22-ből 13-szor volt eredményes.

*a)* Számítsuk ki a három fiú sikeres lövéseinek relatív gyakoriságát két tizedesjegyre kerekítve.

*b)* A relatív gyakoriságok alapján melyikükre kell bízni a szabadrúgások elvégzését?

**2749** Egy zárt dobozban piros, kék és sárga golyók vannak. A dobozból néhányszor kiveszünk egy-egy golyót, megnézzük, majd visszatesszük. Összesen 12 alkalommal piros, 8-szor kék és 20-szor sárga golyó akadt a kezünkbe.

*a)* Számítsuk ki a kihúzott golyók között az egyes színek relatív gyakoriságait.

*b)* Időközben megtudjuk, hogy a dobozban összesen 100 golyó van. Becsüljük meg a relatív gyakoriságok alapján, hogy hány darab piros, kék és sárga golyó lehet a dobozban.

**2750** Dobjunk fel 5-ször, 10-szer, 20-szor, 50-szer, 100-szor egy érmét, és jegyezzük fel, hányszor lett fej vagy írás. Mit figyelhetünk meg? Ismételjük meg a kísérleteket másik érmével is.

**2751** Az $A$ osztályban 13 tanulónak van piros tolla, 23-nak nincs. A $B$ osztályba 5-tel kevesebben járnak. Itt legfeljebb hány főnek lehet piros tolla, ha tudjuk, hogy a $B$-ben kisebb a piros tollak relatív gyakorisága?

**2752** Az utcán megkérdeztünk 45 embert arról, hogy szereti-e a túrós tésztát. 32 fő válaszolt igennel. Másik napon a harcsapaprikás után érdeklődtünk. Az eddig megkérdezett 24 főből 16-an válaszoltak igennel. Ha ezek után csak igen választ fogunk kapni, akkor még hány főt kell megkérdezni ahhoz, hogy a harcsapaprikást szeretők relatív gyakorisága több legyen, mint a túrós tésztát szeretőké?

**2753** Játsszuk a következő játékot! Három diák ($A$, $B$, $C$) szorosan egymás mellett szemben áll az osztállyal hátratett kézzel. A műsorvezető egyikük kezébe elrejti a nyereményt, pl. egy szem szaloncukrot. A játékos választ egyet $A$, $B$, $C$ közül. Erre a műsorvezető felszólítja közülük azt, akit nem választott a játékos és nincs a kezében semmi, hogy mutassa a kezeit. Ezután megkérdezi a játékost, hogy szeretne-e változtatni iménti véleményén. Játsszuk le 30-szor a játékot! Mit érdemes a játékosnak inkább tenni, ha nyerni szeretne: változtasson vagy maradjon az eredeti elképzelésénél? (A feladatot a matematika Monthy Hall probléma néven ismeri.)

**2754** Játsszuk 30-szor a következő játékot! Egy kalapban gyűjtsük össze az osztály tanulóinak neveit tartalmazó cédulákat, majd mindenki húzzon egyet (ajándékozáskor is ezzel a módszerrel szokták a megajándékozandót kisorsolni). Mit mutat a tapasztalat: vajon hány alkalommal fordul elő, hogy valaki a saját nevét húzza ki?

## A valószínűség klasszikus modellje

**2755** Viktóriának egy 5-ös, egy 10-es, két 20-as, egy 50-es és egy 100-as érme lapul a zsebében. Véletlenszerűen kivéve közülük egyet, mekkora valószínűséggel lesz a kivett érme 50-es?

**2756** Gábor kölcsönkérte Julcsi mobiltelefonját, mert a rámentett 16 zeneszámból kettőt nagyon szeret. Mekkora valószínűséggel hallja meg elsőre valamelyik kedvencét, ha a mobil véletlen lejátszásra van állítva?



**2757** Zsuzsi konyhaszekrényében 30 konyharuha van, közülük 6 piros, a többi sárga. Mekkora valószínűséggel választ ki véletlenszerűen egy sárga konyharuhát?

**2758** Mekkora valószínűséggel választ Hófehérke az alábbi törpék közül bekötött szemmel egy

*a)* narancssárga; *b)* kék

sapkát viselőt? Kerekítsük az eredményeket két tizedesjegyre.



**2759** Mekkora valószínűséggel lesz a hagyományos 90-ből 5-öt lottó sorsolásán az elsőre kihúzott szám 30-nál kisebb prím?

**2760** Tomi megfigyelte, hogy 0,6 valószínűséggel találja el kedvenc csapata mérkőzésének eredményét. Mekkora valószínűséggel téved a következő fordulóban?

**2761** A céllövöldében a zsivány Rumcájsz 30 nyereményből 7-et talál el. Mekkora valószínűséggel nem találja el a következő nyeremény pálcikáját?

**2762** Egy zárt dobozban 40 golyó van, közülük 7 piros és 9 zöld. Egy golyót húzva a dobozból, mekkora valószínűséggel nem lesz sem piros, sem zöld?

**2763** Egy zsákban 36 zselés és 14 kókuszos szaloncukor van azonos csomagolásban. Mekkora valószínűséggel választ közülük Dani egy kókuszos szaloncukrot?

**2764** Zsóka szereti a gyümölcsteát, egy nagy edényben gyűjti a filtereket. Ha teát szeretne inni, felforralja a vizet és az edényből kivesz egy filtert. Most éppen 9 barack, 6 szeder, 5-5 ribizli és eper teafiltere van. Mekkora valószínűséggel vesz az edényből véletlenül épp szederteát?

**2765** Eszternek 15 mesekönyve van, közülük néhányban tündérek is vannak. Annak a valószínűsége, hogy éppen ilyet vesz le a polcról 0,8. Hány tündéres mesekönyve van Eszternek?

**2766** Egy sok oldalú dobókocka lapjait 1-től kezdve, egyesével növekedve sorszámozzuk. A kockát feldobva a legfeljebb 4-es dobás valószínűsége 0,2. Hány oldala van ennek a dobókockának?

**2767** Egy osztályba 12 fiú jár. Tudjuk, hogy véletlenszerűen kiválasztva egy tanulót, annak valószínűsége, hogy az illető lány, 0,6. Hány lány jár ebbe az osztályba?

**2768** Géza egy zárt dobozban tartja ólomkatonáit. Tizenhárom amerikai, hét angol és néhány német katonája van. Annak a valószínűsége, hogy egyet véletlenül kivéve az német lesz, 0,2. Hány német ólomkatonája van Gézának?

**2769** A kördiagram az angol első osztályú labdarúgó-bajnokság góllövőlistát vezető játékosairól készült. Mennyi a valószínűsége, hogy egy főt véletlenül kiválasztva a legalább 5 gólt lövő játékosok közül, az pontosan 7 gólt rúgott? (Forrás: Official Premier League Statistics, 2008. december 1.)







**2770** Egy énekversenyen a 10 résztvevő mindegyikét rangsorolják. Mekkora a valószínűsége, hogy a verseny egyik indulója, Csengő Csenge:

*a)* első lesz; *b)* második lesz; *c)* dobogós helyen végez?

*(A botfülű zsűri gyakorlatilag véletlenszerűen dönt a helyezésekről.)*

**2771** Egy elvetemült matematikus a ruletten egyszerre megfogadta az összes prímszámot. Mekkora a valószínűsége, hogy eltalálta valamelyiket? *(A rulettkeréken 0-tól 36-ig szerepelnek számok.)*

**2772** Angéla és Bóbita egy dobókockával játszanak. Dobás előtt fogadnak a dobott számokra. Mire fogadjon Bóbita, ha azt akarja, hogy Angéla csak egyharmad valószínűséggel nyerjen? Adjunk meg legalább két ilyen eseményt.

**2773** A jókedvű tanár óra elején egyszer felcsapja a naplót: ha olyan részen nyílik ki, ahova nincsenek tanulók beírva, akkor a felelés elmarad. Egyébként véletlenszerűen választ a két oldal közül és szólítja ki az oda beírt diákot felelni. *(Hiányzó nincs és a napló sincs meggyűrve, ugyanakkora valószínűséggel nyílik ki bárhol.)*

*a)* Mekkora valószínűséggel marad el a felelés, ha a napló 150 oldalas és 30 diák van beírva?

*b)* Ha a tanítási hét minden napján van az osztálynak a jókedvű tanárral egy órája, akkor várhatóan hány nap lesz felelés?

**2774** A *bás* nevű kockajátékban két dobókockával dobunk egyszerre. Ha különbözőt dobtunk, akkor pontszámunk a nagyobb érték tízszeresének és a kisebb számnak az összege. Ha egyformát dobtunk, akkor azt *básnak* mondjuk: van 1-es bás, 2-es bás, …, 6-os bás. Mindent üt a 21, alatta jönnek csökkenő sorrendben a bások, azok alatt pedig szintén csökkenő sorrendben az összes többi dobható szám.

A játék lényege, hogy a kockadobás után csak a dobó nézheti meg a két kockát, majd állít valamit a dobott értékről. Akár hazudhat is, de mindenképpen nagyobb értéket kell mondania, mint az előző játékosnak. Ha a játékostársak közül valaki nem hisz neki, megkéri, hogy mutassa a kockákat. Akinek nincs igaza, az kap egy hibapontot, esetleg kiesik a játékból, majd jön a következő.

Győztest többféleképpen hirdethetünk. Nyerhet, aki egyedül maradt a játékban, vagy aki elérte a 21-et és nem kapták hazugságon, illetve akinek a legkevesebb hibapontja van.

*a)* Dobhat-e egy játékos 45 pontot?

*b)* Írjuk fel a dobható pontértékeket ütési sorrendben.

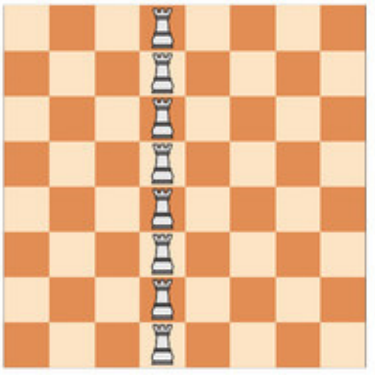
*c)* Az egyik játékos 3-as bást dobott. Mekkora valószínűséggel fogja felülütni az utána jövő dobása?

*d)* Ha valaki 62 pontot mond, mekkora valószínűséggel kell az utána jövőnek hazudnia?

**2775** Helyezzük el a sakktáblán a bástyákat úgy, hogy minden sorba egy jusson (azon belül viszont véletlenszerűen). (➡)

Mekkora valószínűséggel kerül minden bástya:

*a)* egy oszlopba; *b)* valamelyik átlóba?



**2776** Elza, Melinda, Olívia, Barbara és Vilma moziba mennek. A jegyeket véletlenül osztják szét egymás között. Mekkora valószínűséggel ülnek le egymás mellé:

*a)* a feladatban jelölt sorban;

*b)* úgy, hogy pontosan azok legyenek szomszédosak, akik a feladat szövegében is azok?



**2777** Egy dobókockával háromszor dobunk egymás után, a kapott számokat feljegyezzük. Mekkora valószínűséggel lesz az így keletkező háromjegyű szám:

*a)* páros; *b)* nagyobb, mint 450; *c)* csupa különböző jegyű?

**2778** Egy dobozban 100 darab cédula van, rajtuk 1-től 100-ig a számok. Véletlenszerűen kihúzunk egy cédulát. Mekkora valószínűséggel húzunk olyan cédulát, amelyen:

*a)* 9-cel osztható szám van;

*b)* 9-cel osztható szám van, ha előzőleg kivettük közülük a 6-tal osztható számokat tartalmazó cédulákat;

*c)* van 9-es számjegy? (Újra mind a 100 cédula a dobozban van.)

**2779** Antal és Boglárka két dobókockával játszanak. Dobás előtt fogadnak a dobott számokra. Mekkora valószínűséggel nyer Antal, ha azt fogadja meg, hogy a két szám:

*a)* egyenlő lesz; *b)* között lesz prím;

*c)* szorzata prím lesz; *d)* szorzata hárommal osztható lesz?

*Jó tanács: az ilyen típusú feladatoknál érdemes a kockákat valahogy megkülönböztetni.*

**2780** A 20 fős csoport a 40 pontos dolgozatot a táblázatban látható pontokat elérve írta meg.

| Elért pont | 38 | 33 | 26 | 20 | 18 | 15 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dolgozat (db) | 3 | 1 | 4 | 3 | 5 | 2 | 2 |

Tanáruk a következők szerint adja a jegyeket (a felső határ már jobb jegyet ér):

0–30%: elégtelen, 30–45%: elégséges, 45–60%: közepes,

60–80%: jó, 80% vagy a felett: jeles.

Egy dolgozatot véletlenszerűen kiválasztva az asztalon heverők közül, mekkora valószínűséggel lett legalább négyes?

**2781** Három érmét egyszerre feldobva mennyi a valószínűsége, hogy lesz legalább egy fej?

*Segítség: dobjunk három különböző érmével!*

**2782** Egy osztálynapló 30 diák jegyeit tartalmazza. A morcos tanár óra elején véletlenszerűen felcsapja valahol a tanulókat tartalmazó részen, majd a két oldal közül véletlenül választva hívja ki a felelőt. Tegyük fel, hogy nincs a napló meggyűrve és minden tanuló jelen van. Mekkora eséllyel felel:

*a)* Kis Misi, aki az osztály tanulója;

*b)* valaki, aki a kinyitott napló jobb oldalára van beírva;

*c)* olyan diák, aki a naplóban az első 10 tanuló között szerepel?

**2783** Egy 360 oldalas könyv 9 nagy fejezetből áll, ezek mindegyike 5-5 alfejezetre bomlik. Ha felcsapjuk ezt a könyvet valahol véletlenszerűen, mekkora valószínűséggel nyílik ki épp:

*a)* a fő fejezetcímnél; *b)* valamilyen szakaszhatárnál?

A fejezet- és alfejezetcímek külön oldalakon találhatók. A könyv bárhol egyenlő valószínűséggel nyílik ki.

**2784** Egy tanár a 24 fős osztályból minden órán véletlenszerűen szólít ki pontosan egy diákot felelni. Mekkora valószínűséggel felel:

*a)* a következő órán Balláb Balázs;

*b)* Balláb Balázs a következő két óra mindegyikén;

*c)* a következő három órán Balláb Balázs, Jobbláb Jolán és Komisz Borisz valamilyen sorrendben?





**2785** A 32 lapos magyar kártyából húzunk sorban egymás után négy lapot.

*a)* Mekkora valószínűséggel húzunk piros, tök, zöld és makk színűt ebben a sorrendben, ha a kivett lapot nem tesszük vissza?

*b)* Nő vagy csökken ez a valószínűség, ha minden húzás után visszatesszük a lapokat? Adjuk meg számszerűen a változás mértékét.

**2786** A 32 lapos magyar kártyából húzunk 5 lapot, és feljegyezzük őket sorban egymás után. Mekkora valószínűséggel kapunk végül 3 pirosat és 2 tököt, ha a lapokat:

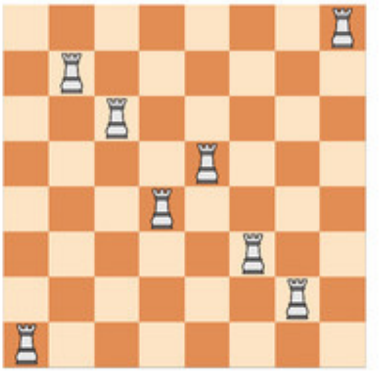
*a)* nem tesszük vissza; *b)* minden húzás után visszatesszük?

Feltételezzük, hogy az újabb lapot minden esetben véletlenszerűen húzzuk (pl. újrakeverjük a csomagot).

**2787** Az ábrán látható sakktáblán csak bástyák vannak.

*a)* Helyezzük el őket úgy, hogy minden oszlopba csak egy kerüljön (de egyébként véletlenszerűen). Mekkora valószínűséggel nem fogják ütni egymást? (A bástya csak saját oszlopában és sorában üt.)

*b)* Helyezzük el őket úgy, hogy ne üssék egymást, mégis véletlenszerűen helyezkedjenek el. Mekkora valószínűséggel kerülnek a figurák a két átló mezőibe? (Hasonlóan, mint az ábrán.)



**2788** A kockapókerben 5 dobókockával dobunk egyszerre. Ha az öt dobott szám megegyezik, akkor *nagy pókerről,* ha csak négy szám egyezik meg, akkor *kis pókerről* beszélünk.

*a)* Mennyi a valószínűsége a nagy pókernek ebben a játékban?

*b)* Mennyi a valószínűsége a kis pókernek?

*Jó tanács: különböztessük meg a kockákat.*

**2789** A kockapóker játékban 5 dobókockával dobunk egyszerre. Úgynevezett *kis sort* dobtunk, ha a kockákon az 1, 2, 3, 4, 5 értékek láthatók, illetve *nagy sort,* ha a 2, 3, 4, 5, 6 számok.

*a)* Mennyi a valószínűsége, hogy kis sort dobunk a kockákkal?

*b)* Hányszor nagyobb a valószínűsége a kis sornak, mint a nagynak?

*Jó tanács: különböztessük meg a kockákat.*

**2790** A rulettasztalon, ahol a játékosok a tételeket elhelyezik, a számok három oszlopba és 12 sorba vannak rendezve 1-től 36-ig. A tábla tetején látjuk külön a 0-t. Ki van alakítva még 4 soronként egy ún. „tucat": van első tucat, második tucat és harmadik tucat.

*a)* Rajzoljuk fel a számtáblázatot.

*b)* Mekkora valószínűséggel nyerünk, ha egy sorra fogadunk?

*c)* Minek nagyobb a valószínűsége, ha a második oszlopra, vagy ha az első tucatra fogadunk?

*d)* Néha lehet fogadni két szomszédos oszlopra is. 30 játékból kb. hányszor nyer az erre fogadó?

**2791** Az európai rulettkeréken 0-tól 36-ig számozott mezőkben landolhat a golyó. A 0 zöld színű, a többi szám piros vagy fekete, mindkét színből 18-18 darab van. Mekkora eséllyel nyerünk, ha:

*a)* egy számra; *b)* két eltérő számra; *c)* $n$ eltérő számra fogadunk ($n \leq 36$, $n \in \mathbb{Z}^+$)?

*d)* Mikor nagyobb a nyerés valószínűsége, ha pirosra teszünk tétet vagy ha páratlanra?



**2792** Legyen a valószínűségi kísérlet, hogy egyszer eldobjuk a hagyományos hatoldalú dobókockát, kimenetele a dobott szám. Adjunk meg elemi eseményeikkel olyan $A$, $B$ eseményeket, melyekre teljesülnek a következők:

*a)* $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}5$ és $P(AB) = 0{,}\dot{3}$;

*b)* $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}\dot{3}$ és $P(A + B) = 0{,}\dot{6}$.

**2793** Egy bolti polc előtt véletlenül kiborult a lejárt szavatosságú és a még jó, ugyanolyan fajta csokikat tartalmazó doboz. A vásárlók segítettek összeszedni, de nem figyeltek a szavatosságra, így a két doboz tartalma összekeveredett. A lejárt csokikból 75%-kal kevesebb volt, mint a le nem jártakból. Mekkora valószínűséggel veszünk ki a kupacból jó csokit, ha véletlenszerűen választunk?

**2794** A számegyenesen nézelődik egy katicabogár. Minden percben egy egységet halad vagy a pozitív, vagy a negatív irányba. Összesen kilenc percig mozog, utána elrepül.

*a)* Melyik pontokba juthat el ennyi idő alatt?

*b)* Mekkora valószínűséggel száll fel végül az 5 pontból?




**2795** Egy 38 fős osztályban arról beszélgetnek, ki milyen gyümölcsöt szeret. 18-an mondják a barackot, 20-20 fő pedig a körtét, illetve az erdei szedret. 8-an vannak, akik a barackot és a körtét is szeretik, ugyanennyien szeretik a körtét és az erdei szedret. A barack és az erdei szeder 7 ember kedvence, de 3 fő szereti mindhárom gyümölcsöt. Mekkora a valószínűsége, hogy kiválasztva egy főt az osztályból, az illető:

*a)* csak és kizárólag az erdei szederért van oda; *b)* pontosan egy gyümölcsöt szeret;

*c)* legfeljebb két gyümölcsöt szeret?

**2796** A 32 lapos magyar kártyából hét lapot húzunk, a kihúzott lapokat feljegyezzük. Mekkora valószínűséggel lesz valamilyen sorrendben köztük 3 piros, 2 tök és 2 zöld, ha:

*a)* a kihúzott lapokat nem tesszük vissza;

*b)* minden kivett lapot visszateszünk a csomagba?

**2797** Egy zsákban 8 rózsaszín, 4 lila és 2 piros golyó van. A golyók azonos méretűek, színüket is csak akkor lehet látni, ha már kivettük őket a zsákból. A kihúzott golyókat nem tesszük vissza.

*a)* Hányféle sorrendben húzhatjuk ki az összes golyót a zsákból?

*b)* Az első 6 húzáskor 6 rózsaszín golyót vettünk ki a teli zsákból. Mekkora valószínűséggel lesz a következő kihúzott golyó is rózsaszín?

*c)* Mennyi a valószínűsége, hogy 13 húzás után lila golyó marad utoljára a zsákban?

*d)* Mekkora valószínűséggel húzhatjuk ki úgy az összes golyót, hogy az azonos színűek mindig egymás után jöjjenek?

**2798** Egy koordináta-rendszer origójából elindul egy katicabogár. Minden percben egy egységet halad véletlenszerűen felfelé vagy jobbra, így érkezik az (5; 5) pontba.

*a)* Hány perc alatt éri el a célját?

*b)* Mekkora valószínűséggel halad csak az $y = x$ egyenes alatt?

*c)* Mekkora valószínűséggel halad csak az $y = x$ egyenes felett?

*d)* Mekkora valószínűséggel találkozik útja az $y = x$ egyenessel?

A kezdő- és a végpontot az út során nem vesszük figyelembe.





**2799** Kockapókerben egyszerre dobunk 5 dobókockával. A kapott öt szám:

- pár, ha két egyforma, valamint három tőlük és egymástól is különböző értéket dobtunk.
- drill, ha három egyforma, valamint kettő tőlük és egymástól is különböző értéket dobtunk.
- full, ha egyszerre van egy párunk és egy drillünk.
- két pár, ha 2-2 azonos, de egymástól különböző és még egy ezektől eltérő számot dobtunk.

Állítsuk valószínűségeik alapján csökkenő sorba a fenti kombinációkat.

*Jó tanács: tekintsük a kockákat különbözőnek.*

**2800** Egy iskolában elektronikus naplót használnak. A napló szoftverébe be van építve egy felelőrutin, amely véletlenszerűen ad egy nevet, mégpedig minden diákét ugyanakkora valószínűséggel. A szoftverben van egy rejtett funkció is. Ha a tanár úgy gondolja, tesz egy strigulát a tanuló neve mellé: ekkor a szoftver úgy veszi, mintha az illető kétszer szerepelne a naplóban.

*a)* Egy 30 fős osztályban Balláb Balázs ma kapta az első strigulát. Rajta kívül másnak nincs ilyen bejegyzése. Hányszorosára nőtt így annak valószínűsége, hogy Balázs nevét dobja ki a számítógép a következő feleléskor?

Egy diáknak több strigulája is lehet. Három strigulát a szoftver úgy számol, mintha az illető négyszer lenne a naplóba írva.

*b)* Hány strigulát kell kapni még az első mellé Balázsnak, hogy a felelőrutin 0,5-nél nagyobb valószínűséggel hívja ki őt felelni? (Tegyük fel, hogy másnak továbbra sincs strigulája.)

Az osztályban nemcsak Balláb Balázs, hanem Komisz Borisz is gyűjtögeti a strigulákat. Rajtuk kívül az osztályból más még nem kapott strigulát.

*c)* Hány strigulát kell kapni kettejüknek külön-külön, hogy Balázs 0,2-nél; Borisz 0,3-nél nagyobb valószínűséggel feleljen?

Ahogy Balázs és Borisz esetében minden strigulával növekszik a felelés valószínűsége, osztálytársaié úgy csökken.

*d)* Hány strigulát kell összesen a többieknek kiosztani, hogy a még strigula nélküli Jobbláb Jolán felelésének valószínűsége 0,01 alá csökkenjen?

## Vegyes feladatok

**2801** Egy távolugrógödör 12 m hosszú. Linda előző ugrási kísérlete 6 m-esre sikerült.

*a)* Ábrázoljuk számegyenesen az eseményteret és Linda kísérletének kimenetelét.

*b)* Ábrázoljuk a következő eseményeket:

$A = \{3$ m-nél rövidebb ugrás$\}$,
$B = \{14$ m-nél nagyobb ugrás$\}$,
$C = \{7$ m-nél nagyobb ugrás$\}$,
$D = \{$legfeljebb 13 m-es ugrás$\}$.

*c)* Válasszuk ki az $A$, $B$, $C$, $D$ események közül a biztos és a lehetetlen eseményt.

**2802** Egy dobókockát ötször dobunk fel. Adjuk meg a következő kimeneteleket alkotó elemi eseményeket:

*a)* hatos dobások száma;

*b)* dobott számok összege.



*c)* Döntsük el, melyik esemény melyik kísérletben tekinthető biztos vagy lehetetlen eseménynek:

$A = \{\text{legalább 7}\}$,
$B = \{\text{legfeljebb 30}\}$,
$C = \{4\}$,
$D = \{\text{6-nál kisebb}\}$.

**2803** Egy szerepjátékokhoz használt 20 oldalú dobókockát dobunk fel, a kísérlet kimenetele a dobott szám. Tekintsük a következő eseményeket:

$A = \{\text{legfeljebb 15-öt dobunk}\}$,
$B = \{\text{párosat dobunk}\}$,
$C = \{\text{összetett számot dobunk}\}$,
$D = \{\text{prímet dobunk}\}$.

*a)* Vannak-e közöttük egymást kizárók?

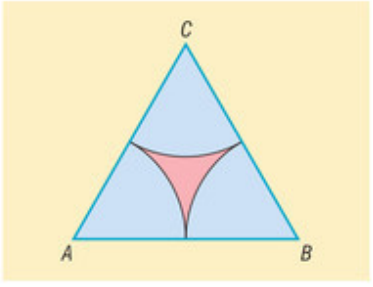
*b)* Adjuk meg a komplementereiket.

*c)* Adjuk meg elemi eseményekkel a következő eseményeket:

$$A + \overline{D}, \quad \overline{A} \cdot B \cdot C, \quad \overline{B + C}.$$

*d)* Fejezzük ki az $A$, $B$, $C$, $D$ események és műveletek segítségével az 1-es dobást.

**2804** Egy két egység oldalú szabályos $ABC$ háromszögre lövünk íjjal. A kísérlet kimenetele az a pont, ahol a nyílvessző beleáll a háromszögbe. (Feltételezzük, hogy minden lövésünk eltalálja a háromszöget.) Legyen $A$, $B$, $C$ esemény, ha az $A$, $B$, $C$ csúcstól 1 egységnél kisebb távolságra találjuk el a háromszöget.




*a)* Vannak-e az $A$, $B$, $C$ események között egymást kizárók?

*b)* Mivel egyenlők az alábbi események:

$$\overline{A \cdot B \cdot C}, \quad A \cdot B + C, \quad A \cdot (B + C)?$$

*c)* Adjuk meg az $A$, $B$, $C$ és a műveletek segítségével az ábrán a középső, pirossal jelölt eseményt.

**2805** Végezzünk kutatómunkát: derítsük ki, hány héten játszottak eddig Magyarországon hagyományos ötös lottót és ebből hány héten volt telitalálatos. Számítsuk ki a telitalálat relatív gyakoriságát.

**2806** Egy főiskolai tanár több éve vezet statisztikát arról, hogy melyik évben hány dolgozatot íratott, és azok közül mennyi lett elégtelen. A következő táblázatot kapta (idén még nem végzett a javítással, azonban eddig csak elégtelen dolgozatok kerültek a kezébe).

| | 3 éve | 2 éve | tavaly | idén |
|---|---|---|---|---|
| összes dolgozat | 123 | 118 | 97 | |
| ebből elégtelen | 21 | 23 | 17 | 13 |

*a)* Számítsuk ki az elégtelen dolgozatok korábbi években mutatott relatív gyakoriságait két tizedesjegyre kerekítve.

*b)* Tételezzük fel, hogy idén már nem lesz több elégtelen dolgozat. Még hány dolgozatot kell kijavítani ahhoz, hogy az elégtelenek relatív gyakorisága idén kevesebb legyen, mint eddig bármikor?

**2807** Mekkora valószínűséggel választunk reggeli félálomban a sötét szoba szekrényéből egy pár csíkos zoknit, ha a 20 pár zoknink közül csak 8 pár csíkos, és ugyanakkora valószínűséggel veszünk ki minden pár zoknit? (A zoknik már párosítva vannak a szekrényben.)

**2808** A hatos lottón 45 számból húznak. Mekkora valószínűséggel lesz az első kisorsolt szám páratlan, összetett és 25-nél nagyobb?





**2809** Klárának Csillát és Gabit is beleszámítva öt nagyon jó barátnője van. Közülük minden hétköznap véletlenszerűen beszél telefonon pontosan eggyel, de mindig mással. Mekkora valószínűséggel hívja fel Csillát kedden és Gabit pénteken?

**2810** Jocó a szőnyegre borított három doboz építőkockát, összesen 134 darabot. Ezek közül 29 darab zöld. Jocó bekötött szemmel vesz a kupacból. Mekkora valószínűséggel lesz:

*a)* a kiválasztott darab zöld, ha csak egy elemet választ;

*b)* mindkét darab zöld, ha visszatevés nélkül választ kettőt;

*c)* mindkét darab zöld, ha kettőt választ, de az elsőt visszadobja a kupacba?

**2811** A Vörös Hajú Szemüvegesek találkozóján 35-en jönnek össze, 30-an vörös hajjal, 15-en szemüveggel rendelkeznek. (A találkozóra csak legalább az egyik tulajdonsággal rendelkezők jöhetnek.) Közülük véletlenszerűen kiválasztva valakit, mekkora valószínűséggel lesz az illető:

*a)* vörös hajú vagy szemüveges; *b)* vörös hajú és szemüveges?

**2812** Egy dobókockával addig dobunk, míg először hatos nem lesz. Mekkora valószínűséggel dobjuk az első hatost:

*a)* elsőre; *b)* másodikra; *c)* $n$-edikre?

**2813** Az alábbi táblázatot egy demográfiai kutatás során készítették az egy családban élő gyermekek számáról.

| Egy családban élő gyermekek | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Családok száma | 5 | 3 | 8 | 4 | 3 | 1 | 1 |

Véletlenszerűen kiválasztva egy, a kutatásban részt vevő

*a)* családot: mekkora valószínűséggel lesz négynél több gyermekük;

*b)* gyermeket: mekkora valószínűséggel lesz legalább egy testvére?

**2814** Az unatkozó matematikusok félkarú rablóján 5 korongon forognak a számok a kar meghúzása után. Az első korongon a 0, 1, …, 5; a másodikon a 0, 1, …, 6 számok és így tovább, mindig eggyel több érték van a következő korongon feltüntetve. Az eredmény a kiforgatott szám (az elején levő 0-kat nem számoljuk). Mekkora valószínűséggel kapunk:

*a)* egy legalább egy egyes jegyet tartalmazó számot eredményül;

*b)* szigorúan csökkenő számsort (az egymás utáni számok határozottan kisebbek az előzőnél)?

# Megoldások




Gondolkodási módszerek 100

A gyökvonás 114

A másodfokú egyenlet 127

Geometria 158

Szögfüggvények 244

Valószínűség-számítás 279





# 10.1. GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK

## Szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel – megoldások

**2001** *a)* Prím után csak az irracionális, $\sqrt{2}$, 2, $2^2$ *nem* kerülhet.
Természetes mögött egész, racionális, valós állhat.
Egész után racionális, valós állhat.
Racionális vagy irracionális mögött csak valós állhat.
$\sqrt{2}$ után irracionális vagy valós állhat.
2 után az irracionálist, $\sqrt{2}$, $2^2$-t kivéve bármi állhat.
$2^2$ mögött természetes, egész, racionális, valós állhat.

*b)* Négyzet után lehet bármi.
Téglalap után paralelogramma vagy trapéz állhat.
Paralelogramma után trapéz állhat.
Rombusz után trapéz, deltoid, paralelogramma állhat.
Trapéz és deltoid után nem írhatunk semmit a listából.

*c)* Bármit is írunk előre, utána kerülhet az 1.
1 után nem írhatunk mást.
Prím mögé csak az 1-et írhatjuk.
10 után 5, 2 állhat.
9 után 3 állhat.
8 után 4, 2 állhat.
6 után 3, 2 állhat.
4 mögött 2 állhat.

*d)* A 9 és a prímek nem állhatnak elöl.
Elöl: 21, utána 7 állhat.
Elöl: 15, utána 5 állhat.

**2002** *a)* Ha valami bogár, akkor rovar.
*b)* Ha valami holló, akkor (az) fekete.

**2003** *a)* Minden négyzet egyenlő oldalú.
*b)* Minden 6-tal osztható szám osztható 3-mal is.

**2004** *a)* Moziba viszi.
*b)* Bármit tehet.

**2005** *a)* Igen. *b)* Igen. *c)* Nem. *d)* Igen.

**2006** *a)* 0 : 0, 1 : 0, 2 : 0.
b) 0 : 0 és valamelyik csapatnak 1 : 0, ill. 2 : 1.
*c)* 0 : 0 és valamelyik csapatnak 1 : 0.

**2007** *a)* Nem igaz.
*b)* Az állítás megfordítása igaz: *Ha a négyszög paralelogramma, akkor van párhuzamos oldalpárja.*
*c)* Trapézra.



**2008** Ha egy háromszög derékszögű, akkor két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével.

Ha egy háromszögben két oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

A tétel feltételeit teljesítő háromszög oldalai közül a két rövidebbet befogóknak, a hosszabbat átfogónak nevezzük. Mivel egy háromszögben a 180°-os szögösszeg miatt csak egy 90°-os szög lehet, ráadásul ez a legnagyobb, ezért a derékszögnek a legnagyobb oldallal szemben kell lennie.

**2009** *a)* *A*: Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor paralelogramma.

*B*: Ha egy háromszög szabályos, akkor tengelyesen szimmetrikus.

*C*: Ha egy háromszög köré írt kör középpontja az egyik oldal felezőpontja, akkor a háromszög derékszögű.

*b)* *B* hamis, az összes többi igaz.

*c)* Egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha a köré írt kör középpontja az egyik oldal felezőpontja. Átfogó, Thalész-tétel.

**2010** Két dolgot kell megfigyelnünk. Egyrészt az öt kosárban összesen 95 darab virág van. Másrészt Rózsa kijelentése *(kétszer annyi piros, mint fehér)* azt jelenti, hogy a virágok száma három többszöröse. Azaz olyan kosárra gondolt, amit 95-ből levonva hárommal osztható számot ad. Ilyen csak egy van, a 29 virágot tartalmazó. Bazsa Rózsa az első kosárra gondolt.

**2011** Két megoldást mutatunk, tessék továbbiakat keresni!

Mindent elismétel, amit csak hall. Másképp: Ha hall valamit, akkor azt elismétli. Tudjuk hogy amint a következtetés első fele, vagyis a feltétel nem teljesül, az állítás nem lehet hazugság. Ez bekövetkezhet például akkor, ha a papagáj *süket.*

Mindent elismétel, amit csak hall… *Majd egy év múlva.* Az időtényezőről nem állított semmit a kereskedő!

**2012** Próbáljuk ki a játékot, szerezzünk tapasztalatokat. A tapasztalat az lesz, hogy ezzel a módszerrel nem lehet egyenlővé tenni a két kupacot. Miért?

Legyen a két kupac különbsége $n$. Ha a kisebb kupacból veszünk el $x$ darabot, akkor a nagyobb kupacba teszünk $2x$-et. A kupacok különbsége $n + 3x$-re változik. Ha a nagyobbból veszünk el $x$-et és a kisebbikbe rakunk $2x$-et, akkor a különbség $n - 3x$-re változik. Mi a közös a két esetben? A $3x$: bármennyit is veszünk el bármelyik kupacból, a kupacok különbsége három többszörösével változik. Mivel eredetileg 2 volt, három többszöröseinek hozzáadásával vagy elvételével nem lehet 0.

*Megjegyzés:* A feladat megoldása során találtunk egy változatlan *(invariáns)* mennyiséget, ennek segítségével igazoltuk a sejtést. Az eljárást szokás *invariáns módszernek* is nevezni.

**2013** Szedjük elemeire a kérdést. Két szereplője van: a *mindent megtanuló diák* és a *megtanulhatatlan matematika.* Bontsuk két következtetésre: először képzeljük el, milyen az, amikor van mindent megtanuló diák. Nyilvánvaló, hogy ő mindent megtanul, tehát nincs megtanulhatatlan. Ha van *mindent megtanuló diák,* akkor nincs *megtanulhatatlan matematika* (sem).

Most fordítsuk meg a dolgot. Induljunk ki abból, hogy a matematika megtanulhatatlan. Akkor viszont nincs egy diák sem, aki meg tudná tanulni. Ha a *matematika megtanulhatatlan,* akkor nincs *mindent megtanuló diák.*

Összegezve: azt nem jelenthetjük ki, hogy van mindent megtanuló diák, vagy hogy a matematika megtanulhatatlan. Ezt nem tudjuk eldönteni. Csak annyit jelenthetünk ki biztosan, hogy a kettő egyszerre nem létezhet, mert kizárják egymást.

*Megjegyzés:* A feladat alapja ez a ma már klasszikusnak számító kérdés Raymond Smullyantól: *Mi történik, ha egy megállíthatatlan ágyúgolyó egy megmozdíthatatlan oszlopnak ütközik?*





**2014** Érdemes játszani a játékot, és úgy tapasztalatokat szerezni a lefolyásáról. Ha már kijátszottuk magunkat, és nem tudjuk a nyerő stratégiát, akkor gondolkodjunk! A játékot körökre oszthatjuk, minden körben a kezdő az első. Bármennyi szálat is vesz el az első egy-egy körben, a második mindig tud úgy elvenni, hogy a gyufák száma 9-cel csökkenjen. Így viszont 11 kör után 1 szál gyufa marad, amit az első a szabályok szerint nem tud elvenni, tehát a második – Péter – nyert.

*Megjegyzés:* Ebben a feladatban is az invariáns módszert alkalmaztuk, invariáns mennyiség az egy körben elvett gyufák száma.

**2015** A játékot osszuk körökre. Egy kör alatt mind a két játékos egyszer vesz el a kupacból. Figyeljük meg, hogy mivel 3, 4 vagy 5 szálat vehetnek el, az egyik a másik által elvett gyufák számát mindig ki tudja egészíteni 8-ra. Így 12 teljes kört tudnak lejátszani, azonban 4 szál marad, ami a kezdő győzelmét jelenti. Valóban, ebben a játékban a kezdőnek van nyerő stratégiája. Mégpedig a következő: első lépésben vegyen el 3 szálat, majd a második által elvett gyufákat egészítse ki 8-ra. A módszerrel 11 kör után (amiben mindig ő a második) $100 - (12 \cdot 8 + 3) = 1$ szál gyufa marad az asztalon, azaz az utoljára lépő nyert. Gabi tehát biztosan nyerni fog, ha kezd, és a fent leírt módszerrel játszik.

*Megjegyzés:* Ebben a feladatban is az invariáns módszert alkalmaztuk, invariáns mennyiség az egy körben elvett gyufák száma.

**2016** Mivel valakinek mindig vissza kell vinni a lámpát, célszerű a gyorsabb hölgyekkel megoldatni ezt a feladatot. Másrészt viszont a két fiút érdemes együtt átküldeni, így akkor csak egy hosszabb, 10 perces séta lesz (nincs külön 5 perces is). A kettőt csak úgy kombinálhatjuk, ha először a hölgyek mennek át (2 perc), majd Irma visszaviszi a fiúknak a lámpát (1 perc). Utána áthaladnak az urak (10 perc) és Vilma viszi vissza a lámpát (2 perc). Végül Irma és Vilma együtt átkelnek (2 perc). Így összesen 17 perc alatt átérnek a túloldalra.

**2017** Nem. Figyeljünk a számok paritására! Három esetünk lehet:

*A*: Ha két páros számot töröl le az illető, akkor párost is ír vissza.

*B*: Ha két páratlant, akkor is párost ír vissza.

*C*: Ha egy párost és egy páratlant, akkor páratlant ír vissza.

Tekintsük át az eseteket, hogyan változik a páros és páratlan számok száma! *A*: –1 páros; *B*: –2 páratlan, +1 páros; *C*: –1 páros. Így a páratlan számok száma csak párosával változhat (egész pontosan kettővel csökken vagy nem változik). 1-től 30-ig a számok fele páros és páratlan, azaz 15 darab páratlan szám szerepel a táblán. Ahhoz, hogy az utolsó szám a 0 legyen, el kell tűnnie a páratlan számoknak, azaz számuknak 0-ra kell csökkenni. Azonban ha csak párosával csökkenhet a számuk, akkor soha nem érheti el 15-ről a nullát.

*Megjegyzések:* Az invariáns módszert alkalmaztuk, invariáns mennyiség a páratlan számok darabszámának paritása.

A tanár természetesen a játék után úgy módosítja a feladatot, hogy aki kitalálja, miért nem ér véget a játék, annak mégiscsak beír egy ötöst. Így végül jószívű is lesz…

## Skatulyaelv – megoldások

**2018** *a)* Skatulyák: hét napjai. *b)* Skatulyák: hónap napjai.

**2019** *a)* Skatulyák: év napjai. *b)* Skatulyák: hetek.

*c)* Az aktuális év heteinek számától függően: $52 \cdot 11 + 1 = 573$ vagy $53 \cdot 11 + 1 = 584$.

**2020** *a)* 6; *b)* 37.

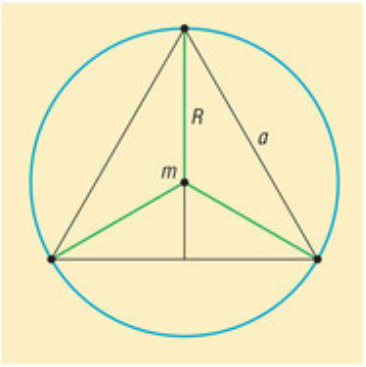


**2021** $6 \cdot 7 = 42$.

**2022** Skatulyák: 1, 3, 7, 9 végződések.

**2023** Ebben a feladatban a skatulyák számát nem ismerjük. Kezdjük el képzeletben kettesével feltölteni a skatulyákat. Az 5.-nél már elfogyott $5 \cdot 2 = 10$ virgács, tehát a feladat szerint nem folytathatjuk a feltöltést. A 11. virgácsot pedig a már meglévő skatulyák egyikében kell elhelyezni, vagyis a skatulyák – így a virgácsfajták – száma 5. Ebből persze azt is tudjuk, hogy mindegyik fajta virgácsból 6 darab van a krampusz zsákjában.

**2024** *a)* Egy játékos három nyilat dob el egy fordulóban. Osszuk fel a táblát három egybevágó 120°-os körcikkre úgy, hogy valamelyik nyíl éppen egy felosztó sugárra essen. Egy-egy ilyen körcikkben a két legtávolabbi pont a körív két végpontja. Számoljuk ki a távolságukat. A három vékony szakasz éppen szabályos háromszöget határoz meg. A feladat másképp megfogalmazva: adjuk meg a szabályos háromszög oldalát, ha ismerjük a köré írt kör sugarát.




Tudjuk, hogy $R = 16{,}75$ cm, és hogy a súlypont $1 : 2$ arányban osztja a súlyvonalat (a súlypont itt egybeesik a magasságponttal).

Először számoljuk ki a magasságot az oldalból a Pitagorasz-tétel segítségével:

$$m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2,$$

$$m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a.$$

Ennek kétharmada a sugár, vagyis:

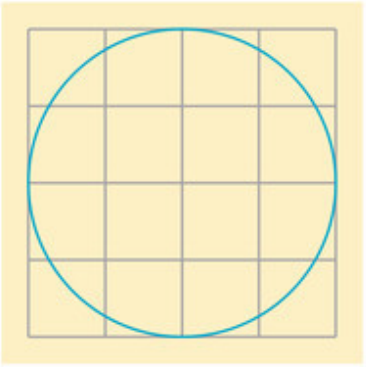
$$\frac{2}{3} \cdot m = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = R = 16{,}75.$$

Ebből megkapjuk $a$-t: $a \approx 29$ cm.

Ha a fennmaradó két nyíl egy körcikkbe esik, akkor távolságuk 29 cm-nél kisebb.

Ha a fennmaradó két nyíl külön-külön körcikkbe esik, akkor legalább az egyik olyan körcikkben van, amelyik határoló sugarán van az elsőnek kijelölt dobás.

*b)* A táblában ekkor $6 \cdot 3 = 18$ nyíl van. Tekintsük a kör köré írható négyzetet (amelynek minden oldala érinti a kört). Ezt a négyzetet osszuk fel 16 egybevágó négyzetre. Egy négyzeten belül a legtávolabbi pontok a szemközti csúcsok, távolságuk a Pitagorasz-tétellel meghatározható:



$$\sqrt{2} \cdot 8{,}375 \approx 11{,}844.$$

A 16 négyzetben csak úgy lehet 18 nyíl, ha vagy 3, vagy 2-2 egy négyzetbe esik. Bármelyik eset is következik be, lesz 2-2 nyíl, amelyek távolsága biztosan kisebb, mint 11,9 cm.

**2025** *a)* Az állítás biztosan teljesül: a skatulyák a hét napjai, a megkérdezettek száma pedig ennél több.

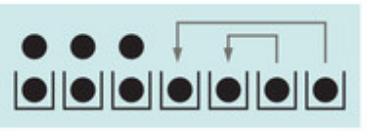
*b)* Ez az állítás hamis. Képzeljük el például, hogy a sorban egymás után megkérdezettek mindig a következő napot mondják: hétfő, kedd, szerda, csütörtök, péntek, szombat, vasárnap, hétfő, kedd, szerda. Nincs olyan nap, amit háromszor hallottunk volna.





*c)* Ez a kijelentés is hamis. Ha ugyanis mindenki ugyanazt a napot mondja, akkor nem teljesül.

*d)* Érdekes módon ez a kijelentés azt kívánja tőlünk, hogy fordítsuk meg a skatulyaelvet. Nem azt kell igazolnunk, hogy legalább mennyi elem kerül egy skatulyába, hanem hogy legfeljebb mennyi kerülhet legalább mennyi skatulyába.



Osszuk szét először a lehető legegyenletesebben az embereket a skatulyákban. Ekkor van három, amelybe 2-2-2 fő került. A leosztást csak úgy tudjuk változtatni, ha valahonnan elveszünk és azt máshova tesszük. Az állítás cáfolatához a kettes skatulyák számát akarjuk növelni, ezért vegyünk el valamelyik egyesből és tegyük is egyesbe. A második után elfogytak az egyes skatulyák, maradt kettő üres. Tovább nem tudjuk csökkenteni a legfeljebb egy főt tartalmazó skatulyák számát. Utolsó állításunk tehát igaz.

*Megjegyzés:* Más úton hamarabb célhoz érünk a *d)* kijelentésnél. Tételezzük fel az állítás ellenkezőjét, miszerint maximum egy olyan nap van, amit legfeljebb egy fő mond. Ehhez azonban legalább $6 \cdot 2 = 12$ főt kellett volna meginterjúvolnunk, így ez nem teljesülhet. Ha állításunk ellenkezője nem igaz, akkor állításunknak kell igaznak lennie.

Az előbb bemutatott gondolatmenetet *indirekt bizonyításnak* nevezzük.

**2026** A feladat megoldásához először azt kell észrevennünk, hogy a négyzetszámok utolsó számjegyei nem lehetnek akármilyen számjegyek. Az utolsó számjegy csak 0, 1, 4, 5, 6, illetve 9 lehet:

$$1^2 = 1,\quad 2^2 = 4,\quad 3^2 = 9,\quad 4^4 = 16,\quad 5^2 = 25,\quad 6^2 = 36,$$
$$7^2 = 49,\quad 8^2 = 64,\quad 9^2 = 81,\quad 10^2 = 100\quad \text{stb.}$$

A feladat szerint két eset van.

Ha van köztük öttel osztható, akkor annak végződése 0 vagy 5.

Ha nincs köztük öttel osztható, akkor lehetséges végződésnek marad 1, 4, 6, 9. Ezek között kell lennie kettő azonosnak, hiszen öt számot adtunk meg. A kettő azonos különbsége pedig 10-zel osztható.

**2027** Egy szám 7-tel osztva csak 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 maradékot adhat. Másképp fogalmazva $7k + 0$, $7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 3$, $7k + 4$, $7k + 5$, $7k + 6$ alakú lehet (ahol $k$ egész szám). A 7-tel való oszthatóság szempontjából ezek négyzetei csak 0, 1, 2, 4 maradékot adhatnak. Közülük a zérus 7-tel osztható számot jelöl, a többi három nem. Így a válasz: $n = 4$. Ugyanis 4 négyzetszám között vagy van 7-tel osztható (0 maradék); vagy ha nincs (1, 2, 4 maradék), akkor a négy szám között van kettő, ami azonos maradékot ad. Ezek különbsége pedig 0 maradékot ad, ami 7-tel osztható számot jelent.

## Sorba rendezés I. (különböző elemek) – megoldások

**2028** $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6.$

**2029** $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720.$

**2030** $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24.$

**2031** $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24.$

**2032** $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120.$

**2033** $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720.$

**2034** $11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 11! = 39\,916\,800.$



# Sorba rendezés II. (több típusba tartozó azonos elemek) – megoldások

**2035** $\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10.$

**2036** $\frac{9!}{4!\cdot 5!}=126.$

**2037** $\frac{7!}{2!\cdot 5!}=21.$

**2038** $\frac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 4!}=1260.$

**2039** $\frac{10!}{4!\cdot 5!\cdot 1!}=1260.$

**2040** *a)* $7!=5040$; *b)* $\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$; *c)* $\frac{12!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=39916800.$

**2041** $\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10.$

**2042** *a)* Robinak $4+6+2=12$ filmje van DVD-n. Ezeket sorba $12!=479\,001\,600$-féleképpen rendezheti.

*b)* Előrevéve a vígjátékokat, azokat 4!-féleképp helyezheti el. Utána a sci-fiket 6!, majd a krimiket 2!-féleképpen rendezheti sorba. Mivel a különböző típusú filmek sorrendjei nem függnek egymástól, ezért össze kell őket szoroznunk. Az eredmény: $4!\cdot 6!\cdot 2!=34\,560$.

*c)* A *b)* részfeladatban kapott eredményt meg kell szoroznunk még annyival, ahányféleképpen a három típust sorba tudja rakni a polcon. Mivel ez 3! lehetőség, így ennél a kérdésnél az eredmény: $3!\cdot 4!\cdot 6!\cdot 2!=207\,360$.

*d)* Nincs kikötve, hogy az azonos típusú filmek egymás mellé kerülnek. Ha minden filmet megkülönböztetünk, akkor 12!-t kapunk. Mivel közöttük 4, 6, illetve 2 azonos van, így ezek maguk közötti sorrendjeit (4!, 6!, 2!) le kell számolnunk: $\frac{12!}{4!\cdot 6!\cdot 2!}=13\,860.$

**2043** *a)* Sorban az ajtóhoz 4, az ablakhoz 3, a fal mellé 2, a kandalló elé 1 fő ülhet: $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4!=24$.

*b)* Ültessük le valahogy a négy főt képzeletben, majd kérjük meg őket, hogy üljenek át eggyel jobbra. Így a feladatban kérdezett asztal körüli sorrendjük nem változott. Mivel minden összeállításban négy egyforma ültetés van, az előző megoldást el kell osztanunk 4-gyel: $3!=6$.

*c)* Legyen a négy fő $A$, $B$, $C$, $D$. Szemeljük ki magunknak $A$-t, viszonyítsuk hozzá a többieket. $A$-nak két szomszédja lehet: $B$ és $C$; vagy $B$ és $D$; vagy $C$ és $D$ személyében (ekkor a negyedik fő már meghatározott). Ez összesen 3 lehetőség.

**2044** *a)* Az első oszlopba egyféleképpen kerülhet egyetlen 1-es. A második oszlopot már 2!-, a harmadikat 3!-féleképp tölthetjük ki. Ezek egymástól függetlenek, tehát $3!\cdot 2!\cdot 1!=12$.

*b)* A négyfokú lépcsőnél nem változik semmi a gondolatmenetben: $4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!=288$.

*c)* Az eddigiek alapján $n$ fokú lépcsőnél az eredmény: $n!\cdot(n-1)!\cdot\ldots\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!$.

*Megjegyzés:* A *c)* részfeladat eredményét később teljes indukcióval igazolhatjuk.





**2045** Tegyük fel, hogy Ernőnek eddig $n$ érméje van, mind különböző. Ezeket $n!$-féleképpen teheti sorba. Ha még szerez hozzá kettőt, akkor $n+2$ érméje lesz, amit $(n+2)!$-féleképpen tud majd sorba rakni (a két új érmével együtt sem változik az a feltétel, hogy minden érme különböző).

Felírhatunk egy egyszerű egyenletet:

$$20 \cdot n! = (n+2)!$$

Mivel a faktoriális szorzatot jelent, így a mindkét oldalon meglévő tényezőkkel tudunk egyszerűsíteni:

$$20 = (n+1) \cdot (n+2).$$

Mivel a 20 csak $4 \cdot 5$ formában bontható fel két egymást követő pozitív egész szám szorzatára, $n = 3$ a megoldás. Ernőnek tehát eddig összesen három érmét sikerült gyűjtenie. Tényleg nemrég kezdhette.

**2046** A felső sarokból az alsó sarokba hat lépésben juthat le a katicabogár. A hat lépés során egyszer fog ferdén előre ($a$), kétszer ferdén jobbra ($b$) és háromszor ferdén balra ($c$) lépni. Minden lejutást egy $a, b, b, c, c, c$ típusú sorozat fog jellemezni, ahol a betűk valamilyen sorrendje szerepel. Ha hat különböző elem lenne, 6! lenne a megoldás, viszont a két $b$-t 2!, a három $c$-t 3!-féleképp lehet sorba rakni. Az eredmény tehát $\frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 3!} = 60$.

*Megjegyzés:* A feladat térbeli megfelelője a gyakorlópéldák között található Barnabás-féle 2037. feladatnak.

**2047** *a)* Mivel az egyes körcikkeket megkülönböztetjük, így az eredmény $n!$.

*b)* Ha csak a sorrendre koncentrálunk, akkor az elforgatással egymásba vihető színezések nem különböznek. (Tipikus körberakási feladat.) Azonban a vásznat $n$-féleképpen forgathatjuk, így az eredmény: $(n-1)!$.

*c)* Azt kell észrevennünk, hogy a szomszédság nem változik, ha a körüljárási sorrendet megfordítjuk. Vagyis a *b)* részfeladatban kapott eredményt el kell osztanunk kettővel: $\frac{(n-1)!}{2}$.

*Megjegyzések:* A feladat általánosítása a kör alakú asztalka melletti négy székről szóló feladatnak (2043. feladat).

A *b)* részt úgy is meggondolhatjuk, hogy az egyik szín helyét rögzítjük, majd ahhoz képest színezzük a többit: $(n-1)!$.

**2048** Elsőnek azt kell meggondolnunk, hányféleképpen állíthatjuk elő a kilencet egyesek és kettesek összegeként, majd meg kell számolnunk, hogy az egyes eseteket hányféle különböző sorrendben írhatjuk fel. Végül az összes esetet össze kell adnunk. Például 5 egyes és 2 kettes összegét $\frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$-féle sorrendben állíthatjuk elő. Vigyünk rendszert a felírásba táblázat segítségével.

| 1-esek száma | 9 | 7 | 5 | 3 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2-esek száma | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Sorrendjük formulával | 1 | $\frac{8!}{7! \cdot 1!}$ | $\frac{7!}{5! \cdot 2!}$ | $\frac{6!}{3! \cdot 3!}$ | $\frac{5!}{1! \cdot 4!}$ |
| Sorrendjük számszerűen | 1 | 8 | 21 | 20 | 5 |

Hogy a feladatban feltett kérdést megválaszoljuk, össze kell adnunk az utolsó sor számait. A kilencfokú lépcsőt tehát 55-féleképp mászhatjuk meg, ha egyesével vagy kettesével lépkedünk.



**2049** Legyen a megvásárolni kívánt érmék száma $n$. Ekkor az $n+3$ darab érmét, amiből $n$, illetve három egyforma,

$$\frac{(n+3)!}{n!\cdot 3!}=\frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)}{3\cdot 2\cdot 1}=84$$

sorrendben lehet egymás mellé tenni a polcra. (A 84-t az üzleti partnertől tudjuk.) Alakítsuk át az utolsó egyenlőséget:

$$(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)=504.$$

Ha elvégezzük a szorzást, harmadfokú egyenletet kapunk, amelyet nem tudunk megoldani. Azonban most is csak pozitív egészek között keressük az $n$-t: bontsuk hát prímtényezők szorzatára az 504-et, ha a bal oldal már úgyis szorzat formában van:

$$504=2^3\cdot 3^2\cdot 7.$$

A három zárójel olvasható úgy is, hogy három egymás utáni szám szorzata. Ki tudjuk úgy osztani 504 prímtényezőit, hogy ilyen számokat kapjunk? Igen, ránézésre adódik:

$$3^2=9=n+3,\quad 2^3=8=n+2,\quad 7=n+1.$$

Készen vagyunk, $n=6$. Ernő tehát összesen 6 érmére alkudozott.

*Megjegyzések:* Mivel egymás utáni számok szorzatáról van szó, írhattuk volna $(N+1)\cdot N\cdot(N-1)$ alakban is őket, ekkor $N=n+2$. Azonban összeszorozva így is csak egy $N^3-N$ alakhoz jutunk, ami továbbra is harmadfokú egyenletre vezet.

A feladatot természetesen próbálkozással is megoldhatjuk. Mivel a három tényező közel van egymáshoz, az eredménynek 504 köbgyöke: $\sqrt[3]{504}\approx 7{,}958$ körül kell lennie. Valóban: a középső számnak 8-at kaptunk.

**2050** *a)* A feladatban bár szerepel a „legalább” szó, nem érdemes áttérni az ellentett eseményre. Ugyanis 8-nak a fele 4, így nem lenne kevesebb a megvizsgálandó esetek száma.

Elsőként vizsgáljuk meg, hányféleképpen áll elő a 8 három pozitív egész szám összegeként, ahol az egyik szám legalább 4. Készítsünk egy táblázatot. A feltételek mellett a lehetőségek:

| Csirkefalat | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Szalonna | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |
| Gyümölcs | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| Sorrend a nyárson | $\frac{8!}{4!\cdot 1!\cdot 3!}$ | $\frac{8!}{4!\cdot 2!\cdot 2!}$ | $\frac{8!}{4!\cdot 3!\cdot 1!}$ | $\frac{8!}{5!\cdot 1!\cdot 2!}$ | $\frac{8!}{5!\cdot 2!\cdot 1!}$ | $\frac{8!}{6!\cdot 1!\cdot 1!}$ |

Az utolsó sorban összegyűjtöttük, hogy az egyes esetekben szereplő ételdarabkákat hányféle sorrendben tűzhetjük a nyársra. A feladat megoldását az alsó sorban levő számok összege adja:

$$280+420+280+168+168+56=1372.$$

Kriszta tehát az általa elkészíteni kívánt nyársat 1372-féleképpen állíthatja össze.

*b)* Csirkefalatokból:

$$4\cdot(280+420+280)+5\cdot(168+168)+6\cdot 56=5936$$

darabot kell szeletelnie, ami $10\cdot 5936=59\,360$ g $=59{,}36$ kg.

Szalonnából a szükséges mennyiség:

$$1\cdot 280+2\cdot 420+3\cdot 280+1\cdot 168+2\cdot 168+1\cdot 56=2520$$

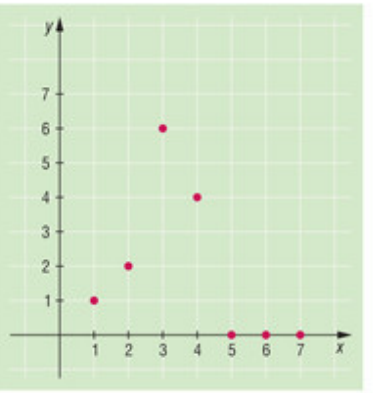
darab, ami $10\cdot 2520=25\,200$ g $=25{,}2$ kg.

Gyümölcsből pontosan annyi darabka kell, mint szalonnából, így tömege is ugyanaz.

**2051** *a)* Tudjuk, hogy $n$ különböző elemet $n!$-féleképpen lehet sorba rendezni. Kezdjük el kiszámolgatni őket sorban:

$$1! = \mathbf{1},\quad 2! = \mathbf{2},\quad 3! = \mathbf{6},\quad 4! = 2\mathbf{4},\quad 5! = 12\mathbf{0},$$
$$6! = 72\mathbf{0},\quad 7! = 5\,04\mathbf{0},\quad 8! = 40\,32\mathbf{0},\ \ldots$$

Figyeljük meg, hogy $n = 5$-től mindegyik érték 0-ra végződik. Ez természetes: mivel minden szorzatban vannak páros számok, és legalább egy 5-ös, valamint megjelenik a 10. Így $A = \{0; 1; 2; 4; 6\}$, azaz $|A| = 5$.




*b)* Az előző részfeladat alapján már könnyen ábrázoljuk a csak pontokból álló függvényt. A függvény $x = 5$ után minden egész helyen 0 értéket vesz fel.

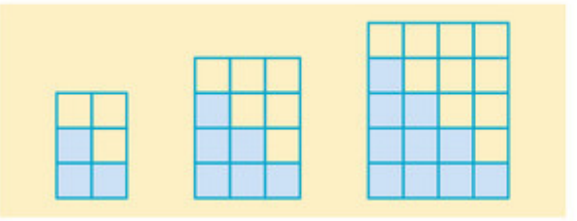
**2052** *a)* Az $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ összeget kell meghatároznunk. Ezt többféle trükkel is megtehetjük.

Írjuk például az összeg alá még egyszer ugyanezen értékeket visszafelé, majd adjuk őket össze oszloponként:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n \\ n & + & n-1 & + & n-2 & + & \ldots & + & 1 \\ \hline n+1 & + & n+1 & + & n+1 & n+1 & \ldots & n+1 & n+1. \end{array}$$

A vonal alatt $n$-szer szerepel $n + 1$. A keresett összeg ennek fele: $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Másik lehetőség, ha rajzolunk (ha már úgyis lépcsőről van szó). Mindegyik lépcsőt kiegészíthetjük téglalappá, ha elforgatjuk és saját maga mellé illesztjük. A téglalap egyik oldala $n$, a másik $n + 1$, nekünk viszont csak a fele kell.



*Megjegyzések:* Később rekurzív sorozatként is hivatkozhatunk a fenti összegre: az $n$. összeget megkapjuk, ha $n$-t adunk az $(n – 1)$. összeghez.

Ha tanuljuk majd, használhatjuk a *teljes indukciót* is a megsejtett formula igazolására.

*b)* Egy $n$-fokú lépcsőt $n! \cdot (n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \ldots \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!$-féleképpen tölthetünk ki számokkal. Írjuk át a szorzatot más alakba, soronként kifejtve a faktoriálisokat:

$$\begin{aligned} &1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot \\ &\cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot \\ &\cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot \\ &\cdot \vdots \\ &\cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \\ &\cdot 1 \cdot 2 \cdot \\ &\cdot 1. \end{aligned}$$

Egy ilyen szorzat egyetlen $n$, kettő $(n – 1)$, három $(n – 2)$, …, $n – 2$ darab 3-as, $n – 1$ darab 2-es és $n$ darab 1-es tényezőt tartalmaz. Azaz így is írható:

$$n \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)^3 \cdot \ldots \cdot 3^{n-2} \cdot 2^{n-1} \cdot 1^n.$$

Azt, hogy egy szám végén mennyi 0 van, a benne megtalálható 2 és 5 prímtényező-párok száma dönti el. Ebben a szorzatban pontosan öt darab $2 \cdot 5$ párnak kell lennie. Mivel 2-ből mindig több lesz, mint 5-ből, hiszen minden második szám páros, ezért koncentráljunk az 5-re. Még inkább az 5 kitevőjére: pontosan 5-nek kell lennie. Mivel a kitevők egyesével csökkennek, így az ötös előtt még négy számnak kell állnia, tehát $n = 9$. Ellenőrizzük: $9^1 \cdot 8^2 \cdot 7^3 \cdot 6^4 \cdot 5^5 \cdot 4^6 \cdot 3^7 \cdot 2^8 \cdot 1^9$.



Ebben a szorzatban pontosan 5 darab 5-ös prímtényező szerepel. Ezekhez párosítva ketteseket, éppen öt nullára fog végződni a szám. (9-nél kevesebb nem lehet $n$, mert akkor az 5 kitevője is csökken.)

*c)* Az előző elgondolás alapján nem lehetséges, hiszen ha eggyel tovább lépünk $n = 10$-re, akkor $10^1 \cdot 9^2 \cdot 8^3 \cdot 7^4 \cdot 6^5 \cdot 5^6 \cdot 4^7 \cdot 3^8 \cdot 2^9 \cdot 1^{10}$ szorzatban van 6 darab 5-ös prímtényező az $5^6$-ban, de van egy a 10-ben is. Azaz nem tudunk pontosan 6 darab 5-öst tartalmazó szorzatot készíteni.

## Kiválasztás és sorba rendezés I. (különböző elemek) – megoldások

**2053** $5 \cdot 4 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = 20.$

**2054** $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \dfrac{9!}{(9-5)!} = 15\,120.$

**2055** $7 \cdot 6 \cdot 5 = \dfrac{7!}{(7-3)!} = 210.$

**2056** *a)* $21! \approx 5{,}1 \cdot 10^{19}$; *b)* $21 \cdot 20 \cdot 19 = \dfrac{21!}{(21-3)!} = 7\,980.$

**2057** $36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 = \dfrac{36!}{(36-7)!} = 42\,072\,307\,200.$

**2058** $20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 13 = \dfrac{20!}{(20-8)!} = 5\,079\,110\,400.$

**2059** $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = \dfrac{30!}{(30-6)!} = 427\,518\,000.$

**2060** $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{7!}{(7-4)!} = 840.$

## Kiválasztás és sorba rendezés II. (lehetnek azonos elemek is) – megoldások

**2061** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243.$

**2062** $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3 = 729.$

**2063** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7 = 2187$ (ha üresen is hagyhat: $4^7 = 16\,384$).

**2064** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16.$

**2065** $37 \cdot 37 \cdot 37 \cdot 37 \cdot 37 = 37^5 = 69\,343\,957.$

**2066** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81.$

**2067** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16.$





**2068** *a)* Panna 4 tisztséget szeretne kiosztani az osztályban (ez nem könnyű feladat). Valamilyen sorrendet felállít a tisztségek között, majd húznak: az első tisztségre 28-ból, a másodikra 27-ből, a harmadikra 26-ból, végül 25-ből választanak. Vagyis:

$$28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = \frac{28!}{(28-4)!} = 491\,400$$

lehetőségük van, ha visszatevés nélkül húznak.

*b)* Ha visszateszik az éppen kihúzott nevét, akkor ő újra indul a következő választáson is. Ekkor az egyes húzások egymástól függetlenek. A kérdésre:

$$28 \cdot 28 \cdot 28 \cdot 28 = 28^4 = 614\,656$$

lehetőség adódik (bár így az is lehet, hogy egyetlen személy lesz a titkár, a gazdaságis, a kultúros és a sportos).

**2069** *a)* Minden tárcsát 7 állapotba forgathatunk egymástól függetlenül, így a válasz:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 = 2401.$$

*b)* Négyjegyű számot akarunk előállítani, vagyis az első jegy nem lehet zérus. Arra marad 6 lehetőség, a többi számjegy viszont akármi lehet. Az eredmény:

$$6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2058.$$

**2070** *a)* Ha mindenki másféle fagyit kért, akkor az első 20-féléből választott, a következő 19, aztán 18, 17, 16-féléből választottak (képzeljük úgy, hogy minden fagyiból csak egy gombóc volt). A válasz:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = \frac{20!}{(20-5)!} = 1\,860\,480.$$

*b)* Ha legalább ketten azonost kértek, akkor kérhettek ketten, hárman, négyen vagy akár öten is egyformát. Még felsorolni is sok eset (bár vannak közöttük egyszerűek). Próbáljuk meg ellenkezőleg! Számoljuk ki, mennyi eset ez összesen (bárki kérhet bármit), majd vonjuk ki azt, amikor mindenki másfajta fagyit kér (az előző eset). Számszerűen:

$$20^5 - \frac{20!}{(20-5)!} = 1\,339\,520.$$

*Megjegyzés:* Sokszor érdemes az esetek összeszámolásánál áttérnünk az ellenkező, komplementer események összeszámolására. A feladat szövegében a „legalább", „legfeljebb" szavak árulkodnak általában arról, hogy így könnyebb lesz a feladatot megoldani.

**2071** *a)* Ha van kettő, akkor lehet három, négy, öt vagy akár hat egyforma is (ráadásul lehet többféle számjegyből is több). Térjünk át a komplementer eseményre, azaz amikor minden számjegy különböző. Mivel 0-t nem írhatunk az első számjegy helyére, az összes esetek száma:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^5 = 900\,000.$$

Ebből vonjuk le a csak különböző jegyeket tartalmazó hatjegyű számokat:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 136\,080$$

(elsőnek 0-t nem írhatunk, másodiknak viszont nem írhatjuk az elsőt, de 0-t igen). A válasz a kettő különbsége: 763 920.

*b)* A hatos számrendszerben hat számjegy van: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ezek közül nem tudunk úgy 12 jegyű számot készíteni, hogy ne legyen legalább egy jegy többször (már hétjegyűt sem tudnánk).

Mivel minden szám ilyen, számoljuk össze őket. Első helyen 0 nem állhat, utána viszont bármi:

$$5 \cdot 6^{11} = 1\,813\,985\,280.$$



*c)* A 12-es számrendszerben 12 számjegy van. Első helyre 0-t nem írhatunk, másodiknak pedig nem írhatjuk az elsőt, de 0-t már igen. Aztán a felhasznált jegyekkel csökken a további lehetőségek száma:

$$11 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 609\,840.$$

*Megjegyzés:* A *b)* részfeladatban milyen *elvet* használunk?

**2072** *a)* 26 betű kétszer, illetve 10 számjegy négyszer alkalmazva, egymástól függetlenül:

$$26^2 \cdot 10^4 = 6\,760\,000.$$

*b)* A mai rendszámhoz a régiben egy számot betűre cseréltek, azaz eredményünket 10-zel osztanunk és 26-tal szoroznunk kell. Vagyis 2,6-szer több rendszámot lehet (elvileg) az új rendszerben kiadni.

*Megjegyzés:* Természetesen nem minden kombinációt engedélyeznek a hatóságok, illetve vannak extra rendszámok is (egy betű-öt szám például).

**2073** Két megoldást is adunk. Elsőnek kedvezzünk a formulák szerelmeseinek.

**I. megoldás.** Tételezzük fel, hogy Ernő $n$ darabot állíthat ki érméi közül ($0 < n \leq 15$). Ezeket $\frac{15!}{(15-n)!}$-féleképpen teheti sorba a vitrinben. Ha eggyel növekszik a kiállítható érmék száma, akkor sorba rakásukra $\frac{15!}{(15-(n+1))!}$ lehetőség lesz. Adódik egy egyszerű egyenlet, ahol 15!-sal egyszerűsíthetünk, majd mindkét oldalt megszorozhatjuk $(15-(n+1))!$-sal:

$$12 \cdot \frac{15!}{(15-n)!} = \frac{15!}{(15-(n+1))!},$$

$$\frac{12}{15-n} = 1,$$

$$n = 3.$$

**II. megoldás.** Ennél jóval egyszerűbb, ha elkezdjük a szorzást elvégezni: az első helyre 15-féle, a másodikra 14-féle stb. érmét tehet Ernő. A kérdés: meddig menjünk el, hogy 12-szeresére növekedjen a szorzat? A válasz: 13-ig, $12 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$. Vagyis Ernő 3 érmét állíthat ki.

**2074** Tegyük fel először, hogy $p$ darab betűt (az abc elejéről) és $q$ darab számot (0-val kezdve) akarunk felhasználni egymástól függetlenül. A három betű-három szám kombináció így összesen $p^3 \cdot q^3 = 8000$ lehetőséget ad. Ezt a kétismeretlenes egyenletet kell megoldanunk a pozitív egészek halmazán.

Bontsuk fel 8000-t prímtényezőkre: $8000 = 2^6 \cdot 5^3$. A kapott szorzatot állítsuk elő két harmadik hatvány szorzataként. A lehetőségek a következők:

| $p^3$ | $1^3$ | $2^3$ | $(2\cdot2)^3$ | $5^3$ | $(2\cdot5)^3$ | $(2\cdot2\cdot5)^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q^3$ | $(2\cdot2\cdot5)^3$ | $(2\cdot5)^3$ | $5^3$ | $(2\cdot2)^3$ | $2^3$ | $1^3$ |

Mivel $q$ a számjegyeket jelöli, nem lehet 10-nél több. Ezért az első lehetőség kiesik. Marad a (2; 10), (4; 5), (5; 4), (10; 2) és (20; 1) a $(p; q)$ párokra. Tehát öt megoldás is adódik a távoli bolygó távoli kis országának a rendszámtáblák kidolgozására.

*Megjegyzések:* A $p$ értéke sem lehet 26-nál több, de ez most nem volt érdekes. Az egyenletet *diofantoszi egyenletnek* nevezzük, ha csak egész megoldásokat keresünk. Ha nem jut eszünkbe a 8000 prímtényezőkre bontása, kísérletezéssel is megtalálhatjuk a megoldásokat.





**2075** A feladat szövege tartalmazza a „legalább” kifejezést. Ebből azt sejtjük, hogy érdemes áttérni a komplementer eseményre. Az ellentett esemény az, ha a kapus nem végez el egyetlen szabadrúgást sem. Az összes eset pedig, ha bármelyik szabadrúgást bármelyik játékos rúghatja a 11-ből. Vagyis a kérdésre a válasz: $11^5 - 10^5 = 61\,051$-féleképpen végezhették el az öt szabadrúgást a csapat játékosai.

*Megjegyzés:* Ha nem térünk át a komplementer eseményre, akkor is nekiállhatunk a számításoknak. Vegyük sorba, hány szabadot rúghatott a kapus! Menjünk visszafelé: ha mind az ötöt ő rúgta, azt egyféleképpen tehette meg. Ha négyet, akkor egyet más játékos rúgott: $5 \cdot 10 = 50$ lehetőség. Ha hármat rúgott a kapus, akkor az összesen $\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 10^2 = 1000$ lehetőség. Ha kettőt, akkor majdnem az előzőt kapjuk, $\frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 10^3 = 10\,000$. Végül ha csak egyet, akkor $5 \cdot 10^4 = 50\,000$. Ezek összege ismét 61 051.

**2076** Ha legfeljebb ötöt rúgott a legendás Bekkem, akkor rúghatott 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 szögletet. Ennél jóval egyszerűbb a komplementer eseményt összeszámolni, abban ugyanis csak kettő eset van: ha hat, vagy hét szögletet adott be. Mind a hetet egyféleképpen rúghatta Dávid. Hatot pedig $7 \cdot 9 = 63$-féleképpen (ne feledjük, a hétből egyet rúgott valaki más és Bekkemen kívül még 9 mezőnyjátékos van nagypályán). Azaz eseteink száma:

$$10^7 - (1 + 63) = 9\,999\,936.$$

*Megjegyzés:* Ha mégis nekiállunk az eredeti esetek összeszámolásához, akkor a

$$9^7 + 7 \cdot 9^6 + \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot 9^5 + \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 9^4 + \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 9^3 + \frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot 9^2$$

összeget kell meghatároznunk.

**2077** Most is érdemes áttérni az ellentett események összeszámolására. (Eredetileg 0, 1, 2, 3 vagy 4 csirkefalat lehet – érdemesebb helyettük 5, 6 vagy 7-t tekinteni.) Ha a nyárson minden falat csirke, azt egyféleképpen állíthatja össze Kriszta. Ha hat, akkor $7 \cdot 2 = 14$ lehetősége van. Ha öt, akkor a lehetőségek száma $\frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot 2^2 = 84$. Ezek összegét kell levonnunk az összes lehetőségből, ami most $3^7$ (mivel a nyárs összes helyére háromféle ételből kerülhet egy). Ezek alapján az eredmény:

$$2187 - (1 + 14 + 84) = 2088.$$

*Megjegyzés:* Nem térve át a komplementerre:

$$2^7 + 7 \cdot 2^6 + \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot 2^5 + \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 2^4 + \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 2^3 = 2088.$$

## Vegyes feladatok – megoldások

**2078** *a)* Ha tavasz van, akkor a madarak csicseregnek.

*b)* Ha a madarak csicseregnek, akkor tavasz van.

*c)* Akkor és csak akkor van tavasz, ha a madarak csicseregnek.

**2079** *a)* Négy oldala egyenlő; mind a négy szöge 90° és mind a négy oldala 3 cm; mind a négy oldala egyenlő hosszúságú és mind a négy szöge 90°-os.

*b)* Páros; osztható 24-gyel; osztható 3-mal és 4-gyel.



**2080** Skatulyák: percek.

**2081** $6! = 720$.

**2082** $10! = 3\,628\,800$.

**2083** $\dfrac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$.

**2084** $\dfrac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \dfrac{6!}{(2!)^3} = 90$.

**2085** $4 \cdot 7 = 28$.

**2086** *a)* $32! \approx 2{,}631 \cdot 10^{35}$; *b)* $\dfrac{32!}{(8!)^4} \approx 9{,}956 \cdot 10^{16}$; *c)* $\dfrac{32!}{(4!)^8} \approx 2{,}39 \cdot 10^{24}$.

**2087** *a)* $3^8 = 6561$; *b)* $3 \cdot 2^7 = 384$.

**2088** $2^{10} = 1024$.

**2089** $\dfrac{30!}{(30-6)!} = 427\,518\,000$.

**2090** $\dfrac{10!}{(10-4)!} = 5040$.

**2091** 4 db: $\dfrac{12!}{(12-4)!} = 11\,880$; 3 db: $\dfrac{12!}{(12-3)!} = 1320$; 2 db: $\dfrac{12!}{(12-2)!} = 132$; 1 db: $\dfrac{12!}{(12-1)!} = 12$.

Mindösszesen:

$$11\,880 + 1320 + 132 + 12 = 13\,344.$$

# 10.2. A GYÖKVONÁS

## Racionális számok, irracionális számok – megoldások

**2092** *a)* 2,625; *b)* 2,3125; *c)* $4,8\dot{3}$;
*d)* $0,58\dot{3}$; *e)* $0,\dot{4}\dot{5}$; *f)* $1,\dot{4}2857\dot{1}$;
*g)* $1,\dot{5}3846\dot{1}$; *h)* $0,\dot{2}941176470588235\dot{.}$

**2093** *a)* $\frac{191}{250}$; *b)* $\frac{21\,973}{10\,000}$; *c)* $\frac{23}{9}$;
*d)* $\frac{413}{99}$; *e)* $\frac{764}{999}$; *f)* $\frac{172}{225}$;
*g)* $\frac{757}{990}$; *h)* $\frac{31\,531}{9\,999}$; *i)* $6=\frac{6}{1}$.

**2094** Mindegyik bizonyítás indirekt úton történhet.

**2095** *a)* A derékszögű háromszög átfogója 2, befogói 1 és $\sqrt{3}$.
*b)* A derékszögű háromszög befogói 1 és 2, átfogója $\sqrt{5}$.
*c)* A derékszögű háromszög átfogója 4, az egyik befogója 1, a másik $\sqrt{15}$.
*d)* A derékszögű háromszög átfogója 5, az egyik befogója 1, a másik $\sqrt{24}$.
*e)* A derékszögű háromszög befogói 3 és $\sqrt{2}$, átfogója $\sqrt{11}$, ebből 2-t elveszünk.
*f)* 3-ból elvesszük az *a)* részben szerkesztett $\sqrt{3}$-t.
*g)* A derékszögű háromszög befogói 2 és $\sqrt{3}$, átfogója $\sqrt{7}$, ezt megfelezzük és elvesszük a 2-ből.
*h)* A derékszögű háromszög átfogója 8, az egyik befogója 2, a másik $\sqrt{60}$.
*i)* A derékszögű háromszög befogói 44 és $\sqrt{73}$ (egy másik derékszögű háromszögből szerkeszthető, melynek befogói 8 és 3), az átfogó $\sqrt{2009}$.

**2096** *a)* Például: 1,23112311123111123…; 1,23223222322223…; 1,21213213321333…
*b)* Például: 11,123112311123…; 12,212112111211112…; 13,1331333133331…
*c)* Például: 31,21221222122221…; 32,213211321113…; 33,3133133313331…

**2097** *a)* $\frac{41}{16}=2,5625$; a 2009-dik jegy 0. *b)* $\frac{11}{3}=3,\dot{6}$; a 2009-dik jegy 6.
*c)* $\frac{13}{6}=2,1\dot{6}$; a 2009-dik jegy 6. *d)* $\frac{5}{9}=0,\dot{5}$; a 2009-dik jegy 5.
*e)* $\frac{25}{7}=3,\dot{5}71428\dot{5}$; 6 jegy ismétlődik, mivel $2009 = 334 \cdot 6 + 5$, a keresett jegy 2.
*f)* $\frac{12}{17}=0,\dot{7}058823529411764\dot{7}$; 16 jegy ismétlődik, mivel $2009 = 125 \cdot 16 + 9$, a keresett jegy 2.

**2098** Racionális például: 5,991; 5,992; 5,993.
Irracionális például: 5,9912112111211112…; 5,99232232223…; 5,99565565556…



**2099** *a)* Igaz.

*b)* Hamis, például $(1+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=4$.

*c)* Igaz.

*d)* Igaz, például $\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{3}=2$.

*e)* Hamis, például $(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)=1$.

*f)* Igaz, lásd az előző példát.

*g)* Igaz.

*h)* Hamis, minden racionális szám reciproka racionális.

*i)* Hamis.

## A négyzetgyökvonás azonosságai, alkalmazásaik – megoldások

**2100** *a)* $x \geq \frac{1}{2}$; *b)* $x \geq 0$; *c)* $x \leq 0$;

*d)* $x \leq \frac{3}{2}$; *e)* $x \in \mathbb{R}$; *f)* $\{\}$;

*g)* $x < -3$ vagy $x \geq \frac{1}{5}$; *h)* $x \geq \frac{1}{5}$; *i)* $x \geq 2$;

*j)* $x \leq -3$ vagy $2 \leq x$; *k)* $x \leq -1$ vagy $x \geq 1$.

**2101** *a)* 6; *b)* 3; *c)* 14;

*d)* 2; *e)* 5; *f)* 15;

*g)* 3; *h)* 15; *i)* 3;

*j)* 25; *k)* 16; *l)* $\frac{1}{7}$;

*m)* 2401; *n)* 121; *o)* 9;

*p)* 2; *q)* 12.

**2102** *a)* $\sqrt{50} > \sqrt{45}$; *b)* $\sqrt{77} < \sqrt{78}$; *c)* $\sqrt{20} = \sqrt{20}$;

*d)* $\sqrt{20} < \sqrt{21}$; *e)* $\sqrt{13} < \sqrt{14}$; *f)* $\sqrt{30} = \sqrt{30}$;

*g)* $\sqrt{23} < \sqrt{24}$; *h)* $\sqrt{27} < \sqrt{30}$; *i)* $\sqrt{\frac{1}{10}} > \frac{1}{5}$.

**2103** *a)* 2; *b)* 5; *c)* 5;

*d)* 4; *e)* 5; *f)* 6;

*g)* 30; *h)* 2; *i)* 56;

*j)* $2\cdot\sqrt{89}-18$; *k)* $2\cdot\sqrt{41}-12$.

**2104** *a)* $24+11\cdot\sqrt{6}$; *b)* $5\cdot\sqrt{2}+1$; *c)* 1;

*d)* 12; *e)* 14; *f)* 4;

*g)* $34-24\cdot\sqrt{2}$; *h)* $48+24\cdot\sqrt{3}$; *i)* $45-20\cdot\sqrt{5}$;

*j)* $19+4\cdot\sqrt{21}$.

**2105** *a)* $\sqrt{75} > \sqrt{72}$; *b)* $\sqrt{108} > \sqrt{98}$; *c)* $\sqrt{500} > \sqrt{486}$;

*d)* $\sqrt{99} > \sqrt{92}$; *e)* $\sqrt{72} = \sqrt{72}$; *f)* $\sqrt{448} < \sqrt{450}$;

*g)* $\sqrt{2} = \sqrt{2}$; *h)* $\sqrt{\frac{15}{2}} < \sqrt{\frac{38}{5}}$; *i)* $\sqrt{\frac{7}{10}} > \sqrt{\frac{2}{3}}$;

*j)* $\sqrt{\frac{7}{3}} < \sqrt{\frac{12}{5}}$.

**2106** *a)* 0; *b)* $6 \cdot \sqrt{3}$; *c)* 0; *d)* $\sqrt{2}$; *e)* $\sqrt{3}$; *f)* 1;

*g)* 2; *h)* 47; *i)* 17; *j)* $3 \cdot \sqrt{a}$; *k)* 0; *l)* $14 \cdot \sqrt{2x}$.

**2107** *a)* $\frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5}$; *b)* $\frac{9 \cdot \sqrt{2}}{2}$; *c)* $4 \cdot \sqrt{3}$;

*d)* $3 \cdot \sqrt{7}$; *e)* $\frac{\sqrt{6}}{4}$; *f)* $\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{5}$;

*g)* $\frac{2 \cdot \sqrt{7}}{3}$; *h)* $\frac{13 \cdot \sqrt{10}}{30}$; *i)* $\frac{y \cdot \sqrt{x}}{x}$, $x > 0$;

*j)* $\frac{5 \cdot \sqrt{x}}{2}$, $x > 0$; *k)* $\frac{a \cdot \sqrt{y}}{3y}$, $y > 0$; *l)* $\frac{\sqrt{y}}{5}$, $y > 0$.

**2108** *a)* $8 \cdot (\sqrt{5} - 2)$; *b)* $6 \cdot (\sqrt{3} + 1)$; *c)* $-5 \cdot (2 + \sqrt{7})$;

*d)* $2 \cdot (\sqrt{6} - 1)$; *e)* $2 \cdot (2 \cdot \sqrt{3} + 1)$; *f)* $11 \cdot (3 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{17})$;

*g)* $2 \cdot (4 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{3})$; *h)* $5 \cdot \sqrt{7} + 6 \cdot \sqrt{3}$; *i)* $19 + 6 \cdot \sqrt{10}$;

*j)* $\frac{5 \cdot (\sqrt{x} - 1)}{x - 1}$, $x \geq 0$; *k)* $\frac{a \cdot (\sqrt{a} + 1)}{a - 1}$, $a \geq 0, a \neq 1$; *l)* $\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y}$, $x, y > 0, x \neq y$.

**2109** *a)* $2 - 3 \cdot \sqrt{2}$; *b)* $6 + \sqrt{3}$; *c)* $\frac{7 - \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{7 \cdot \sqrt{5} - 5}{10}$;

*d)* 1; *e)* $5 + \sqrt{21}$; *f)* 34;

*g)* $-\frac{4}{11}$; *h)* $\frac{3 \cdot \sqrt{a} + 1}{a - 1}$, $a \geq 0, a \neq 1$; *i)* $\frac{2 \cdot \sqrt{x} - 6}{x - 1}$, $x \geq 0, x \neq 1$;

*j)* $\frac{5 - 3 \cdot \sqrt{y}}{y - 1}$, $y \geq 0, y \neq 1$.

**2110** *a)* $\sqrt{5}$; *b)* $\sqrt{15}$; *c)* $\sqrt{\frac{1}{10}}$; *d)* $\sqrt{6}$; *e)* $\sqrt{x^3}$; *f)* $\sqrt{y^5}$;

*g)* $\sqrt{12a^5b}$; *h)* $\sqrt{ab}$; *i)* $\sqrt{b^3}$.

**2111** A nevezőt gyöktelenítve:

*a)* $\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$, ezért $\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} < 2 \cdot \sqrt{6}$;

*b)* $\frac{7}{\sqrt{12} - \sqrt{5}} = 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{5}$, ezért $3 \cdot \sqrt{3} < \frac{7}{\sqrt{12} - \sqrt{5}}$.

**2112** *a)* Gyöktelenítés után:

$$\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2\cdot(20-2\cdot\sqrt{84})}{4}=\frac{(10+2\cdot\sqrt{21})\cdot 2\cdot(10-\sqrt{84})}{4}=$$

$$=\frac{(10+\sqrt{84})\cdot(10-\sqrt{84})}{2}=\frac{100-84}{2}=\frac{16}{2}=8.$$

*b)* A nevező átalakításával:

$$\left(\frac{6}{\sqrt{5}+2}+\frac{2}{2\cdot(\sqrt{5}-2)}\right)\cdot(10+7\cdot\sqrt{5})=(7\cdot\sqrt{5}-10)\cdot(7\cdot\sqrt{5}+10)=49\cdot 5-100=145.$$

**2113** A behelyettesítés előtt végezzünk átalakításokat:

*a)* $\dfrac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}=\dfrac{(\sqrt{x}+2)\cdot(\sqrt{x}-3)+(\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{x}+3)}{x-9}=\dfrac{2x-12}{x-9}=\dfrac{29}{22};$

*b)* $\dfrac{3\cdot\sqrt{x}+1}{2\cdot\sqrt{x}-5}+\dfrac{3\cdot\sqrt{x}-1}{5+2\cdot\sqrt{x}}=\dfrac{(3\cdot\sqrt{x}+1)\cdot(2\cdot\sqrt{x}+5)+(3\cdot\sqrt{x}-1)\cdot(2\cdot\sqrt{x}-5)}{4x-25}=$

$=\dfrac{12x+10}{4x-25}=-\dfrac{62}{121}.$

**2114** A bal oldali tört nevezőjét gyöktelenítsük:

$$\frac{125+51\cdot\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}=\frac{(125+51\cdot\sqrt{6})\cdot(5+\sqrt{6})}{25-6}=49+20\cdot\sqrt{6}.$$

A jobb oldalon levő nevezőt gyöktelenítés után emeljük négyzetre:

$$\left(\frac{1}{5-2\cdot\sqrt{6}}\right)^2=(5+2\cdot\sqrt{6})^2=49+20\cdot\sqrt{6}.$$

**2115** Mivel $\sqrt{4x^2-12x+9}=\sqrt{(2x-3)^2}=|2x-3|$, ezért:

*a)* $|2x-3|=2x-3$, ha $x\geq\dfrac{3}{2}$;

*b)* $|2x-3|=3-2x$ ha $x\leq\dfrac{3}{2}$.

**2116** *a)* A háromszög oldalai: $a=3$; $b=\sqrt{72}=6\cdot\sqrt{2}$; $c=9$ egység.

*b)* A két befogó $\sqrt{15}$ és $\sqrt{210}$ egység, az átfogó 15 egység.

*c)* A Pitagorasz-tétel alapján:

$$c^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2+\left(\sqrt{2x\cdot(2x+1)}\right)^2,$$

ahonnan:

$$c^2=4x^2+4x+1,$$
$$c^2=(2x+1)^2,$$
$$c=2x+1.$$

Mivel $x\in\mathbb{N}^+$, az átfogó hossza pozitív egész szám.

**2117** *a)* Gyöktelenítsük a törtek nevezőit:

$$A=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}=\sqrt{15}+\sqrt{10}+\sqrt{6}+2;$$

$$B=\frac{\sqrt{20}-\sqrt{8}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{20}-\sqrt{8})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}=2\cdot\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{10}-2\cdot\sqrt{6}+4.$$

Nézzük a két kifejezés különbségét:

$$A-B=-\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{10}+3\cdot\sqrt{6}-2=(3\cdot\sqrt{10}-\sqrt{15})+(3\cdot\sqrt{6}-2)>0.$$

Mert mindkét zárójelben pozitív szám áll.

Tehát $A>B$.

*b)* Egyszerűsítsünk:

$$A=5\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3};$$

$$B=\frac{20-4\cdot\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{10-2\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\frac{(10-2\cdot\sqrt{6})\cdot\sqrt{2}}{2}=5\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}.$$

Tehát $A=B$.

*c)* Hozzunk létre a gyökök alatt teljes négyzeteket:

$$A=\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(4-2\cdot\sqrt{3})}=\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}};$$

$$B=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(4+2\cdot\sqrt{3})}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}+1)^2}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.$$

Tehát $A=B$.

**2118** Vegyük észre a gyökök alatt a teljes négyzeteket:

$$\sqrt{35+2\cdot\sqrt{34}}-\sqrt{35-2\cdot\sqrt{34}}=\sqrt{(\sqrt{34}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{34}-1)^2}=$$
$$=|\sqrt{34}+1|-|\sqrt{34}-1|=2.$$

**2119** *a)* Gyöktelenítsük a nevezőket:

$$a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3},\quad\text{és}\quad b=2+\sqrt{3}.$$

Behelyettesítés:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{3-\sqrt{3}}+\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{9-3}+\frac{3-\sqrt{3}}{9-3}=1.$$

*b)* Előbb a nevezők gyöktelenítésével hozzuk egyszerűbb alakra az eredeti kifejezést:

$$\frac{(1+a)\cdot(1-\sqrt{1+a})}{1-(1+a)}+\frac{(1-a)\cdot(1+\sqrt{1-a})}{1-(1-a)}=$$

$$=\frac{1+a-\sqrt{1+a}-a\cdot\sqrt{1+a}-1+a-\sqrt{1-a}+a\cdot\sqrt{1-a}}{-a}=$$

$$=\frac{-2a+a\cdot(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}}{a}.\qquad(1)$$

Mielőtt helyettesítenénk, számítsuk ki a két kritikus kifejezést:

$$\sqrt{1-a}=\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{4-2\cdot\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2};$$

$$\sqrt{1+a}=\ldots=\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Ezeket az eredményeket írjuk be (1)-be:

$$\frac{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1.$$

**2120** *a)* A törtek és gyökök miatt $a\neq 0$, $a\neq b$, $b>0$.

$$\frac{a^2\cdot b\cdot\sqrt{b}-\sqrt{a^2\cdot b^5}}{a\cdot(b-a)^2\cdot\sqrt{b^3}}=\frac{a^2\cdot b\cdot\sqrt{b}-|a|\cdot b^2\cdot\sqrt{b}}{a\cdot(b-a)^2\cdot b\cdot\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{a^2-|a|\cdot b}{a\cdot(b-a)^2}=\begin{cases}\dfrac{a\cdot(a-b)}{a\cdot(b-a)^2}=\dfrac{1}{a-b}, & \text{ha } a>0,\\[2ex] \dfrac{a\cdot(a+b)}{a\cdot(b-a)^2}=\dfrac{a+b}{(b-a)^2}, & \text{ha } a<0.\end{cases}$$

*b)* A gyök miatt $a\geq 0$, a tört miatt $a-5\cdot\sqrt{a}+6\neq 0$. Helyettesítsünk: $x=\sqrt{a}$.

$$x^2-5x+6=x^2-2x-3x+6=$$
$$=x\cdot(x-2)-3\cdot(x-2)=(x-2)\cdot(x-3),$$

tehát $a\neq 4$, $a\neq 9$.

A számlálót is alakítsuk szorzattá:

$$x^2-x-2=x^2+x-2x+2=$$
$$=x\cdot(x+1)-2\cdot(x+1)=(x+1)\cdot(x-2).$$

Visszahelyettesítve az eredeti tört:

$$\frac{(\sqrt{a}+1)\cdot(\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}-2)\cdot(\sqrt{a}-3)}=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-3}.$$

*c)* A gyökök és a törtek is értelmezhetők, ha $x>a^2$ és $a\neq 0$. A zárójelen belül hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\left(\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}\right)^2}{x-(x-a^2)}-\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}\right)^2}{x-(x-a^2)}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\frac{x+x-a^2-2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a^2}-x-x+a^2-2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a^2}}{a^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\frac{-4\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-a^2}}{a^2}=-\frac{4x}{a^2}.$$

*d)* A gyökök és a törtek értelmezéséhez az kell, hogy $a \geq 0$, $b \geq 0$ és $a \neq b$ teljesüljön. Előbb a számlálóban hozzunk közös nevezőre, majd próbáljunk egyszerűsíteni.

$$\frac{\frac{a \cdot \sqrt{a} + b \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{a \cdot b}}{a - b} + \frac{2 \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{a} + b \cdot \sqrt{b} - a \cdot \sqrt{b} - b \cdot \sqrt{a}}{(a - b) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{2 \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a} \cdot (a - b) - \sqrt{b} \cdot (a - b)}{(a - b) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{2 \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(a - b) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(a - b) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{2 \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{2 \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 1.$$

**2121** Az utolsó szorzatot írjuk át az $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ azonosság alapján:

$$2009 \cdot 2011 = 2010^2 - 1.$$

Ezzel a kifejezés:

$$\sqrt{1 + 2006 \cdot \sqrt{1 + 2007 \cdot \sqrt{1 + 2008 \cdot 2010}}}.$$

Alkalmazzuk újra az előző módszert:

$$\sqrt{1 + 2006 \cdot \sqrt{1 + 2007 \cdot \sqrt{1 + 2008 \cdot 2010}}} = \sqrt{1 + 2006 \cdot \sqrt{1 + 2007 \cdot 2009}} =$$

$$= \sqrt{1 + 2006 \cdot 2008} = 2007.$$

**2122** *a)* Előbb a gyökök alatti kifejezéseket hozzuk egyszerűbb alakra:

$$x - 3 = \frac{a^4 + 20a^2 + 16}{4a^2} - 3 = \frac{a^4 + 8a^2 + 16}{4a^2} = \frac{(a^2 + 4)^2}{4a^2};$$

$$x - 7 = \frac{a^4 + 20a^2 + 16}{4a^2} - 7 = \frac{a^4 - 8a^2 + 16}{4a^2} = \frac{(a^2 - 4)^2}{4a^2}.$$

Ezek után helyettesítsünk:

$$f(a) = \sqrt{\frac{(a^2 + 4)^2}{4a^2}} + \sqrt{\frac{(a^2 - 4)^2}{4a^2}} = \frac{a^2 + 4}{2 \cdot |a|} + \frac{|a^2 - 4|}{2 \cdot |a|}.$$

A feltételek miatt $|a| = a$ és $|a^2 - 4| = 4 - a^2$,

$$f(a) = \frac{a^2 + 4}{2a} + \frac{4 - a^2}{2a} = \frac{8}{2a} = \frac{4}{a}.$$

*b)* Kövessük az előbbi módszert:

$$1 - \frac{a^2}{x^2} = 1 - \frac{a^2}{\frac{(a^2 + b^2)^2}{4b^2}} = 1 - \frac{4a^2 \cdot b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{a^4 + 2a^2 \cdot b^2 + b^4 - 4a^2 \cdot b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2},$$

ezt behelyettesítve:

$$g(x) = \frac{2b^2}{a^2 + b^2} - \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{2b^2}{a^2 + b^2} - \frac{|a^2 - b^2|}{a^2 + b^2}.$$

Ebből:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{3b^2-a^2}{a^2+b^2}, & \text{ha} \quad a\geq b,\\[2ex] \dfrac{2b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1, & \text{ha} \quad b>a.\end{cases}$$

*c)* Előbb csak az $(x^2-1)$-et írjuk fel $a$-val:

$$x=\frac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}},$$

$$x^2-1=\frac{(a+1)^2}{4a}-1=\frac{a^2+2a+1-4a}{4a}=\frac{(a-1)^2}{4a}.$$

Gyöktelenítsük $h(x)$ nevezőjét:

$$h(x)=\frac{2\cdot\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{2\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^2-(x^2-1)}=2\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),$$

ebbe az alakba helyettesítsünk be:

$$h(x)=2\cdot\sqrt{\frac{(a-1)^2}{4a}}\cdot\left(\frac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{(a-1)^2}{4a}}\right)=2\cdot\frac{|a-1|}{2\cdot\sqrt{a}}\cdot\left(\frac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}}+\frac{|a-1|}{2\cdot\sqrt{a}}\right).$$

Ebből:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}\cdot\left(\dfrac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}}+\dfrac{a-1}{2\cdot\sqrt{a}}\right)=\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{2a}{2\cdot\sqrt{a}}=a-1, & \text{ha} \quad a\geq 1,\\[2ex] \dfrac{1-a}{\sqrt{a}}\cdot\left(\dfrac{a+1}{2\cdot\sqrt{a}}+\dfrac{1-a}{2\cdot\sqrt{a}}\right)=\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{2}{2\cdot\sqrt{a}}=\dfrac{1-a}{a}, & \text{ha} \quad 0<a<1.\end{cases}$$

**2123** Vizsgáljuk meg a $k$-adik tagot:

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}.$$

Az összeg tagjait átírva:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=9,$$

ugyanazok a tagok pozitív és negatív előjellel is megjelennek,

$$\sqrt{n}-1=9,$$

$$n=100.$$

**2124** Alakítsuk át $f(x)$-et a számláló gyöktelenítésével:

$$f(x)=\sqrt{x^2+100}-\sqrt{x^2+1}=\frac{(x^2+100)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+100}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{99}{\sqrt{x^2+100}+\sqrt{x^2+1}}.$$

Az $f(x)$ függvény páros, mert $f(x)=f(-x)$.

Ha $x\geq 0$ a függvény szigorúan monoton csökken, maximuma van, ha $x=0$, ekkor $f(0)=9$.

Mivel $f(x)>0$, a lehetséges egész értékek: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (ezeket két helyen veszi fel) és a 9.

Tehát összesen $8\cdot 2+1=17$ helyen vesz fel egész értéket.

# Számok *n*-edik gyöke, a gyökvonás azonosságai – megoldások

**2125** *a)* 3; *b)* –1; *c)* –2; *d)* –4;
*e)* 3; *f)* 5; *g)* 10; *h)* 7;
*i)* –7; *j)* 10; *k)* –100; *l)* 2;
*m)* 4; *n)* 2; *o)* –4; *p)* 8;
*q)* $-\frac{3}{4}$; *r)* $-\frac{2}{3}$; *s)* $-\frac{1}{10} = -0{,}1$; *t)* $\frac{1}{2}$;
*u)* 0,3; *v)* $\frac{5}{2}$; *w)* $\frac{2}{3}$.

**2126** *a)* $x$; *b)* $|a|$; *c)* $b$; *d)* $-x$;
*e)* $|x|$; *f)* $x^2$; *g)* $x^7$; *h)* $x^3$;
*i)* $x^4$; *j)* $a^2$; *k)* $|x^5|$; *l)* $|x^5|$;
*m)* $-4x^5$; *n)* $27x^3$; *o)* $|x|$.

**2127** *a)* 15; *b)* 6; *c)* 12; *d)* 15;
*e)* $2b$; *f)* $\frac{xy}{2}$; *g)* 2; *h)* $\frac{4}{3}$;
*i)* $2x$; *j)* $2xy \cdot \sqrt[4]{\frac{x}{27}}$.

**2128** *a)* 3; *b)* 4; *c)* 5; *d)* –2;
*e)* 2; *f)* 3; *g)* –2; *h)* –1.

**2129** *a)* $\sqrt[3]{184} < \sqrt[3]{189}$; *b)* $\sqrt[3]{135} < \sqrt[3]{136}$; *c)* $\sqrt[3]{1377} > \sqrt[3]{1375}$; *d)* $\sqrt[4]{405} > \sqrt[4]{400}$;
*e)* $\sqrt[4]{1024} < \sqrt[4]{1053}$; *f)* $\sqrt[5]{3159} < \sqrt[5]{3168}$.

**2130** *a)* 0; *b)* 0; *c)* 0; *d)* $5 \cdot \sqrt[4]{2}$;
*e)* $4x \cdot \sqrt[3]{x}$; *f)* $4x \cdot \sqrt[4]{x^3}$; *g)* $6a \cdot \sqrt[5]{a}$; *h)* $6a^3 \cdot \sqrt[3]{a}$.

**2131** *a)* $\sqrt[12]{7^5}$; *b)* $\sqrt[12]{7^7}$; *c)* $\sqrt[10]{3^3}$; *d)* $\sqrt[8]{2^7}$;
*e)* $a \geq 0$, $\sqrt[6]{a^8} = \sqrt[3]{a^4}$; *f)* $b \in \mathbb{R}$, $\sqrt[9]{b^7}$; *g)* $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[35]{x^{16}}$; *h)* $x \geq 0$, $\sqrt[12]{x^{10}} = \sqrt[6]{x^5}$;
*i)* $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[75]{x^{54}} = \sqrt[25]{x^{18}}$; *j)* $x \geq 0$, $\sqrt[6]{x^{13}}$; *k)* $x > 0$, $\sqrt[12]{\frac{1}{x}}$; *l)* $x > 0$, $\sqrt[20]{x^{33}}$;
*m)* $x > 0$, $\sqrt[60]{x^{31}}$.

**2132** *a)* $\frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$; *b)* $2 \cdot \sqrt[4]{3^3}$; *c)* $3 \cdot \sqrt[5]{5^4}$; *d)* $5 \cdot \sqrt[4]{3}$;
*e)* $5 \cdot \sqrt[5]{5^3}$; *f)* $6 \cdot \sqrt[6]{2^5}$; *g)* $\frac{5 \cdot \sqrt[3]{a^2}}{3}$; *h)* $\frac{3 \cdot \sqrt[3]{a}}{2}$;
*i)* $\frac{7 \cdot \sqrt[5]{a^2}}{6a}$.

**2133** *a)* $\sqrt[3]{2}$; *b)* $\sqrt{2}$; *c)* $\sqrt[3]{3}$; *d)* $\sqrt{10}$;
*e)* $\sqrt{2x^2y^9z^3}$; *f)* $\sqrt[5]{a^2b^3c^4}$; *g)* $\sqrt{2a^4b^6c^3}$.

**2134** Egyrészt $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$.

Alakítsunk ki közös gyökkitevőket:

$$\sqrt{2} = \sqrt[30]{2^{15}}, \quad \sqrt[3]{3} = \sqrt[30]{3^{10}}, \quad \sqrt[5]{5} = \sqrt[30]{5^6}.$$

Elég összehasonlítani a gyök alatti hatványokat:

$$5^6 = 25^3 < 32^3 = 2^{15} = 8^5 < 9^5 = 3^{10}.$$

Tehát növekvő sorrendben:

$$\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}.$$

**2135** *a)* Igaz.

*b)* Hamis, mert $\sqrt[4]{(-11)^4} = 11$.

*c)* Hamis, mert $\sqrt[5]{a^{15}} = a^3$.

*d)* Hamis, mert $\sqrt[3]{(-a)^{12}} = (-a)^4 = a^4$.

**2136** A bal oldalon:

$$\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} + \sqrt{x^2} + \sqrt{4 - 4x + x^2} = \sqrt[3]{(x-1)^3} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2} = x - 1 + |x| + |x-2|.$$

*a)* $x - 1 + |x| + |x-2| = x + 1$, ha $0 \le x \le 2$.

*b)* $x - 1 + |x| + |x-2| = 3x - 3$, ha $x \ge 2$.

*c)* $x - 1 + |x| + |x-2| = 1 - x$, ha $x \le 0$.

**2137** *a)* Értelmezés: $x \neq \pm 1$. A gyökjel alá bevitel után használjuk fel, hogy $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2 = \sqrt[3]{x^4}$.

$$\frac{x \cdot \sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} + 3 \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x \cdot \sqrt[3]{x} - 1} = \frac{\sqrt[3]{x^4} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} + 3 \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x^4} - 1} = \sqrt[3]{x^2} + 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2} + 1} = \frac{\left(\sqrt[3]{x^2} + 1\right)^2 + 3}{\sqrt[3]{x^2} + 1}.$$

Egyszerűbb alakban:

$$\frac{\sqrt[3]{x^4} + 2 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 1} = \frac{x \cdot \sqrt[3]{x} + 2 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 1}.$$

*b)* Értelmezés: $a - x > 0$ és $a + x > 0$.

A zárójelben lévő kifejezést hozzuk közös nevezőre:

$$\frac{a \cdot (a+x) - x \cdot (a-x) - 2x^2}{\sqrt{(a-x) \cdot (a+x)}} = \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{(a-x) \cdot (a+x)}} = \frac{(a-x) \cdot (a+x)}{\sqrt{(a-x) \cdot (a+x)}} = \sqrt{(a-x) \cdot (a+x)}.$$

Az eredeti kifejezés:

$$\frac{\sqrt{(a-x) \cdot (a+x)}}{\sqrt[4]{(a-x) \cdot (a-x) \cdot (a+x)}} = \frac{\sqrt{(a-x) \cdot (a+x)}}{\sqrt{a-x} \cdot \sqrt[4]{a+x}} = \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt[4]{a+x}} = \sqrt[4]{\frac{(a+x)^2}{(a+x)}} = \sqrt[4]{a+x}.$$

*c)* Értelmezés: $a \ge 0$; $x \ge 0$; $a \neq x$.

Első lépésben alakítsuk a zárójelben lévő törtet:

$$\frac{a + \sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ax}} = \frac{\sqrt[4]{a} \cdot \left(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{x^3}\right)}{\sqrt[4]{a} \cdot \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{x}\right)} = \frac{\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{x}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{ax} + \sqrt[4]{x^2}\right)}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{x}} = \sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{ax} + \sqrt[4]{x^2}.$$

Az első tört is egyszerűsíthető:

$$\frac{a - x}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \sqrt{a} + \sqrt{x}.$$

Az eredetibe behelyettesítve:

$$\sqrt{a} + \sqrt{x} - \left(\sqrt[4]{a^2} - 2 \cdot \sqrt[4]{ax} + \sqrt[4]{x^2}\right) = 2 \cdot \sqrt[4]{ax}.$$

*d)* Értelmezés: $a \geq 0$; $b \geq 0$; $x \geq 0$; de $a$ és $x$ egyszerre nem lehet 0.

A zárójelben lévő törtet alakítsuk:

$$\frac{\sqrt[4]{bx^3} + \sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt[4]{bx} \cdot \left(\sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{a^2}\right)}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \sqrt[4]{bx}.$$

Ezt beírva, és elvégezve a négyzetre emelést:

$$\frac{4 \cdot \sqrt{bx} + bx + 3}{\sqrt{bx} + 3} = \frac{\left(\sqrt{bx} + 3\right) \cdot \left(\sqrt{bx} + 1\right)}{\sqrt{bx} + 3} = \sqrt{bx} + 1.$$

**2138** *a)* A gyök alatti kifejezéseket alakítsuk teljes négyzetté:

$$\sqrt[4]{17 + 12 \cdot \sqrt{2}} - \sqrt[4]{17 - 12 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[4]{\left(3 + 2 \cdot \sqrt{2}\right)^2} - \sqrt[4]{\left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{3 + 2 \cdot \sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2 \cdot \sqrt{2}}.$$

Alkalmazzuk az előző módszert:

$$\sqrt{3 + 2 \cdot \sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2} + 1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2} =$$

$$= \left(\sqrt{2} + 1\right) - \left(\sqrt{2} - 1\right) = 2.$$

*b)* Legyen $\sqrt[4]{a + b \cdot \sqrt{c}} - \sqrt[4]{a - b \cdot \sqrt{c}} = x$ pozitív egész szám.

$$x^2 = \sqrt{a + b \cdot \sqrt{c}} + \sqrt{a - b \cdot \sqrt{c}} - 2 \cdot \underbrace{\sqrt[4]{a^2 - b^2c}}_{\text{a feltétel miatt 1}},$$

$$x^2 + 2 = \sqrt{a + b \cdot \sqrt{c}} + \sqrt{a - b \cdot \sqrt{c}},$$

$$(x^2 + 2)^2 = a + b \cdot \sqrt{c} + a - b \cdot \sqrt{c} + 2 \cdot \underbrace{\sqrt{a^2 - b^2c}}_{\text{a feltétel miatt 1}},$$

$$(x^2 + 2)^2 = 2a + 2.$$

Eredményünk szerint $x$ páros szám.

Legyen $x = 2k$, $x \in \mathbb{N}^+$.

$$(x^2 + 2)^2 = (4k^2 + 2)^2 = 16k^4 + 16k^2 + 4 = 2a + 2,$$

amiből:

$$a - 1 = 8k^4 + 8k^2 = 8k^2 \cdot (k^2 + 1).$$

Mivel $k^2$ és $k^2 + 1$ szomszédos számok, a szorzatuk páros, ezek szerint $16 \mid a - 1$.

Tehát az $a$ szám 16-tal osztva 1-et ad maradékul.

## Vegyes feladatok – megoldások

**2139** *a)* Igaz.

*b)* Igaz.

*c)* Igaz.

*d)* Hamis, az 1-nél kisebb számok esetén nem.

*e)* Hamis, a –1-nél kisebb számok esetén nem.

*f)* Igaz.

*g)* Hamis: $\sqrt[18]{3^8} < \sqrt[18]{3^9}$.

*h)* Igaz.

**2140** *a)* $a \in \mathbb{R}$; *b)* $b \geq 0$; *c)* $c \in \mathbb{R}$; *d)* $d \leq 0$; *e)* $x \geq 0$.

**2141** *a)* $\sqrt[20]{5^5} > \sqrt[20]{4^4}$; *b)* $\sqrt[6]{2^2} < \sqrt[6]{3^3}$; *c)* $\sqrt[6]{2^9 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{2^9 \cdot 3^2}$.

**2142** *a)* 33; *b)* 6; *c)* $1 + 4 \cdot \sqrt{15}$;
*d)* $6 \cdot \sqrt[3]{9}$; *e)* $-1$; *f)* 2;
*g)* $\sqrt[60]{\frac{1}{a}}$; *h)* $\sqrt[3]{x^4} - 2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2x - 1$; *i)* $\frac{4 \cdot \sqrt{a}}{a-1}$.

**2143** *a)* $\sqrt[6]{243}$; *b)* $\sqrt[6]{500}$; *c)* $\sqrt[30]{5^{31}}$;
*d)* $\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$; *e)* $\sqrt[12]{\left(\frac{6}{5}\right)^5}$; *f)* $\sqrt[10]{54}$;
*g)* $\sqrt[6]{b}$; *h)* $\sqrt[12]{\frac{b^3}{a}}$.

**2144** *a)* $5 + 5 \cdot \sqrt[6]{5} - 5 \cdot \sqrt[4]{5}$; *b)* $\sqrt[12]{2^{11}}$; *c)* $a - a \cdot \sqrt[6]{a} + a \cdot \sqrt[4]{a}$.

**2145** Mivel $a = \frac{10}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} = 2 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{2})$, behelyettesítve $a^2 - 4 \cdot \sqrt{7} \cdot a = -20$.

**2146** Ha a befektetést $b$-vel, a hasznot $h$-val, az arányossági tenyezőt pedig $q$-val jelöljük:

$$h = q \cdot \sqrt[3]{b}.$$

*a)* Az $500 = q \cdot \sqrt[3]{1000\,000}$ egyenletből: $q = 5$.

*b)* $h = 5 \cdot \sqrt[3]{2\,000\,000} \approx 630$ Ft.

*c)* Az $1500 = 5 \cdot \sqrt[3]{b}$ egyenletből: $b = 300^3 = 27\,000\,000$ Ft.

**2147** *a)* A fonálinga lengésideje $\frac{t_1}{t} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{\frac{2l}{g}}}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} = \sqrt{2}$-szeresére növekszik.

*b)* A fonálinga lengésideje $\frac{t_1}{t} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot l}{g}}}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$-szorosára csökken.

*c)* Ha $t_1 = 3t$, akkor $\frac{3t}{t} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}$, amiből $3 = \sqrt{\frac{l_1}{l}}$, vagyis $l_1 = 9l$.

Tehát a fonálinga hosszát 9-szeresére kell növelnünk, ha a lengésidejét meg akarjuk háromszorozni.

**2148** *a)* $H$ tartalmazza az egész számokat, a kifejezés értéke $a$, ha $b = 0$.

*b)* Legyen $x = a + b \cdot \sqrt{2}$, $y = c + d \cdot \sqrt{2}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Ekkor:

$$x + y = (a + c) + (b + d) \cdot \sqrt{2} \in H,$$

$$x \cdot y = (ac + 2bd) + (ad + bc) \cdot \sqrt{2} \in H.$$

*c)* A megadott szám eleme $H$-nak, mert:

$$\sqrt{27 - 10 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{25 - 10 \cdot \sqrt{2} + 2} = \sqrt{(5 - \sqrt{2})^2} = |5 - \sqrt{2}| = 5 + (-1) \cdot \sqrt{2} \in H.$$

*d)* A szám reciproka:

$$\frac{1}{a + b \cdot \sqrt{2}} = \frac{a - b \cdot \sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2} \cdot \sqrt{2}.$$

Akkor kapunk egész számokat, ha a törtek nevezőinek értéke 1 vagy –1. Ennek megfelelő $a$ és $b$ értékek, például $a = 3$, $b = 2$ vagy $a = 7$, $b = 5$, természetesen ezek ellentettjei is megoldások:

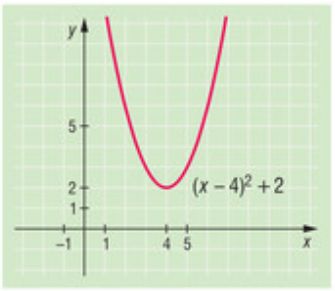
$$\frac{1}{3 + 2 \cdot \sqrt{2}} = 3 - 2 \cdot \sqrt{2}; \qquad \frac{1}{7 - 5 \cdot \sqrt{2}} = -7 - 5 \cdot \sqrt{2}.$$

# 10.3. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

## A másodfokú egyenlet és függvény – megoldások

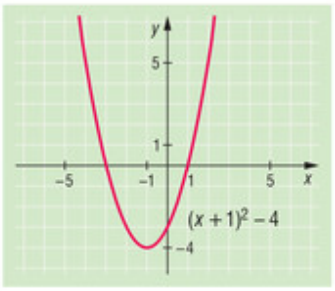
**2149** *a)* $(x-1)^2+3$; *b)* $(x-3)^2+1$; *c)* $(x+2)^2-3$; *d)* $(x-6)^2-25$;
*e)* $(x+8)^2-60$; *f)* $(x-10)^2-93$; *g)* $(x-1{,}5)^2-0{,}25$; *h)* $(x+2{,}5)^2-5{,}25$;
*i)* $2\cdot(x-2)^2+5$; *j)* $3\cdot(x-2)^2-5$; *k)* $-(x+5)^2+27$; *l)* $-(x-4)^2+19$.

**2150** *a)*



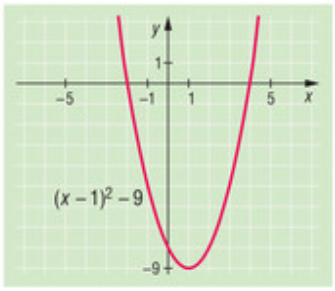

Zérushelye nincs.
Minimum értéke: $y=2$,
helye: $x=4$.

*b)*



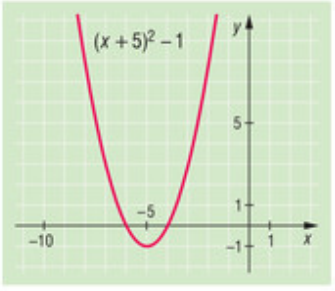

Zérushely: $x_1=-3$, $x_2=1$.
Minimum értéke: $y=-4$,
helye: $x=-1$.

*c)*



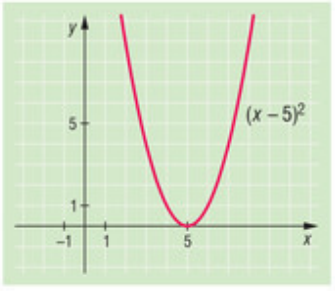

Zérushely: $x_1=4$, $x_2=-2$.
Minimum értéke: $y=-9$,
helye: $x=1$.

*d)*



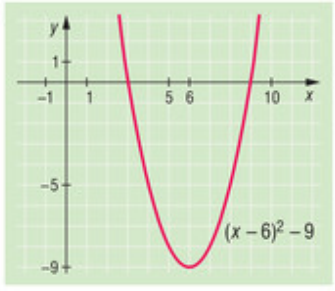

Zérushely: $x_1=-6$, $x_2=-4$.
Minimum értéke: $y=-1$,
helye: $x=-5$.

*e)*



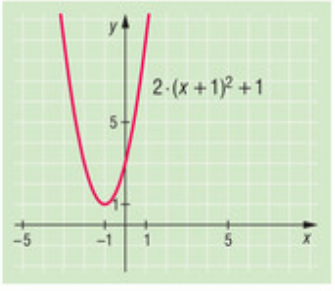

Zérushely: $x=5$.
Minimum értéke: $y=0$,
helye: $x=5$.

*f)*



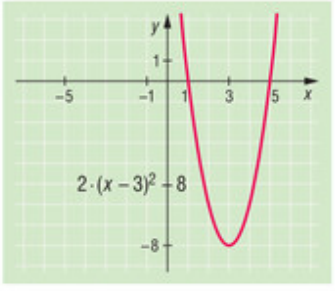

Zérushely: $x_1=3$, $x_2=9$.
Minimum értéke: $y=-9$,
helye: $x=6$.

*g)*



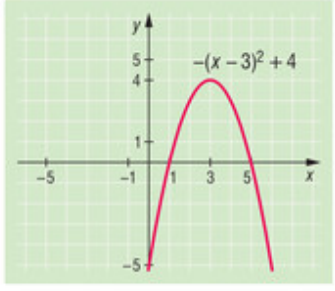

Zérushelye nincs.
Minimum értéke: $y=1$,
helye: $x=-1$.

*h)*



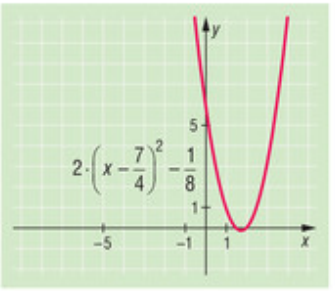

Zérushely: $x_1=1$, $x_2=5$.
Minimum értéke: $y=-8$,
helye: $x=3$.

*i)*




Zérushely: $x_1=1$, $x_2=5$.
Maximum értéke: $y=4$,
helye: $x=3$.

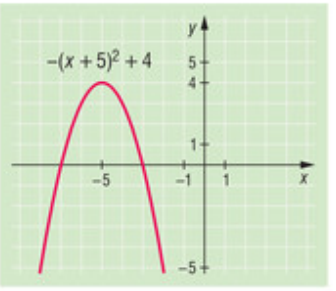
*j)*




Zérushely: $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=2$.

Minimum értéke: $y=-\frac{1}{8}$, helye: $x=\frac{7}{4}$.

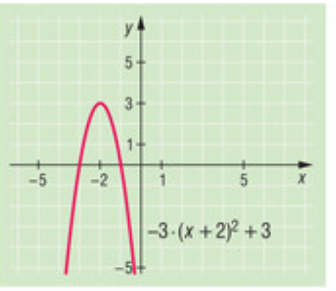
*k)*




Zérushely: $x_1=-7$, $x_2=-3$.

Maximum értéke: $y=4$, helye: $x=-5$.

*l)*




Zérushely: $x_1=-3$, $x_2=-1$.

Maximum értéke: $y=3$, helye: $x=-2$.

**2151** *a)* $a(x)=x^2-1$, zérushelyek: $x_1=1$ és $x_2=-1$.

*b)* $b(x)=(x+1)^2+1$, nincs zérushely.

*c)* $c(x)=(x-2)^2$, zérushely: $x=2$.

*d)* $d(x)=(x+3)^2-1$, zérushelyek: $x_1=-4$ és $x_2=-2$.

*e)* $e(x)=(x-4)^2-1$, zérushelyek: $x_1=3$ és $x_2=5$.

*f)* $f(x)=(x+2)^2-4$, zérushelyek: $x_1=0$ és $x_2=-4$.

*g)* $g(x)=2\cdot(x-1)^2-2$, zérushelyek: $x_1=0$ és $x_2=2$.

*h)* $h(x)=-(x+4)^2+9$, zérushelyek: $x_1=-1$ és $x_2=-7$.

**2152** *a)* $f(x)=(x+3)^2+c-9$.

Nincs zérushely, ha $c>9$. Egy zérushely van, ha $c=9$. Két zérushely van, ha $c<9$.

*b)* $g(x)=(x-4)^2+c-16$.

Nincs zérushely, ha $c>16$. Egy zérushely van, ha $c=16$. Két zérushely van, ha $c<16$.

*c)* $h(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+c-\frac{25}{4}$.

Nincs zérushely, ha $c>\frac{25}{4}$. Egy zérushely van, ha $c=\frac{25}{4}$. Két zérushely van, ha $c<\frac{25}{4}$.

**2153** *a)* $x^2-14x+p=(x-7)^2-49+p$ minden valós helyen pozitív, ha $p>49$.

*b)* $2x^2-6x+p=2\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+p$ minden valós helyen pozitív, ha $p>\frac{9}{2}$.

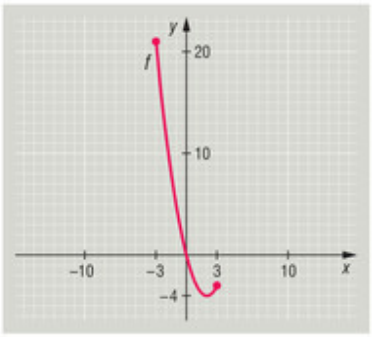
*c)* $5x^2-8x+p=5\cdot\left(x-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{16}{5}+p$ minden valós helyen pozitív, ha $p>\frac{16}{5}$.

**2154** *a)* $f(x)=(x-2)^2+1=x^2-4x+5$. Tehát $b=-4$; $c=5$.

*b)* $f(x)=(x-5)^2=x^2-10x+25$. Tehát $b=-10$; $c=25$.

*c)* $f(x)=(x+3)^2-3=x^2+6x+6$. Tehát $b=6$; $c=6$.

**2155** $f(x) = (x-2)^2 - 4$, a függvény grafikonja az ábrán látható.




*a)* Az adott intervallumon egy zérus helyvan: $x = 0$.

*b)* Az adott intervallumon maximum található az $x = -3$ helyen, értéke: $y = 21$.

Minimum az $x = 2$ helyen van, értéke: $y = -4$.

*c)* A függvény szigorúan monoton csökken, ha $x \in [-3; 2]$, növekszik, ha $x \in [2; 3]$.

**2156** *a)* $2 \cdot 3^2 - b \cdot 3 + 18 = 0$, ebből $b = 12$.

*b)* $f(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{b}{4}\right)^2 - \frac{b^2}{8} + 18$. Nincs zérushely, ha $18 - \frac{b^2}{8} > 0$, $-12 < b < 12$.

*c)* $f(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{b}{4}\right)^2 - \frac{b^2}{8} + 18$. $\frac{b}{4} = 1$, tehát $b = 4$ esetén lesz az $x = 1$ helyen a minimum, ekkor $f(x) = 2 \cdot (x-1)^2 + 16$, a minimum érték 16 és nem 10. Tehát nincs a feltételnek megfelelő $b$.

## A másodfokú egyenlet megoldóképlete – megoldások

**2157** *a)* $x_1 = 2$, $x_2 = -3$; *b)* $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 5$; *c)* $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 3$;

*d)* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{5}$; *e)* $x_1 = 20$, $x_2 = -20$; *f)* $x_1 = 12$, $x_2 = -12$;

*g)* $x_1 = 13$, $x_2 = -13$; *h)* nincs megoldás; *i)* $x_1 = 10$, $x_2 = -10$;

*j)* $x_1 = 7$, $x_2 = -7$; *k)* $x_1 = 4$, $x_2 = -4$; *l)* $x_1 = 11$, $x_2 = -11$.

**2158** *a)* $x_1 = 0$, $x_2 = 5$; *b)* $x_1 = 0$, $x_2 = -7$; *c)* $x_1 = 0$, $x_2 = -3$;

*d)* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$; *e)* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{15}{4}$; *f)* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$;

*g)* $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{9}{7}$; *h)* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{17}{3}$.

**2159** *a)* $x_1 = 2$, $x_2 = 4$; *b)* $x_1 = 2$, $x_2 = -6$; *c)* $x_1 = -2$, $x_2 = -6$;

*d)* $x_1 = -3$, $x_2 = -9$; *e)* nincs megoldás; *f)* $x_1 = -1$, $x_2 = -9$;

*g)* $x_1 = 1$, $x_2 = -9$; *h)* $x_1 = 3$, $x_2 = 13$; *i)* $x_1 = 6$, $x_2 = 8$.

**2160** *a)* $x_1 = -4$, $x_2 = 1$; *b)* $x_1 = 1$, $x_2 = -5$; *c)* $x_1 = 5$, $x_2 = 3$;

*d)* $x_1 = -3$, $x_2 = 7$; *e)* $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{3}{2}$; *f)* $x = 5$;

*g)* $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{3}{2}$; *h)* $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$; *i)* $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{2}{3}$;

*j)* $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -4$; *k)* $x_1 = \frac{7}{4}$, $x_2 = \frac{5}{3}$; *l)* nincs megoldás;

*m)* $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$; *n)* $x_1 = \frac{7}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{5}$; *o)* $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = -\frac{1}{7}$;

*p)* $x = 7$; *q)* $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{4}{3}$; *r)* $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{7}{4}$.

**2161** *a)* $x_1 = -2$, $x_2 = 1$; *b)* $x_1 = 4$, $x_2 = -5$; *c)* $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$;

*d)* $x_1 = 1$, $x_2 = -4$; *e)* $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{5}$; *f)* $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -8$;

*g)* $x_1 = 2$, $x_2 = -1$; *h)* $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{8}$; *i)* $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{3}{2}$;

*j)* $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{5}{2}$; *k)* $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$; *l)* $x_1 = 3$, $x_2 = -1$;

*m)* $x_1 = 2$, $x_2 = -15$; *n)* $x_1 = 3$, $x_2 = -1$; *o)* $x = -5$;

*p)* $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.

**2162** *a)* $x \neq 5$ és $x \neq -5$, $x \in \mathbb{R}$. Beszorzás és rendezés után: $2x^2 - 50 = 0$. Nincs megoldás.

*b)* $x \neq 4$ és $x \neq -4$, $x \in \mathbb{R}$. Beszorzás és rendezés után: $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $x = 2$.

*c)* $x \neq \frac{1}{3}$ és $x \neq -\frac{1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$. Beszorzás és rendezés után: $6x^2 + 4x + 1 = 0$. Nincs megoldás.

*d)* $x \neq \frac{1}{2}$ és $x \neq -\frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Beszorzás és rendezés után: $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $x_1 = 5$ és $x_2 = -2$.

*e)* $y \neq \pm 2$, $y \in \mathbb{R}^-$. Átalakítás után:

$$1 - \frac{6 - y}{3 \cdot (y + 2) \cdot (y - 2)} = \frac{-2}{y - 2}.$$

Rendezve: $3y^2 + 7y - 6 = 0$, amiből: $y_1 = \frac{2}{3}$ és $y_2 = -3$.

Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $y = -3$.

*f)* $a \neq \pm 3$, $a \in \mathbb{R}^+$. Átalakítás után:

$$\frac{24 + 12a}{(a + 3) \cdot (a - 3)} - \frac{5a}{a + 3} - \frac{a + 7}{a - 3} = 0.$$

Rendezve: $6a^2 - 17a - 3 = 0$, amiből: $a_1 = 3$ és $a_2 = -\frac{1}{6}$.

Az egyenletnek az adott számhalmazon nincs megoldása.

*g)* $b \neq \pm 2$, $b \in \mathbb{Q}$. Átalakítás után:

$$\frac{16 + 2b}{3 \cdot (b + 2) \cdot (b - 2)} - \frac{b - 1}{2 \cdot (b + 2)} - \frac{2b + 1}{3 \cdot (b - 2)} = 0.$$

Rendezve: $7b^2 - 3b - 22 = 0$, amiből: $b_1 = 2$ és $b_2 = -\frac{11}{7}$.

Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $b = -\frac{11}{7}$.

*h)* $d \neq 0$, $d \neq \pm 2$, $d \in \mathbb{N}$. Átalakítás után:

$$\frac{4}{d \cdot (d+2)} = \frac{d}{(d+2) \cdot (d-2)} - \frac{1}{d \cdot (d-2)}.$$

Rendezve: $d^2 - 5d + 6 = 0$, amiből: $d_1 = 3$ és $d_2 = 2$.

Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $d = 3$.

*i)* $e \neq 5$, $e \neq -2$, $e \in \mathbb{N}$. Átalakítás után:

$$\frac{21}{(e-5)^2} - \frac{2e}{e-5} + \frac{3 \cdot (2+e)}{e+2} = 0.$$

Rendezve: $e^2 - 20e + 96 = 0$, amiből: $e_1 = 12$ és $e_2 = 8$.

Az egyenletnek mindkét gyöke megoldás az adott számhalmazon.

*j)* $y \neq -1$, $y \neq 3$, $y \in \mathbb{Z}^-$. Átalakítás után:

$$\frac{y}{y-3} - \frac{2}{y+1} - \frac{4y}{(y-3) \cdot (y+1)} = 0.$$

Rendezve: $y^2 - y - 6 = 0$, amiből: $y_1 = 3$ és $y_2 = -2$.

Az egyenlet megoldása az adott számhalmazon: $y = -2$.

**2163** Az egyenlet diszkriminánsa: $16 - 20c$.

*a)* Két különböző valós megoldás van, ha $16 - 20c > 0$, vagyis $c < \frac{4}{5}$.

*b)* Egy valós megoldás van, ha $16 - 20c = 0$, vagyis $c = \frac{4}{5}$.

*c)* Nincs valós megoldás, ha $16 - 20c < 0$, vagyis $c > \frac{4}{5}$.

**2164** *a)* $a \cdot (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 1 = 0$, ha $a = \frac{19}{9}$.

*b)* Az egyenlet diszkriminánsa: $36 + 4a$.

Egy valós megoldás van:

I. Ha az egyenlet elsőfokú: $a = 0$, ekkor $x = \frac{1}{6}$.

II. Ha $a \neq 0$, $D = 36 + 4a = 0$, vagyis $a = -9$. Ebben az esetben $x = \frac{1}{3}$.

*c)* Két különböző valós megoldás van, ha $a \neq 0$ és $36 + 4a > 0$, vagyis ha $a > -9$, de $a \neq 0$.

*d)* Nincs valós megoldás, ha $36 + 4a < 0$, vagyis ha $a < -9$.

**2165** Az egyenlet diszkriminánsa $(2m + 1)^2 - 4m \cdot (m - 3) = 16m + 1$.

*a)* Egy valós megoldás van:

I. Ha az egyenlet elsőfokú, azaz $m = 0$, ekkor $x = -3$.

II. Ha $m \neq 0$, a diszkrimináns $16m + 1 = 0$, amiből $m = -\frac{1}{16}$.

Az egyenlet: $-\frac{1}{16} \cdot x^2 - \frac{14}{16} \cdot x - \frac{49}{16} = 0$, a megoldása $x = -7$.

*b)* Két megoldás van, ha $16m + 1 > 0$, azaz $m > -\frac{1}{16}$, de $m \neq 0$.

*c)* Nincs megoldás, ha $16m + 1 < 0$, azaz $m < -\frac{1}{16}$.

**2166** Vizsgáljuk meg az egyenlet diszkriminánsát:

$$D = 4 \cdot (5k + 3)^2 - 20 \cdot (5k^2 + 6k + 1) = 16.$$

Eredményünk azt mutatja, hogy könnyen megkaphatjuk az egyenlet gyökeit:

$$x_1 = \frac{2 \cdot (5k + 3) + 4}{10} = \frac{10k + 10}{10} = k + 1 \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{2 \cdot (5k + 3) - 4}{10} = \frac{10k + 2}{10} = k + \frac{1}{5}.$$

A gyökök különbsége: $x_1 - x_2 = \frac{4}{5}$, valóban független $k$-tól.

**2167** Ha van valós gyök, akkor az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív:

$$D = 4 \cdot (a - b + c)^2 - 12 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) \geq 0.$$

Átalakítva:

$$4 \cdot [(a - b + c)^2 - 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)] = -8 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc).$$

Teljes négyzeteket kialakítva:

$$D = -4 \cdot [(a + b)^2 + (a - c)^2 + (b + c)^2],$$

ez a kifejezés soha nem pozitív, csak akkor van megoldás, ha 0-val egyenlő.

Ekkor $a + b = 0$, $a - c = 0$ és $b + c = 0$.

Mindhárom feltétel teljesül, ha $a = c = -b$.

Ekkor a $c$ helyére $a$-t, és $b$ helyére $(-a)$-t helyettesítve és 3-mal osztva azt az egyenletet kapjuk, hogy $a^2x^2 + 2ax + 1 = 0$, ahol $a \neq 0$.

Az egyenlet egyetlen megoldása $x = -\frac{1}{a}$.

## A gyöktényezős alak. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés – megoldások

**2168**

*a)* $(x - 2) \cdot (x + 3)$; *b)* $(x + 4) \cdot (x + 3)$; *c)* $(x - 5) \cdot (x + 7)$;
*d)* $(x + 10) \cdot (x + 6)$; *e)* $(x - 8)^2$; *f)* nincs megfelelő szorzat;
*g)* $(2x + 3) \cdot (x - 3)$; *h)* $2 \cdot (x + 7)^2$; *i)* $(3x + 2) \cdot (x + 2)$;
*j)* $(2x - 1) \cdot (3x + 5)$; *k)* $(3 - 2x) \cdot (x + 6)$; *l)* $(4 - 3x) \cdot (4x + 1)$.

**2169**

*a)* $x^2 - 7x + 12 = 0$; *b)* $x^2 - 5x - 14 = 0$; *c)* $x^2 + 9x + 18 = 0$;
*d)* $x^2 + 4x - 5 = 0$; *e)* $x^2 - 36 = 0$; *f)* $x^2 - 33x + 252 = 0$;
*g)* $x^2 + 4x = 0$; *h)* $6x^2 - 7x + 2 = 0$; *i)* $15x^2 + x - 2 = 0$;
*j)* $20x^2 + 19x + 3 = 0$; *k)* $30x^2 + 19x - 28 = 0$; *l)* $72x^2 - 41x - 91 = 0$.

**2170** Például:

*a)* $x^2 - 3x + 2 = 0$; *b)* $x^2 + 2x - 3 = 0$; *c)* $3x^2 + x - 2 = 0$;
*d)* $4x^2 + 7x + 3 = 0$; *e)* $13x^2 - 35x + 22 = 0$; *f)* $x^2 - 3 = 0$;
*g)* $x^2 - 4x + 1 = 0$; *h)* $x^2 - 14x + 31 = 0$.

**2171**

*a)* $\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 2x - 8} = \frac{(x + 4) \cdot (x + 3)}{(x + 4) \cdot (x - 2)} = \frac{x + 3}{x - 2}$;

*b)* $\frac{3x^2 - 13x - 10}{2x^2 - 7x - 15} = \frac{(3x + 2) \cdot (x - 5)}{(2x + 3) \cdot (x - 5)} = \frac{3x + 2}{2x + 3}$;

*c)* $\frac{2x^2 + 3x - 5}{2x^2 + 11x + 15} = \frac{(2x + 5) \cdot (x - 1)}{(2x + 5) \cdot (x + 3)} = \frac{x - 1}{x + 3}$;

*d)* $\frac{10x^2 - 13x - 3}{-8x^2 + 14x - 3} = \frac{(5x + 1) \cdot (2x - 3)}{(3 - 2x) \cdot (4x - 1)} = \frac{5x + 1}{1 - 4x}$.

**2172** *a)* $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$;

*b)* $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}$;

*c)* $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = 5$;

*d)* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = \frac{29}{4}$;

*e)* $x_3 + x_4 = -(x_1 + x_2) = \frac{5}{2}$, $x_3 \cdot x_4 = x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}$, az egyenlet: $2x^2 - 5x - 1 = 0$.

*f)* Ha $x_3 = x_1 - 2$ és $x_4 = x_2 - 2$, akkor:

$$x_3 + x_4 = x_1 + x_2 - 4 = -\frac{13}{2} \quad \text{és} \quad x_3 \cdot x_4 = x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot (x_1 + x_2) + 4 = \frac{17}{2}.$$

Az egyenlet: $2x^2 + 13x + 17 = 0$.

**2173** *a)* Az $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$ kifejezést átalakítva: $x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2)$, majd ebbe helyettesítve a Viété-formulákkal kapott eredményeket ($x_1 + x_2 = -7$; $x_1 \cdot x_2 = 12$) kapjuk, hogy:

$$x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = -84.$$

Vegyük észre, hogy $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2$. Ebbe helyettesítsük a Viéte-formulákkal kapott eredményeket ($x_1 + x_2 = -7$; $x_1 \cdot x_2 = 12$). Így kapjuk, hogy:

$$x_1^2 + x_2^2 = 25.$$

*b)* Hasonlóan az *a)* feladathoz, kapjuk, hogy:

$$x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{25}{4}.$$

*c)* Hasonlóan az *a)* feladathoz, kapjuk, hogy:

$$x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = \frac{15}{4} \quad \text{és} \quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{29}{4}.$$

**2174** Az $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2$ átalakítást elvégezve, az egyenletbe helyettesítjük a Viéte-formulákkal kapott eredményeket ($x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = -15$), így kapjuk, hogy:

$$34 = (-p)^2 - 2 \cdot (-15), \quad \text{amiből} \quad p = \pm 2.$$

**2175** Oldjuk meg a megfelelő egyenleteket paraméteresen, és alakítsuk szorzattá:

*a)* $\frac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 - 4xy + 3y^2} = \frac{(x + y) \cdot (x - 3y)}{(x - y) \cdot (x - 3y)} = \frac{x + y}{x - y}$;

*b)* $\frac{2x^2 + 5xy - 3y^2}{2x^2 + 3xy - 2y^2} = \frac{(2x - y) \cdot (x + 3y)}{(2x - y) \cdot (x + 2y)} = \frac{x + 3y}{x + 2y}$;

*c)* $\frac{x^2 + (3 - 2y) \cdot x - 6y}{x^2 - (1 + 2y) \cdot x + 2y} = \frac{(x - 2y) \cdot (x + 3)}{(x - 2y) \cdot (x - 1)} = \frac{x + 3}{x - 1}$;

*d)* $\frac{6x^2 + (15 + 4y) \cdot x + 10y}{6x^2 + (4y - 9) \cdot x - 6y} = \frac{(3x + 2y) \cdot (2x + 5)}{(3x + 2y) \cdot (2x - 3)} = \frac{2x + 5}{2x - 3}$.

**2176** A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = p^2 - 2q,$$

$$y_2 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2 \cdot x_2 - 3x_1 \cdot x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2) =$$
$$= (-p)^3 - 3q \cdot (-p) = -p^3 + 3p \cdot q.$$

A keresett egyenlet együtthatói szintén felírhatók a gyökökkel, ezért a megfelelő egyenlet:

$$y^2 - [(p^2 - 2q) + (3p \cdot q - p^3)] \cdot y + (p^2 - 2q) \cdot (3p \cdot q - p^3) = 0.$$

Felbontva a zárójeleket:

$$y^2 + (p^3 - p^2 - 3p \cdot q + 2q) \cdot y - p^5 + 5p^3 \cdot q - 6p \cdot q^2 = 0.$$

## Másodfokúra visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek, másodfokú egyenletrendszerek – megoldások

**2177** *a)* $x^2 = 4$: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$; vagy $x^2 = 1$: $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

*b)* $x^2 = 9$: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$; vagy $x^2 = 1$: $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

*c)* $x^2 = 4$: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$; vagy $x^2 = -5$: nincs megoldása.

*d)* $x^2 = 9$: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$; vagy $x^2 = -1$: nincs megoldása.

*e)* $x^2 = 25$: $x_1 = 5$, $x_2 = -5$; vagy $x^2 = -5$: nincs megoldása.

*f)* $x^2 = -4$ vagy $x^2 = -7$: nincs megoldása.

*g)* $x^2 = \frac{1}{4}$: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$; vagy $x^2 = \frac{1}{16}$: $x_3 = \frac{1}{4}$, $x_4 = -\frac{1}{4}$.

*h)* $x^2 = \frac{1}{25}$: $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = -\frac{1}{5}$; vagy $x^2 = -3$: nincs megoldása.

*i)* $x^3 = -1$: $x_1 = -1$; vagy $x^3 = 8$: $x_2 = 2$.

*j)* $x^3 = 27$: $x_1 = 3$; vagy $x^3 = 1$: $x_2 = 1$.

*k)* $x^3 = -1$: $x_1 = -1$; vagy $x^3 = -8$: $x_2 = -2$.

*l)* $x^3 = -1$: $x_1 = -1$; vagy $x^3 = 5$: $x_2 = \sqrt[3]{5}$.

**2178** *a)* $x_1 = 1$, $y_1 = 1$; $x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{7}{4}$;

*b)* $x_1 = 8$, $y_1 = 4$; $x_2 = 3$, $y_2 = -1$;

*c)* $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = -\frac{8}{3}$, $y_2 = \frac{23}{9}$;

*d)* $x_1 = 1$, $y_1 = -1$; $x_2 = -\frac{13}{10}$, $y_2 = -\frac{73}{50}$;

*e)* $x_1 = 5$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 5$;

*f)* $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = -\frac{3}{2}$, $y_2 = -4$;

*g)* $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 6$, $y_2 = \frac{1}{3}$;

*h)* $x_1 = -\frac{1}{4}$, $y_1 = 8$; $x_2 = -2$, $y_2 = 1$;

*i)* $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 = -3$, $y_2 = 1$;

*j)* $x_1 = \frac{8}{5}$, $y_1 = -\frac{31}{5}$; $x_2 = -4$, $y_2 = 5$.



**2179** *a)* Ha $a = (x-2)^2$ az egyenlet: $a^2 - 5a + 4 = 0$. Megoldásai: $a = 1$ és $a = 4$.
Visszahelyettesítve: $(x-2)^2 = 1$, amiből $x_1 = 3$, $x_2 = 1$;
$(x-2)^2 = 4$, amiből $x_3 = 0$, $x_4 = 4$.

*b)* A $b = (x+3)^2$ helyettesítéssel: $b^2 - 7b - 18 = 0$, aminek megoldásai: $b_1 = 9$, $b_2 = -2$.
Visszahelyettesítve: $(x+3)^2 = 9$, ahonnan $x_1 = 0$, $x_2 = -6$;
$(x+3)^2 = -2$, aminek nincs megoldása.

*c)* A $c = (x+5)^2$ helyettesítéssel: $c^2 - 13c - 48 = 0$, aminek megoldásai: $c_1 = 16$, $c_2 = -3$.
Visszahelyettesítve: $(x+5)^2 = 16$, amiből $x_1 = -1$, $x_2 = -9$;
$(x+5)^2 = -3$, aminek nincs megoldása.

*d)* A $d = (x-3)^2$ helyettesítéssel: $36d^2 - 13d + 1 = 0$, aminek megoldásai: $d_1 = \frac{1}{4}$, $d_2 = \frac{1}{9}$.
Visszahelyettesítve: $(x-3)^2 = \frac{1}{4}$, amiből $x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$;

$(x-3)^2 = \frac{1}{9}$, amiből $x_3 = \frac{10}{3}$, $x_4 = \frac{8}{3}$.

**2180** *a)* Az $a = x^2 + 6x$ helyettesítéssel: $a \cdot (a+4) - 77 = 0$, aminek megoldásai: $a_1 = 7$, $a_2 = -11$.
Visszahelyettesítve: $x^2 + 6x = 7$, amiből $x_1 = 1$, $x_2 = -7$;
$x^2 + 6x = -11$, aminek nincs megoldása.

*b)* A $b = x^2 - 4x$ helyettesítéssel: $b \cdot (b-3) - 10 = 0$, aminek megoldásai: $b_1 = 5$, $b_2 = -2$.
Visszahelyettesítve: $x^2 - 4x = 5$, amiből $x_1 = 5$, $x_2 = -1$;
$x^2 - 4x = -2$, amiből $x_3 = 2 + \sqrt{2}$, $x_4 = 2 - \sqrt{2}$.

*c)* Az egyenlet átalakítható: $(x^2 - 2x)^2 - 11 \cdot (x^2 - 2x) + 24 = 0$.
A $c = x^2 - 2x$ helyettesítéssel: $c^2 - 11c + 24 = 0$, aminek megoldásai: $c_1 = 8$, $c_2 = 3$.
Visszahelyettesítve: $x^2 - 2x = 8$, amiből $x_1 = 4$, $x_2 = -2$;
$x^2 - 2x = 3$, amiből $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

**2181** *a)* Az első egyenletbe helyettesítve a másodikat: $-8 - 2x + y = 2$, ebből $y$-t kifejezve és behelyettesítve a második egyenletbe: $x^2 + 5x + 4 = 0$, ebből $x_1 = -1$, $y_1 = 8$; $x_2 = -4$, $y_2 = 2$.

*b)* Az első egyenlethez hozzáadva a második 4-szeresét: $13x^2 = 117$, ebből: $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 = 3$, $y_2 = -1$; $x_3 = -3$, $y_3 = 1$; $x_4 = -3$, $y_4 = -1$.

*c)* Az elsőből helyettesítve a másodikba, beszorzás után: $x^2 - 17x + 30 = 0$, ebből $x_1 = 15$, $y_1 = -10$; $x_2 = 2$, $y_2 = 3$.

*d)* A másodikból helyettesítve az elsőbe, beszorzás után: $2y^2 + 3y - 2 = 0$, ebből: $x_1 = 1$, $y_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 6$, $y_2 = -2$.

*e)* Az első egyenletből a másodikba helyettesítve az $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ egyenlet adódik, ebből $x_1 = 4$, $y_1 = -2$; $x_2 = -4$, $y_2 = 2$; $x_3 = 2$, $y_3 = -4$; $x_4 = -2$, $y_4 = 4$.

*f)* Az első egyenletből a másodikba helyettesítve az $x^4 - 3x^2 - 54 = 0$ egyenlet adódik, ebből $x_1 = 3$, $y_1 = 2$; $x_2 = -3$, $y_2 = -2$.

*g)* Összeadva az egyenleteket: $2x^2 + 2x = 60$, megoldva és visszahelyettesítve: $x_1 = 5$, $y_1 = 1$; $x_2 = 5$, $y_2 = -2$; $x_3 = -6$, $y_3 = 1$; $x_4 = -6$, $y_4 = -2$.

*h)* A két egyenlet bal oldalát szorzattá alakítva és elosztva az elsőt a másodikkal: $\frac{x}{y} = -4$, ezt visszahelyettesítve: $x_1 = -4$, $y_1 = 1$; $x_2 = 4$, $y_2 = -1$.

**2182** *a)* Mivel az $x = 0$ nem megoldás, eloszthatjuk mindkét oldalt $x^2$-tel:

$$2 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0.$$

Helyettesítsük az $y = x + \frac{1}{x}$-et, ekkor $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Az egyenlet: $2 \cdot (y^2 - 2) - 9y + 14 = 0$. A megoldásai: $y_1 = \frac{5}{2}$, $y_2 = 2$.

Visszahelyettesítve: $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$. A megoldásai: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$;

$x + \frac{1}{x} = 2$. A megoldása: $x_3 = 1$.

*b)* Mivel az $x = 0$ nem megoldás, eloszthatjuk mindkét oldalt $x^2$-tel:

$$6 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0.$$

Helyettesítsük az $y = x + \frac{1}{x}$-et, ekkor $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Az egyenlet: $6 \cdot (y^2 - 2) - 5y - 38 = 0$. A megoldásai: $y_1 = \frac{10}{3}$, $y_2 = -\frac{5}{2}$.

Visszahelyettesítve: $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$. A megoldásai: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$;

$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$. A megoldásai: $x_3 = -2$, $x_4 = -\frac{1}{2}$.

**2183** *a)* Ha megvizsgáljuk az egyenletet, kiderül, hogy az $x_1 = 1$ megoldás, ennek megfelelően alakítsuk:

$$x^2 \cdot (x - 1) - x \cdot (x - 1) - 12 \cdot (x - 1) = 0,$$
$$(x - 1) \cdot (x^2 - x - 12) = 0.$$

A szorzat másik tényezője is lehet 0: $x^2 - x - 12 = 0$. A megoldásai: $x_2 = 4$, $x_3 = -3$.

*b)* Az egyenlet egyik megoldása az $x_1 = -1$. Alakítsuk szorzattá:

$$x^2 \cdot (x + 1) - x \cdot (x + 1) - 6 \cdot (x + 1) = 0,$$
$$(x + 1) \cdot (x^2 - x - 6) = 0.$$

Ha a másik tényező 0: $x^2 - x - 6 = 0$, aminek a megoldásai: $x_2 = 3$, $x_3 = -2$.

*c)* Az egyenlet egyik megoldása az $x_1 = 2$. Alakítsuk szorzattá:

$$x^2 \cdot (x - 2) + 9x \cdot (x - 2) + 20 \cdot (x - 2) = 0,$$
$$(x - 2) \cdot (x^2 + 9x + 20) = 0.$$

A második tényezőből: $x^2 + 9x + 20 = 0$, aminek a megoldásai: $x_2 = -4$, $x_3 = -5$.

## Másodfokú egyenlőtlenségek – megoldások

**2184** *a)* $x < -7$ vagy $x > 7$;

*b)* $-10 \le x \le 10$;

*c)* $x \le -6$ vagy $x \ge 6$;

*d)* $-20 < x < 20$;

*e)* $x \in \mathbb{R}$;

*f)* nincs megoldás;

*g)* $-\sqrt{15} \le x \le \sqrt{15}$;

*h)* $x \le -\sqrt{7}$ vagy $x \ge \sqrt{7}$;

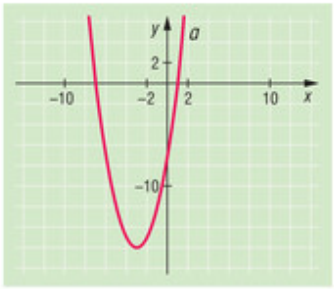
*i)* $x \le -3$ vagy $0 \le x$;

*j)* $-\frac{5}{2} < x < 0$;

*k)* $x < 0$ vagy $x > \frac{8}{3}$;

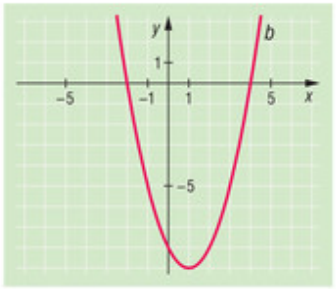
*l)* $0 \le x \le 5$.

**2185** *a)*



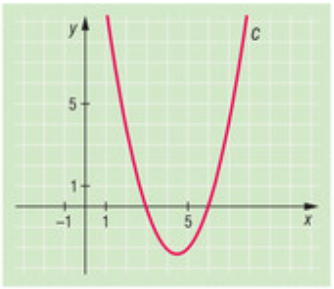

$-7 < x < 1$;

*b)*



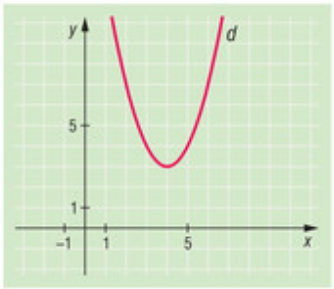

$x \leq -2$ vagy $4 \leq x$;

*c)*



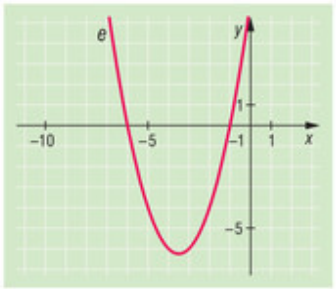

$3 < x < 6$;

*d)*



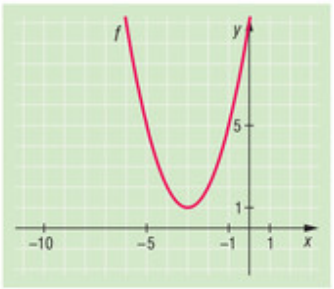

nincs megoldás;

*e)*



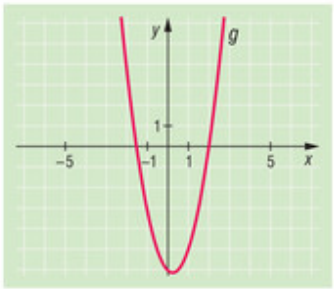

$x < -6$ vagy $-1 < x$;

*f)*



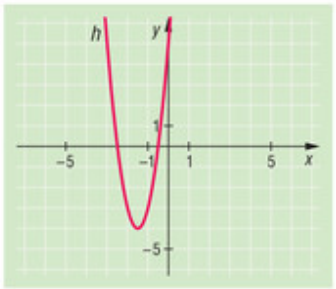

$x \in \mathbb{R}$;

*g)*



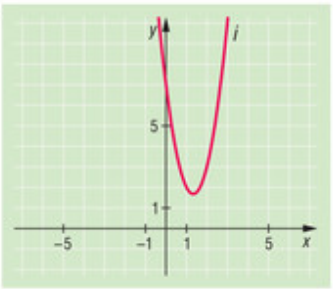

$-\frac{3}{2} \leq x \leq 2$;

*h)*




$-\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}$;

*i)*



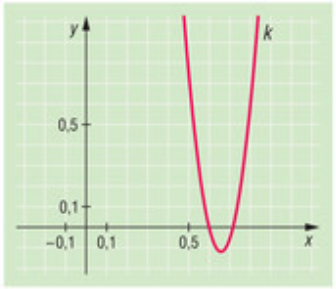

$x \in \mathbb{R}$;

*j)*



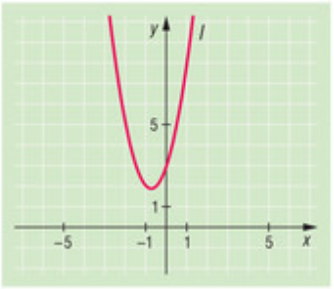

$x < -\frac{2}{5}$ vagy $-\frac{1}{3} < x$;

*k)*




$\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{5}{7}$;

*l)*



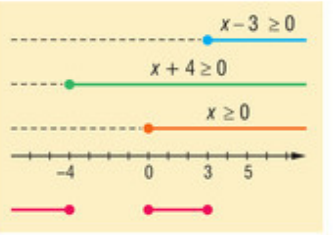

nincs megoldás.

**2186** *a)* {0; 1; 2; 3; 4; 5};
*b)* {–5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4};
*c)* {–5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3};
*d)* minden egész szám megoldás;
*e)* {–7; –6; –5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; 5};
*f)* {–4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3};
*g)* {–9; –8; –7; –6; –5; –4; –3; –2; –1; 0};
*h)* {–6; –5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2};
*i)* {–12; –11; –10; –9; –8; –7; –6; –5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8}.

**2187** *a)* Az $x$ kiemelése utáni másodfokú kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$x^3 + x^2 - 12x = x \cdot (x+4) \cdot (x-3) \leq 0.$$

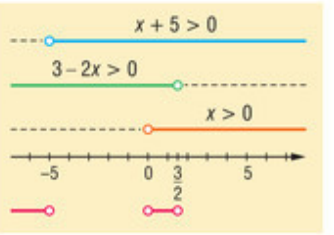
A megoldás: $x \leq -4$ vagy $0 \leq x \leq 3$.




*b)* Az $x$ kiemelése utáni másodfokú kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$-2x^3 - 7x^2 + 15x = x \cdot (3-2x) \cdot (x+5) > 0.$$

A megoldás: $x < -5$ vagy $0 < x < \frac{3}{2}$.

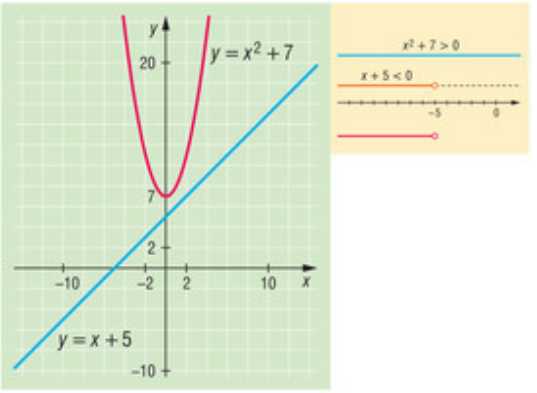



*c)* $x^2 \leq -8$ vagy $x^2 \geq 4$, az elsőnek nincs megoldása, a másodikból: $x \leq -2$ vagy $2 \leq x$.

*d)* $1 < x^2 < 9$, amiből $-3 < x < -1$ vagy $1 < x < 3$.

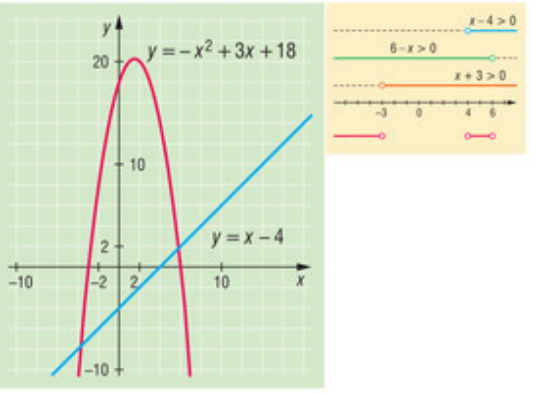
**2188** *a)* A nevező: $x^2 + 7 > 0$.

A megoldás: $x < -5$.



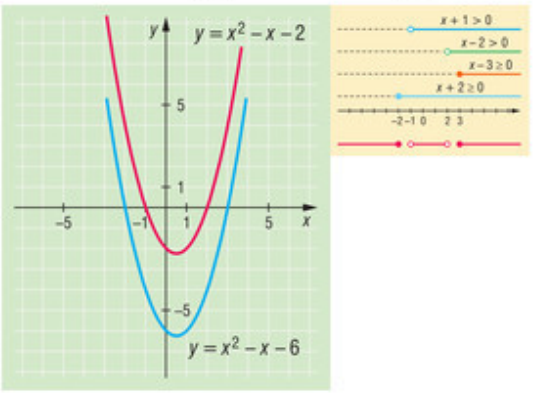

*b)* $\dfrac{-x^2+3x+18}{x-4} = \dfrac{(x+3)\cdot(6-x)}{x-4} > 0.$

A megoldás: $x < -3$ vagy $4 < x < 6$.



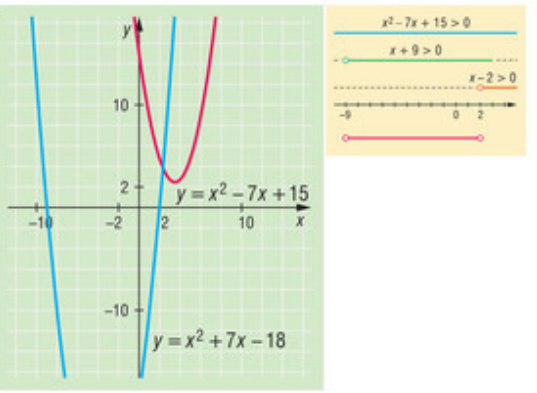

*c)* $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-x-2} = \dfrac{(x+2)\cdot(x-3)}{(x-2)\cdot(x+1)} \geq 0,$

ezért: $x \leq -2$ vagy $-1 < x < 2$ vagy $3 \leq x$.



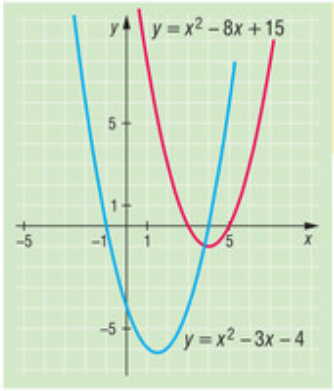

*d)* $\dfrac{x^2-7x+15}{x^2+7x-18} = \dfrac{x^2-7x+15}{(x-2)\cdot(x+9)} \leq 0.$

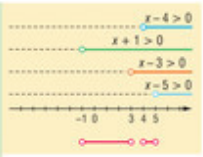
A megoldás: $-9 < x < 2$.



*e)* $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-3x-4}=\dfrac{(x-5)\cdot(x-3)}{(x+1)\cdot(x-4)}<0.$

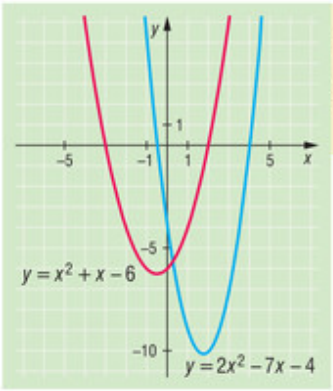
A megoldás: $-1<x<3$ vagy $4<x<5$.

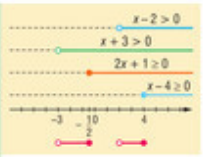



*f)* $\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2+x-6}=\dfrac{(x-4)\cdot(2x+1)}{(x+3)\cdot(x-2)}\le 0.$

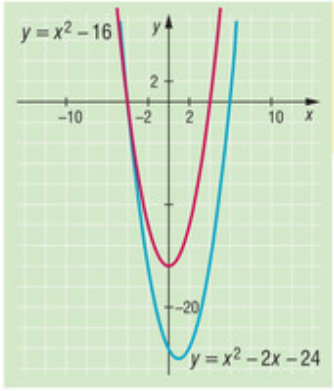
A megoldás: $-3<x\le -\dfrac{1}{2}$ vagy $2<x\le 4$.

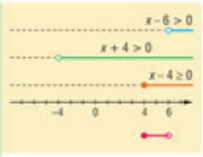



*g)* $\dfrac{x^2-16}{x^2-2x-24}=\dfrac{(x-4)\cdot(x+4)}{(x+4)\cdot(x-6)}\le 0.$

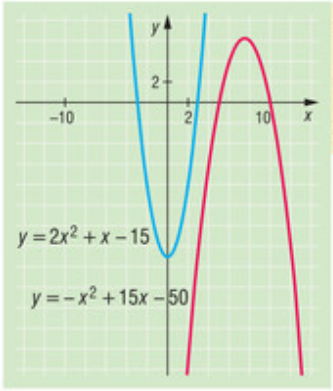
A megoldás: $4\le x<6$.

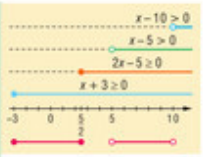



*h)* $\dfrac{2x^2+x-15}{-x^2+15x-50}=\dfrac{(x+3)\cdot(2x-5)}{-(x-5)\cdot(x-10)}\ge 0.$

A megoldás: $-3\le x\le \dfrac{5}{2}$ vagy $5<x<10$.

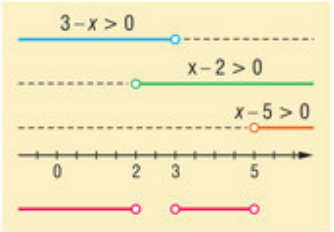



**2189** *a)* $\dfrac{(x-5)\cdot(x-2)}{3-x}>0,\ x\ne 3.$

Meghatározzuk, hogy a feladatban szereplő $(x-5)$, $(x-2)$ és $(3-x)$ kifejezések mely értékekre pozitívak, illetve negatívak.

Az ábra szerint a megoldás: $x<2$ vagy $3<x<5$.

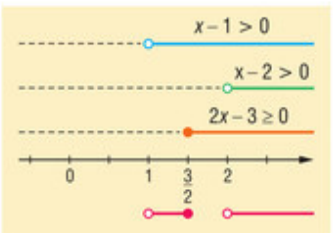



*b)* $\dfrac{x-1}{x-2}\ge\dfrac{x-2}{x-1},\ x\ne 2, x\ne 1.$

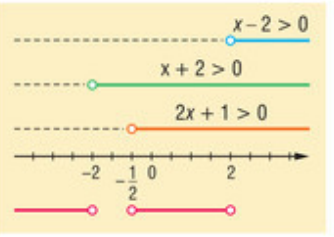
Redukáljuk nullára az egyenlőtlenséget, majd a közös nevezőre hozatal és összevonás után kapjuk:

$$\frac{2x-3}{(x-1)\cdot(x-2)}\ge 0.$$

A kifejezések előjelvizsgálata után a megoldás: $1<x\le\dfrac{3}{2}$.



*c)* $1+\frac{5}{x-2}<\frac{x-1}{2+x}$, $x\neq\pm2$.

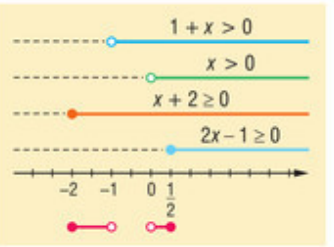



Redukáljuk nullára az egyenlőtlenséget, hasonlóan a *b)* feladat megoldásához. A közös nevezőre hozatal, és az összevonás után a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\frac{8x+4}{(x+2)\cdot(x-2)}<0, \text{ melyből: } \frac{4\cdot(2x+1)}{(x+2)\cdot(x-2)}<0.$$

A hányadosban szereplő kifejezések előjelvizsgálata után kapjuk, hogy az egyenlőtlenség megoldása: $x<-2$ vagy $-\frac{1}{2}<x\leq2$.

*d)* $1+\frac{3}{2+2x}\leq\frac{1}{x}$, $x\neq0, x\neq1$.




Átalakítás után az alábbi egyenlőtlenséghez jutunk:

$$1+\frac{3}{2\cdot(1+x)}-\frac{1}{x}\leq0, \text{ melyből: } \frac{(2x-1)\cdot(x+2)}{2x\cdot(1+x)}\leq0.$$

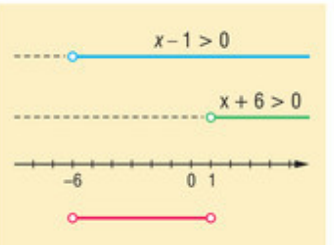
A kifejezések előjelvizsgálat után kapjuk, hogy az egyenlőtlenség megoldása: $-2\leq x<-1$ vagy $0<x\leq\frac{1}{2}$.

*e)* $\frac{-5}{4x^2-4x+1}>0$, $x\neq\frac{1}{2}$.

Mivel a számláló konstans és negatív, így a hányados akkor pozitív, ha a nevezője negatív. A nevezőt teljes négyzetté alakítva kapjuk: $(2x-1)^2$, amely kifejezés soha nem lesz negatív.

Az egyenlőtlenségnek nincs tehát megoldása.

*f)* $\frac{6}{6-5x-x^2}\geq0$, $x\neq-2, x\neq1$.




Mivel a számláló konstans és pozitív, így a hányados akkor pozitív, ha a nevező pozitív. (Az egyenlőség soha nem teljesülhet.)

A $6-5x-x^2$ kifejezést szorzattá alakítva: $-(x+6)\cdot(x-1)>0$, vagyis $(x+6)\cdot(x-1)<0$ egyenlőtlenséghez jutunk.

Előjelvizsgálatot tartunk. E szorzat akkor negatív, ha a két tényezője ellenkező előjelű (és ez egyszerre teljesül).

Az egyenlőtlenség megoldása: $-6<x<1$.

**2190** Az $x^2-3x-10=0$, ha $x_1=5, x_2=-2$.

Az egyenlőtlenség különböző alakú lesz:

I. Ha $x\leq-2$ vagy $5\leq x$, akkor $x^2-3x-10\leq x+7$.

Azaz $x^2-4x-17\leq0$, ennek megoldása: $2-\sqrt{21}\leq x\leq2+\sqrt{21}$.

A feltétellel összevetve: $2-\sqrt{21}\leq x\leq-2$ vagy $5\leq x\leq2+\sqrt{21}$.

II. Ha $-2<x<5$, akkor $-x^2+3x+10\leq x+7$.

Azaz $0\leq x^2-2x-3$, ennek megoldása: $x\leq-1$ vagy $3\leq x$.

A feltétellel összevetve: $-2<x\leq-1$ vagy $3\leq x<5$.

A végeredmény: $2-\sqrt{21}\leq x\leq-1$ vagy $3\leq x\leq2+\sqrt{21}$.

**2191** *a)* A törtnek és a gyököknek akkor van értelme, ha:

$$x^2 - 3x - 28 \geq 0 \quad \text{és} \quad x^2 + 3x - 18 > 0.$$

Az első megoldása:

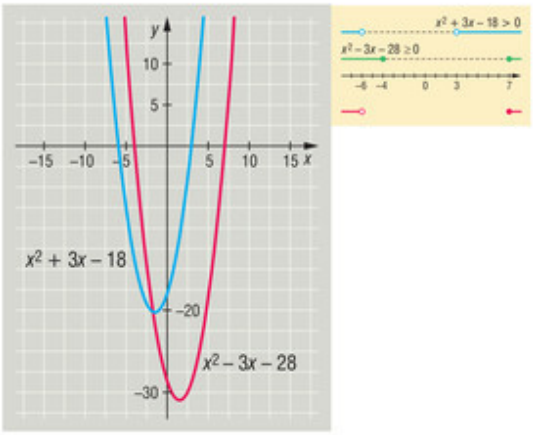
$$x \leq -4 \quad \text{vagy} \quad 7 \leq x.$$

A második megoldása:

$$x < -6 \quad \text{vagy} \quad 3 < x.$$

A közös megoldás:

$$x < -6 \quad \text{vagy} \quad 7 \leq x.$$




*b)* A gyöknek akkor van értelme, ha:

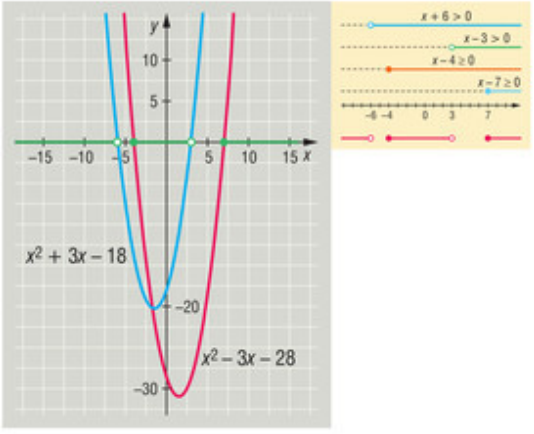
$$\frac{x^2 - 3x - 28}{x^2 + 3x - 18} \geq 0.$$

A számlálót és a nevezőt szorzattá alakítva:

$$\frac{(x-7)\cdot(x+4)}{(x-3)\cdot(x+6)} \geq 0.$$

A megoldás:

$$x < -6 \quad \text{vagy} \quad -4 \leq x < 3 \quad \text{vagy} \quad 7 \leq x.$$




**2192** Mivel az egész számok körében keressük a megoldást, ha $x = 0$, akkor a harmadik egyenlőtlenség miatt $z = 0$, és a második miatt $y = 0$.

Általában is igaz, hogy ha valamelyik ismeretlen 0, akkor a másik kettő is az.

Ha egyik ismeretlen sem 0, adjuk össze a három egyenlőtlenséget:

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz + 2xz \leq 3 + x^2 + y^2 + z^2,$$
$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2xz \leq 3,$$
$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 \leq 3.$$

A teljes négyzetek nemnegatívak és az ismeretlenek 0-tól különböző egészek.

Csak akkor kaphatunk megoldást, ha:

$$(x+y)^2 \leq 1, \quad (y+z)^2 \leq 1, \quad (x+z) \leq 1.$$

A teljes négyzeteken belül a tagok nem lehetnek azonos előjelűek, mert akkor pl. $|x+y| \geq 2$ miatt $(x+y)^2 \geq 4$.

Tehát csak az fordulhat elő, hogy $x$ és $y$ ellentétes előjelű. Minden párra teljesülnie kellene az előbbinek, ami lehetetlen.

Tehát az egyenlőtlenség-rendszer egyetlen megoldása az egész számok körében a következő számhármas:

$$x = y = z = 0.$$

# Paraméteres másodfokú egyenletek – megoldások

**2193** Az adott egyenlet gyökei akkor egyenlőek, ha a diszkriminánsa 0. Tehát átalakítva az egyenletet, kapjuk, hogy:

$$x^2 - 2\cdot(4p-1)\cdot x + 15p^2 - 2p - 7 = 0.$$

Vagyis:

$$[-2\cdot(4p-1)]^2 - 4\cdot(15p^2 - 2p - 7) = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $p_1 = 4$ és $p_2 = 2$.

Valóban, a $p = 4$ helyettesítéssel kapott egyenletünk: $x^2 - 30x + 225 = 0$, ami $(x-15)^2 = 0$, így tehát a parabola érinti az $x$ tengelyt.

A $p = 2$ helyettesítéssel kapott egyenletünk: $x^2 - 14x + 49 = 0$, vagyis $(x-7)^2 = 0$. Ez a parabola szintén érinti az $x$ tengelyt.

**2194** *a)* Az egyenlet diszkriminánsa: $81b^2$. Megoldásai: $x_1 = 2b$, $x_2 = -7b$.

*b)* Az egyenlet diszkriminánsa: $9 + 24b + 16b^2 = (3+4b)^2$. Megoldásai: $x_1 = 4b$, $x_2 = -3$.

*c)* Az egyenlet diszkriminánsa: $289b^2 = (17b)^2$. Megoldásai: $x_1 = \frac{b}{3}$, $x_2 = -\frac{5b}{2}$.

*d)* Ha $b = 0$, akkor az egyenlet elsőfokú, a megoldása: $x = 0$.

Ha $b \neq 0$, akkor az egyenlet diszkriminánsa: $16b^4 + 16b^2 + 4 = (4b^2+2)^2$, így a megoldások: $x_1 = \frac{2}{b}$, $x_2 = -4b$.

**2195** *a)* Vizsgáljuk meg, hogy az egyenlet diszkriminánsa mikor nemnegatív:

$$(2b)^2 - 8\cdot(b+4) \geq 0,$$
$$b^2 - 2b - 8 \geq 0.$$

Ennek a megoldásai: $-2 \geq b$ vagy $4 \leq b$.

Tehát az egyenletnek nincs megoldása, ha $-2 < b < 4$;

1 megoldása van, ha $b = -2$, ekkor $x = 1$,
vagy ha $b = 4$, ekkor $x = -2$;

2 megoldása van, ha $-2 > b$, vagy $4 < b$.

*b)* Ha $b = 0$, az egyenlet elsőfokú, egy megoldása van: $x = \frac{5}{4}$.

Ha $b \neq 0$, vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz a diszkrimináns nemnegatív:

$$64 - 4b\cdot(10-b) \geq 0,$$
$$b^2 - 10b + 16 \geq 0.$$

Megoldásai: $b \leq 2$ vagy $8 \leq b$.

Tehát az egyenletnek nincs megoldása, ha $2 < b < 8$;

1 megoldása van, ha $b = 0$, ekkor $x = \frac{5}{4}$,
ha $b = 2$, ekkor $x = 2$,
ha $b = 8$, ekkor $x = \frac{1}{2}$;

2 megoldása van, ha $b < 0$ vagy $0 < b < 2$ vagy $8 < b$.

**2196** *a)* A törtek miatt $x \neq 3b$ és $x \neq -3b$. A közös nevező az $(x-3b)\cdot(x+3b) = x^2 - 9b^2$ szorzat, ezzel beszorozva:

$$(4x+b)\cdot(x+3b) + (3x+7b)\cdot(x-3b) = 8x^2 + 6b^2.$$

Elvégezve a műveleteket:

$$x^2 - 11bx + 24b^2 = 0.$$

Megoldóképlettel megoldva: $x_1 = 8b$, $x_2 = 3b$, ez utóbbi nem megoldás, az előbbi pedig csak akkor, ha $b \neq 0$.

Tehát ha $b = 0$, az egyenletnek nincs megoldása, ha $b \neq 0$, akkor $x = 8b$.

*b)* Vizsgáljuk meg a nevezőket: $x^2 + bx + b^2 \neq 0$, mivel az $x^2 + bx + b^2 = 0$ egyenlet diszkriminánsa $-3b^2$, csak akkor van megoldás, ha $b = 0$, ekkor $x = 0$.

Az $x^3 - b^3 \neq 0$ és $b - x \neq 0$ mindkettő teljesül, ha $x \neq b$.

Tehát minden tört értelmezhető, ha $x \neq b$.

Legyen a közös nevező az $(x^2 + bx + b^2)\cdot(x-b) = x^3 - b^3$, ezzel beszorozva mindkét oldalt:

$$x\cdot(x-b) - 3b^2 = -(x^2 + bx + b^2).$$

Megoldások: $x_1 = b$, $x_2 = -b$, az első a feltételek miatt nem megoldás.

Tehát ha $b = 0$, az egyenletnek nincs megoldása, ha $b \neq 0$, akkor $x = -b$.

**2197** *a)* A kifejezés minden valós számra pozitív, ha az $x^2 - 2bx + 2b + 15 = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív:

$$(-2b)^2 - 4\cdot(2b+15) < 0,$$
$$b^2 - 2b - 15 < 0.$$

Megoldása: $-3 < b < 5$.

*b)* A kifejezés minden valós számra pozitív, ha $b > 0$ és a $bx^2 + bx - 4x + 4 - b = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív:

$$(b-4)^2 - 4b\cdot(4-b) < 0,$$
$$(b-4)\cdot(b-4+4b) < 0,$$
$$(b-4)\cdot(5b-4) < 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{4}{5} < b < 4$, és ez mindkét kezdeti feltételnek megfelel.

**2198** *a)* A kifejezés minden valós számra negatív, ha $b < 0$ és a $bx^2 + bx + 3x + b + 3 = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív:

$$(b+3)^2 - 4b\cdot(b+3) < 0,$$
$$(b+3)\cdot(3-3b) < 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldásai: $b < -3$ vagy $1 < b$.

Mindkét feltétel teljesül, ha $b < -3$.

*b)* A kifejezés minden valós számra negatív, ha $b < 0$ és a $bx^2 - 12x + 15 - b = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív:

$$144 - 4b\cdot(15-b) < 0,$$
$$b^2 - 15b + 36 < 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $3 < b < 12$.

Mivel a két kezdeti feltétel metszete az üres halmaz, nincs olyan $b$ paraméterérték, amelyre a kifejezés minden valós helyen negatív értéket venne fel.

**2199** Vizsgáljuk meg először az egyenlet diszkriminánsát: $D = (b+1)^2 + 8 \cdot (b^2+1) > 0$, ezért minden valós $b$ esetén két megoldása van az egyenletnek.

Nézzük a gyökök szorzatát: $x_1 \cdot x_2 = \frac{-2}{b^2+1}$, negatív, mert $b^2 + 1 > 0$.

A szorzat negatív előjele azt jelenti, hogy megoldásaink ellentétes előjelűek, tehát a $]0; 1[$ intervallumba legfeljebb az egyik gyök kerülhet, a pozitív előjelű.

Gondoljunk most az $f(x) = (b^2+1) \cdot x^2 + (b+1) \cdot x - 2$ másodfokú függvényre, melynek $b^2 + 1 > 0$ miatt minimuma van, és két zérushellyel rendelkezik.

A pozitív zérushely akkor kerül a $]0; 1[$ intervallumba, ha a függvény a 0 és az 1 helyeken ellentétes előjelű értéket vesz fel.

Mivel $f(0) = -2$, ezért $f(1) = b^2 + 1 + b + 1 - 2 > 0$ kell teljesüljön.

Ebből $b^2 + b > 0$, ha $b < -1$ vagy $0 < b$.

Tehát $b < -1$ vagy $0 < b$ esetén teljesül, hogy az egyenletnek pontosan az egyik gyöke esik a $]0; 1[$ intervallumba.

## Négyzetgyökös egyenletek és egyenlőtlenségek – megoldások

**2200** *a)* Értelmezési tartomány: $x \geq -4$, megoldás: $x = 5$.

*b)* Értelmezési tartomány: $x \geq 5$, megoldás: $x = 86$.

*c)* Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{3}{2}$, megoldás: $x = 2$.

*d)* Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{3}{4}$, nincs megoldás.

*e)* Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{11}{4}$, megoldás: $x = 9{,}5$.

*f)* Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{13}{8}$, megoldás: $x = \frac{77}{8}$.

*g)* Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{5}{4}$, megoldás: $x = 2$.

*h)* Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{1}{7}$, megoldás: $x = 0$.

*i)* Értelmezési tartomány: $x \geq 2$, azt kapjuk, hogy $x = 1$, de ez nem megoldás.

*j)* Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{7}{6}$, megoldás: $x = -1$.

*k)* Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{1}{8}$, megoldás: $x = \frac{8}{11}$.

*l)* Az értelmezési tartomány az üres halmaz, nincs megoldás.

**2201** *a)* Értelmezési tartomány: $x \geq 0$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.
Csak $x = 3$ megoldás.

*b)* Értelmezési tartomány: $x \geq 4$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 7$, $x_2 = 2$.
Csak $x = 7$ megoldás.

*c)* Értelmezési tartomány: $x \geq 1$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$. Csak $x = 5$ megoldás.

*d)* Értelmezési tartomány: $x \geq -4$. Megoldások: $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, mindkettő megoldás.

*e)* Értelmezési tartomány: $x \leq 1$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Csak $x = -3$ megoldás.

*f)* Értelmezési tartomány: $x \geq 2$. Megoldások: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{3}{4}$, de csak az $x = 4$ megoldás.

*g)* Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{4}{5}$. Megoldások: $x_1 = 0$, $x = -\frac{3}{4}$, mindkettő megoldás.

*h)* Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{5}{3}$. Megoldások: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, mindkettő megoldás.

*i)* Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{3}{2}$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{4}$. Csak $x = 4$ megoldás.

*j)* Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{3}{2}$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{10}{3}$. Csak $x = 0$ megoldás.

*k)* Értelmezési tartomány: $x \leq \frac{1}{2}$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = -2$. Csak $x = -2$ megoldás.

*l)* Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{8}{3}$. Megoldások: $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{11}{8}$, de csak az $x = 5$ megoldás.

**2202** *a)* Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{1}{3}$. négyzetre emelés után: $x \geq 1$. A megoldás: $x \geq 1$.

*b)* Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{3}{2}$. Négyzetre emelés után: $x < \frac{19}{2}$. A megoldás: $\frac{3}{2} \leq x < \frac{19}{2}$.

*c)* Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{3}{4}$. Mivel az egyenlőtlenség bal oldala nemnegatív, a jobb oldala pedig negatív, ezért a megoldás: $x \geq \frac{3}{4}$.

*d)* Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{2}{5}$. Négyzetre emelés után: $x > \frac{3}{5}$. A megoldás: $x > \frac{3}{5}$.

*e)* Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{4}{3}$. A bal oldala nemnegatív, a jobb oldala negatív szám, ezért nincs megoldás.

*f)* Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{1}{7}$. Négyzetre emelés után: $x \leq \frac{8}{7}$. A megoldás: $-\frac{1}{7} \leq x \leq \frac{8}{7}$.

*g)* Értelmezési tartomány: $x \leq 4$. Négyzetre emelés után: $x \leq -\frac{1}{2}$. A megoldás: $x \leq -\frac{1}{2}$.

*h)* Értelmezési tartomány: $x \leq 3$. Négyzetre emelés után: $x > -22$. A megoldás: $-22 < x \leq 3$.

**2203** *a)* Értelmezési tartomány: $x \geq 3$. Két négyzetre emelés után a megoldás: $x = 7$.

*b)* Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{6}{5}$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{5}{4}$. Csak az első megoldás.

*c)* Értelmezési tartomány: $x \geq -1$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = 47$, $x_2 = -1$. Az ellenőrzésből kiderül, hogy csak a második megoldás.

*d)* Értelmezési tartomány: $x \geq 0$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = 112{,}5$, $x_2 = 0{,}5$. Az ellenőrzésből kiderül, hogy csak a második megoldás.

*e)* Értelmezési tartomány: $x \geq -2$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = -2$, $x_2 = -6$. Csak az első megoldás.

*f)* Értelmezési tartomány: $-\frac{4}{5} \leq x \leq \frac{1}{2}$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{11}$, mindkettő megoldás.

*g)* Értelmezési tartomány: $x \geq 6$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = 7$, $x_2 = -3$. Csak az első megoldás.

*h)* Értelmezési tartomány: $-4 \leq x \leq \frac{1}{5}$. Két négyzetre emelés után a megoldások: $x_1 = \frac{5}{29}$, $x_2 = -3$. Csak a második megoldás.

**2204** *a)* Vegyük észre, hogy a négyzetgyök alatt teljes négyzet alak áll, így az egyenlet: $2x^2 - |x-1| = 0$.

Az abszolút érték definíciója miatt: $|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{ha} \quad x \geq 1, \\ -x+1, & \text{ha} \quad x < 1. \end{cases}$

Így $x \geq 1$ esetén az egyenlet: $2x^2 - x + 1 = 0$, amelynek a diszkriminánsa negatív, ekkor nincs megoldás.

Az $x < 1$ esetén az egyenletünk: $2x^2 + x - 1 = 0$, melynek az $x_1 = \frac{1}{2}$ és $x_2 = -1$ gyökei, az adott egyenlet megoldásai.

*b)* Az *a)* feladathoz hasonlóan az egyenlet felírható $|x+1| = 2 \cdot |x| - 2$ alakban. Az abszolút érték definíciója miatt:

Ha $x < -1$, akkor az egyenlet: $-x - 1 = 2 \cdot (-x) - 2$, amiből $x = -1$. Ez nem megoldás az értelmezési tartományon.

Ha $-1 \leq x < 0$, akkor az egyenlet: $x + 1 = -2x - 2$, amiből $x = -1$. Ez megoldása az adott eredeti egyenletnek.

Ha $x \geq 0$, akkor az egyenlet: $x + 1 = -2x - 2$, amiből $x = 3$. Ez megoldása az adott egyenletnek.

Összefoglalva: az egyenlet megoldásai: $x_1 = -1$ és $x_2 = 3$.

*c)* Az egyenlet felírható $|3 - x| = 10 - |2 - x|$ alakban. Az abszolút érték definíciója miatt:

Ha $x < 2$, akkor az egyenlet: $3 - x = 10 - (2 - x)$, amiből $x = -\frac{5}{2}$.

Ha $2 \leq x < 3$, akkor az egyenlet: $3 - x = 10 - (-2 + x)$, amiből $3 \neq 12$.

Ha $x \geq 3$, akkor az egyenlet: $-3 + x = 10 - (-2 + x)$, amiből $x = \frac{15}{2}$.

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = -\frac{5}{2}$ és $x_2 = \frac{15}{2}$.

**2205** *a)* Értelmezési tartomány: $x^2 - 9 \geq 0$, ha $x \geq 3$ vagy $x \leq -3$. Vegyük észre, hogy a $\sqrt{x^2 - 9} = p$ helyettesítéssel a $p^2 - p - 6 = 0$ egyenlethez jutunk, amelyből $p_1 = 3$ és $p_2 = -2$.

Ha $p = 3$, akkor $\sqrt{x^2 - 9} = 3$, ekkor $x^2 = 18$, amiből $x = \pm 3 \cdot \sqrt{2}$.

Ha $p = -2$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, hiszen az $\sqrt{x^2 - 9} = -2$ egyenletben a bal oldal nemnegatív, a jobb oldal negatív.

Ellenőrzés – bal oldalon:

$$\sqrt{18 - 9} - (18 - 9) = \sqrt{9} - 9 = 3 - 9 = -6,$$

mellyel a jobb oldal eredményéhez jutottunk.

*b)* Értelmezési tartomány: $x \geq 0$. Vegyük észre, hogy mindkét oldal négyzetre emelése után a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{16}{x+2} - 8 + (x+2) = x, \quad \text{amiből} \quad x = \frac{2}{3}.$$

Ez megoldása az eredeti egyenletnek.

Ellenőrzés – bal oldalon:

$$\frac{4}{\sqrt{\frac{8}{3}}} - \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - \sqrt{\frac{8}{3}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \frac{3}{8} - \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Ezután az $\frac{1}{2}$-et vigyük be a gyökjel alá: $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. A jobb oldalon álló kifejezéshez jutottunk.

2206 *a)* Értelmezési tartomány: $x \geq -\frac{1}{3}$, ekkor a jobb oldal is pozitív. Négyzetre emelés és rendezés után: $0 > x^2 - x$, amiből a megoldás: $0 < x < 1$.

*b)* Értelmezési tartomány: $x \leq 5$, mindkét oldal nemnegatív, ha $3 \leq x \leq 5$. Négyzetre emelve és rendezve $0 \leq x^2 - 5x + 4$, ennek megoldása $x \leq 1$ vagy $x \leq 4$. A végeredmény: $4 \leq x \leq 5$.

*c)* Értelmezési tartomány: $x \leq \frac{13}{2}$.

Ha $x + 1 < 0$, azaz $x < -1$, a jobb oldal negatív, nincs megoldás.

Ha $x \geq -1$, négyzetre emelés után rendezve $0 \leq x^2 + 4x - 12$, amiből $x \leq -6$ vagy $2 \leq x$.

A végeredmény: $2 \leq x \leq \frac{13}{2}$.

*d)* Értelmezési tartomány: $x \geq -7{,}5$.

Ha $x > 0$, a jobb oldal negatív, teljesül az egyenlőtlenség.

Ha $x \leq 0$, négyzetre emelés és rendezés után: $0 > x^2 - 2x - 15$, amiből $-3 < x < 5$. Ebben az esetben a megoldás: $-3 < x \leq 0$.

A végeredmény: $-3 < x$.

*e)* A négyzetgyök alatti kifejezésnek nincs zérushelye, tehát minden valós számra értelmezhető.

Ha $2x - 1 < 0$, vagyis $x < \frac{1}{2}$, a jobb oldal negatív, az egyenlőtlenség teljesül.

Ha $x \geq \frac{1}{2}$, négyzetre emelés és rendezés után: $0 \geq x^2 - 2x - 3$, amiből $-1 \leq x \leq 3$, ebben az esetben a megoldás: $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$.

A végeredmény: $x \leq 3$.

*f)* Értelmezési tartomány: $x \leq -4$ vagy $2 \leq x$.

Ha $16 + 2x < 0$, azaz $x < -8$, a jobb oldal negatív, nincs megoldás.

Ha $x \geq -8$, négyzetre emelés és rendezés után: $0 \leq 3x^2 + 62x + 264$, amiből $x \leq -\frac{44}{3}$ vagy $-6 \leq x$. Csak a második ad megoldást.

A végeredmény: $-6 \leq x \leq -4$ vagy $2 \leq x$.

**2207** *a)* Értelmezési tartomány: $x \geq \frac{3}{2}$. Négyzetre emelés után:

$$x - \sqrt{6x-9} + 2 \cdot \sqrt{x^2 - (6x-9)} + x + \sqrt{6x-9} = 36,$$

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 18 - x.$$

Mivel a gyök alatt teljes négyzet áll:

$$|x-3| = 18 - x.$$

Ha $x \geq 3$, az egyenlet: $x - 3 = 18 - x$, megoldása: $x = 10{,}5$.

Ha $x < 3$, az egyenlet: $-x + 3 = 18 - x$, nincs megoldás.

*b)* Értelmezési tartomány a valós számok halmaza.

Vezessünk be új változót: $y = \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$, ahol $y \geq 0$.

Az egyenlet: $y^2 - 6 + y = 0$, ennek megoldásai: $y_1 = 2$, $y_2 = -3$, a második nem megoldás.

Az elsőt visszahelyettesítve:

$$2x^2 - 3x + 5 = 4,$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Megoldások: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

*c)* Értelmezési tartomány: $x \geq 9$.

Alakítsuk át a gyök alatti kifejezéseket (érdemes a másodikkal kezdeni):

$$\sqrt{x - 8 - 2 \cdot \sqrt{x-9}} = \sqrt{x - 9 - 2 \cdot \sqrt{x-9} + 1} = \sqrt{\left(1 - \sqrt{x-9}\right)^2} = |1 - \sqrt{x-9}|,$$

$$\sqrt{x - 6 \cdot \sqrt{x-9}} = \sqrt{x - 9 - 6 \cdot \sqrt{x-9} + 9} = \sqrt{\left(3 - \sqrt{x-9}\right)^2} = |3 - \sqrt{x-9}|.$$

Az egyenlet:

$$|3 - \sqrt{x-9}| + |1 - \sqrt{x-9}| = 2.$$

Három esetre bontva:

I. Ha $\sqrt{x-9} < 1$, akkor $3 - \sqrt{x-9} + 1 - \sqrt{x-9} = 2$, amiből $\sqrt{x-9} = 1$, nincs benne a kiindulási halmazban.

II. Ha $1 \leq \sqrt{x-9} < 3$, akkor $3 - \sqrt{x-9} - 1 + \sqrt{x-9} = 2$, minden számra igaz, ami benne van a kiindulási halmazban.

III. Ha $3 \leq \sqrt{x-9}$, akkor $-3 + \sqrt{x-9} - 1 + \sqrt{x-9} = 2$, amiből $\sqrt{x-9} = 3$.

Tehát a megoldás: $1 \leq \sqrt{x-9} \leq 3$, amiből négyzetre emelés után $10 \leq x \leq 18$.

*d)* Értelmezési tartomány: $x \geq 3$, és láthatóan az $x = 3$ nem megoldás.

Alakítsuk a hatodik gyök alatti kifejezést:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = x^2 \cdot (x-3) - 9 \cdot (x-3) =$$

$$= (x-3) \cdot (x^2 - 9) = (x-3)^2 \cdot (x+3).$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát a nem nulla, $\sqrt[6]{(x-3)^2 \cdot (x+3)}$ kifejezéssel.

Az egyenlet az osztás után:

$$\sqrt[6]{\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2} + 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{x-3}{x+3}} = 7.$$

Vezessünk be új változót: $y = \sqrt[6]{\frac{x-3}{x+3}}$.

Az új egyenlet: $\frac{1}{y^2} + 6y = 7$, beszorzás után: $6y^3 - 7y^2 + 1 = 0$.

Alakítsuk a bal oldalt:

$$6y^3 - 6y^2 - y^2 + 1 = 0,$$
$$6y^2 \cdot (y-1) - (y^2 - 1) = 0,$$
$$6y^2 \cdot (y-1) - (y-1) \cdot (y+1) = 0,$$
$$(y-1) \cdot (6y^2 - y - 1) = 0.$$

Ha $y = 1$, akkor nincs megoldás.

Ha $6y^2 - y - 1 = 0$, akkor $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{1}{3}$, csak az első megoldás.

Visszahelyettesítve: $\sqrt[6]{\frac{x-3}{x+3}} = \frac{1}{2}$, amiből $x = \frac{65}{21}$, ami eleme az értelmezési tartománynak.

**2208** Értelmezési tartomány: $x \geq 2$.

Az abszolút érték miatt az első tényező nemnegatív, csak akkor van megoldás, ha a második tényező pozitív: $-x^2 + 4x - 3 > 0$, aminek a megoldása: $1 < x < 3$.

Összevetve az értelmezéssel: $2 \leq x < 3$.

Ilyen $x$-ek esetén az első tényező: $0 < 1 - \sqrt{x-2} \leq 1$.

A második tényező: $0 < -x^2 + 4x - 3 = 1 - (x-2)^2 \leq 1$.

Mivel mindkét tényező legfeljebb 1, a szorzatuk csak úgy lehet 1, ha mindkét tényező 1-gyel egyenlő. Ez pedig csak akkor igaz, ha $x = 2$.

**2209** Értelmezési tartomány: $x \geq -2$.

Mivel az egyenlet bal oldala nemnegatív, ezért $p \geq 2x$, ami azt jelenti, hogy $-2 \leq x \leq \frac{p}{2}$, ami csak akkor ad megoldásokat, ha $p \geq -4$.

Négyzetre emelés után rendezzük az egyenletet:

$$0 = 4x^2 - (4p+1) \cdot x + p^2 - 2.$$

Akkor van megoldás, ha a diszkrimináns nemnegatív:

$$D = (4p+1)^2 - 16 \cdot (p^2 - 2) = 8p + 33 \geq 0,$$

aminek a megoldása:

$$p \geq -\frac{33}{8}.$$

Összevetve a kezdeti feltétellel azt kapjuk, hogy $p \geq -4$ esetén lesz az egyenletnek megoldása.

Meg kell vizsgálnunk, hogy teljesül-e ilyen esetekben a megoldásokra az értelmezés $x \geq -2$ feltétele.

Ha $p \geq -4$, akkor $D \geq 1$, mivel a megoldások:

$$x_{1,2} = \frac{4p + 1 \pm \sqrt{D}}{8},$$

az egyik gyök:

$$x_1 = \frac{4p + 1 + \sqrt{D}}{8} \geq \frac{4p + 1 + 1}{8} = \frac{4p + 2}{8} \geq \frac{-14}{8} > -2.$$

Tehát ha $p \geq -4$, akkor az egyenletnek biztosan van megoldása.

# A számtani és mértani közép, szélsőérték feladatok – megoldások

**2210** *a)* A számtani közép: 15, a mértani közép 9, különbségük 6.

*b)* A számtani közép: 19,5, a mértani közép 18, különbségük 1,5.

*c)* A számtani közép: 32,5, a mértani közép 30, különbségük 2,5.

*d)* A számtani közép: 65, a mértani közép 60, különbségük 5.

*e)* A számtani közép:12,5, a mértani közép $\approx 12{,}25$, különbségük $\approx 0{,}25$ .

*f)* A számtani közép: 21, a mértani közép $\approx 20{,}98$ , különbségük $\approx 0{,}02$.

*g)* A számtani közép: 179, a mértani közép $\approx 66{,}97$ , különbségük $\approx 112{,}03$.

*h)* A számtani közép: 1033, a mértani közép $\approx 335{,}5$, különbségük $\approx 697{,}5$.

**2211** *a)* 26; *b)* 26,45; *c)* 30; *d)* 35,71.

**2212** A négyzet oldala 12 cm.

**2213** *a)* $v_{\text{átl.}} = \dfrac{150}{2{,}4} = 62{,}5\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$;

*b)* $v_{\text{átl.}} = \dfrac{60 + 2 \cdot 80}{3} = 73{,}3\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$;

*c)* $v_{\text{átl.}} = \dfrac{150}{\frac{50}{60} + \frac{50}{80} + \frac{50}{90}} = 74{,}5\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

**2214** Átlagosan 12,4%-kal csökkent az üzemanyag ára.

**2215** **I. megoldás.** Ha a négyzetek oldalának hossza $a$ és $b$, akkor a kerület: $4a + 4b = 200$, amiből $a + b = 50$.

A területek négyzetösszege:

$$a^2 + b^2 = a^2 + (50 - a)^2 = 2a^2 - 100a + 2500 = 2 \cdot (a - 25)^2 + 1250.$$

Minimális, ha $a = 25$ cm, ekkor $b = 25$ cm.

Így a területösszeg minimuma 1250 cm$^2$.

**II. megoldás.** Az $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ minimális, ha $2ab$ maximális.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$2ab \le 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 1250,$$

akkor maximális a szorzat, ha $a = b = 25$.

**2216** *a)* Ha a téglalap oldalainak hossza $a$ és $b$, akkor $2a + 2b = 100$, vagyis $a + \text{b} = 50$.

A számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján:

$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 625,$$

a szorzat maximális, ha $a = b = 25$, tehát a megoldás a négyzet.

*b)* Legyen a vízpartra merőleges oldal hossza $x$, akkor a másik oldal $100 - 2x$.

Keressük a $(100 - 2x) \cdot x$ szorzat maximumát.

A számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján:

$$(100 - 2x) \cdot x = \frac{(100 - 2x) \cdot 2x}{2} \leq \frac{\left(\frac{100 - 2x + 2x}{2}\right)^2}{2} = 1250,$$

a szorzat maximális, ha $100 - 2x = 2x$, amiből $x = 25$.

Tehát a téglalap oldalait 25 m és 50 m hosszúra kell választani.

**2217** Legyen $a$ és $b$ a téglalap két oldalán elhelyezett járólapok száma.

*a)* Ebben az esetben $a \cdot b = 100$. Keressük a $2 \cdot (20a + 20b)$ kifejezés minimumát.

A számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján:

$$\frac{20a + 20b}{2} \geq \sqrt{20a \cdot 20b} = 200,$$

az összeg akkor minimális, ha $a = b = 10$.

A minimális kerület 800 cm.

*b)* Most $a \cdot b = 200$, és újra a $2 \cdot (20a + 20b)$ kifejezés minimumát keressük.

Alkalmazzuk az előző módszert:

$$\frac{20a + 20b}{2} \geq \sqrt{20a \cdot 20b} = 200 \cdot \sqrt{2},$$

az összeg minimális, ha $a = b = \sqrt{200} \approx 14{,}14$.

Mivel a járólapokat nem vághatjuk el, ez nem valósítható meg.

Keressük az $a \cdot b = 200$ egyenlet egész megoldásait, és vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz minimális a $2 \cdot (20a + 20b)$ kifejezés.

A lehetséges szorzatok:

$$200 = 1 \cdot 200 = 2 \cdot 100 = 4 \cdot 50 = 5 \cdot 40 = 8 \cdot 25 = 10 \cdot 20.$$

Rendre kiszámítva a kerületeket:

$$8040;\ \ 4080;\ \ 2160;\ \ 1800;\ \ 1320;\ \ 1200.$$

Tehát akkor lesz a legkisebb a kirakott téglalap kerülete, ha a két különböző oldal mentén 10, illetve 20 darab járólapot helyezünk el.

**2218** *a)* A hajók távolságát Pitagorasz-tétellel számolva:

$$d(12) = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500 \text{ km},$$

$$d(13) = \sqrt{320^2 + 260^2} = 412{,}3 \text{ km}.$$

*b)* A távolság négyzete $t$ idő múlva:

$$d(t)^2 = (400 - 80t)^2 + (300 - 40t)^2 =$$

$$= 8000t^2 - 88\,000t + 250\,000 = 8000 \cdot (t - 5{,}5)^2 + 8000.$$

A hajók közötti távolság 5,5 óra múlva lesz a legkisebb.

*c)* A minimális távolság:

$$d_{\text{min.}} = \sqrt{8000} = 89{,}44 \text{ km}.$$

**2219** Alakítsuk át a bizonyítandó állítás bal oldalát, ha $ab = 1$:

$$\frac{a^2+b^2}{a-b} = \frac{(a-b)^2+2a\cdot b}{a-b} = \frac{(a-b)^2+2}{a-b} = (a-b)+\frac{2}{a-b}.$$

Mivel $a-b>0$, alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$(a-b)+\frac{2}{a-b} \geq 2\cdot\sqrt{(a-b)\cdot\frac{2}{a-b}} = 2\cdot\sqrt{2}.$$

Akkor van egyenlőség, ha $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ és $b=\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
Ezzel az állítást beláttuk.

## Másodfokú egyenletre vezető problémák – megoldások

**2220** *a)* Az $x\cdot(x+12)=45$ egyenletből a két szám a 3 és 15 vagy a $-15$ és a $-3$.

*b)* Az $x^2+(x+12)^2=314$ egyenletből a két szám az 5 és 17 vagy a $-17$ és $-5$.

*c)* Az $\frac{x+12}{x}=x-10$ egyenletből a két szám a 12 és 24 vagy a $-1$ és 11.

**2221** *a)* Az $x\cdot(20-x)=36$ egyenletből a két szám a 2 és 18.

*b)* Az $x^2+(20-x)^2=208$ egyenletből a két szám a 8 és 12.

*c)* Az $x^2-(20-x)^2=200$ egyenletből a két szám a 15 és 5.

**2222** Az $x^2=3\cdot(x+3)+1$ egyenlet alapján a vásárolt sapkák száma 5.

**2223** Az $(x+5)^2+x^2=493$ egyenletből a négyzetek oldala 13 cm és 18 cm.

**2224** Az $\frac{x\cdot(x-1)}{2}=190$ egyenletből a bajnokságban résztvevő csapatok száma 20.

**2225** Az $x^2+(3x+3)^2=(3x+4)^2$ egyenlet megoldásából a téglalap oldalai 7 cm és 24 cm.

**2226** Az $x\cdot(x+1)=10\cdot(2x+1)+56$ egyenlet megoldása alapján a két szám a 22 és 23 vagy a $-3$ és $-2$.

**2227** Az egyenlet: $\frac{80}{x}=\frac{80}{x+4}+1$. Megoldása alapján 16 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladtak, és 5 óra alatt értek célhoz.

**2228** Az egyenlet: $\frac{2}{x}+\frac{2}{x+3}=1$. Megoldás: az anya 3 óra, a lánya 6 óra alatt takarítana ki egyedül.

**2229** Az egyenlet: $\frac{4000}{x}+9=\frac{4000}{x-90}$. Beszorzás és összevonás után: $x^2-90x-40\,000=0$. A muskátli palánta 250 Ft-ba kerül, 16 darabot lehet megvenni 4000 Ft-ból.

**2230** *a)* Az $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=50n$ egyenletből $n=103$.

*b)* Az $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=50+n$ egyenlet pozitív megoldása $x\approx 12{,}8$. Tehát nincs ilyen sokszög.

*c)* Az $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=119$ egyenletből a sokszög 17 oldalú.

**2231** A képernyő 28,5%-a: 261,63 $cm^2$.

A keret területéből felírható egyenlet:

$$4x^2 + 2 \cdot 34x + 2 \cdot 27x = 261{,}63.$$

A keret körülbelül 2 cm széles.




**2232** Jelöljük $x$-szel azt, amennyi autót gyárt naponta a hagyományos részleg. Az egyenlet:

$$\frac{400}{x} + \frac{400}{x+5} = 36.$$

Beszorzás után:

$$9x^2 - 155x - 500 = 0.$$

A pozitív megoldása:

$$x = 20.$$

A két üzem, naponta 20, illetve 25 autót gyárt, az első 20 nap, a második 16 nap alatt.

**2233** Tudjuk, hogy $n$ különböző dologból 2-t $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$-féleképpen választhatunk ki.

Az egyenlet:

$$\frac{2x \cdot (2x-1)}{2} = \frac{x \cdot (x-1)}{2} + 852.$$

Beszorzás után:

$$3x^2 - x - 1704 = 0.$$

A pozitív megoldás:

$$x = 24.$$

Tehát az osztályban 24-en vannak.

**2234** Legyen a háromjegyű szám: $\overline{1xy}$. A következő egyenletrendszer írható fel:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{100 + 10x + y}{x \cdot y} = 6 + \dfrac{6}{x \cdot y} \\ 1 + x + y = 12 \end{array}\right\}.$$

A másodikból $y$-t helyettesítve az első egyenlet:

$$2x^2 - 19x + 35 = 0.$$

Aminek megoldásai:

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 2{,}5.$$

Csak az első lehet számjegy, ebből $y = 4$.

A keresett szám a 174, ellenőrzéssel látható, hogy valóban megfelel.

**2235** *a)* Legyen $x$ a nők száma, $y$ a férfiaké.

A puszik száma: $\frac{x \cdot (x-1)}{2}$, a kézfogások száma: $\frac{y \cdot (y-1)}{2}$.

Mivel $x > y$, ezért az első tört nagyobb, tehát több puszi van, mint kézfogás.

*b)* A kézcsókok száma: $x \cdot y = 182$, és tudjuk, hogy $x + y = 27$.
A második egyenletből $y$-t kifejezve és beírva az elsőbe:

$$x^2 - 27x + 182 = 0.$$

A megoldások:

$$x_1 = 14, \quad x_2 = 13.$$

A férfiak számára $y_1 = 13$, $y_2 = 14$ adódik, a feladat feltételeinek az első számpár felel meg.
Tehát a társaságban 14 nő és 13 férfi van.
A kézfogások száma:

$$\frac{13 \cdot 12}{2} = 78.$$

**2236** *a)* Ha az ezüst fakanál árát első alkalommal $x$%-kal emelték, akkor a következő egyenlet írható fel:

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{2x}{100}\right) = 1{,}32.$$

Beszorzás és egyszerűsítés után:

$$x^2 + 150x - 1600 = 0.$$

Az egyenletnek csak a pozitív megoldása felel meg:

$$x = 10.$$

Tehát az ezüst fakanál árát először 10%-kal, másodszor 20%-kal emelték.

*b)* Ha $x$%-os volt a karácsony előtti emelés, akkor a következő egyenlet írható fel:

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{\frac{x}{2}}{100}\right) = 1{,}08.$$

A beszorzás és egyszerűsítés után:

$$x^2 - 100x + 1600 = 0.$$

Aminek megoldásai:

$$x_1 = 80, \quad x_2 = 20.$$

Mindkét megoldás megfelel.
Tehát az arany fakanál árát decemberben vagy 80%-kal vagy 20%-kal emelték.

**2237** *a)* Ki kell számítanunk $h(2)$ értékét:

$$h(2) = -5 \cdot 2^2 + 40 \cdot 2 + 45 = 105.$$

Tehát a kilövés után 2 másodperccel 105 méter magasan lesz a rakéta.

*b)* Alakítsuk teljes négyzetté a függvény hozzárendelési szabályát:

$$h(t) = -5t^2 + 40t + 45 = -5 \cdot (t - 4)^2 + 125.$$

Amiből kiderül, hogy 4 másodperc múlva lesz a legmagasabban, a földtől 125 méterre.

*c)* Amikor földet ér, $h = 0$ lesz.
Meg kell oldani a következő egyenletet:

$$-5t^2 + 40t + 45 = 0.$$

A megoldások:

$$t_1 = 9, \quad t_2 = -1.$$

Csak a pozitív megoldás felel meg.
Tehát a rakéta 9 másodperccel a kilövés után ér földet.

# Vegyes feladatok – megoldások

**2238** *a)* $x = 7 \in \mathbb{Z}$; *b)* $x = \frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$; *c)* $x = 3 \in \mathbb{N}$; *d)* $y = 5 \in \mathbb{Z}$.

**2239** *a)* $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$;

*b)* $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -3$;

*c)* $x_1 = 7$, $x_2 = -\frac{1}{3}$;

*d)* $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -\frac{1}{2}$;

*e)* $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$;

*f)* $x = -3$;

*g)* $x = 1$;

*h)* $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$;

*i)* $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

**2240** *a)* $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{5}$;

*b)* $x < -\frac{3}{8}$ vagy $\frac{1}{2} < x$;

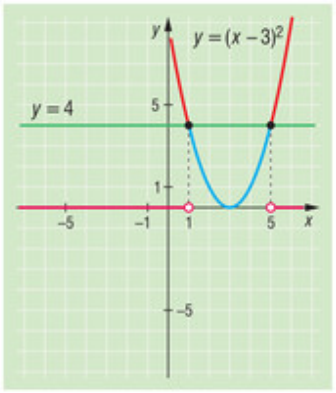
*c)* $-\frac{1}{4} \le x \le \frac{5}{3}$;

*d)* $-4 \le x < -2$ vagy $-\frac{3}{2} < x \le -1$;

*e)* $-\frac{3}{4} \le x < \frac{1}{4}$;

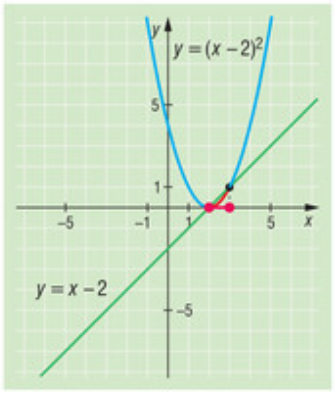
*f)* $-\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{2}$.

**2241** *a)*



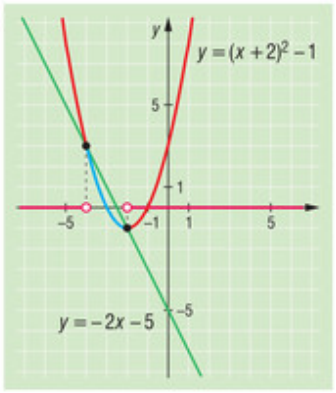

$x < 1$ vagy $x > 5$.

*b)*




$2 \le x \le 3$.

*c)*




$x < -4$ vagy $x > -2$.

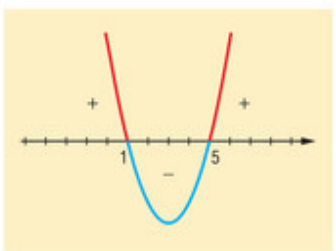
*Megjegyzés:* A feladat nem kéri a megoldás típusát, így megoldható függvények felhasználásával vagy algebrai úton is. Ezért adtunk először mindhárom feladatra függvények felhasználásával kapott eredményt, majd csak az *a)* feladatra következzenek más megoldási lehetőségek is:

**I. megoldás**

Az $(x - 3)^2 > 4$ rendezése után kapjuk, hogy:

$$x^2 - 6x + 5 > 0.$$

Határozzuk meg a bal oldalon álló kifejezés zérushelyeit ($x_1 = 5$, $x_2 = 1$). Mivel az $x^2$ együtthatója pozitív, a parabola felfelé nyíló, így egyszerű ábrát készítve kapjuk, hogy:




$$x < 1 \text{ vagy } x > 5.$$

**II. megoldás**

Rendezés után kapjuk, hogy:

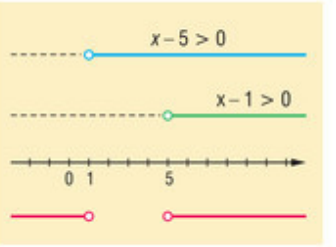
$$x^2 - 6x + 5 > 0.$$

Megoldás lehet a bal oldali kifejezés szorzattá alakítása:

$$(x - 1) \cdot (x - 5) > 0.$$

Ábrát készítünk és megkapjuk, hogy a bal oldal akkor pozitív, ha:

$$x < 1 \text{ vagy } x > 5.$$




**2242** Ha a befogók $x$ és $y$, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x \cdot y}{2} &= 30 \\ x^2 + y^2 &= 13^2 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszerből a befogók hossza: 5 cm és 12 cm.

**2243** Ha a sokszögek oldalszáma $x$ és $y$, az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

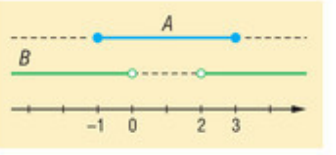
$$\left.\begin{aligned} \frac{x \cdot (x-3)}{2} + \frac{y \cdot (y-3)}{2} &= 68 \\ (x-2) \cdot 180^\circ + (y-2) \cdot 180^\circ &= 2700^\circ \end{aligned}\right\}.$$

A második egyenletből érdemes helyettesíteni. A sokszögek 7, illetve 12 oldalúak.

**2244** *a)* $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 3\}$;
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ vagy } 2 < x\}$.

*b)* $A \cup B = \mathbb{R}$.

*c)* $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x < 0 \text{ vagy } 2 < x \le 3\}$.




**2245** *a)* Teljes négyzetté alakítás után kapjuk:

$$f(x) = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{4},$$

amelyből leolvasható, hogy az $f$ függvénynek maximuma van az $x = \frac{5}{2}$ helyen, értéke $y = \frac{49}{4}$.

A zérushelyek megállapíthatóak a másodfokú egyenlet megoldóképletével. E szerint $x_1 = -6$ és $x_2 = 1$ az egyenlet két zérushelye.

*b)* Teljes négyzetté alakítás után kapjuk:

$$g(x) = 10 \cdot (x - 1) + 10,$$

amiből leolvasható, hogy a függvénynek minimuma van az $x = 1$ helyen, értéke $y = 10$.

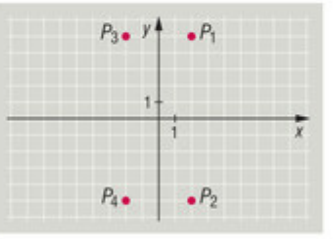
A zérushelyek meghatározásánál vegyük észre, hogy a diszkrimináns negatív, mert:

$$b^2 - 4ac = 400 - 4 \cdot 10 \cdot 20 = -400,$$

ezért a $g$ függvénynek nincs zérushelye, nem érinti és nem metszi az $x$ tengelyt.

**2246** Az egyenletrendszer megoldásaiból a következő négy pont adódik:

$P_1(2; 5)$, $P_2(2; -5)$, $P_3(-2; 5)$, $P_4(-2; -5)$.





**2247** *a)* A gyökök négyzetösszege: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = \frac{43}{9}$.

*b)* Az $5x^2 + 6x + 3 = 371$ egyenletből $x = 8$.

*c)* A hiányzó számjegy: $x = 5$.

**2248** Ha $b = 2$, az egyenlet elsőfokú, megoldása: $x = -1$.

Ha $b \neq 2$, a másodfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$D = (b+1)^2 - 4 \cdot (b-2) \cdot 3 = b^2 - 10b + 25 = (b-5)^2.$$

Ha $b = 5$, egy valós megoldás van: $x = -1$.

Ha $b \neq 5$, a diszkrimináns pozitív, tehát két valós megoldás van.





# 10.4. GEOMETRIA

## Körrel kapcsolatos ismeretek – megoldások

**2249** A körcikk területét $T$-vel, a határoló körív hosszát $i$-vel jelöltük.

*a)* $T = 8{,}38\ \text{cm}^2$, $i = 2{,}09\ \text{cm}$; *b)* $T = 33{,}51\ \text{cm}^2$, $i = 8{,}38\ \text{cm}$;

*c)* $T = 64{,}23\ \text{cm}^2$, $i = 16{,}06\ \text{cm}$; *d)* $T = 83{,}78\ \text{cm}^2$, $i = 20{,}94\ \text{cm}$;

*e)* $T = 150{,}80\ \text{cm}^2$, $i = 37{,}70\ \text{cm}$; *f)* $T = 167{,}55\ \text{cm}^2$, $i = 41{,}89\ \text{cm}$.

**2250** A körcikk középponti szögét $\alpha$-val jelölve:

*a)* $\alpha = 57{,}30° = 1$ radián; *b)* $\alpha = 91{,}67° = 1{,}6$ radián;

*c)* $\alpha = 137{,}51° = 2{,}4$ radián; *d)* $\alpha = 286{,}48° = 5$ radián.

**2251** A körcikk sugarát $r$-rel, a középponti szögét $\alpha$-val jelölve:

*a)* $r = 8\ \text{cm}$, $\alpha = 57{,}30° = 1$ radián; *b)* $r = 5{,}47\ \text{cm}$, $\alpha = 122{,}61° = 2{,}14$ radián;

*c)* $r = 4{,}62\ \text{cm}$, $\alpha = 171{,}89° = 3{,}00$ radián.

**2252** A körgyűrűcikk területe a nagyobb sugarú körcikk és a kisebb sugarú körcikk területének különbsége. A nagyobb körcikk területe $T = \dfrac{70^2 \cdot \pi \cdot 50°}{360°} \approx 2138{,}03\ \text{m}^2$, a kisebbé $t = \dfrac{20^2 \cdot \pi \cdot 550°}{360°} \approx$ $\approx 174{,}53\ \text{m}^2$. A nézőtér területe így $1963{,}5\ \text{m}^2$.

**2253** A köríven nyugvó kerületi szög nagysága

*a)* 8°; *b)* 15,5°; *c)* 35°; *d)* 90°; *e)* 105°; *f)* 175°.

**2254** A köríven nyugvó középponti szög nagysága

*a)* 20°; *b)* 70°; *c)* 180°; *d)* 300°; *e)* 320°; *f)* 350°.

**2255** A köríven nyugvó középponti szöget $\alpha$-val, a kerületi szöget $\beta$-val jelöltük.

*a)* $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$; *b)* $\alpha = 216°$, $\beta = 108°$; *c)* $\alpha = 330°$, $\beta = 165°$;

*d)* $\alpha = 180°$, $\beta = 90°$; *e)* $\alpha = 270°$, $\beta = 135°$.

**2256** A kerületi szög 70°-os, a középponti szög 140°-os.

**2257** Ha a középponti szöget $\alpha$, a kerületi szöget $\beta$ jelöli, akkor

*a)* $\alpha = 53{,}33°$, $\beta = 26{,}67°$; *b)* $\alpha = 160°$, $\beta = 80°$.

**2258** A keresett kerületi szög:

*a)* 172,5°; *b)* 161,5°; *c)* 155°.

**2259** *a)* A háromszög szögei: 30°, 45°, 105°. A körívek hossza rendre: 15,71 cm, 23,56 cm, 54,98 cm.

*b)* A háromszög szögei: 10°, 70°, 100°. A körívek hossza rendre: 5,24 cm, 36,65 cm, 52,36 cm.

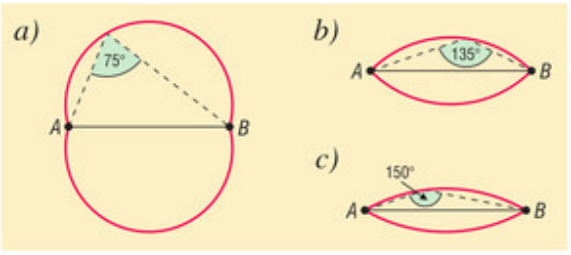
*c)* A háromszög szögei: 52,5°, 60°, 67,5°. A körívek hossza rendre: 27,49 cm, 31,42 cm, 35,34 cm.

**2260** A két érintő hajlásszöge:

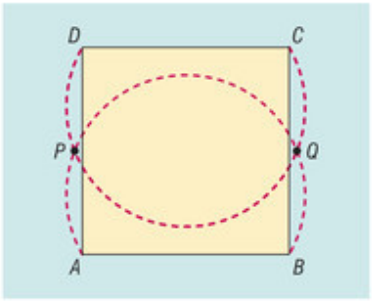
*a)* 160°; *b)* 120°; *c)* 50°.

**2261** Az $ABC$ háromszög szögei: 48°, 55°, 77°.

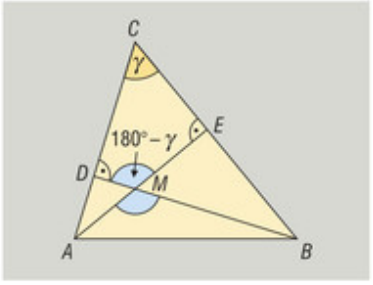
**2262** Mindhárom esetben a szakasz adott szöghöz tartozó látószögköríveit kell megszerkeszteni. A köríveken belüli pontokból a szakasz a megadott szögnél nagyobb, a köríveken kívüli pontokból pedig kisebb szögben látszik.




**2263** Szerkesszünk a négyzet $AB$, valamint $CD$ oldalaira befelé 60°-os látószögköríveket. A két körív $P$ és $Q$ metszéspontjaiból az $AB$, valamint a $CD$ oldal is 60°-os szög alatt látszik. Hasonló eljárással szerkeszthető meg az a két pont, amelyekből a négyzet $BC$ és $DA$ oldalai látszanak 60°-os szögben.




**2264** Az $A$ csúcsból induló magasság talppontja legyen $E$, a $B$ csúcsból indulóé $D$. A $CDME$ négyszög két szemközti szöge 90°-os, ezért a másik két szögének összege 180°, így $DME\sphericalangle = 180° - \gamma$. Mivel az $AMB\sphericalangle$, és a $DME\sphericalangle$ csúcsszögek, ezért megegyeznek, ami igazolja, hogy az $M$ pont illeszkedik a szóban forgó látószögkörívre. Az állítás igaz derékszögű és tompaszögű háromszögekre is.




**2265** Az $n$ oldalú szabályos sokszöget a középpontjából a csúcsokig tartó szakaszok $n$ egyenlő szárú, egybevágó háromszögre bontják. Mindegyik háromszögben a középpontnál kialakuló szög $\frac{360°}{n}$, ami bizonyítja az állítás helyességét.

**2266** *a)* A megadott arányú szögek lehetnek egy húrnégyszög szögei. Egy ilyen húrnégyszögben a szögek: 67,5°, 112,5°, 90°, 90°.

*b)* A megadott arányú szögek nem lehetnek húrnégyszög szögei, mivel nincs köztük két olyan, amelyeknek az összege megegyezne a másik kettő összegével.

**2267** A húrnégyszög szögei az egyes esetekben:

*a)* 90°, 60°, 90°, 120°; *b)* 45°, 30°, 135°, 150°; *c)* 25°, 100°, 155°, 80°.

**2268** A húrnégyszög szögei az egyes esetekben:

*a)* 145°, 60°, 35°, 120°; *b)* 110°, 115°, 70°, 65°; *c)* 95°, 25°, 85°, 155°.

**2269** Ha a húrnégyszög egy belső szöge $\alpha$, akkor szemközti szöge $180° - \alpha$, így annak külső szöge $180° - (180° - \alpha) = \alpha$.

**2270** Válasszuk ki a húrnégyszög egy oldalát! A négyszög köré írt kör középpontja az oldal két végpontjától egyenlő távolságra van; ez a távolság éppen a kör sugarával egyenlő. A két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok illeszkednek a két pont közti szakasz felezőmerőlegesére, ezért a kör középpontja rajta van a kiválasztott oldal felezőmerőlegesén. Mivel az elmondottak a négyszög bármelyik oldalára érvényesek, ezért az oldalfelező merőlegesek valóban egy pontban, épp a négyszög köré írható kör középpontjában metszik egymást.

**2271** A háromszög két csúcsa, valamint az egyik magasságvonal talppontja olyan derékszögű háromszöget határoz meg, amelynek a háromszög egyik oldala az átfogója. Ekkor Thalész tételének megfordítása alapján a magasságvonal talppontja illeszkedik a háromszög megfelelő oldala, mint átmérő fölé emelt körre.

Ugyanez természetesen érvényes a másik magasságvonal talppontjára is, így a szóban forgó négy pont valóban egy körön helyezkedik el, és ezért húrnégyszöget határoz meg. A négyszög köré írt kör középpontja a háromszög megfelelő oldalának középpontjába esik.

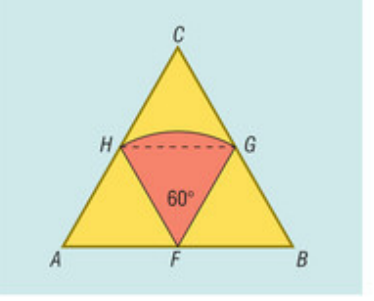
**2272** A feladat szövege alapján Budapest a Föld középpontjából 47,5°-os szög alatt látszik az Egyenlítőhöz képest. Így fővárosunk Egyenlítőtől való távolsága:

$$i = \frac{2 \cdot 6370 \cdot \pi \cdot 47{,}5^\circ}{360^\circ} \approx 5281 \text{ km}.$$

**2273** A Ráktérítő és a Baktérítő a Föld középpontjából külön-külön 23°27' = 23,45° alatt látszik az Egyenlítőhöz képest. Ebből következik, hogy távolságuk:

$$i = \frac{2 \cdot 6370 \cdot \pi \cdot 46{,}9^\circ}{360^\circ} \approx 5214 \text{ km}.$$

**2274** Az ábra jelöléseinek megfelelően a gazda az $ABC$ szabályos háromszög $AB$ oldalának $F$ felezőpontjához kötötte ki a jószágot. A kecske által lelegelhető területet két szabályos háromszögre ($AFH$, valamint $FBG$ háromszögek), valamint egy 60°-os középponti szöggel rendelkező körcikkre lehet felbontani.




A háromszög középvonalai a háromszöget négy egybevágó kis háromszögre bontják, ezért az $AFH$, valamint $FBG$ háromszögek területe megegyezik, és együtt éppen az $ABC$ háromszög területének felét adják, vagyis:

$$T_{AFH} + T_{FBG} = \frac{T_{ABC}}{2} = \frac{14 \cdot 14 \cdot \sqrt{3}}{8} \approx 42{,}44 \text{ m}^2.$$

Az $FG$ és $FH$ sugarak által határolt 60°-os középponti szöggel rendelkező körcikk területe:

$$T_{\text{körcikk}} = \frac{7^2 \cdot \pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} \approx 25{,}66 \text{ m}^2,$$

így a kecske összesen 68,10 m$^2$ területen legelhet.

**2275** Mivel bármely szabályos sokszög köré kör írható, ezért a feladat állítása egyszerű következménye a kerületi szögek tételének. A keresett szög nagysága minden esetben annak a szögnek a fele, amekkora szögben a szabályos sokszög oldala a sokszög középpontjából látszik. A megoldás az egyes esetekben:

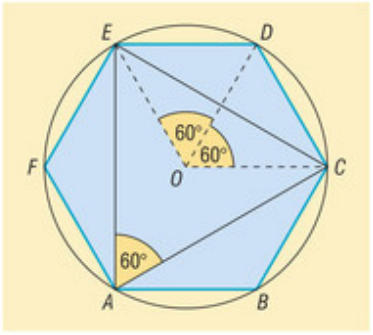
*a)* 36°; *b)* 30°; *c)* 15°; *d)* $\frac{360^\circ}{2 \cdot n}$.

**2276** A 2275. feladatban kiszámítottuk, hogy a hosszabb körív pontjaiból mekkora szög alatt látszik a szabályos sokszög egy oldala. A rövidebb körív pontjaihoz a kiszámított szögek kiegészítő szöge tartozik, ezért a megoldás az egyes esetekben:

*a)* 144°; *b)* 150°;

*c)* 165°; *d)* $180^\circ - \frac{360^\circ}{2 \cdot n} = \frac{(n-1) \cdot 180^\circ}{n}$.

**2277** Húzzuk be az $ABCDEF$ szabályos hatszög $AC$, $CE$ és $EA$ átlóit. Szimmetria okokból a kapott háromszög összes oldala ugyanakkora szögben látszik a hatszög $O$ középpontjából, és így ez a szög csak 120° lehet. Erről úgy is meggyőződhetünk, hogy meghúzzuk az $OE$, $OD$, $OC$ sugarakat, és a kialakult $OED$ és $ODC$ szabályos háromszögekre hivatkozunk.

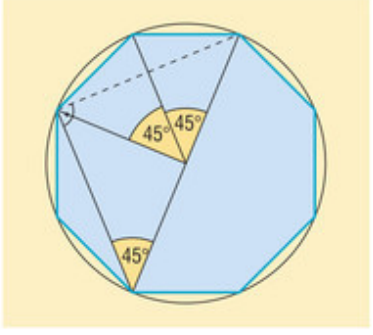



Az elmondottakból az is következik, hogy az $ACE$ háromszög szabályos. Ezt azonnal beláthatjuk a kerületi és középponti szögek tételéből, hiszen a rövidebb $EC$ köríven 120°-os középponti szög nyugszik, ezért a hozzá tartozó kerületi szögre igaz: $\sphericalangle EAC = 60°$.

Hasonlóan látható be, hogy a háromszög $C$ és $E$ csúcsánál szintén 60°-os szögek vannak.

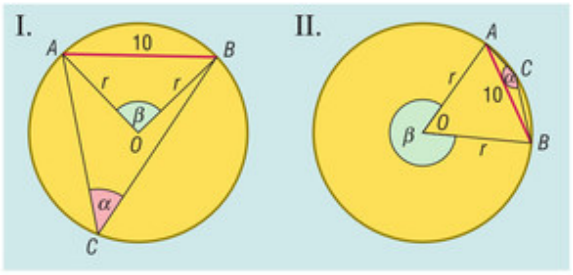
Megjegyezzük, hogy a feladat állítása a kerületi és középponti szögek tételére történő hivatkozás nélkül a következő módon is igazolható. Forgassuk el az $ECD$ háromszöget az $O$ pont körül $-120°$-kal; ekkor az $ED$ oldal képe a $CB$ szakasz, $DC$ oldal képe a $BA$ szakasz, és így természetesen az $EC$ oldal a $CA$ oldalba megy át. Mivel a forgatás a szakaszok hosszát megőrzi, ezért $EC = CA$. Hasonló módszerrel igazolható, hogy $EC = AE$ is teljesül, azaz az $ACE$ háromszög valóban szabályos.

**2278** Tekintsük a szabályos nyolcszög köré írható kört. A nyolcszög leghosszabb és legrövidebb átlója által meghatározott szög a kör egy olyan kerületi szögeként is felfogható, amelyhez tartozó körív 90°-os középponti szög nyugszik. Ekkor viszont a két átló által bezárt szög 45°.




Megjegyezzük, hogy a két átló által bezárt szög a kerületi és középponti szögek tételének alkalmazása nélkül is kiszámolható. Ha ugyanis meghúzzuk a két átló nem közös végpontjait összekötő szakaszt (az ábrán szaggatottal jelöltük), akkor a nyolcszögben szintén egy legrövidebb átlót kapunk, és ezért az a két átlóval egyenlő szárú háromszöget alkot. Mivel a leghosszabb átló átmegy a kör középpontján, azaz a kör egy átmérője is egyben, ezért Thalész tételének megfordítása szerint a két rövidebb átló merőleges egymásra. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei 45°-osak.

**2279** Az I. ábra jelöléseinek megfelelően legyen az $AB$ húr hossza 10 cm, az $AB$ köríven nyugvó kerületi szög $\alpha$, a hozzá tartozó középponti szög pedig $\beta$. Az $AOB$ háromszög egyenlő szárú, továbbá $\beta = 2 \cdot \alpha$.




*a)* Mivel $\beta = 60°$, ezért az $AOB$ háromszög szabályos, és így a kör sugarának szintén 10 cm adódik.

*b)* Mivel $\beta = 90°$, ezért az $AOB$ háromszög derékszögű, és így Pitagorasz tétele alapján:

$$r^2 + r^2 = 10^2 = 100.$$

A sugár hossza: $5 \cdot \sqrt{2}$ ($\approx 7{,}07$) cm.

*c)* A kerületi és középponti szögek helyzetét a II. ábra szemlélteti. Mivel $\beta = 300°$, ezért az $AOB$ háromszög $O$ csúcsánál 60°-os szög van, így a háromszög szabályos. A kör sugara ebben az esetben 10 cm.

**2280** A húr két végpontja a kör középpontjával minden esetben egyenlő szárú háromszöget alkot, amelynek alapja éppen a húr, szárainak hossza pedig a kör $r$ sugarával egyenlő.

*a)* Ha a húr hossza $r$, akkor az egyenlő szárú háromszög szabályos is, így a húr a kör középpontjából 60°-os szögben látszik. A körvonal (az adott húr végpontjaitól különböző) pontjaiból a húr vagy 30°-os, vagy 150°-os szög alatt látszik, attól függően, hogy a hosszabb, vagy a rövidebb körív pontjáról van szó.

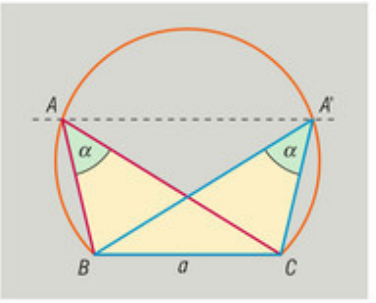
*b)* Ebben az esetben az egyenlő szárú háromszög szárai $r$, alapja pedig $r \cdot \sqrt{2}$ hosszúságúak. Észrevehető, hogy $r^2 + r^2 = (r \cdot \sqrt{2})^2$, így Pitagorasz tételének megfordítása alapján a háromszög derékszögű.

A húr a kör középpontjából 90°-os, a körvonal (az adott húr végpontjaitól különböző) pontjaiból 45°-os, vagy 135°-os szög alatt látszik, attól függően, hogy a hosszabb, vagy a rövidebb körív pontjáról van szó.

*c)* Az $r$ sugarú körben elhelyezhető leghosszabb húr az átmérő, amelynek hossza éppen $2 \cdot r$. Ebből következik, hogy a húr a kör középpontjából 180°-os, a kör (az adott húr végpontjaitól különböző) pontjaiból pedig 90°-os szögben látszik.

**2281** *a)* A szerkesztés lépései:

1. Az adott $BC = a$ oldal fölé $\alpha$ szögű látószögkörívet szerkesztünk; a háromszög $A$ csúcsa a körvonalra illeszkedik.
2. Az $a$ oldallal párhuzamos, attól $m_a$ távolságra haladó egyenest szerkesztünk; az $A$ csúcs illeszkedik az egyenesre.
3. Megjelöljük a látószögkörívet, valamint az $a$ oldallal párhuzamos egyenes metszéspontjait (az ábrán $A$ és $A'$).
4. A csúcsokat összekötjük.

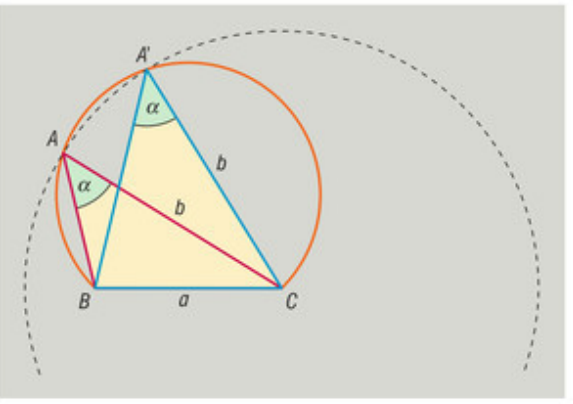



*Megjegyzések:* A látószögkörív és a $BC$-vel párhuzamos egyenes az adatok felvételétől függően 0, 1, esetleg 2 metszéspontot határozhat meg, ezért a feladatnak 0, 1, 2 megoldása lehet. Az ábrán látható elrendezés mellett két megoldás adódik, azonban a két megoldás egymás tükörképe a $BC$ szakasz felezőmerőlegesére.

Ha az $a$ szakasz $\alpha$ szögű látószögkörívét a szakasz másik „oldalára” szerkesztjük meg, akkor további 0, 1, 2 megoldás adódik, amelyek természetesen az imént kapott megoldások $BC$ egyenesre vonatkozó tükörképei.

*b)* A szerkesztés lépései:

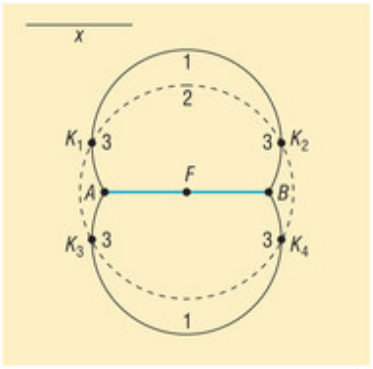
1. Az adott $BC = a$ oldal fölé $\alpha$ szögű látószögkörívet szerkesztünk; a háromszög $A$ csúcsa a körvonalra illeszkedik.
2. $C$ középpontú, $b$ sugarú kört szerkesztünk; a háromszög $A$ csúcsa illeszkedik a körvonalra.
3. Megjelöljük a látószögkörívet, valamint a 2. pontban szerkesztett kör metszéspontjait (az ábrán $A$ és $A'$).
4. A csúcsokat összekötjük.




*Megjegyzések:* A két körnek 0, 1, esetleg 2 közös pontja lehet az adatok felvételétől függően, így a megoldások száma is 0, 1, esetleg 2 lehet.

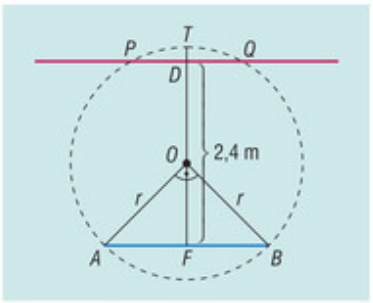
Ha a látószögkörívet a $BC$ szakasz másik „oldalára” is megszerkesztjük, akkor további 0, 1, 2 megoldást kapunk, melyek a már megszerkesztett megoldások $BC$ egyenesre vonatkozó tükörképei.

**2282** A feltételek szerint a kincs helye a két fát összekötő $AB$ szakasz $60°$-os egyik látószögkörívén található (az ábrán 1-es jelöli). A feladat szövegében szereplő másik kalóz emlékképei alapján a kincs az $AB$ szakasz $F$ felezőpontjától ismert $x$ távolságra van, amit ezúttal úgy is értelmezhetünk, hogy a kincs az $F$ középpontú, $x$ sugarú körön is rajta van (az ábrán 2-es jelöli). Az aranyládát ezért a két körvonal metszéspontjaiban kell keresni (az ábrán 3-as számmal jelöltük). A feladatnak 4, 2, esetleg kevésbé jó emlékezőképességgel megáldott kalózok esetén 0 megoldása lehet, attól függően, hogy a látószögkörívek hány pontban metszik az $F$ középpontú, $x$ sugarú kört.




**2283** *a)* A feladat geometriai modellje:

Adott az $AB$ szakasz, amelynek hossza 2 m. A szakasztól 2,4 méter távolságra párhuzamost húzunk. A feladat megoldása attól függ, hány közös pontja van a párhuzamosnak, valamint az $AB$ szakaszhoz tartozó $45°$ szögű (egyik) látószögkörívének. Az ábrán a megfelelő látókör középpontját $O$-val jelöltük. Ekkor a kerületi és középponti szögek tétele alapján az $ABO$ háromszög derékszögű és derékszöge az $O$ csúcsnál van. Mivel az $ABO$ háromszög egyben egyenlő szárú is ($AO = OB$, mert mindkettő a kör sugara), ezért ha a kör sugarát $r$ jelöli, akkor a Pitagorasz-tétel szerint $r^2 + r^2 = 2^2$, azaz $r = \sqrt{2}$ m. Ha a látókörnek az $AB$ szakasztól legtávolabbi pontját $T$ jelöli, továbbá az $AB$ szakasz felezőpontja $F$, akkor $FT = FO + OT = 1 + r = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41$ m. Mivel $2{,}4 < 2{,}41$, így az $AB$-vel párhuzamos kötél metszi az $FT$ szakaszt, amiből következik, hogy a kötél mentén két olyan pont van, amelyből a festmény $45°$-os szög alatt látszik (az ábrán ezeket $P$ és $Q$ jelöli).




*b)* A kötelet a festménytől 2,41 m távolságra kell vezetni ahhoz, hogy a kötél mentén pontosan egy pontból látszódjon a festmény $45°$-os szögben.

**2284** A feltételek szerint a négyszög három szögét $3 \cdot x$, $5 \cdot x$, illetve $2 \cdot x$ alakban kereshetjük. A következő esetek lehetségesek:

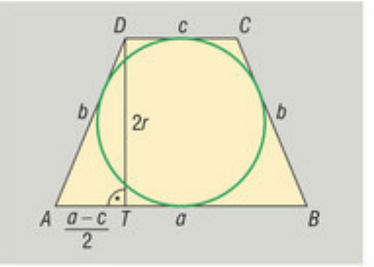
1. A $3 \cdot x$, és az $5 \cdot x$ nagyságú szögek szemköztiek. Ekkor $3 \cdot x + 5 \cdot x = 180°$, amiből $x = 22{,}5°$. Ekkor a négyszög szögei: $67{,}5°$, $112{,}5°$, $45°$, $135°$.
2. A $3 \cdot x$, és a $2 \cdot x$ nagyságú szögek szemköztiek. Ekkor $3 \cdot x + 2 \cdot x = 180°$, amiből $x = 36°$. Ebben az esetben $5 \cdot x = 180°$ adódik, ami nem lehet a négyszög szöge, így a 2. eset nem valósulhat meg.
3. Az $5 \cdot x$, és a $2 \cdot x$ nagyságú szögek szemköztiek. Ekkor $5 \cdot x + 2 \cdot x = 180°$, amiből $x \approx 25{,}71°$, így a négyszög szögei: $77{,}14°$, $128{,}57°$, $51{,}43°$, $102{,}86°$.

A feladatnak két megoldása van.

**2285** Tegyük fel, hogy az $ABCD$ négyszög húrnégyszög. Ekkor az $ACB\sphericalangle$, valamint az $ADB\sphericalangle$ a négyszög köré írható körben az $AB$ köríven nyugszik, és az ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek megegyeznek. Ebből adódik, hogy a húrnégyszög bármely oldala a másik két csúcsból ugyanakkora szög alatt látszik.

Fordítva: Tegyük fel, hogy az $ABCD$ négyszögben az $AB$ oldal a másik két csúcsból ugyanakkora $\alpha$ szög alatt látszik. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a $C$ és $D$ csúcsok illeszkednek az $AB$ szakasz fölé emelt egyik $\alpha$ szögű látókörívére. Nyugodtan elvethetjük, hogy az $ABCD$ négyszög hurkolt négyszög lenne, ezért $C$ és $D$ ugyanarra a látókörívre esnek. Ez azt is jelenti, hogy $A$, $B$, $C$ és $D$ ugyanazon körre illeszkednek, és így valóban húrnégyszöget alkotnak.

**2286** Tekintsük az $ABCD$ húrtrapézt, amely egyben érintőtrapéz is; alapjait jelöljük $a$-val és $c$-vel, szárát $b$-vel. Jelölje továbbá a $D$ csúcsból húzott magasságvonal talppontját $T$; ekkor nyilvánvalóan $AT = \frac{a-c}{2}$, továbbá $DT = 2r$, ahol $r$ a beírt kör sugara.




Az $ADT$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján

$$b^2 = (2r)^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2.$$

Mivel a négyszög érintőnégyszög is, ezért szemközti oldalainak összege megegyezik, azaz $b = \frac{a+c}{2}$, amit behelyettesítve a Pitagorasz-tételbe megkapjuk, hogy

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = (2r)^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2.$$

A kijelölt műveletek elvégzése, az egynemű tagok összevonása után adódik, hogy $(2r)^2 = ac$, vagyis $2r = \sqrt{ac}$. A feladat adatait behelyettesítve $r = 6$ cm adódik.

**2287** *a)* Hamis. Gondoljunk arra, hogy a húrnégyszög szemközti szögeinek összege 180°, így egy húrnégyszögben egyetlen szög sem lehet 180°-nál nagyobb, azaz konkáv.

*b)* Hamis. A négyzet, mint húrnégyszög átlója a négyszöget két derékszögű háromszögre bontja.

*c)* Igaz. A trapéz szárára illeszkedő két belső szögének összege 180°. Ha a trapéz húrnégyszög, akkor szemközti szögeinek összege is 180°. Ebből következik, hogy a trapéz alapjain lévő két-két belső szög egyenlő, így az alapok felezőpontjait összekötő egyenesre tengelyesen szimmetrikus. Tehát szárai egyenlő hosszúak.

*d)* Hamis. A trapézok közül a paralelogrammákban a szárak egyenlők, mégsem feltétlenül húrnégyszögek.

*e)* Igaz. A paralelogrammában a szemközti szögek egyenlők, így összegük csak úgy lehet 180°, ha egyenként 90°-osak.

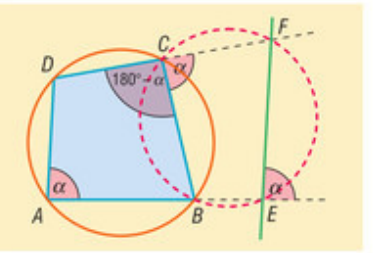
*f)* Igaz. Mivel a rombusz paralelogramma is, ezért az állítás azonnal adódik az *e)* részfeladat állításából.

*g)* Hamis. A négyzet húrnégyszög, tompaszöget mégsem tartalmaz.

*h)* Igaz. Ha a négyszög nem tartalmaz derékszöget, akkor a szemközti szögek összege csak úgy lehet 180°, ha közülük az egyik hegyesszög, a másik tompaszög. Ugyanez érvényes a másik szögpárra is.

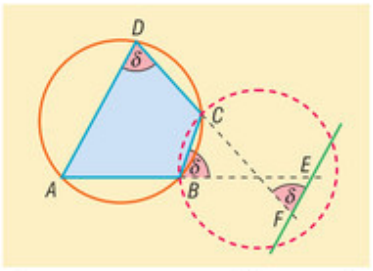
**2288** Kétféle elrendezést érdemes vizsgálni.

Az első esetben a $D$ kezdőpontú félegyenes nem metszi az $AE$ szakaszt. Ha az $ABCD$ négyszög $A$ csúcsánál lévő szöget $\alpha$ jelöli, úgy az $EF$ egyenes is $\alpha$ szöget zár be az $AE$ félegyenessel, hiszen $AD$ és $EF$ párhuzamosak (egyállású szögek. Mivel az $ABCD$ négyszögről tudjuk, hogy húrnégyszög, ezért a $C$ csúcsnál $180° - \alpha$ nagyságú szöge van, aminek külső szögére teljesül:




$$BCF\sphericalangle = 180° - (180° - \alpha) = \alpha.$$

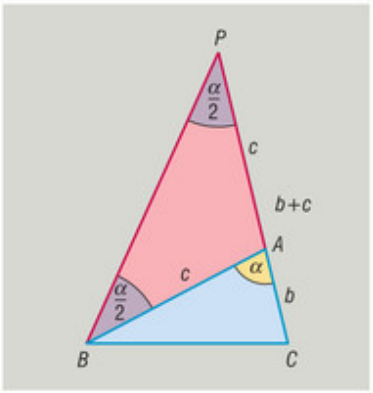
Az elmondottakból adódik, hogy a $BEFC$ négyszög $C$ csúcsánál lévő belső szög ugyanakkora, mint a szemközti $E$ csúcsánál lévő külső szög, így a szemközti belső szögek összege 180°, ezért a négyszög húrnégyszög.




A második esetben a $D$ kezdőpontú félegyenes metszi az $AE$ szakaszt. Ebben az esetben $ADF\sphericalangle = DFE\sphericalangle = \delta$, hiszen váltószögek. Mivel az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, ezért a $B$ csúcsnál lévő külső szöge megegyezik a $D$ csúcsnál lévő belső szöggel, azaz $CBE\sphericalangle = \delta$. Ekkor viszont a $CE$ szakasz az $F$ és $B$ pontokból ugyanakkora szög alatt látszik, így mindkettő illeszkedik a $CE$ szakasz $\delta$ szögű látószögkörívére, azaz a $C, E, B, F$ pontok egy körre illeszkednek.

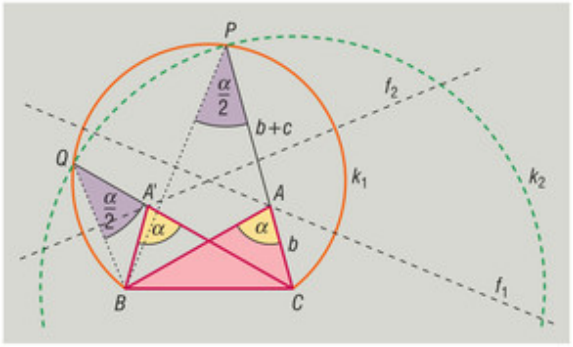
*Megjegyzés:* A második esetben a $B$ és $F$ pontok a $CE$ szakasznak ugyanazon partján vannak, ezért nem fordulhat elő, hogy a $CE$ szakasz különböző látószögkörívére illeszkedjenek.

**2289** *a)* Forgassuk el az $ABC$ háromszög $AB$ oldalát az $A$ csúcs körül úgy, hogy az elforgatott szakasz illeszkedjen a $CA$ oldal meghosszabbítására. Ha a $B$ pont képét $P$ jelöli, akkor a $PBA$ háromszög egyenlő szárú, továbbá az $A$ csúcsnál lévő külső szöge $\alpha$.




Mivel a háromszög külső szöge a nem szomszédos belső szögek összegével egyenlő, ezért a $PBA$ háromszög alapján fekvő szögek $\frac{\alpha}{2}$ nagyságúak. Eredményünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a $P$ pont illeszkedik a $BC$ szakasz $\frac{\alpha}{2}$ szögű valamelyik látószögkörívére.

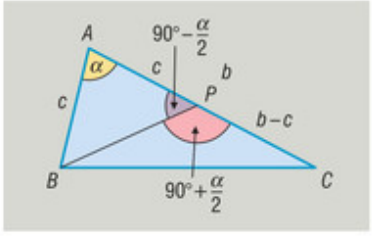
A fenti megállapításokat figyelembe véve, a szerkesztés lépései a következők lehetnek.




1. Az adott $a = BC$ szakasz fölé $\frac{\alpha}{2}$ szögű látószögkörívet szerkesztünk ($k_1$).
2. A $C$ középpont körül adott $b + c$ sugarú kört szerkesztünk ($k_2$).
3. Megjelöljük az $a$ szakaszhoz tartozó látószögkörív, valamint a $C$ középpontú kör metszéspontjait (az ábrán $P$ és $Q$).
4. Megszerkesztjük a $PB$ és $QB$ szakaszok felezőmerőlegesét ($f_1, f_2$).
5. Az $ABC$ háromszög ismeretlen $A$ csúcsát az imént szerkesztetett felezőmerőlegesek metszik ki a $PC$, illetve $QC$ szakaszokból.

A feladatnak 0, 1, 2 megoldása lehet. Ha az adott $a$ szakasz másik látószögkörívét is megszerkesztjük, akkor további 0, 1, 2 megoldást kapunk, amelyek az $AB$ egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözéssel adódnak a már megszerkesztett háromszög(ek)ből.

*b)* Ezúttal az $AB$ oldalt az $A$ csúcs körül úgy érdemes elforgatni, hogy az elforgatott szakasz illeszkedjen a háromszög $AC$ oldalára ($AC > AB$). A $B$ pont képét $P$-vel jelöltük az ábrán. Ekkor az $ABP$ háromszög egyenlő szárú, amelyben a szárak $\alpha$ szöget zárnak be egymással, ezért az alapon fekvő szögek $90° - \frac{\alpha}{2}$, továbbá a $P$ csúcsnál fekvő külső szöge $90° + \frac{\alpha}{2}$ nagyságú. Vegyük észre még, hogy $PC = b - c$.

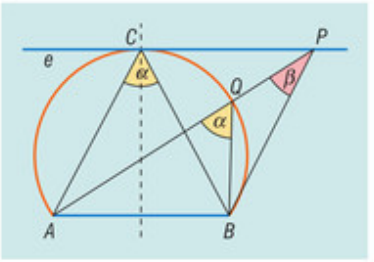


Ezek alapján a szerkesztés menete nagyon hasonló az *a)* részfeladatban ismertetett szerkesztéshez.

1. Az adott $a = BC$ szakaszhoz tartozó $90° + \frac{\alpha}{2}$ szögű egyik látószögkörívet megszerkesztjük.
2. Megszerkesztjük a $C$ középpontú, adott $b - c$ sugarú kört.
3. Megjelöljük a $BC$ szakaszhoz tartozó látószögkörívet, valamint a $C$ középpontú kör megfelelő metszéspontját ($P$).
4. A $BP$ szakasz felezőmerőlegese kimetszi a $C$ kezdőpontú $CP$ félegyenesből az $A$ csúcsot.

Ebben az esetben csak 0 vagy 1 megoldás lehet.

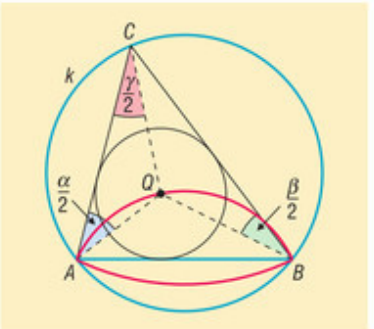
**2290** A völgyhíd végpontjait $A$ és $B$, a vele párhuzamos utat $e$ jelöli az ábrán. Néhány konkrét eset vizsgálata után sejthető, hogy az $AB$ szakasz felezőmerőlegese metszi ki az $e$ egyenesből azt a pontot, amelyből az $AB$ szakasz a legnagyobb szögben látszik. Jelöljük ezt a pontot $C$-vel, az $ACB\sphericalangle$-et pedig $\alpha$-val. Ekkor a kerületi szögek tétele alapján az $AB$ völgyhíd az $ABC$ háromszög köré írható kör $C$-t is tartalmazó $AB$ körívének minden pontjából $\alpha$ szög alatt látszik.




Megmutatjuk, hogy az $e$ egyenes $C$-től különböző tetszőleges $P$ pontjából az $AB$ szakasz $\alpha$-nál kisebb szögben látható. Mivel a $C$ csúcs az $AB$ szakasz felezőmerőlegesére illeszkedik, ezért az $ABC$ háromszög egyenlő szárú, így köré írt körének középpontja az $AB$ oldal felezőmerőlegesén található. Ugyanakkor az $e$ és $AB$ párhuzamosak, ezért a $C$ csúcshoz tartozó sugár nemcsak az $AB$ szakaszra, hanem az $e$ egyenesre is merőleges (az $e$ egyenes a köré írt kör $C$ pontbeli érintője), vagyis a $P$ pont szükségképpen a kör külső pontja. Kössük össze a $P$ pontot az $AB$ szakasz végpontjaival; az $AP$ szakasz és a kör metszéspontját az ábrának megfelelően jelöljük $Q$-val. Mivel a $Q$ pont a körvonal pontja, ezért korábbi megjegyzésünk alapján $AQB\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \alpha$. Vegyük észre, hogy az $AQB\sphericalangle$ a $PQB$ háromszög külső szöge, ezért megegyezik a nem szomszédos belső szögek összegével, így $AQB\sphericalangle = QPB\sphericalangle + QBP\sphericalangle > QPB\sphericalangle = APB\sphericalangle$.

Az ábra jelöléseit használva tehát $\alpha > \beta$, ami egyben azt is jelenti, hogy az $AB$ szakasz a $C$ pontból nagyobb szög alatt látszik, mint a $P$ pontból. Ezzel igazoltuk, hogy az $e$ egyenes pontjai közül valóban a $C$ pontból látható az $AB$ szakasz a legnagyobb szög alatt.

**2291** Az adott $k$ kört az $AB$ húr két körívre bontja. Bebizonyítjuk, hogy attól függően, hogy a $C$ pont melyik körívén változik, az $ABC$ háromszögbe írt kör $Q$ középpontja illeszkedik az $AB$ szakasz egy-egy megfelelő szögű látószögkörívére. Tegyük fel, hogy a $C$ pont az ábra szerinti hosszabb $AB$ körívén mozog. Ekkor az $ACB\sphericalangle$ a $C$ pont helyzetétől függetlenül állandó, amit $\gamma$-val jelöltünk. Az $ABC$ háromszög másik két szöge természetesen már függ a $C$ pont aktuális helyzetétől. Ha e szögeket $\alpha$ és $\beta$ jelöli, akkor figyelembe véve, hogy a $Q$ pont az $ABC$ háromszög szögfelezőinek metszéspontja azt kapjuk, hogy $CAQ\sphericalangle = QAB\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$, továbbá $CBQ\sphericalangle = QBA\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$.




Mivel az $ABQ$ háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért:

$$AQB\sphericalangle = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 180° - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

A kapott szög a $C$ pont helyzetétől független állandó, ezért a $Q$ pont az $AB$ szakasz egyik $90° + \frac{\gamma}{2}$ szögű látószögkörívén mozog.

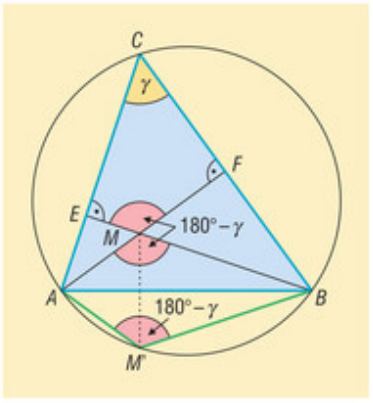
Ha a $C$ pont a $k$ kör másik $AB$ körívén mozog, akkor az $ACB\sphericalangle = 180^\circ - \gamma$, és így az

$$AQB\sphericalangle = 90^\circ + \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 180^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

ami mutatja, hogy a $Q$ pont az $AB$ szakasz megfelelő $180^\circ - \frac{\gamma}{2}$ szögű látószögkörívére esik.

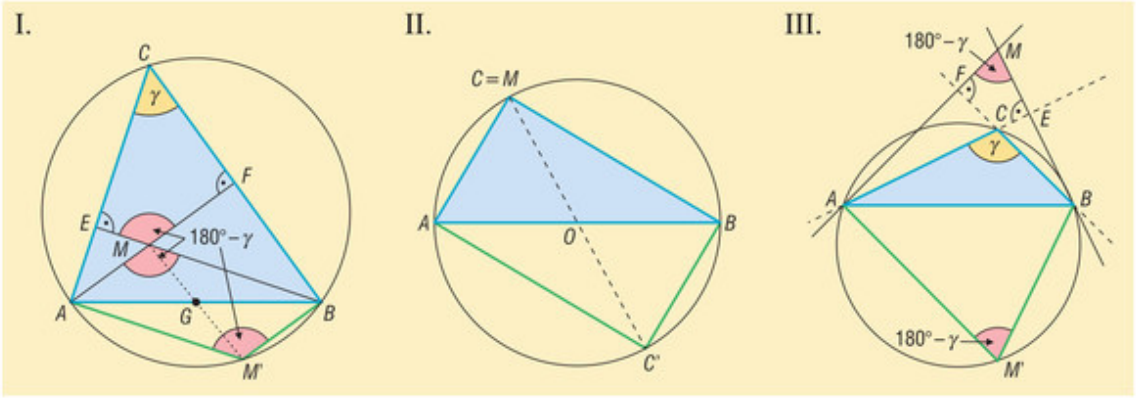
*Megjegyzés:* Az $A$ és $B$ pontok nem tartoznak a mértani helyhez. A fenti látószögkörívek minden más pontja a mértani hely része, ugyanis egy rögzített $Q$ ponthoz tartozó $C$ pontot az $AQB$ háromszög $AQ$, illetve $BQ$ oldalára felmért $QAB\sphericalangle$, illetve $QBA\sphericalangle$ szárai metszik ki egymásból.

**2292** *a)* Tekintsük az ábra jelöléseit: az $ABC$ háromszög magasságpontja $M$, az $AB$ egyenesre vonatkozó tükörképe $M'$, az $A$ és $B$ csúcsból induló magasságvonalak talppontjai $F$ és $E$, a háromszög $C$ csúcsánál lévő szöge $\gamma$.




Az $EMFC$ négyszög húrnégyszög, mivel két szemközti szöge 90°-os, ezért $EMF\sphericalangle = 180^\circ - \gamma$. Mivel az $AMB\sphericalangle$ és az $EMF\sphericalangle$ csúcsszögek, ezért $AMB\sphericalangle = 180^\circ - \gamma$ is teljesül. Ha nemcsak a magasságpontot, hanem az $AMB$ háromszöget is tükrözzük az $AB$ egyenesre, akkor tükörképként az $AM'B$ háromszöget kapjuk, hiszen a tükrözés során a tengely $A$ és $B$ pontja helyben marad. A tengelyes tükrözés szögtartó tulajdonsága miatt az $AM'B\sphericalangle = AMB\sphericalangle = 180^\circ - \gamma$. Ekkor viszont az $AM'BC$ négyszögben a $C$ és $M'$ csúcsoknál lévő szögek összege 180°, amiből következik, hogy a négyszög csúcsai egy körre illeszkednek. Ez a kör tartalmazza az $A$, $B$, $C$ pontokat, azaz szükségképpen egybeesik az $ABC$ háromszög köré írt körrel. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

*b)* Az állítás az *a)* részfeladat állításához hasonló módszerrel bizonyítható. Ha az $M$ pontot ezúttal az $AB$ oldal $G$ felezőpontjára tükrözzük (I.), akkor a tükörképként kapott $M'$ pont az $A$, $B$, $M$ pontokkal paralelogrammát feszít ki, amelyben a szemközti szögek természetesen egyenlők, így $AM'B\sphericalangle = 180^\circ - \gamma$, ami ismét igazolja, hogy az $M'$ pont illeszkedik az $ABC$ háromszög köré írt körre.

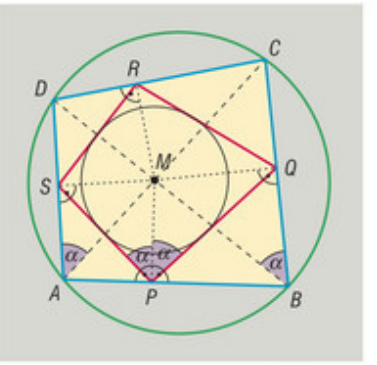



Az állítások derékszögű, illetve tompaszögű háromszögre is érvényben maradnak. A derékszögű háromszög esetében (II. ábra) a magasságpont egybeesik a derékszögű csúccsal ($C$-vel), a tükörképe ($C'$) pedig szintén derékszögű háromszöget alkot az átfogó két végpontjával, így az állítás Thalész tételének megfordításából azonnal adódik. Az ábra az oldalfelező pontra vonatkozó állítást szemlélteti.

Tompaszögű háromszög esetén (III. ábra) az $A$ és $B$ csúcsokból induló magasságvonalak talppontjai (az ábrán $E$ és $F$) a háromszög oldalain kívülre esnek csakúgy, mint az $M$ magasságpont. Az $EMFC$ négyszögben a $C$ csúcsnál lévő szög csúcsszöge az $ABC$ háromszög $\gamma$ szögének,

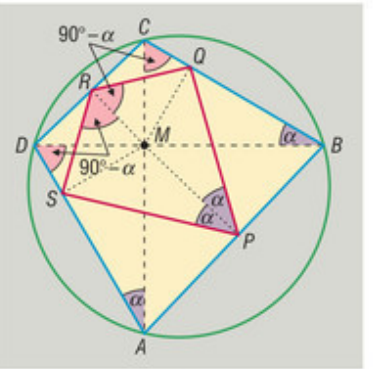
ezért egyenlő vele. Mivel a szóban forgó négyszög húrnégyszög, ezért az $M$ csúcsnál lévő szöge $180° - \gamma$, amiből a már szokásos gondolatmenettel belátható, hogy $AM'B\sphericalangle = 180° - \gamma$ ezúttal is teljesül. Ekkor viszont az $AM'BC$ négyszög ismét húrnégyszög, azaz az $M'$ pont illeszkedik az $ABC$ háromszög köré írt körre. Az oldalfelező pontra vonatkozó tükörképről hasonló módon látható be ugyanez a tulajdonság.

**2293** *a)* Készítsünk ábrát, majd keressünk húrnégyszögeket a kialakult ábrában. Az $APMS$ négyszögben a $P$ és $S$ csúcsoknál derékszögek vannak, ezért húrnégyszög, amiből következik, hogy $SAM\sphericalangle = SPM\sphericalangle = \alpha$ (a köré írt körben ugyanazon a köríven nyugvó kerületi szögek). Ha az $SAM\sphericalangle$ szárait meghosszabbítjuk, akkor a vele megegyező nagyságú $DAC\sphericalangle$-et kapjuk, ezért $DAC\sphericalangle = \alpha$ is teljesül. Mivel az $ABCD$ húrnégyszög köré írható körben a $DAC\sphericalangle$ a $DC$ íven nyugvó kerületi szög csakúgy, mint a $DBC\sphericalangle$, ezért $DBC\sphericalangle = DAC\sphericalangle = \alpha$. Vegyük még észre, hogy a $BPMQ$ négyszög is húrnégyszög, amit ugyanúgy indokolhatunk, amint azt az $APMS$ négyszögnél tettük. A négyszög köré írt körben az $MPQ\sphericalangle$ és $MBQ\sphericalangle$ szögek ugyanazon az $MQ$ köríven nyugvó kerületi szögek, ezért $MPQ\sphericalangle = MBQ\sphericalangle = DBC\sphericalangle = \alpha$. Eddigi eredményeinket összefoglalva láthatjuk, hogy $SPM\sphericalangle = QPM\sphericalangle = \alpha$, amit úgy is fogalmazhatunk, hogy az $M$ pont illeszkedik a $PQRS$ négyszög $P$ csúcsánál lévő szögfelezőjére. Ehhez hasonlóan igazolható, hogy az $M$ pont a négyszög összes szögfelezőjére illeszkedik, azaz a $PQRS$ négyszög valóban érintőnégyszög, amelyben a beírható kör középpontja egybeesik az $ABCD$ négyszög átlóinak $M$ metszéspontjával.




*b)* Az *a)* részfeladat eredményei alapján az ábrán $\alpha$-val jelölt szögek mind megegyeznek. Mivel a négyszög átlói ezúttal merőlegesek egymásra, ezért $ADM\sphericalangle = BCM\sphericalangle = 90° - \alpha$. Vegyük észre, hogy az $SMRD$ négyszög is húrnégyszög (az $R$ és $S$ csúcsoknál derékszögek vannak a pontok származtatása révén), ezért a köré írt körben az $SM$ köríven nyugvó kerületi szögek megegyeznek, azaz $SDM\sphericalangle = SRM\sphericalangle = 90° - \alpha$.

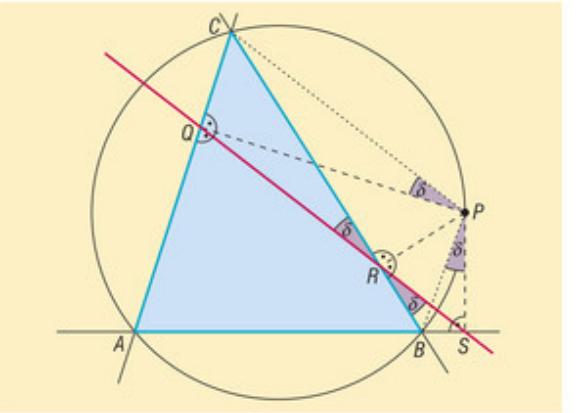
Ugyanígy az $RMQC$ húrnégyszögben: az $MQ$ köríven nyugvó kerületi szögek megegyeznek, azaz $MRQ\sphericalangle = MCQ\sphericalangle = 90° - \alpha$. Tekintsük most a $PQRS$ négyszöget: a $P$ csúcsnál lévő szöge $2 \cdot \alpha$, az $R$ csúcsnál lévő szöge $2 \cdot (90° - \alpha) = 180° - 2 \cdot \alpha$. Mivel a szemközti szögek összege 180°, ezért a húrnégyszögek tételének megfordítása alapján a $PQRS$ négyszög húrnégyszög.




**2294** Az $ABC$ háromszög köré írt körének $P$ pontját merőlegesen vetítve a háromszög oldalegyeneseire, az ábrának megfelelő jelölésekkel a $Q$, $R$, $S$ pontokhoz jutunk. Az ábra „hemzseg" a húrnégyszögektől, amelyek közül először elemezzük az $ABPC$ négyszöget. A húrnégyszögek ismert tulajdonsága alapján a $CPB\sphericalangle = 180° - CAB\sphericalangle$. Az $ASPQ$ négyszögben az $S$ és $Q$ szemközti csúcsoknál derékszögek vannak, ezért szintén húrnégyszög, így:

$$QPS\sphericalangle = 180° - QAS\sphericalangle = 180° - CAB\sphericalangle.$$

Az elmondottak alapján tehát $CPB\sphericalangle = QPS\sphericalangle$.



Ha a fenti egyenlőség két oldalán álló szögekből a $QPB\sphericalangle$-et elvesszük, akkor a visszamaradó szögek is megegyeznek, azaz

$$CPB\sphericalangle - QPB\sphericalangle = QPS\sphericalangle - QPB\sphericalangle,$$

$$CPQ\sphericalangle = BPS\sphericalangle = \delta.$$

Az ábra további húrnégyszöge a $BSPR$ négyszög, hiszen $S$ és $R$ csúcsainál derékszögek vannak. A négyszög köré írt körében a $BS$ köríven nyugvó kerületi szögek megegyeznek, azaz

$$BRS\sphericalangle = BPS\sphericalangle = \delta. \quad (1)$$

Végül szintén húrnégyszög a $CQRP$ négyszög, hiszen a $CP$ szakasz a $Q$ és $R$ pontokból egyaránt 90°-os szög alatt látszik, így mindkét pont illeszkedik a $CP$ szakasz Thalész-körére. A Thalész-kör $QC$ körívén nyugvó kerületi szögek megegyeznek, ezért:

$$QRC\sphericalangle = QPC\sphericalangle = \delta. \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenlőségek összehasonlítása után láthatjuk, hogy

$$BRS\sphericalangle = QRC\sphericalangle = \delta,$$

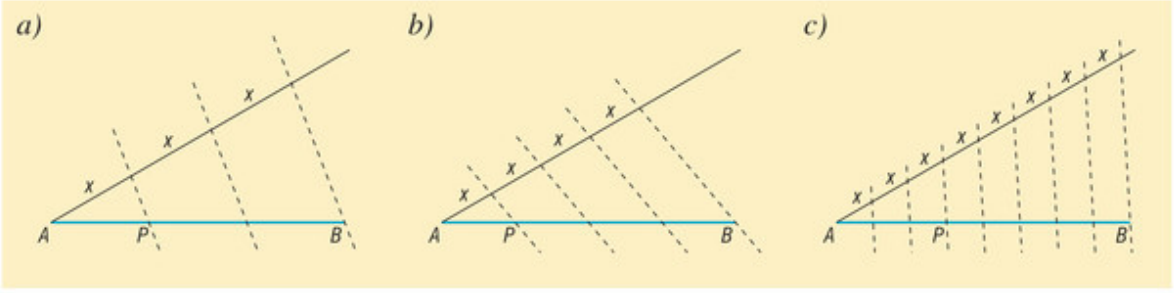
ami azt is jelenti, hogy az $RS$ egyenes és az $RQ$ egyenes egyaránt $\delta$ nagyságú szöget zár be a $BC$ egyenessel, ami csak úgy képzelhető el, hogy a $Q$, $R$, $S$ pontok egy egyenesre illeszkednek.

## Párhuzamos szelők és párhuzamos szelőszakaszok tétele, szögfelezőtétel – megoldások

**2295** A kitöltött táblázat:

| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 cm | 4 cm | 3 cm | 2,4 cm | 7 cm | 12,6 cm |
| 2 cm | 2,5 cm | 3 cm | 3,75 cm | 4 cm | 9 cm |
| 3 cm | 6 cm | 2 cm | 4 cm | $\frac{8}{3}$ cm | 8 cm |

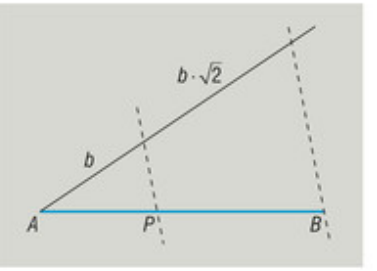
**2296** A szerkesztések a párhuzamos szelők tétele alapján könnyen elvégezhetők. A szerkesztési lépések az ábrákról leolvashatók.




**2297** Az adott szakaszt a párhuzamos szelők tétele alapján három egyenlő részre osztjuk, így megkapjuk a szabályos háromszög oldalának hosszát.

**2298** Az adott szakaszt felosztjuk 2 : 3 : 4 arányban; a kialakuló szakaszok a szerkesztendő háromszög oldalai lesznek. A három oldal ismeretében a háromszög már könnyen szerkeszthető.

**2299** Szerkesszünk egy tetszőleges oldalú négyzetet, majd szerkesszük meg az átlóját; ha az oldal hossza $b$, akkor átlója $b \cdot \sqrt{2}$. A felosztani kívánt $AB$ szakasz $A$ kezdőpontjából induló félegyenesre mérjük fel a négyzet oldalát, majd átlóját. A párhuzamos szelők tétele alapján szerkeszthető a megfelelő osztópont. (➡)



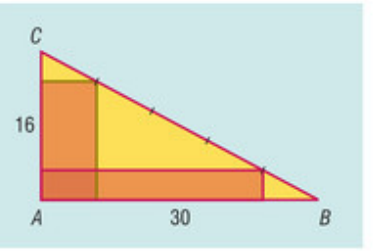

**2300** A trapéz kiegészítő háromszögének oldalai 6 cm, 4,67 cm, 4,67 cm hosszúak.

**2301** A trapéz szárainak hossza: 2,29 cm, 6,87 cm.

**2302** A trapéz alapjainak hossza: $CD = 14$ cm és $AB = 18$ cm.

**2303** A $DE$ egyenes a $BC$ oldalt $1:3$ arányban osztja.

**2304** Az ábra segítségével is meggyőződhetünk arról, hogy a feladat feltételeinek két téglalap tesz eleget. Az egyik téglalap oldalai 6 cm és 12,8 cm, így területe 76,8 cm$^2$. A másik téglalap oldalai 3,2 cm és 24 cm, így területe szintén 76,8 cm$^2$. (➡)




**2305** A háromszög alapjához 12 cm hosszú magasság tartozik. A szögfelezőtétel alapján a magasságot az alapon fekvő szög szögfelezője 5 : 13 arányban, 8,67 cm és 3,33 cm hosszú részekre osztja.

**2306** A háromszög átfogója $10 \cdot \sqrt{2} \approx 14{,}14$ cm hosszúságú.

A szögfelezőtétel alapján a szögfelező a szemközti, 10 cm hosszú befogót $1 : \sqrt{2}$ arányban osztja. A derékszögű csúcshoz közelebbi szakasz hossza:

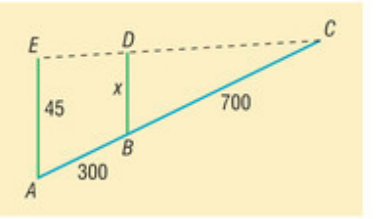
$$\frac{10}{1+\sqrt{2}} \approx 4{,}14 \text{ cm},$$

a másiké pedig:

$$\frac{10 \cdot \sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \approx 5{,}86 \text{ cm}.$$

**2307** A 45 méteres fa helyét $A$, az ismeretlen, $x$ magasságúét $B$, a hegytetőt $C$ jelöli. Ekkor $AB = 300$ méter, és mivel Barnabás fél óra alatt 1000 m utat tesz meg, ezért $BC = 700$ m. A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján:

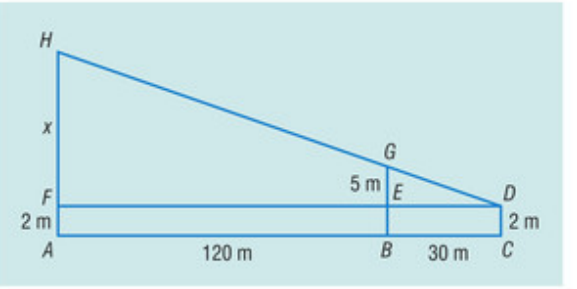
$$\frac{700}{1000} = \frac{x}{45}, \text{ amiből } x = 31{,}5 \text{ m}.$$




A második fa magassága 31,5 méter.

**2308** A feladat geometriai modellje az ábrán látható. $AH$ jelöli az ismeretlen magasságú létesítményt, $BG$ a 7 méter magas fát, és $D$ azt a pontot, ahonnan a fa és az ipari létesítmény teteje egy vonalban látszik. A párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva az $FDH\sphericalangle$-re kapjuk, hogy:

$$\frac{x}{5} = \frac{150}{30} \Rightarrow x = 25.$$

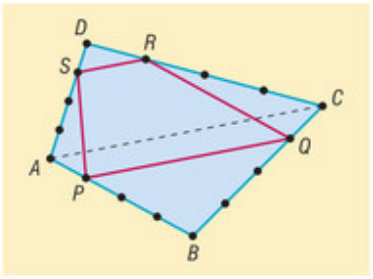



Az ipari létesítmény magassága tehát 27 méter.

**2309** *a)* Megmutatjuk, hogy $SR$ és $PQ$ párhuzamosak az $AC$ átlóval. Tekintsük ehhez az $ADC\sphericalangle$-et, amelynek szárait az $SR$ és $AC$ egyenesek úgy metszik, hogy a szárakból kimetszett szakaszok arányaira:

$$\frac{DS}{DA}=\frac{DR}{DC}=\frac{1}{4},$$

és így a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján $SR$ és $AC$ valóban párhuzamosak.




Hasonlóan láthatjuk, hogy az $ABC\sphericalangle$ száraiból $PQ$ és $AC$ olyan szakaszokat metszenek ki, amelyekre igaz:

$$\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}=\frac{3}{4},$$

aminek következtében $PQ$ és $AC$ szintén párhuzamosak. Ez azt jelenti, hogy $PQ$ és $SR$ ugyanazzal az $AC$ átlóval párhuzamosak, ami csak úgy lehetséges, ha egymással is párhuzamosak, és ez igazolja, hogy $PQRS$ valóban trapéz.

*b)* A párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazzuk az $ADC\sphericalangle$-re, majd az $ABC\sphericalangle$-re:

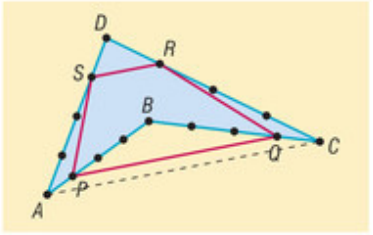
$$\frac{SR}{AC}=\frac{DS}{DA}=\frac{1}{4},$$

valamint

$$\frac{PQ}{AC}=\frac{BP}{BA}=\frac{3}{4}.$$

A feltételek szerint $AC = 20$ cm, amit az előző két egyenlőség bal oldalába behelyettesítve, majd a műveleteket elvégezve adódik, hogy $SR = 5$ cm, $PQ = 15$ cm.

*c)* Az *a)* részfeladat állítása konkáv négyszögre is érvényes, amint azt az ábra is szemlélteti. A bizonyítás ugyanúgy történhet, mint a konvex esetben.

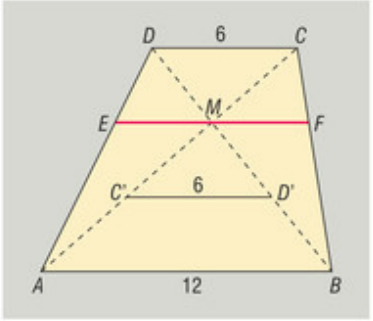



**2310** *a)* Tükrözzük az $ABCD$ trapéz rövidebb ($CD$) alapját az átlók $M$ metszéspontjára; a tükörképet jelölje $C'D'$. Mivel $C'D'$ párhuzamos az $AB$ alappal, továbbá hossza az $AB$ alap hosszának fele, ezért $C'D'$ az $ABM$ háromszög $AB$-vel párhuzamos középvonala, így $C'$ felezi az $AM$, és $D'$ a $BM$ szakaszt. A tükrözés a távolságtartó, ezért $C'M = CM$, vagyis $C'$ és $M$ a $CA$ szakasz harmadolópontjai, így látható, hogy $M$ a $CA$ átlót $1:2$ arányban osztja. Ugyanígy belátható, hogy $M$ a $DB$ átlót is harmadolja.

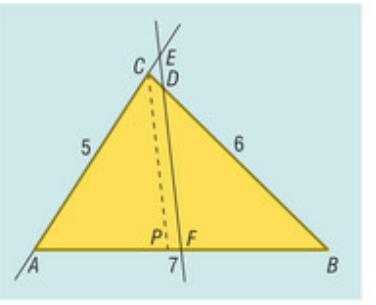
*b)* Ha az $M$ ponton átmenő, a trapéz alapjaival párhuzamos egyenes a szárakat az ábrának megfelelően az $E$ és $F$ pontokban metszi, akkor a párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva a $DAC\sphericalangle$-re, valamint a $DBC\sphericalangle$-re:

$$\frac{EM}{DC}=\frac{AM}{AC}=\frac{2}{3},\quad \frac{MF}{DC}=\frac{BM}{BD}=\frac{2}{3}.$$

Az ismert $DC = 6$ cm-t behelyettesítve, valamint a számolásokat elvégezve $EM = MF = 4$ cm adódik, vagyis az $EF$ szakasz hossza 8 cm.



**2311** *a)* Jelöljük a $C$-ből induló szögfelező $AB$ oldalra illeszkedő pontját $P$-vel. A szögfelezőtétel alapján:




$$\frac{AP}{BP}=\frac{5}{6},$$

továbbá felhasználva, hogy $PB=7-AP$, egyszerű számolással kapjuk, hogy:

$$AP=\frac{35}{11}\approx 3{,}18\text{ cm, valamint }PB=\frac{42}{11}\approx 3{,}82\text{ cm.}$$

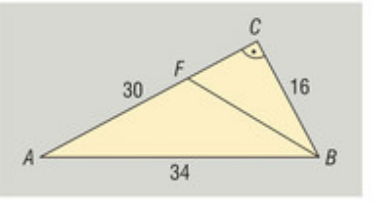
*b)* Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét a $PBC\sphericalangle$-re:

$$\frac{BD}{BC}=\frac{BF}{PB}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{42}{11}}=\frac{11}{12},$$

amiből a $BC=6$ cm miatt $BD=\frac{11}{2}=5{,}5$ cm.

Hasonló módszerrel számolható, hogy $AE=\frac{11}{2}=5{,}5$ cm szintén teljesül.

**2312** *a)* A feltételek szerint a háromszög befogóinak hossza $15\cdot x$, illetve $8\cdot x$, az $AB$ átfogó hossza 34 cm. Ekkor Pitagorasz tétele alapján $(15\cdot x)^2+(8\cdot x)^2=34^2$, amiből $x=2$ adódik. A háromszög befogói tehát $AC=30$ cm, illetve $BC=16$ cm. Ha a $B$ csúcsból induló szögfelező az $AC$ befogót az $F$ pontban metszi, akkor a szögfelezőtétel alapján:




$$\frac{FC}{30-FC}=\frac{16}{34},$$

amiből $FC$-re 9,6 cm adódik. Az $FB$ szögfelező hossza a $BFC$ derékszögű háromszögből számolható:

$$BF^2=FC^2+BC^2=9{,}6^2+16^2,\quad\text{amiből}\quad BF=18{,}66\text{ cm.}$$

*b)* A háromszögbe írható kör középpontja a szögfelezők $O$ metszéspontja. Az ábra jelöléseit követve legyen a $C$ csúcsból induló magasságvonal talppontja $P$, a szögfelezőé $G$, a beírt kör az $AB$ oldalt érintse $T$ pontban. Előbb kiszámoljuk a beírt kör $r$ sugarát, valamint a háromszög átfogójához tartozó $m$ magasságát. Mindkettő a háromszög területét felhasználva számolható. Mivel $t=r\cdot s$, ahol $s$ a háromszög kerületének fele, ezért:

$$\frac{16\cdot 30}{2}=r\cdot\frac{16+30+34}{2},\quad r=6\text{ cm.}$$

Másrészt a háromszög területe az oldal és a hozzá tartozó magasság segítségével:

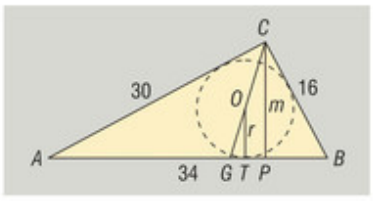
$$\frac{16\cdot 30}{2}=\frac{34\cdot m}{2},\ \text{azaz}\ m=\frac{240}{17}\approx 14{,}12\text{ cm.}$$

Ezután kiszámoljuk a $GCP$ háromszög ismeretlen oldalainak hosszát. A szögfelezőtétel alapján

$$\frac{GB}{34-GB}=\frac{16}{30},\ GB=\frac{272}{23}\approx 11{,}83\text{ cm.}$$

A $BCP$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tételével a $PB$ kiszámolható: $PB=7{,}53$ cm. Ekkor viszont $GP=GB-PB=4{,}30$ cm, és végül

$$GC=\sqrt{GP^2+m^2}=14{,}76\text{ cm.}$$

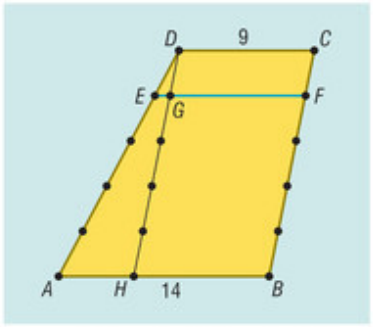



Az $OC$ szakasz hossza ezek után már viszonylag könnyedén számolható. Mivel $OT$ és $CP$ párhuzamosak, ezért a $CGP\sphericalangle$-re alkalmazható a párhuzamos szelőszakaszok tétele:

$$\frac{r}{m}=\frac{GO}{GC},\qquad \frac{6}{14{,}12}=\frac{14{,}76-OC}{14{,}76},\qquad OC\approx 8{,}49\text{ cm}.$$

A háromszög beírható körének középpontja a derékszögű csúcstól körülbelül 8,49 cm távolságra található.

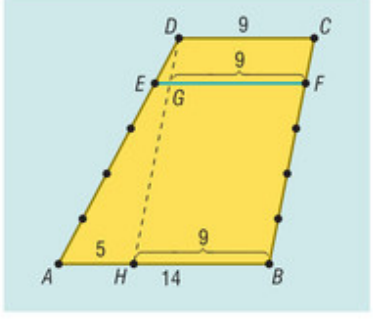
**2313** *a)* Húzzunk párhuzamost a trapéz $D$ csúcsán át a $BC$ szárral; a párhuzamos az $AB$ alapot az ábrának megfelelően a $H$ pontban metszi. Ekkor $DHBC$ négyszög paralelogramma, így $HD = BC$. Jelöljük a $DH$ szakasz $D$-hez legközelebb eső ötödölőpontját $G$-vel. Ha az $AD$ szár $D$-hez legközelebbi ötödölőpontja $E$, akkor




$$\frac{DE}{DA}=\frac{DG}{DH}=\frac{1}{5},$$

és így a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt az $EG$ egyenes párhuzamos az $AB$ alappal. Megmutatjuk, hogy ha a $BC$ szár $C$-hez legközelebb eső ötödölőpontja $F$, akkor az $F$ pont illeszkedik az $EG$ egyenesre, amiből a feladat állítása már következik. Valóban, mivel $DG = CF$ (hiszen mindkettő hossza a $BC$ szár egyötöd része), továbbá $DG$ párhuzamos $CF$-fel, ezért a $DGFC$ négyszög paralelogramma, így $GF$ párhuzamos $DC$-vel (és persze $AB$-vel is). Ekkor $EG$ és $GF$ is párhuzamos a trapéz alapjaival, ami csak úgy lehetséges, ha az $E$, $G$, $F$ pontok egy egyenesre illeszkednek.

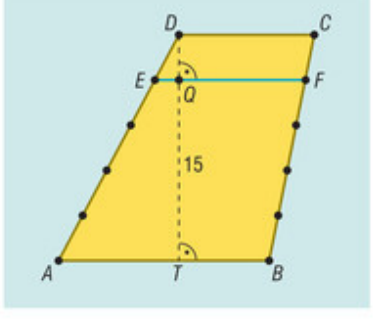
*b)* Az *a)* részfeladat eredményei alapján $DGFC$ négyszög paralelogramma, ezért $DC = GF = 9$ cm. Ugyanígy paralelogramma a $DHBC$ négyszög is, ezért $HB = 9$ cm, így $AH = 5$ cm. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az $ADH\sphericalangle$-re:




$$\frac{EG}{5}=\frac{DE}{DA}=\frac{1}{5},$$

amiből $EG = 1$ cm. Az $EF$ szakasz hossza tehát 10 cm.

*c)* Húzzuk be a trapéz $D$ csúcsából induló $DT$ magasságát, amely az $EF$ szakaszt $Q$-ban metszi. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét az $ADT\sphericalangle$-re:




$$\frac{DQ}{15}=\frac{DE}{DA}=\frac{1}{5},$$

így $DQ = 3$ cm adódik. Ez egyben az $EFCD$ trapéz magassága is, így területe:

$$t=\frac{9+10}{2}\cdot 3=28{,}5\text{ cm}^2.$$

Az $ABFE$ trapéz magassága az előzőekből adódóan 12 cm, így területe:

$$T=\frac{14+10}{2}\cdot 12=144\text{ cm}^2.$$

**2314** Az $AC$ átló hossza az $ABC$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tételével számolható: $AC = 58$ m. Az $ABC$ háromszögben alkalmazva a szögfelezőtételt

$$\frac{BE}{42-BE}=\frac{40}{58},\quad BE=\frac{120}{7}\approx 17{,}14 \text{ m adódik.}$$

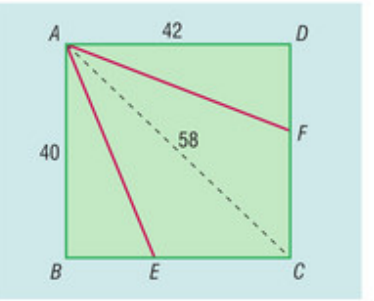
Az $ABE$ derékszögű háromszög alakú kert területe ezek alapján:

$$t_{ABE}=\frac{40\cdot\frac{120}{7}}{2}\approx 342{,}86 \text{ m}^2.$$

Ehhez hasonlóan számolható az $AFD$ kert területe is. Előbb az $AFC$ háromszögben alkalmazzuk a szögfelezőtételt:

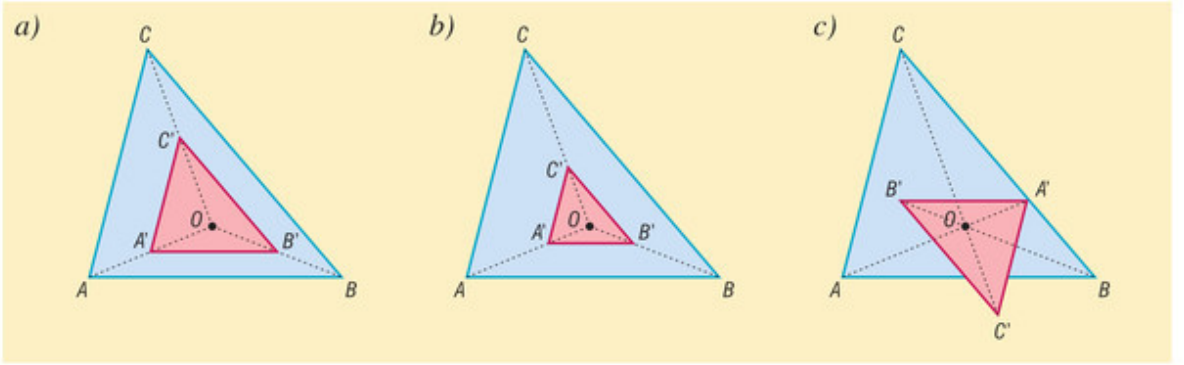
$$\frac{FD}{40-FD}=\frac{42}{58}\ \Rightarrow\ FD=16{,}8 \text{ m.}$$

Az $AFD$ kert területe $t_{AFD}=352{,}8$ m$^2$. Mivel az $ABCD$ kert területe 1680 m$^2$, ezért a legkisebb gyermek a kertnek körülbelül 20,4%-át, a középső 21%-át örökli. A legjobban a legidősebb gyermek jár, ő a kertnek csaknem 58,6%-át örökli.

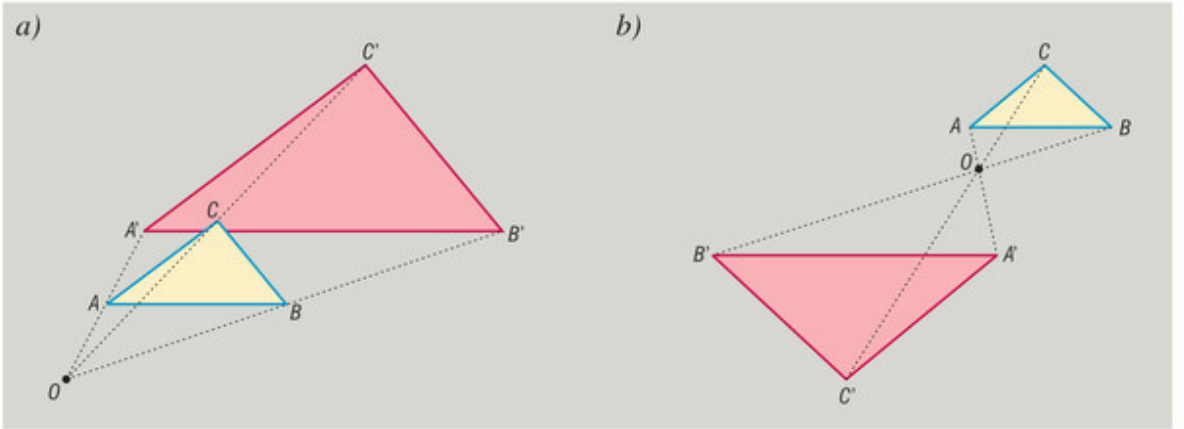



## Hasonlósági transzformációk, alakzatok hasonlósága – megoldások

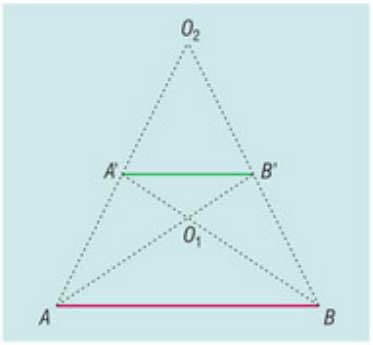
**2315**



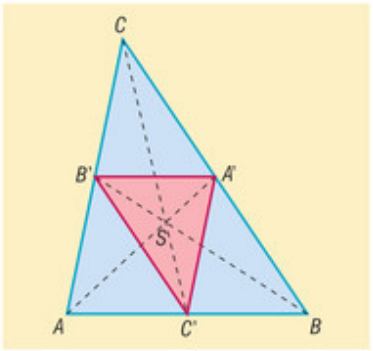

**2316**



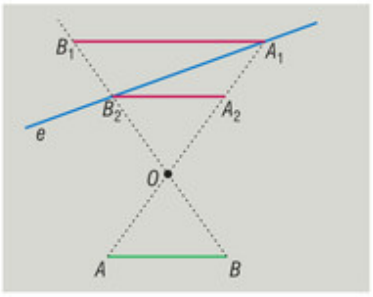
**2317** Két ilyen pont van, melyeket az ábrán $O_1$, illetve $O_2$ jelöl. A hasonlóság aránya $-\frac{1}{2}$, vagy $\frac{1}{2}$.



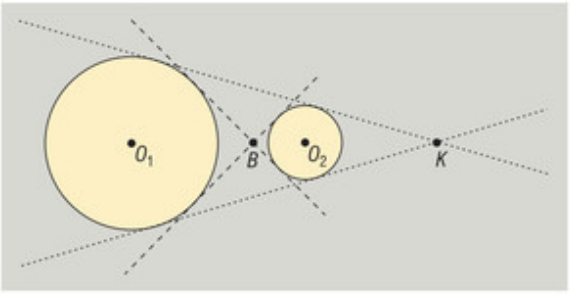

**2318** A középpontos hasonlósági transzformáció középpontja a háromszög súlypontja, aránya $-\frac{1}{2}$.




**2319** A feladatnak két megoldása van, melyeket az ábra szemléltet.




**2320** A feladatnak két megoldása van: az úgynevezett külső és belső hasonlósági pontok. Ezek a pontok a két körhöz húzott közös külső, illetve közös belső érintők metszéspontjai. Ha a két kör sugara megegyezik, akkor a közös külső érintők párhuzamosak egymással, amiből következik, hogy csak egy megoldása van a feladatnak.




**2321** A túra útvonala a valóságban 22,8 km, ennek megtételéhez 6 óra szükséges.

**2322** *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Igaz.
*e)* Igaz. *f)* Igaz. *g)* Hamis. *h)* Igaz.

**2323** *a)* Igen. *b)* Igen. *c)* Nem.

**2324** A háromszög oldalai az egyes esetekben:
*a)* 4,5 cm, 6 cm, 9 cm; *b)* 10,5 cm, 14 cm, 21 cm;
*c)* 6 cm, 8 cm, 12 cm; *d)* 15 cm, 20 cm, 30 cm.

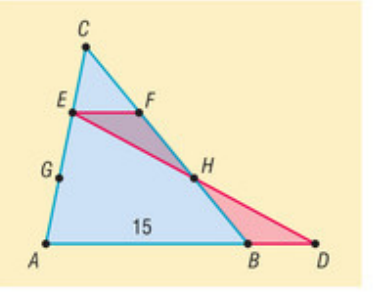
**2325** A négyszög oldalai az egyes esetekben:

*a)* 16 cm, 12 cm, 20 cm, 24 cm; *b)* 24 cm, 18 cm, 30 cm, 36 cm;

*c)* 8 cm, 6 cm, 10 cm, 12 cm.

**2326** A háromszög alapon fekvő szögei 72°-osak, szárszöge 36°-os.

**2327** Az ábra jelöléseit használva megállapíthatjuk, hogy a $CEF$ és $CAB$ háromszögek hasonlók egymáshoz, továbbá a $HEF$ és $HDB$ háromszögek egybevágók egymással. Az elmondottakból következik, hogy $EF = 5$ cm és $BD = 5$ cm. (➡)



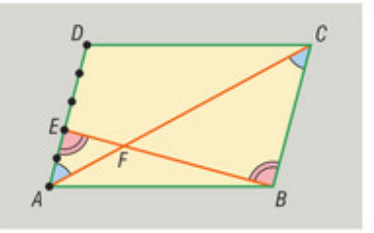

**2328** A trapéz átlói az alapok arányában osztják egymást, így a keresett arány $1 : 7$.

**2329** A trapéz hosszabb alapja 60 cm. Ha az átlók $p : q$ arányban osztják egymást, akkor a hosszabb alap $12 \cdot \frac{q}{p}$ cm.

**2330** A párhuzamos szakasz $k$ hossza a két alap mértani közepe, azaz $k = \sqrt{a \cdot c}$.

**2331** A trapéz kiegészítő háromszögének trapézon kívüli csúcsa 15 cm távolságra van az ismert szár rövidebb alapra illeszkedő végpontjától.

**2332** Az ábra jelöléseinek megfelelően az $AD$ oldalt $2 : 3$ arányban osztó pontot $E$, az $AC$ és $BE$ szakaszok metszéspontját pedig $F$ jelöli. Ekkor $AEF\sphericalangle = CBF\sphericalangle$, továbbá $EAF\sphericalangle = BCF\sphericalangle$, mivel páronként váltószögekről van szó. Az elmondottakból az is következik, hogy az $AEF$ és $CBF$ háromszögekben két-két szög egyenlő, így a két háromszög hasonló egymáshoz. A megfelelő oldalak aránya




$$\frac{AF}{FC} = \frac{EF}{FB} = \frac{AE}{BC} = \frac{2}{5},$$

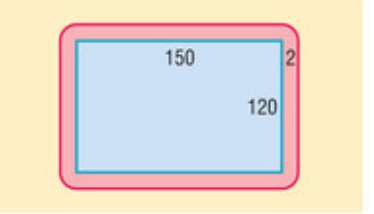
így a két szakasz $2 : 5$ arányban osztja egymást.

**2333** *a)* A lakónegyed a térképen ábrázolt téglalap középpontosan nagyított képének tekinthető, ahol a hasonlóság aránya 1500, ezért a lakónegyedet a valóságban egy 120 méter és 150 méter hosszú oldalakkal rendelkező téglalap határolja. A lakónegyed területe 18 000 m$^2$.

*b)* Ha járda szélessége mindenhol 2 méter, akkor a járda négy téglalapból, valamint négy negyedkörből áll az ábrának megfelelően.

A járda területe:

$$T = 2 \cdot 2 \cdot 120 + 2 \cdot 2 \cdot 150 + 2^2 \cdot \pi \approx 1092{,}57 \text{ m}^2.$$




**2334** Mindkét feladat megoldásánál vegyük észre, hogy bármely két olyan háromszög hasonló egymáshoz, amelyben az oldalak aránya $2 : 3 : 4$. Ezt az észrevételt felhasználva a szerkesztés lépései:

1. Szerkesztünk egy háromszöget, amelynek oldalai 2 cm, 3 cm, 4 cm.
2. Megszerkesztjük a kapott háromszög köré írt (beírt) körét.
3. Megjelöljük az egyik olyan pontot, amelyre vonatkozó középpontos hasonlóság a háromszög köré írt (beírt) körét az adott körbe viszi át.
4. A megszerkesztett háromszöget ugyanannak a középpontos hasonlóságnak vetjük alá, amely a köré írt (beírt) kört az adott körbe viszi át; a képháromszög köré írt (beírt) köre épp az adott kör lesz.

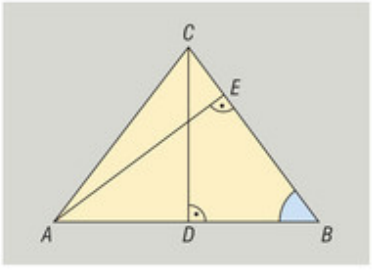
**2335** A szerkesztés például azon az észrevételen alapulhat, hogy bármely két olyan háromszög hasonló egymáshoz, amelyekben a szögek megegyeznek. Ezért a szerkesztés lépései:

1. Szerkesztünk egy olyan háromszöget, amelynek szögei az adott szögekkel egyenlők.
2. A megadott szakaszt, melynek hossza a szerkeszteni kívánt háromszög kerületével egyenlő, felosztjuk az 1. pontban szerkesztett háromszög oldalainak arányában.
3. A kapott szakaszokkal, mint oldalakkal a szokásos módon háromszöget szerkesztünk.

**2336** Vegyük észre, hogy bármely két olyan háromszög hasonló egymáshoz, amelyben egy szög, valamint a szöget közrefogó oldalak aránya megegyezik. Ezért a szerkesztés lépései a következők:

1. Szerkesztünk egy háromszöget, amelynek egyik szöge az adott szög, a közrefogó oldalak aránya pedig $2:3$.
2. A megadott szakaszt, melynek hossza a szerkeszteni kívánt háromszög kerületével egyenlő, felosztjuk az 1. pontban szerkesztett háromszög oldalainak arányában.
3. A kapott szakaszokkal, mint oldalakkal a szokásos módon háromszöget szerkesztünk.

**2337** *a)* A $BCD$ és $BAE$ háromszögek derékszögűek, továbbá a $B$ csúcsnál lévő szögük közös, ezért a két háromszög szögei megegyeznek, ami igazolja a háromszögek hasonlóságát.

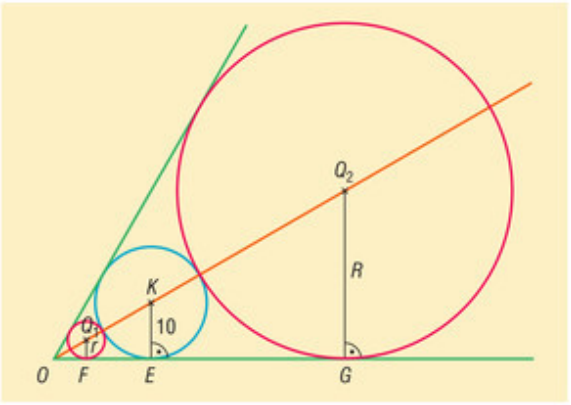



*b)* A hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, ezért:

$$\frac{BE}{AB}=\frac{BD}{BC}, \quad \text{tehát} \quad \frac{BE}{12}=\frac{6}{BC}.$$

A $BDC$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tételével $BC = 10$ cm adódik, és így $BE = 7{,}2$ cm, $EC = 2{,}8$ cm.

**2338** Az adott kör középpontját az ábrán $K$, az egyik szögszáron létrejövő érintési pontját $E$ jelöli. A feladatnak két megoldása van, amelyeket az ábrán piros színnel jelöltünk. A kisebb kör középpontját $Q_1$-gyel, a megfelelő száron kialakuló érintési pontját $F$-fel, a nagyobb kör középpontját $Q_2$-vel, érintési pontját $G$-vel jelöltük. Ekkor az $OKE$ és $OQ_2G$ háromszögek hasonlóak, hiszen mindkettő derékszögű, továbbá az $O$ csúcsnál lévő szögük közös.




A háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, ezért az $OQ_2 = OK + 10 + R$ összefüggést felhasználva:

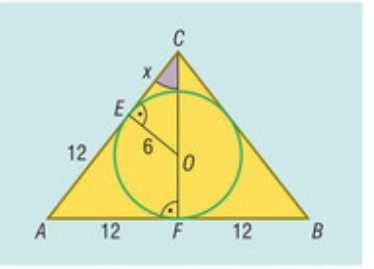
$$\frac{KE}{OK}=\frac{R}{OQ_2}, \quad \text{azaz} \quad \frac{10}{OK}=\frac{R}{OK+10+R}.$$

Vegyük még észre, hogy az $OKE$ derékszögű háromszög $O$ csúcsánál 30°-os szög van, ezért egy „félszabályos" háromszög. Az ilyen háromszögben az átfogó a rövidebb befogó kétszerese, vagyis $OK = 20$ cm. Az előző egyenlőségbe behelyettesítve, majd a műveleteket elvégezve $R = 30$ cm adódik.

A kisebb, $Q_1$ középpontú kör sugara a fenti gondolatmenet értelemszerű módosításával számolható.

A számolásokat elvégezve $r = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$ cm adódik.

**2339** *a)* Ha az $ABC$ háromszögbe írt kör az $E$ pontban érinti a háromszög $AC$ oldalát, akkor a kör érintőjének tulajdonsága alapján $OE$ merőleges $AC$-re. Ebből kifolyólag az $OEC$ háromszög derékszög csakúgy, mint az $AFC$ háromszög. A két háromszög $C$ csúcsánál lévő szögük közös, ezért a két háromszög szögei megegyeznek és így valóban hasonlók egymáshoz.




*b)* Az ábra jelölései alapján $CE = x$, és $AE = 12$ cm, hiszen az $A$ pontból a háromszögbe írható körhöz húzott érintőszakaszok megegyeznek, vagyis $AE = AF = 12$ cm. Az $OEC$ és $AFC$ háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{x}{6} = \frac{CF}{12}, \quad \text{azaz} \quad CF = 2 \cdot x.$$

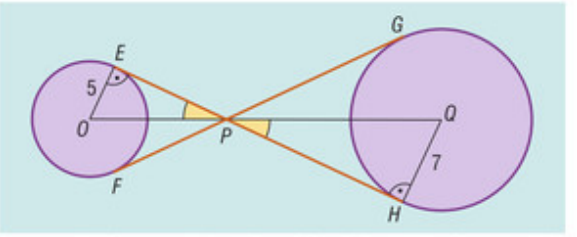
Az $AFC$ háromszögben Pitagorasz tétele alapján:

$$12^2 + (2x)^2 = (x + 12)^2,$$

amiből $3x^2 - 24x = 0$, aminek egyetlen pozitív megoldása $x = 8$, tehát az $ABC$ háromszög $CF$ magassága 16 cm hosszúságú.

*c)* A háromszög alakú doboz területe 192 cm$^2$, a négyzet alakú dobozé 144 cm$^2$. Ebből következik, hogy a háromszög alakú doboz alapterülete a négyzet alakú dobozénál 33,33%-kal nagyobb.

**2340** *a)* Ha a két érintő a $P$ pontban metszi egymást, továbbá az érintési pontok $E$ és $F$, valamint $H$ és $G$, akkor az $OPE$ háromszög hasonló a $QPH$ háromszöghöz, ahol $O$ és $Q$ a körök középpontját jelölik (ld. ábra). Ezt azonnal beláthatjuk, ha felidézzük, hogy a kör érintője merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra, valamint hivatkozunk arra, hogy a két háromszögben a $P$ csúcsnál csúcsszögek vannak, amelyek egyenlő nagyságúak. A két háromszög megfelelő oldalainak arányára:

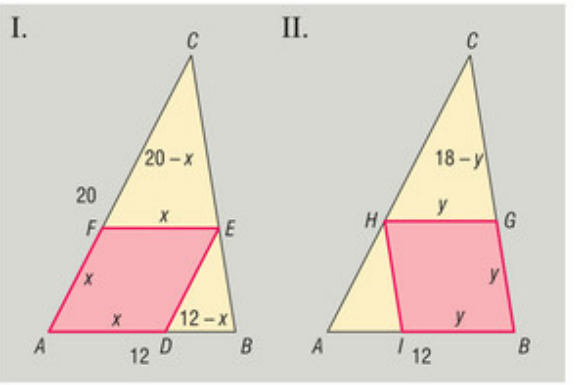



$$\frac{5}{OP} = \frac{7}{300 - OP}, \quad \text{amiből} \quad OP = 125 \text{ méter}.$$

*b)* Az $OEP$ háromszögben Pitagorasz tételével $EP$ kiszámolható: $EP = 124{,}90$ m. A $PHQ$ háromszögben $EP$-nek $PH$ felel meg, és a hasonlóság aránya $\frac{7}{5}$, ezért $PH = \frac{7}{5} \cdot EP = 174{,}86$ méter, így az $EH$ sétaút kb. 299,76 méter hosszú, és ezért a két sétaút együtt 599,52 méter.

**2341** *a)* A feltételeknek megfelelő rombusznak és a háromszögnek egy közös szöge van. Mivel ez a közös szög a háromszög bármelyik szöge lehet, ezért összesen háromféleképpen tudunk rombuszt írni a háromszögbe.

*b)* Vizsgáljuk azt az esetet, amikor az $A$ csúcs közös csúcsa a rombusznak és a háromszögnek (I.). Az $ADEF$ rombusz oldalának hosszát jelöljük $x$-szel. Ekkor az ábrán szereplő $FEC$ és $ABC$ háromszögek hasonlók egymáshoz (szögeik páronként megegyeznek), így:




$$\frac{FE}{FC} = \frac{AB}{AC}, \quad \text{azaz} \quad \frac{x}{20 - x} = \frac{12}{20},$$

$$x = \frac{12 \cdot 20}{20 + 12} = 7{,}5 \text{ cm}.$$

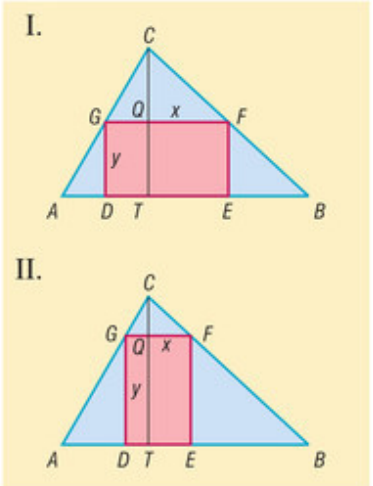
A második esetben (II.) a közös csúcs a $B$ pont. A rombusz oldala ugyanúgy számolható, mint az előbb. A számolások elvégzése után azt kapjuk, hogy a rombusz oldala:

$$y = \frac{18 \cdot 12}{18 + 12} = 7{,}2 \text{ cm}.$$

Végül a harmadik esetben a $C$ csúcs a közös csúcsa a rombusznak és a háromszögnek. Ekkor a rombusz oldalára:

$$z = \frac{18 \cdot 20}{18 + 20} = \frac{180}{19} \ (\approx 9{,}47) \text{ cm adódik.}$$

**2342** A feladat feltételeinek eleget tevő téglalap csúcsait $D, E, F, G$ jelöli, míg $T$ az $AB$ oldalhoz tartozó magasság talppontja, $Q$ a $CT$ magasság és a $GF$ szakasz metszéspontja (ld. ábra). A feladatnak két megoldása van attól függően, hogy a téglalapnak a hosszabb, vagy a rövidebb oldala párhuzamos az $AB$ oldallal. Vizsgáljuk előbb azt az esetet, amikor a hosszabb oldal párhuzamos az $AB$-vel, vagyis $x : y = 5 : 3$ (I.). Mivel az $ABC$ háromszög hasonló az $GFC$ háromszöghöz (szögeik páronként megegyeznek), ezért:



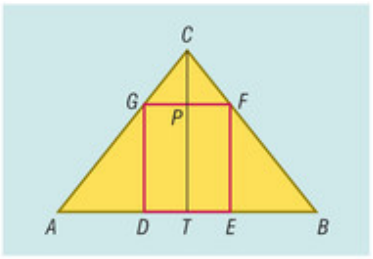

$$\frac{x}{12 - y} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}, \quad \text{amiből} \quad 3x = 60 - 5y.$$

A téglalap oldalainak arányából következik, hogy $3x = 5y$, és így $y = 6$ cm, $x = 10$ cm.

A második esetben (II.) a téglalap rövidebb oldala párhuzamos az $AB$ oldallal, vagyis $x : y = 3 : 5$. Ebben az esetben a megfelelő aránypár változatlan, csak ezúttal $5x = 3y$.

A téglalap oldalai: $y = \frac{150}{17} \approx 8{,}82$ cm és $x = \frac{90}{17} \approx 5{,}29$ cm.

**2343** Az $ABC$ háromszögben $AB = 24$ cm, a hozzá tartozó $CT$ magasság 15 cm, a beírt $DEFG$ téglalap $GF$ oldala 8 cm (ld. ábra). Ekkor a $GFC$ és $ABC$ háromszögek hasonlók egymáshoz (szögeik páronként megegyeznek), ezért:



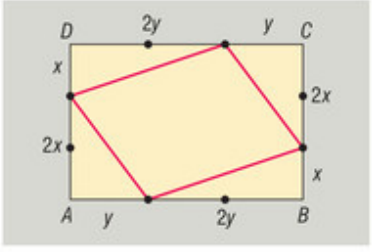

$$\frac{CP}{8} = \frac{15}{24},$$

amiből $CP = 5$ cm, így $PT = 10$ cm. A téglalap másik oldala 10 cm.

**2344** *a)* Ha a téglalap oldalai 12 cm és 18 cm, akkor $x = 4$ cm és $y = 6$ cm. A visszamaradó négyszög oldalai Pitagorasz tételének alkalmazásával számolhatók.

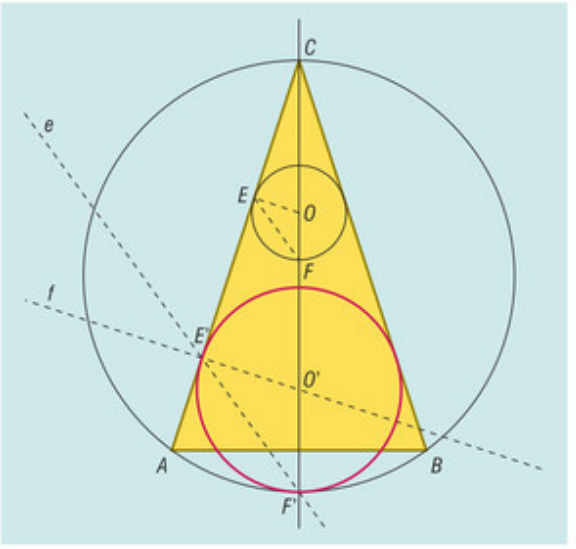
A négyszög oldalai 10 cm, illetve $\sqrt{160} \approx 12{,}65$ cm.

*b)* A visszamaradó négyszög paralelogramma.



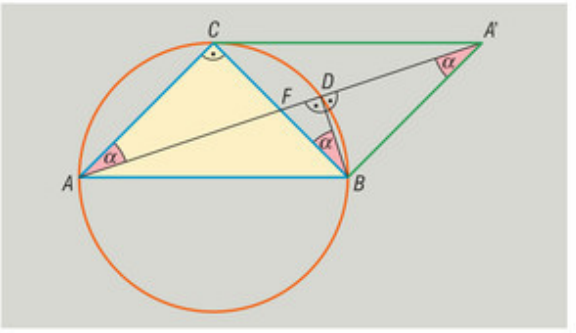

**2345** Előbb egy egyszerűbb feladat megoldását elemezzük. Hagyjuk el a feladat feltételei közül azt, hogy a szerkesztendő kör érinti az $ABC$ háromszög köré írt kört. Ekkor a következő problémához jutunk: szerkesszünk olyan kört, amely érinti a háromszög két szárát. Ilyen körből végtelen sok van, a középpontjuk a $C$ csúcsból induló szögfelezőn található. A megszerkesztett kört egy $C$ középpontú középpontos hasonlósággal átvihetjük abba a körbe, amely már a háromszög köré írt kört is érinti.

Ezek alapján a szerkesztés lépései a következők.




1. Az $ABC$ háromszög köré írható kört szerkesztünk.
2. Az $ABC$ háromszög $C$ csúcsából induló szögfelezőt (egyben a magasságvonalat), valamint a kör $C$-vel átellenes $F'$ pontját megszerkesztjük.
3. Az $AC$ szár egy tetszőleges $E$ pontjában a szárra merőlegest szerkesztünk. Ennek $CF'$-vel való metszéspontja $O$.
4. Megszerkesztjük az $O$ középpontú, $OE$ sugarú kört, ami érinti a szárakat, valamint a szögfelezővel való, $C$-től távolabbi metszéspontja $F$.
5. Az $F'$ ponton átmenő, $EF$-fel párhuzamos $e$ egyenest szerkesztünk.
6. Az $EO$ szakasz megszerkesztése.
7. Megszerkesztjük az $e$ egyenes és az $AC$ szár $E'$ metszéspontján átmenő, $EO$-val párhuzamos $f$ egyenest.
8. Az $f$ egyenes és a $CF'$ szakasz $O'$ metszéspontját, valamint az $O'$ középpontú $E'$-t tartalmazó kört megszerkesztjük.

**2346** Az $ABC$ háromszög $BC$ oldalának felezőpontját az ábrának megfelelően $F$-fel, az $A$ pont $F$-re vonatkozó tükörképét $A'$-vel, a $CAD\sphericalangle$-et $\alpha$-val jelöltük. Az $ABA'C$ négyszög középpontosan szimmetrikus az $F$ pontra vonatkozóan, azaz a négyszög paralelogramma, így $AC$ és $A'B$ párhuzamosak. Ebből adódóan $CAD\sphericalangle = DA'B\sphericalangle = \alpha$, mivel váltószögekről van szó. Vegyük még észre, hogy Thalész tétele alapján $ADB\sphericalangle = 90°$, amiből azonnal következik, hogy $A'DB\sphericalangle = 90°$ szintén teljesül. Ekkor azonban az $AFC$ és $A'BD$ háromszögekben két-két szög megegyezik, ezért a két háromszög hasonló egymáshoz. Ugyanígy hasonló egymáshoz az $AFC$ és $BFD$ háromszög is, mivel mindkettő derékszögű, továbbá a $CAF\sphericalangle = CAD\sphericalangle$, valamint a $DBF\sphericalangle = DBC\sphericalangle$ egyaránt a rövidebb $DC$ köríven nyugvó kerületi szögek, és ezért a kerületi szögek tétele alapján mindkét szög $\alpha$-val egyenlő.




Az $AFC$ és $BFD$ háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{FC}{AC} = \frac{FD}{BD}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{2} = \frac{FD}{BD}, \quad \text{amiből} \quad FD = \frac{1}{2} \cdot BD. \qquad (1)$$

Az $AFC$ és $A'BD$ háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{FC}{AC} = \frac{BD}{A'D}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{2} = \frac{BD}{A'D}, \quad \text{amiből} \quad A'D = 2 \cdot BD. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) összefüggések megfelelő oldalait összeadva:

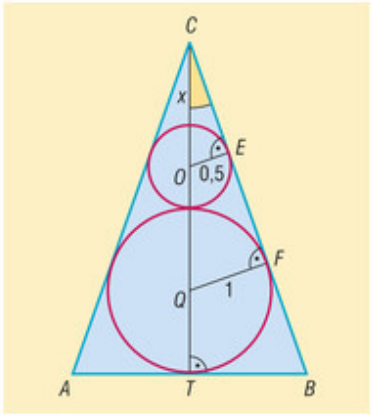
$$FD + A'D = \frac{5}{2} \cdot BD \quad \Rightarrow \quad FA' = \frac{5}{2} \cdot BD.$$

Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, ezért $AF = FA'$, így $AF = \frac{5}{2} \cdot BD$ szintén teljesül. Ekkor viszont:

$$AD = AF + FD = \frac{5}{2} \cdot BD + \frac{1}{2} \cdot BD = 3 \cdot BD,$$

amit bizonyítani kellett.

**2347** *a)* Az ábrán az $ABC$ egyenlő szárú háromszögbe írt kisebb kör középpontját $O$, a nagyobbét $Q$, míg a $BC$ száron lévő érintési pontokat $E$, illetve $F$ jelöli. Látható, hogy a $COE$, valamint a $CQF$ háromszögekben a $C$ csúcsnál lévő szög közös, továbbá mindkét háromszög derékszögű, így a két háromszög hasonló egymáshoz. Ha $CO = x$, akkor




$$\frac{x}{0{,}5} = \frac{x + 1{,}5}{1},$$

$$x = 1{,}5 \text{ méter.}$$

Ezek alapján az $ABC$ háromszög $CT$ magasságának hosszára:

$$CT = x + OQ + QT = 1{,}5 + 1{,}5 + 1 = 4 \text{ méter.}$$

A szintén derékszögű $CBT$ háromszögben a $C$ csúcsnál ugyanakkora szög van, mint a $COE$ háromszögben, ezért ez a két háromszög is hasonló egymáshoz. A megfelelő oldalak aránya:

$$\frac{CB}{CT} = \frac{CO}{CE}, \text{ azaz } \frac{CB}{4} = \frac{1{,}5}{CE}.$$

A $COE$ háromszög $CE$ befogójának hosszára Pitagorasz tételével kapjuk:

$$CE = \sqrt{2} \text{ m } (\approx 1{,}41 \text{ m}).$$

Az utolsó egyenlőségbe történő visszahelyettesítés után:

$$CB = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3 \cdot \sqrt{2} \text{ m } (\approx 4{,}24 \text{ m}).$$

A $COE$ és $CBT$ háromszögek hasonlóságát még egyszer felhasználva:

$$\frac{BT}{CT} = \frac{OE}{CE}, \text{ azaz } \frac{BT}{4} = \frac{0{,}5}{\sqrt{2}}.$$

Rendezés után megkapjuk $BT$ hosszát:

$$BT = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ m } (\approx 1{,}41 \text{ m}).$$

A kartonlap oldalai tehát $AB = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2{,}83$ méter, $BC = AC = 3 \cdot \sqrt{2} \approx 4{,}24$ méter.

*b)* Az $ABC$ kartonlap területe:

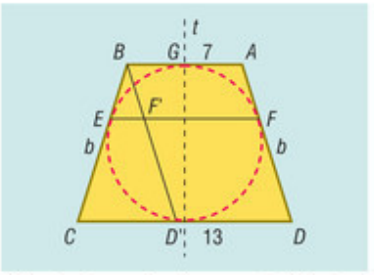
$$T = \frac{AB \cdot CT}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 4}{2} = 4 \cdot \sqrt{2} \text{ m}^2 \ (\approx 5{,}66 \text{ m}^2).$$

A két céltábla területének összege:

$$t = 0{,}5^2 \cdot \pi + 1^2 \cdot \pi = \frac{5 \cdot \pi}{4} \text{ m}^2 \ (\approx 3{,}93 \text{ m}^2).$$

A veszteség: $\frac{T - t}{T} \approx 0{,}306$, azaz körülbelül 30,6%.

**2348** *a)* Mivel az $ABCD$ négyszög szimmetrikus trapéz, ezért szárai megegyeznek, azaz $AD = BC = b$. Az érintőnégyszögek tétele alapján a trapéz szemközti oldalai hosszának összege megegyezik, azaz $2 \cdot b = 7 + 13 = 20$, így $b = 10$ cm. A trapéz szárai 10 cm hosszúak.




*b)* Használjuk ki, hogy a trapéz tengelyesen szimmetrikus az alapok közös felezőmerőlegesére, amelyet az ábrán $t$-vel jelöltünk. A $t$ tengelyre vonatkozó tükrözés a beírt kört önmagába, míg a $BC$ szárat az $AD$ szárba viszi át. Nyilvánvaló, hogy az $E$ érintési pont képe az $F$ érintési pont. Ebből következik, hogy a $t$ tengelyre vonatkozó tükrözés az $EF$ szakaszt szintén önmagába viszi. Ez csak úgy lehetséges, ha az $EF$ szakasz merőleges a tükrözés tengelyére, de ekkor $EF$ valóban párhuzamos a trapéz alapjaival.

*c)* Toljuk el az $AD$ szárat önmagával párhuzamosan úgy, hogy az $A$ csúcs a $B$ csúcsba, a $D$ csúcs a $D'$, az $F$ pont az $F'$ pontba kerüljön. Ekkor $BD' = AD = 10$ cm, továbbá a $D'DAB$ négyszög paralelogramma, ezért $DD' = BA = 7$ cm, amiből $CD' = 6$ cm adódik.

A $CD'B$ és az $EF'B$ háromszög szögei páronként megegyeznek, ezért a két háromszög hasonló egymáshoz, így megfelelő oldalaik arányára igaz, hogy:

$$\frac{CD'}{BC} = \frac{EF'}{BE}, \quad \text{azaz} \quad \frac{6}{10} = \frac{EF'}{BE}.$$

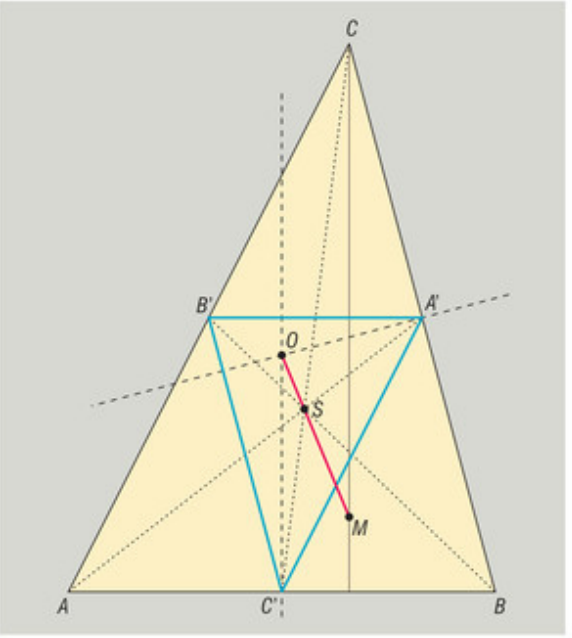
Végül vegyük észre, hogy a $B$ pontból a trapézba írható körhöz húzott érintőszakaszok, $BE$ és $BG$ egyenlők, továbbá $G$ az $AB$ szakasz felezőpontja, ezért $BE = BG = 3{,}5$ cm. Helyettesítsük be a kapott eredményt az utolsó egyenlőségbe, így adódik, hogy:

$$\frac{6}{10} = \frac{EF'}{3{,}5}, \quad EF' = 2{,}1 \text{ cm}.$$

Ekkor viszont

$$EF = EF' + F'F = 2{,}1 + 7 = 9{,}1 \text{ cm}.$$

**2349** Az ábrán az $ABC$ háromszög oldalfelező pontjait $A'$, $B'$, $C'$; súlypontját $S$; magasságpontját $M$; köré írható körének középpontját pedig $O$ jelöli. A súlypont ismert tulajdonságait ezúttal úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $ABC$ háromszöget a súlypontra vonatkozó $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság átviszi az $A'B'C'$ háromszögbe. Megmutatjuk, hogy a középpontos hasonlóság az $M$ pontot az $O$ pontba viszi át. Ehhez elegendő belátnunk, hogy az $O$ pont egyben az $A'B'C'$ háromszög magasságpontja is. Mivel az $O$ pont az $ABC$ háromszög köré írható körének középpontja, ezért $O$ illeszkedik pl. az $A'$ pontban a $BC$-re emelt merőlegesre. Ez a merőleges azonban nemcsak a $BC$-re, hanem az azzal párhuzamos $B'C'$-re is merőleges, azaz az $A'B'C'$ háromszögnek egyben egyik magasságvonala is.

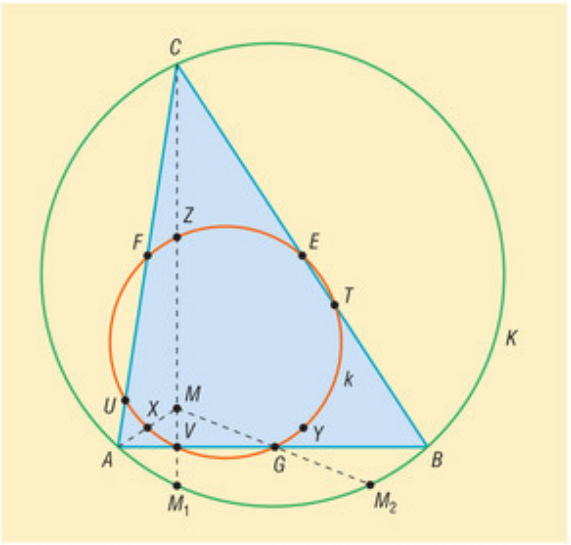



Hasonlóan igazolható, hogy $O$ az $A'B'C'$ háromszög másik két magasságvonalán is rajta van, ezért $O$ valóban az $A'B'C'$ háromszög magasságpontja.

A középpontos hasonlóság során a pont ($M$), a képe ($O$), valamint a hasonlóság centruma ($S$) egy egyenesre illeszkednek, ezért a feladat állítását igazoltuk. Mivel az $S$ középpontú, $-\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság $M$-et $O$-ba viszi, ezért $S$ az $OM$ szakaszt $1:2$ arányban osztja úgy, hogy az $O$ ponthoz van közelebb.

Megjegyezzük, hogy szabályos háromszögben a három nevezetes pont egybeesik, ezért nem jön létre egyértelműen az Euler-egyenes.

**2350** Az $ABC$ háromszög $K$ köré írt körét az $M$ magasságpontból felére kicsinyítve a $k$ kört kapjuk. Megmutatjuk, hogy a $k$ kör tartalmazza az $AB$ oldalhoz tartozó magasságvonal $V$ talppontját, az $AB$ oldal $G$ felezőpontját, valamint az $AM$ szakasz $X$ felezőpontját (lásd ábra). Ez utóbbi nyilvánvaló, hiszen az $A$ csúcs a $K$ kör egy pontja, $M$ pedig a középpontos hasonlóság centruma, ezért az $A$ pont éppen az $AM$ szakasz $X$ felezőpontjába megy át.




A 2292. feladat *a)* részfeladatában megmutattuk, hogy az $M$ pont $AB$ egyenesre vonatkozó $M_1$ tükörképe illeszkedik a háromszög köré írható $K$ körre. Ekkor azonban az $MM_1$ szakasz $V$ felezőpontja a tükörtengely, vagyis az $AB$ oldalegyenes egy pontja. Mivel az $MM_1$ szakasz egyben merőleges is az $AB$ egyenesre csakúgy, mint a $CM$ egyenes, ezért a $C$ csúcsból induló magasságvonal tartalmazza az $MM_1$ szakaszt, így a $V$ pont éppen a magasságvonal talppontja. Összefoglalva elmondhatjuk, hogy a $K$ körön található $M_1$ pont $M$-re vonatkozó kicsinyített képe ($V$) az $AB$ oldalhoz tartozó magasságvonal talppontja. Mivel a kicsinyítés illeszkedéstartó, ezért a $V$ pont valóban illeszkedik a $K$ kör kicsinyített képére, azaz a $k$ körre.

A 2292. feladat *b)* részfeladatában azt is megmutattuk, hogy az $M$ pontnak az $AB$ szakasz $G$ felezőpontjára vonatkozó tükörképe ($M_2$) szintén illeszkedik a $K$ körre. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a $K$ körön lévő $M_2$ pont kicsinyített képe megegyezik a $G$ ponttal. Ebből következik, hogy a $G$ pont valóban illeszkedik a $k$ körre.

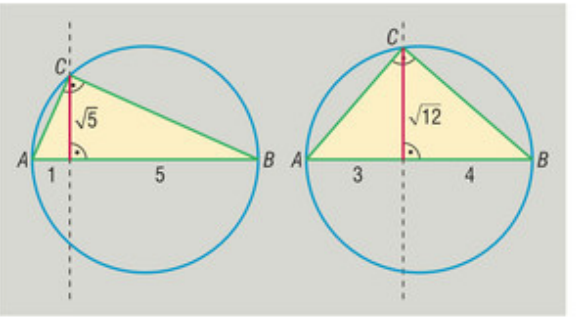
Ugyanígy bizonyíthatjuk, hogy nemcsak az $X$, $V$, $G$ pontok illeszkednek a $K$ kör kicsinyített képére, hanem a háromszög másik két oldalának felezőpontjai ($E$ és $F$), a másik két csúcs és a magasságpont közti szakaszok felezőpontjai ($Y$ és $Z$), valamint a másik két magasságvonal talppontjai ($U$ és $T$) is. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

## Arányossági tételek a derékszögű háromszögben és a körben – megoldások

**2351** A kör sugara 6,5 cm. A feladat a magasságtétel segítségével is megoldható: $\sqrt{(2r-9)\cdot 9} = 6$, amiből $r = 6{,}5$ cm. Mivel $6{,}5 < 9$, ezért a 9 cm a nagyobb körszelet magassága.

**2352** Az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót két olyan részre bontja, amelyek hossza $\frac{25}{\sqrt{34}} \approx 4{,}29$ cm, illetve $\frac{9}{\sqrt{34}} \approx 1{,}54$ cm. Az átfogóhoz tartozó magasság hossza $\frac{15}{\sqrt{34}} \approx 2{,}57$ cm.

**2353** A feladat megoldható például a magasságtétel alkalmazásával. A szerkesztés menetét az ábrán követhetjük nyomon. (➡)



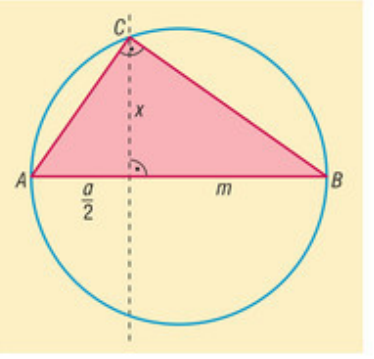

**2354** A háromszög befogóinak hossza:

$$16 \cdot \sqrt{3} \approx 27{,}71 \text{ cm} \quad \text{és} \quad 16 \text{ cm}.$$

**2355** A háromszög másik befogója: $\frac{65}{12} \approx 5{,}42$ cm, az átfogója $\frac{169}{12} \approx 14{,}08$ cm. Az átfogóhoz tartozó magasság 5 cm hosszú.

**2356** A két négyzet területének aránya $2 : 5$.

**2357** Ha a szabályos háromszög oldala $a$, magassága $m$, akkor területe $\frac{a \cdot m}{2}$, a vele megegyező területű négyzet oldala pedig $x = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot m}$. Az $x$ hosszúságú szakasz szerkesztése a magasságtétel segítségével történhet. A szerkesztés menete az ábrán nyomon követhető. A négyzet oldalának ismeretében a négyzet a szokásos módon szerkeszthető. (➡)

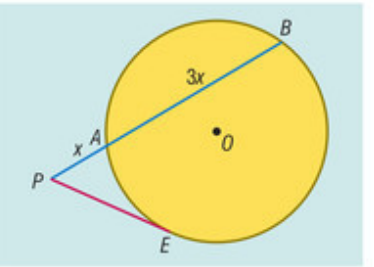



**2358** Feladatként a $\sqrt{15}$ cm hosszú szakaszt kell megszerkeszteni. A szerkesztés a magasságtétel segítségével történhet. A négyzet oldalának ismeretében a négyzet a szokásos módon szerkeszthető.

**2359** A trapéz magassága $\sqrt{50} \approx 7{,}07$ cm, területe $10 \cdot \sqrt{50} \approx 70{,}71 \text{cm}^2$.

**2360** Ha a $P$ ponton át húzott szelő a kört $A$-ban és $B$-ben metszi, akkor $PA = x$, $PB = 4 \cdot x$, és ebből adódóan $AB = 3 \cdot x$. A $PB$ szelőszakasz 12 cm-rel hosszabb, mint $PA$, ezért $AB = 12$ cm, amiből $x = 4$ cm. Ekkor az érintő- és szelőszakaszok tétele szerint a $P$-ből húzott érintőszakasz hossza:

$$PE = \sqrt{x \cdot 4x} = 2 \cdot x = 8 \text{ cm}.$$




**2361** A két szelőszakasz hossza 5 cm, 20 cm.

**2362** *a)* A pont a kör középpontjától $\sqrt{35} \approx 5{,}92$ cm távolságra van.

*b)* A szelő a kör középpontjától $\frac{\sqrt{95}}{2} \approx 4{,}87$ cm távolságra halad.

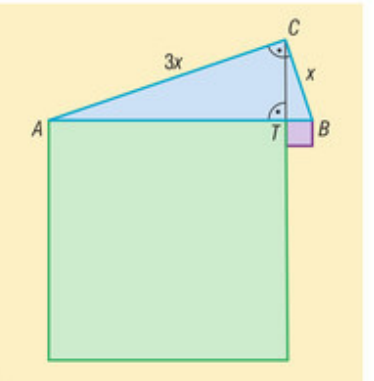
**2363** A feltételek szerint az $ABC$ derékszögű háromszög befogóit $BC = x$, $AC = 3 \cdot x$ alakban írhatjuk fel. Ha az átfogóhoz tartozó magasság talppontja $T$, akkor a befogótétel alapján:

$$x^2 = BT \cdot AB \quad \text{és} \quad (3x)^2 = AT \cdot AB.$$

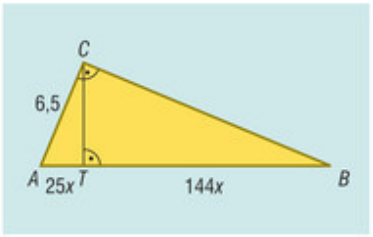
A két egyenlőség megfelelő oldalait egymással elosztva, négyzetre emelés után adódik, hogy:

$$\frac{1}{9} = \frac{BT}{AT}, \quad \text{amiből} \quad \frac{1}{81} = \frac{BT^2}{AT^2}.$$

A kapott egyenlőség alapján az átfogó két szeletére emelt négyzetek területének aránya $1 : 81$.



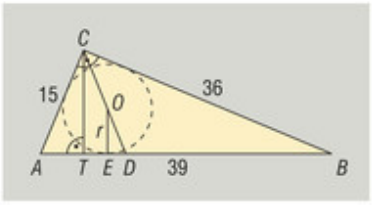
**2364** Az ábra jelölései mellett a $CT$ magasság az $AB$ átfogót két olyan szakaszra bontja, amelyek hossza $25 \cdot x$ és $144 \cdot x$. A befogótétel alapján:




$$6{,}5 = \sqrt{25x \cdot 169x} = 65x,$$

amiből $x = 0{,}1$. A háromszög átfogója így 16,9 cm, hosszabb befogója Pitagorasz tételével számolható. A $BC$ befogó hossza 15,6 cm.

**2365** *a)* A háromszög $AB$ átfogója Pitagorasz tételével számolható: $AB = 39$ cm. Ha az átfogóhoz tartozó magasság talppontja $T$, akkor a befogótétel alapján $15^2 = AT \cdot 39$, $36^2 = BT \cdot 39$, és így $AT = 5{,}77$ cm, $BT = 33{,}23$ cm.




*b)* Az átfogóhoz tartozó $CD$ szögfelező hossza a $CTD$ derékszögű háromszögből számolható. Előbb azonban kiszámoljuk az $AD$ és $BD$ szakaszok hosszát a szögfelezőtétellel:

$$\frac{AD}{39 - AD} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}, \text{ amiből } AD\text{-t kifejezve: } AD = \frac{195}{17} \ (\approx 11{,}47 \text{ cm}).$$

A $CTD$ háromszög $TD$ befogója: $TD = AD - AT = 11{,}47 - 5{,}77 = 5{,}7$ cm.

A $CT$ magasság az $ABC$ háromszögben a magasságtétellel számolható:

$$CT = \sqrt{AT \cdot BT} = 13{,}85 \text{ cm}.$$

Végül a $CTD$ háromszögben Pitagorasz tételével kapjuk, hogy:

$$CD = \sqrt{TD^2 + CT^2} = \sqrt{5{,}7^2 + 13{,}85^2} \approx 14{,}98 \text{ cm}.$$

*c)* A háromszög területe $t = r \cdot s$, ahol $r$ a beírt kör sugara, $s$ a háromszög kerületének fele. Ezek alapján:

$$\frac{15 \cdot 36}{2} = r \cdot \frac{15 + 36 + 39}{2},$$

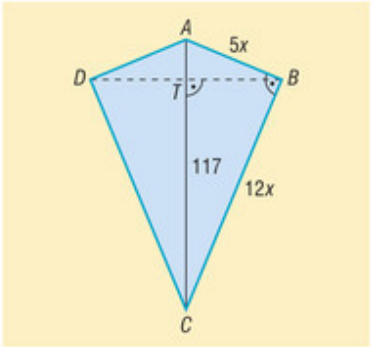
amiből $r = 6$ cm-t kapunk.

*d)* Az $EDO$ és $TDC$ háromszögek hasonlók egymáshoz, mivel szögeik páronként megegyeznek. Ezek alapján a megfelelő oldalak aránya megegyezik, vagyis:

$$\frac{r}{OD} = \frac{CT}{CD}.$$

A már kiszámított adatokat behelyettesítve, majd a műveleteket elvégezve $OD = 6{,}49$ cm-t kapunk. A beírt kör középpontjának $C$ csúcstól való távolsága: $CO = CD - OD = 8{,}49$ cm.

**2366** *a)* Ha a két háromszögből a leírtak alapján készítünk sárkányt, akkor az $ABCD$ deltoidhoz jutunk. A deltoidban $AB = 5 \cdot x$, $BC = 12 \cdot x$, az $AC$ átló 117 cm hosszú, továbbá a $B$ és $D$ csúcsánál derékszögek vannak (lásd ábra). Az $ABC$ háromszögben Pitagorasz tétele alapján $(5x)^2 + (12x)^2 = 117^2$, amiből $x = 9$ cm, a háromszög befogói pedig: $AB = 45$ cm, $BC = 108$ cm. Szintén az $ABC$ háromszögben a befogótétel is alkalmazható, így kapjuk, hogy:




$$45^2 = AT \cdot 117 \quad \text{és} \quad 108^2 = CT \cdot 117.$$

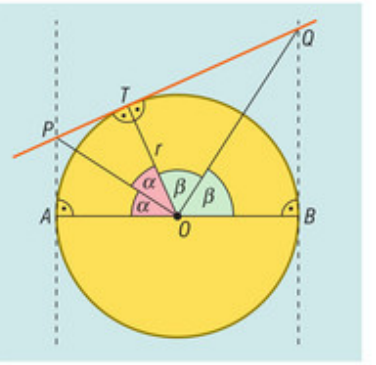
A számolásokat elvégezve $AT = 17{,}3$ cm, illetve $CT = 99{,}7$ cm.

Végül alkalmazzuk a magasságtételt az $ABC$ háromszögben: $BT = \sqrt{17{,}3 \cdot 99{,}7} = 41{,}5$ cm. A deltoid átlói, azaz a szükséges nádszálak hossza: $BD = 83{,}0$ cm, $AC = 117{,}0$ cm.

*b)* Az *a)* részfeladatban kiszámoltuk, hogy a $BD$ átló az $AC$ átlót 17,3 cm, illetve 99,7 cm hosszú részekre bontja. Mivel a deltoid szimmetriatengelye megfelezi a másik átlót, ezért az $AC$ átló a $BD$-t két egyenlő részre bontja:

$$BT = TD = 41{,}5 \text{ cm}.$$

**2367** *a)* A két párhuzamos érintő az ábra szerint az $A$ és $B$ pontokban érinti a kört, a $PQ$ érintő érintési pontját pedig $T$ jelöli. Mivel az érintő merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra, ezért az érintési pontoknál kialakuló szögek 90°-osak; ezeket az ábrán bejelöltük. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok megegyeznek, ezért $PA = PT$, illetve $QT = QB$. Vegyük még észre, hogy az $AOP$, $TOP$, $TOQ$, $BOQ$ háromszögekben egy-egy befogó a kör sugarával egyenlő, amiből az is következik, hogy az $AOP$ háromszög a $TOP$ háromszöggel, a $TOQ$ háromszög pedig a $BOQ$ háromszöggel egybevágó (két oldal + a közrezárt szög egyenlősége alapján).




Az egybevágó háromszögekben az egymásnak megfelelő szögek egyenlők, azaz:

$$AOP\sphericalangle = TOP\sphericalangle = \alpha, \quad \text{valamint} \quad TOQ\sphericalangle = BOQ\sphericalangle = \beta.$$

Ez azt is jelenti, hogy:

$$POQ\sphericalangle = \alpha + \beta = \frac{AOB\sphericalangle}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

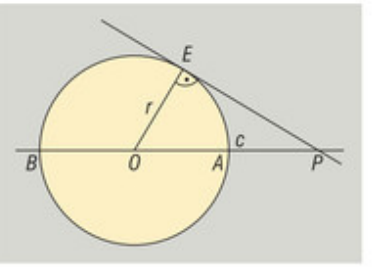
Ezzel igazoltuk, hogy a $POQ$ háromszög derékszögű.

*b)* A már elmondottakból következik, hogy $OT$ a $POQ$ háromszög $PQ$ átfogójához tartozó magassága, így a magasságtétel alapján

$$r = TO = \sqrt{PT \cdot TQ},$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

**2368** *a)* A megoldás az ábrán látható.



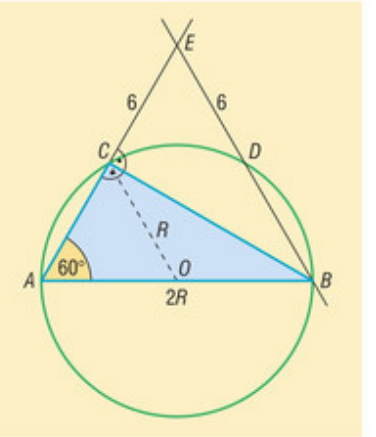

*b)* A szelőszakaszok hossza: $PA = c - r$, $PB = c + r$.

*c)* A körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele alapján:

$$(c - r) \cdot (c + r) = PE^2.$$

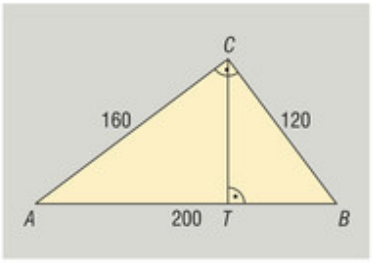
Ha elvégezzük a bal oldali műveleteket, és a kapott egyenlőséget átrendezzük, akkor $c^2 = PE^2 + r^2$-hez jutunk, ami éppen Pitagorasz tétele az $OEP$ derékszögű háromszögben.

**2369** *a)* Belátható, hogy a $D$ pont csak a rövidebb $BC$ köríven helyezkedhet el. Ekkor viszont az érintő- és szelőszakaszok tétele alapján $EC \cdot EA = ED \cdot EB$, továbbá $EC = ED = 6$ miatt $EA = EB$. Ez azt is jelenti, hogy az $ABE$ háromszög egyenlő szárú és az alapon fekvő egyik szöge 60°-os. Ebből adódóan az alapon fekvő másik szöge is 60°-os, így a háromszög valóban szabályos.

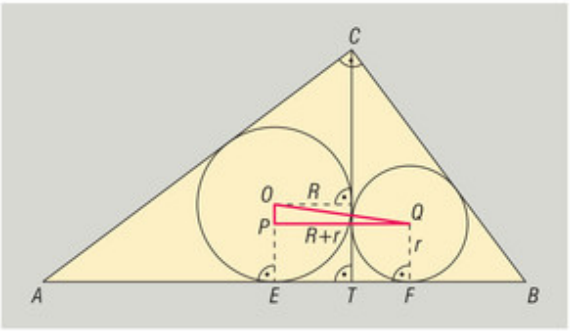



*b)* Ha az $ABC$ háromszög köré írt kör sugarát $R$ jelöli, akkor az $AOC$ egyenlő szárú háromszögben két oldal hossza $R$, továbbá az $AC$ alapon fekvő szög 60°-os, ezért a háromszög szintén szabályos, így $AC = R$. Ekkor az $ABE$ szabályos háromszög $AB$ oldala $2R$, $EA$ oldala $R + 6$. A két oldal egyenlősége alapján $R = 6$ cm.

**2370** *a)* A park $AB$ átfogójára Pitagorasz tételével $AB = 200$ méter adódik. Az átfogóhoz tartozó $CT$ magasság az átfogót az $AT$ és $BT$ szakaszokra bontja. Ekkor a befogótételt az $AC$ befogóra felírva: $160^2 = AT \cdot 200$, $AT = 128$ m, amiből $BT = 72$ m. A háromszög $CT$ magassága a magasságtétellel számolható: $CT^2 = 128 \cdot 72$, így $CT = 96$ m. Ekkor a park egyik részének megkerülése 384 méter, a másik részé 288 méter hosszú sétával lehetséges.




*b)* A szökőkutak az $ATC$, ill. a $BTC$ háromszögek beírt köreinek középpontjába kerülnek. Legyen az ábra jelöléseinek megfelelően a két kút $O$ és $Q$, a két háromszög beírt köreinek sugara $R$ és $r$, a beírt körök átfogóval vett érintési pontjai $E$ és $F$. Mivel a kör érintője merőleges az érintési ponthoz tartozó sugarára, ezért $OE$ és $QF$ merőleges az $AB$ átfogóra, amiből következik, hogy egymással viszont párhuzamosak.




Ez azt is jelenti, hogy az $OEFQ$ négyszög trapéz, amelynek alapjai $OE$ és $QF$. Ha ebben a trapézban meghúzzuk a $QP$ magasságot, akkor az $OPQ$ derékszögű háromszögben

$$OP = OE - PE = OE - QF = R - r, \text{ továbbá } PQ = ET + TF = R + r.$$

Alkalmazzuk Pitagorasz tételét az $OPQ$ háromszögben, így

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2,$$
$$OQ^2 = (R - r)^2 + (R + r)^2,$$
$$OQ^2 = R^2 - 2Rr + r^2 + R^2 + 2Rr + r^2,$$
$$OQ = \sqrt{2 \cdot (R^2 + r^2)}.$$

Látható, hogy az $OQ$ kiszámolása $R$ és $r$ ismeretében már nem nehéz feladat. A két sugár kiszámolásához használjuk fel, hogy a háromszög területe a beírt kör sugarának és félkerületének szorzata, ezért:

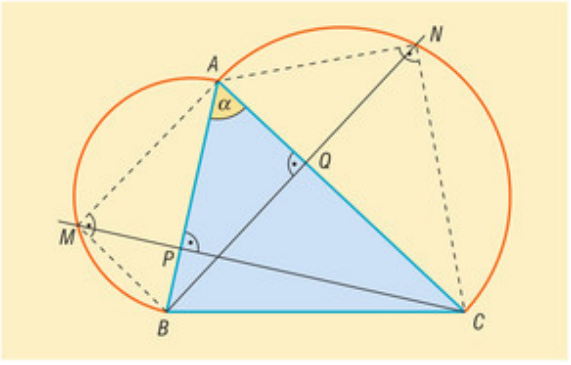
$$R = \frac{T_{ATC}}{s_{ATC}} = \frac{128 \cdot 96}{128 + 96 + 160} = 32 \text{ m}, \quad \text{illetve} \quad r = \frac{T_{BTC}}{s_{BTC}} = \frac{72 \cdot 96}{72 + 96 + 120} = 24 \text{ m}.$$

Ekkor az $OQ$ szakasz hossza

$$OQ = \sqrt{2 \cdot (32^2 + 24^2)} = 40 \cdot \sqrt{2} \approx 57{,}0 \text{ méter}.$$

A két szökőkút távolsága 57 méter.

**2371** *a)* A feladat szövegének megfelelő ábra:




*b)* Az $APC$ és $AQB$ derékszögű háromszögekben az $A$ csúcsnál ugyanakkora hegyesszög van, ezért a két háromszög szögei páronként megegyeznek, így hasonlók egymáshoz. A megfelelő oldalaik aránya:

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AQ}{AB},$$

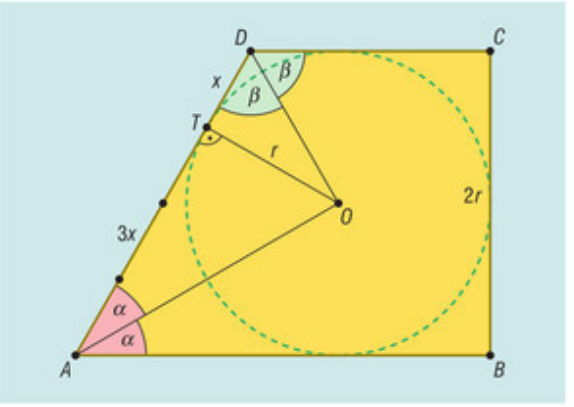
amiből átrendezés után éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

*c)* Thalész tétele alapján az $ABM$ és $ACN$ háromszögek derékszögűek, ezért külön-külön alkalmazható bennük a befogótétel:

$$AM^2 = AP \cdot AB \quad \text{és} \quad AN^2 = AQ \cdot AC.$$

Mivel a két egyenlőség jobb oldalán egyenlő mennyiségek állnak (lásd *b)* részfeladat eredménye), ezért a bal oldalak is megegyeznek, azaz $AM = AN$. Ez pontosan azt jelenti, hogy az $A$ csúcs az $M$ és $N$ pontoktól ugyanolyan távolságra van.

**2372** *a)* A beírt kör $O$ középpontja egyenlő távolságra van a négyszög oldalaitól, ezért minden szögfelezőre illeszkedik. Ebből következően az ábrán azonos módon jelölt szögek egymással megegyeznek. A trapéz egy szárán fekvő szögeinek összege 180°, ezért $2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta = 180°$, $\alpha + \beta = 90°$. Ekkor az $OAD$ háromszögben két szög összege 90°, ebből következik, hogy az $O$ csúcsnál valóban derékszög van.




*b)* Ha a trapézba írt kör az $AD$ szárat a $T$ pontban érinti, akkor $OT$ merőleges az $AD$ szárra, továbbá ha $DT = x$, akkor a feltételek alapján $TA = 3x$. Alkalmazva az $OAD$ háromszögre a magasságtételt azt kapjuk, hogy:

$$r^2 = x \cdot (3x) = 3x^2, \; r = \sqrt{3} \cdot x,$$

ahol $r$ a beírt kör sugarát jelöli. A trapézba írt kör sugarának, valamint az $AD$ szár hosszának aránya:

$$\frac{r}{AD} = \frac{r}{4x} = \frac{\sqrt{3} \cdot x}{4 \cdot x} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

*c)* Mivel a trapéz érintőnégyszög, ezért az érintőnégyszögek tétele alapján a szemközti oldalainak összege megegyezik, azaz $AD + BC = 20$ cm. Felhasználjuk, hogy $BC = 2 \cdot r = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x$, és $AD = 4 \cdot x$, így $\left(2 \cdot \sqrt{3} + 4\right) \cdot x = 20$, így:

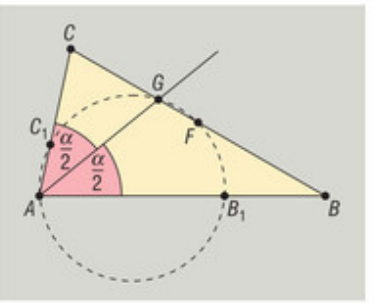
$$x = \frac{20}{2 \cdot \sqrt{3} + 4}, \quad \text{és} \quad AD = 10{,}7 \text{ cm}, \; BC = 9{,}3 \text{ cm}.$$

**2373** Tegyük fel, hogy $AB > AC$. Alkalmazzuk a körhöz húzott szelőszakaszok tételét a $B$, majd a $C$ pontra:

$$BF \cdot BG = BB_1 \cdot BA, \quad CG \cdot CF = CC_1 \cdot CA.$$

Mivel az $F$ pont a $BC$ oldal felezőpontja, így $BF = CF$, ezért ha a két egyenlőség megfelelő oldalait elosztjuk egymással, valamint a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezzük, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\frac{BG}{CG} = \frac{BB_1 \cdot BA}{CC_1 \cdot CA}.$$




Használjuk fel még a szögfelezőtételt az $A$ csúcsból induló szögfelezőre:

$$\frac{BG}{CG} = \frac{BA}{CA}.$$

Az utolsó két egyenlőség bal oldalán álló mennyiségek megegyeznek, így jobb oldaluk is egyenlő:

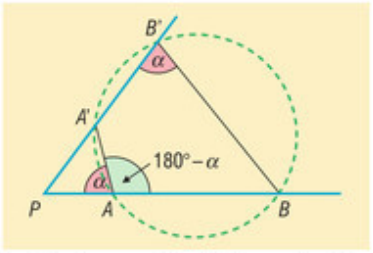
$$\frac{BA}{CA} = \frac{BB_1 \cdot BA}{CC_1 \cdot CA}, \quad \text{amiből} \quad 1 = \frac{BB_1}{CC_1}.$$

Az utóbbi épp a bizonyítandó állítással egyenértékű.

Hasonlóan bizonyítható, ha $AB < AC$.



**2374** A feltételek szerint $\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB}$, ami azt is jelenti, hogy a $PAA'$ és $PB'B$ háromszögekben a $P$-nél lévő szög, valamint a szöget közrefogó két-két oldal aránya megegyezik, azaz a két háromszög hasonló egymáshoz. Ekkor persze az egymásnak megfelelő szögek is megegyeznek, azaz $A'AP\sphericalangle = BB'P\sphericalangle = \alpha$. Az $A'AB\sphericalangle$ külső szöge a $PAA'$ háromszögnek, ezért $A'AB\sphericalangle = 180° - \alpha$. Most vizsgáljuk az $ABB'A'$ négyszöget: a négyszög $A$ és $B'$ csúcsainál lévő szögek összege 180°, ezért a húrnégyszögek tételének megfordítása alapján a négyszög húrnégyszög. Ez a tulajdonsága igazolja, hogy csúcsai valóban egy körre illeszkednek.




## A hasonlóság néhány alkalmazása a terület- és térfogatszámításban – megoldások

**2375** *a)* A háromszög oldalaira $21^2 + 28^2 = 35^2$ teljesül, így Pitagorasz tételének megfordítása alapján a háromszög derékszögű. Az átfogóhoz tartozó magasság két derékszögű háromszögre bontja az eredeti háromszöget, amelyekben a hegyesszögek páronként megegyeznek, ami igazolja, hogy a két háromszög hasonló egymáshoz.

*b)* A két háromszög hasonlóságának aránya $\frac{3}{4}$, így területük aránya $\frac{9}{16} = 0{,}5625$.

**2376** A hatszög területe a háromszög alakú virágágyás területének $\frac{2}{3}$ része.

**2377** A körök sugarai az egyes esetekben:

*a)* $\frac{20}{11} \approx 1{,}82$ cm; $\frac{80}{11} \approx 7{,}27$ cm; $\frac{120}{11} \approx 10{,}91$ cm.

*b)* $\frac{20 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2} \approx 5{,}50$ cm; $\frac{20 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2} \approx 6{,}73$ cm; $\frac{40}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2} \approx 7{,}77$ cm.

**2378** A beírt sokszög minden esetben hasonló a kiindulásul vett sokszöghöz. A hasonlóság aránya a két sokszög oldalának arányával egyenlő.

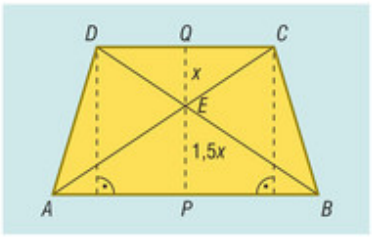
*a)* A hasonlóság aránya $1 : 2$, a két háromszög területének aránya $1 : 4$.

*b)* A hasonlóság aránya $\frac{1}{\sqrt{2}}$, a két négyzet területének aránya $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

*c)* A hasonlóság aránya $\frac{\sqrt{3}}{2}$, a két hatszög területének aránya $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

**2379** *a)* Az $ABE$ és a $CDE$ háromszögek hasonlók egymáshoz, a hasonlóság aránya $3 : 2$. A két háromszög területének aránya $9 : 4$.

*b)* Jelöljük a $CDE$ háromszög $CD$ oldalához tartozó $EQ$ magasságot $x$-szel. Ekkor az $ABE$ háromszög $AB$ oldalához tartozó $EP$ magasság $1{,}5 \cdot x$, a trapéz magassága pedig $2{,}5 \cdot x$. A trapéz területe ismert, ebből adódik, hogy $150 = \frac{18 + 12}{2} \cdot 2{,}5 \cdot x$, és ezért $x = EQ = 4$ cm, $EP = 6$ cm. A $CDE$ háromszög területe 24 cm$^2$, az $ABE$ háromszög területe 54 cm$^2$.



*c)* Belátható, hogy az $ABD$, valamint $ABC$ háromszögek területe egyenlő, ugyanis közös az $AB$ oldaluk, valamint megegyezik az ehhez tartozó magasságuk. Ha mindkét háromszög területéből elvesszük a metszetük, vagyis az $ABE$ háromszög területét, akkor a visszamaradó $DAE$, valamint $BCE$ háromszögek területe is megegyezik. Ezek után a $BCE$ és $DAE$ háromszögek területe 36 $cm^2$.

**2380** A hasonlóság aránya $\sqrt[3]{3,375} = 1,5$. Béla akváriumának méretei: 75 cm, 45 cm, 30 cm.

**2381** A kétliteres palack kétszer olyan magas, mint a negyedliteres.

**2382** *a)* A kisebb gúla térfogata a nagyobb gúla térfogatának $\frac{8}{125}$-szerese.

Mivel a két gúla hasonló egymáshoz, ezért a hasonlóság aránya:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5},$$

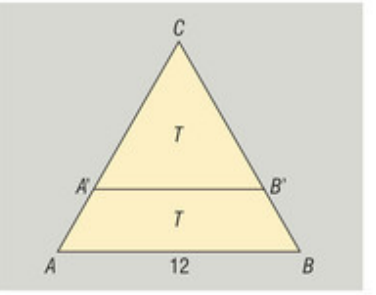
és így a kisebb gúla magassága:

$$\frac{2}{5} \cdot 15 = 6 \text{ cm}.$$

*b)* A kisebb gúla, valamint az eredeti gúla felszínének aránya a hasonlóság arányának négyzete, vagyis $\frac{4}{25} = 0,16$.

**2383** A feltételek szerint az $A'B'C$ háromszög hasonló az $ABC$ háromszöghöz, és a két háromszög területének aránya 1 : 2, így a hasonlóság aránya:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$




Az $A'B'C$ szabályos háromszög oldala: $12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$, ezért kerülete $18 \cdot \sqrt{2}$ cm.

Az $ABB'A'$ trapéz kerülete:

$$K = AB + 2 \cdot BB' + A'B' = 12 + 2 \cdot (12 - 6 \cdot \sqrt{2}) + 6 \cdot \sqrt{2} = 36 - 6 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}.$$

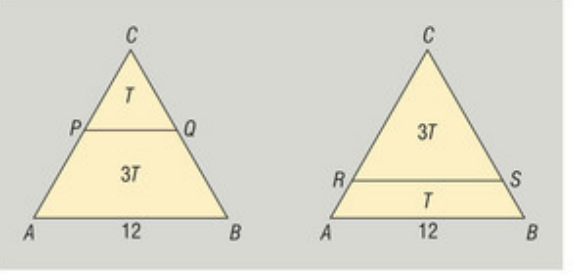
Az $A'B'C$ háromszög és az $ABB'A'$ trapéz kerületének aránya:

$$\lambda = \frac{18 \cdot \sqrt{2}}{36 - 6 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{6 - \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot (6 + \sqrt{2})}{34} \approx 0,93.$$

**2384** *a)* Két ilyen párhuzamos húzható.

*b)* Az ábra jelöléseit használva:

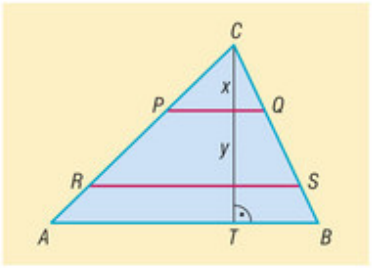
Előbb a $PQ$ szakasz hosszát számoljuk. A $PQC$ háromszög hasonló az $ABC$ háromszöghöz, és a területük aránya 1 : 4, így hasonlóságuk aránya 1 : 2. Ebből következik, hogy a $PQ$ szakasz hossza az $AB$ szakasz hosszának fele, azaz 6 cm.




A második esetben az $RSC$ háromszög hasonló az $ABC$ háromszöghöz. Mivel a területük aránya 3 : 4, így hasonlóságuk aránya: $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ebből következik, hogy a $PQ$ szakasz hossza:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 6 \cdot \sqrt{3} \approx 10,39 \text{ cm}.$$

**2385** Jelöljük az ábrának megfelelően a $C$-hez közelebbi út két végpontját $P$-vel és $Q$-val, a távolabbi út végpontjait $R$-rel és $S$-sel. Ekkor a $PQC$ háromszög hasonló az $ABC$ háromszöghöz, a területük aránya 0,16, és így a hasonlóság aránya $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$. Ha a $PQ$ út $C$-től való távolságát $x$ jelöli, akkor a két háromszög magasságának aránya $\frac{x}{500} = 0{,}4$, amiből $x = 200$ méter. A $C$-hez közelebbi út a $C$ csúcstól 200 méterre halad.




Az $RSC$ háromszög hasonló az $ABC$ háromszöghöz, a területük aránya 0,84, így hasonlóságuk aránya $\sqrt{0{,}84} = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Ha az $RSC$ háromszög magassága $y$, akkor a magasságok aránya $\frac{y}{500} = \frac{\sqrt{21}}{5}$, amiből $y = 100 \cdot \sqrt{21} \approx 458{,}26$ méter. A távolabbi út a $C$ csúcstól 458,26 méterre halad.

**2386** A kockacukros doboz egy $6 \times 6 \times 9$-es méretű téglatestnek tekinthető, amelybe összesen 324 darab cukor fér el. A feltételek szerint a dobozból már legalább egy cukor elfogyott, így a feladatnak a következő két megoldása van: a $2 \times 2 \times 3$-as, illetve $4 \times 4 \times 6$-os méretű téglatestek. Az előbbi esetben a hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$, így a sértetlen dobozban lévő kockacukroknak $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$-szerese van a dobozban (vagyis összesen 12 darab), az utóbbi esetben pedig a hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$, így a dobozban a kockacukroknak $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$-szerese van (azaz összesen 96 darab).

**2387** *a)* A két metszősík közül a gúla csúcsához közelebbi egy a kiindulási gúlához hasonló gúlát metsz ki. A két gúla térfogatának aránya $1:3$, így hasonlóságuk aránya $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. Ebből következően a kisebb gúla magassága $m_1 = 18 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \approx 12{,}5$ cm.

Az eredeti gúla csúcsától távolabbi párhuzamos által levágott gúla szintén hasonló az eredeti gúlához, a térfogatuk aránya ezúttal $2:3$, így hasonlóságuk aránya $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, ezért a sík a gúla csúcsától $m_2 = 18 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 15{,}7$ cm távolságra halad.

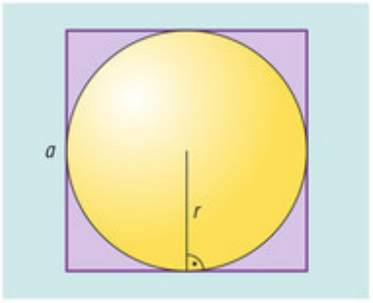
*b)* A keletkező síkmetszetek az eredeti gúla alaplapjához hasonló síkidomok. Mivel hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ezért a két keletkező síkidom területe:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot 30 \approx 14{,}4 \text{ cm}^2, \quad \text{illetve} \quad \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2 \cdot 30 \approx 22{,}9 \text{ cm}^2.$$

**2388** *a)* A doboz keresztmetszetét az ábra mutatja: látható, hogy a doboz minden lapja olyan négyzet, amelynek $a$ oldala a földgömb $r$ sugarának kétszerese.

Ezek alapján a 10 000 doboz elkészítéséhez szükséges karton mennyisége:

$$A = 10\,000 \cdot 6 \cdot (2r)^2 = 10\,000 \cdot 6 \cdot 0{,}64^2 = 24\,576 \text{ m}^2.$$



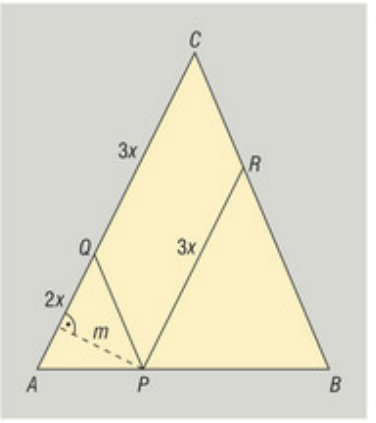
*b)* Ha a gömbök sugarát 24 cm-re csökkentik, akkor az új földgömbök az eredetihez hasonlók lesznek, hasonlóságuk aránya pedig a sugarak arányával egyenlő, azaz:

$$\lambda = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

Ugyanez érvényes a csomagoláshoz felhasznált dobozokra is. Mivel a hasonló testek felszínének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ezért a szükséges karton mennyisége a földgömb sugarának csökkentése után $\lambda^2 = \frac{9}{16}$-szorosára változik (13 824 $m^2$-re).

*c)* Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyenlő, ezért az új földgömbök tárolásához $\lambda^3 = \frac{27}{64}$-szer akkora raktár szükséges, mint az eredeti dobozok tárolásához. Mivel $\frac{27}{64} < \frac{1}{2}$, ezért valóban elég egy feleakkora raktár.

**2389** Az $ABC$ háromszög $AB$ oldalának $P$ pontján át húzott párhuzamosok a megfelelő oldalakat $Q$-ban és $R$-ben metszik az ábra szerint. Ekkor a $PRCQ$ négyszög paralelogramma, hiszen szemközti oldalai párhuzamosak. Az $APQ$ és $PBR$ háromszögek hasonlók egymáshoz, hiszen szögeik páronként megegyeznek, továbbá a területük aránya 4 : 9, így hasonlóságuk aránya 2 : 3. Ez azt is jelenti, hogy ha $AQ = 2 \cdot x$, akkor a megfelelő $PR$ szakaszra $PR = 3 \cdot x$, és így a paralelogramma szemközti $CQ$ oldalára is $CQ = 3 \cdot x$ teljesül. Jelöljük az $APQ$ háromszög $AQ$ oldalához tartozó magasságát $m$-mel, ekkor a háromszög területére igaz, hogy:



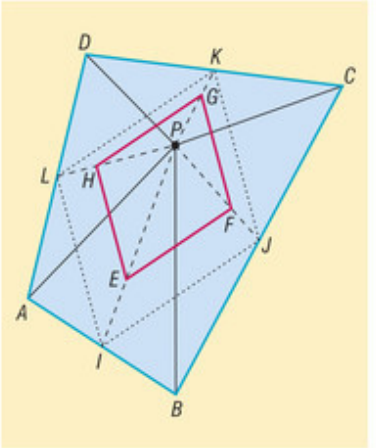

$$4 = \frac{(2x) \cdot m}{2} = x \cdot m.$$

Mivel $m$ egyben a $PRCQ$ paralelogramma $CQ$ oldalához tartozó magassága is, ezért a paralelogramma területe:

$$t = (3x) \cdot m = 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2.$$

Az $ABC$ háromszög területe tehát 25 $cm^2$.

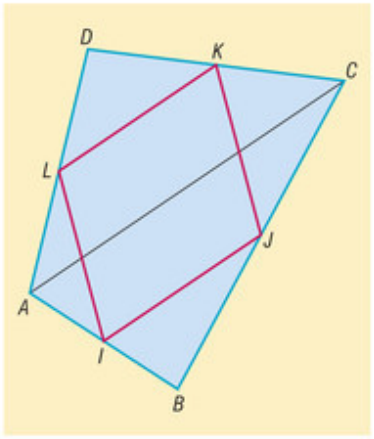
**2390** *a)* Az $ABCD$ négyszög oldalfelező pontjait az ábrának megfelelően $I$, $J$, $K$ és $L$ jelöli. Vegyük észre, hogy az $E$, $F$, $G$ és $H$ súlypontok rendre 2 : 1 arányban osztják a megfelelő háromszögben kialakuló $PI$, $PJ$, $PK$, illetve $PL$ súlyvonalakat. Eredményünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $IJKL$ négyszöget a $P$ pontra vonatkozó, $\lambda = \frac{2}{3}$ arányú középpontos hasonlóság az $EFGH$ négyszögbe viszi át.




Mivel a középpontos hasonlóságban szakasz és képe párhuzamos, ezért az $EFGH$ négyszög oldalai párhuzamosak az $IJKL$ négyszög megfelelő oldalaival.

Ismert, hogy bármely négyszög oldalfelező pontjai középpontosan szimmetrikus négyszöget, azaz paralelogrammát alkotnak. Eszerint az $IJKL$ négyszög, és ebből adódóan az $EFGH$ négyszög is paralelogramma.

*b)* Előbb az *IJKL* és az *ABCD* négyszögek területének arányát számoljuk. Húzzuk be az *AC* átlót. Mivel *I* és *J* felezőpontok, ezért az *IJ* középvonala az *ABC* háromszögnek. Emiatt az *IJ* párhuzamos *AC*-vel és hossza az *AC* hosszának fele. Ebből következik, hogy az *IJB* háromszög hasonló az *ACB* háromszöghöz, és a hasonlóság aránya 1 : 2, ezért területükre:




$$\frac{T_{IJB}}{T_{ACB}} = \frac{1}{4}, \quad \text{amiből} \quad T_{IJB} = \frac{1}{4} \cdot T_{ACB}.$$

Ugyanez érvényes az *LKD* és *ACD* háromszögekre is, azaz:

$$T_{LKD} = \frac{1}{4} \cdot T_{ACD}.$$

A két utolsó egyenlőség megfelelő oldalait összeadva:

$$T_{IJB} + T_{LKD} = \frac{1}{4} \cdot (T_{ACB} + T_{ACD}) = \frac{1}{4} \cdot T_{ABCD}.$$

Hasonlóan látható be, hogy

$$T_{ILA} + T_{JKC} = \frac{1}{4} \cdot (T_{BDA} + T_{BDC}) = \frac{1}{4} \cdot T_{ABCD}.$$

Ha a kapott egyenlőségek megfelelő oldalait összeadjuk, akkor láthatjuk, hogy az *IJKL* paralelogramma oldalaira emelt *IJB*, *JKC*, *LKD*, *ILA* háromszögek területének összege az *ABCD* négyszög területének felével egyenlő. Ebből adódóan az *IJKL* négyszög területe is az *ABCD* négyszög területének felével egyenlő.

Korábban már láttuk, hogy az *EFGH* és az *IJKL* négyszögek hasonlók egymáshoz, a hasonlóság aránya pedig $\frac{2}{3}$, így területük arányára igaz, hogy:

$$\frac{T_{EFGH}}{T_{IJKL}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$T_{EFGH} = \frac{4}{9} \cdot T_{IJKL} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot T_{ABCD} = \frac{2}{9} \cdot T_{ABCD}.$$

Az *EFGH* és az *ABCD* négyszögek területének aránya tehát $\frac{2}{9}$.

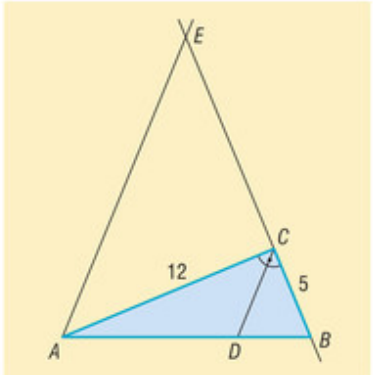
**2391** *a)* A szögfelezőtétel alapján:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{12}{5}.$$

Másrészt ha a párhuzamos szelők tételét az *ABE*∢-re alkalmazzuk, akkor kapjuk:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{EC}{5}.$$

Mivel a két egyenlőség bal oldala megegyezik, ezért a jobb oldalak is egyenlők egymással, amiből $EC = 12$ cm adódik, így az *AEC* háromszög valóban egyenlő szárú.



*b)* Jelöljük a $DCB$ háromszög területét $T$-vel. Az $AEB$ és a $DCB$ háromszög hasonló továbbá a hasonlóság aránya $\frac{EB}{CB}=\frac{17}{5}$, ezért a területük aránya $\left(\frac{17}{5}\right)^2$, azaz $t_{AEB}=\frac{289}{25}\cdot T$.

Az $AECD$ négyszög területe:

$$t_{AECD}=t_{AEB}-t_{DCB}=\frac{289}{25}\cdot T-T=\frac{264}{25}\cdot T.$$

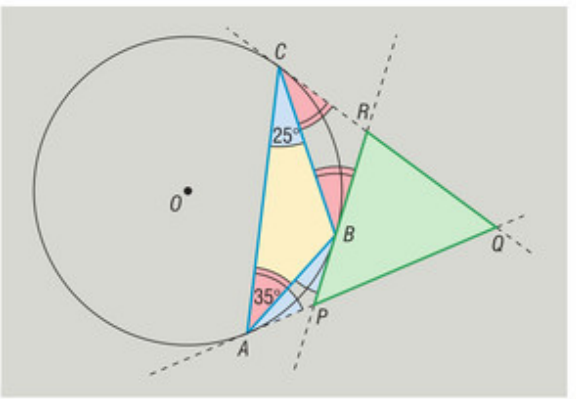
Mivel az egyenlő szárú és derékszögű $AEC$ háromszög befogója 12 cm, ezért területe 72 cm$^2$, így $t_{ACD}=\frac{264}{25}\cdot T-72$. Az $ACD$, valamint a $DCB$ háromszög $AD$, valamint $DB$ oldalaihoz ugyanakkora magasság tartozik, ezért területük aránya az $AD$, illetve a $DB$ oldalak arányával egyenlő, azaz

$$\frac{t_{ACD}}{t_{DCB}}=\frac{AD}{DB},\quad \text{azaz}\quad \frac{\frac{264}{25}\cdot T-72}{T}=\frac{12}{5},\quad \text{amiből}\quad T=\frac{150}{17}\approx 8{,}82\text{ cm}^2.$$

Az $AECD$ négyszög területe $t_{AECD}=\frac{264}{25}\cdot T=\frac{1584}{17}\approx 93{,}18$ cm$^2$.

## Vegyes feladatok I. – megoldások

**2392** Tegyük fel, hogy az $ABC$ háromszög szögei: $BAC\sphericalangle=35°$, $BCA\sphericalangle=25°$, továbbá a háromszög csúcsaiban a köré írt körhöz húzott érintők az ábra szerint a $PQR$ háromszöget fogják közre.




*a)* A feladat megoldása szempontjából a legfontosabb érintőszárú kerületi szögek:

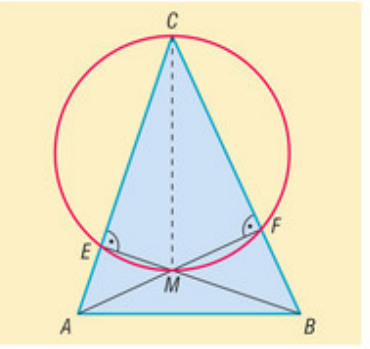
– a rövidebb $BC$ köríven: $CBR\sphericalangle$ és $BCR\sphericalangle$;

– a rövidebb $AB$ köríven: $BAP\sphericalangle$ és $ABP\sphericalangle$.

További érintő szárú kerületi szögek nyugszanak a hosszabb $BC$ és $AB$ köríveken, valamint mindkét $AC$ köríven.

*b)* Az ugyanazon köríven nyugvó kerületi szögek egyenlősége alapján, az ábrán azonos módon megjelölt szögek egymással egyenlők, így $CAQ\sphericalangle=QCA\sphericalangle=35°+25°=60°$, amiből következik, hogy az $AQC$ háromszög szabályos, és ezért az $AQC\sphericalangle=PQR\sphericalangle=60°$. Mivel az $RPQ\sphericalangle$ az $APB$ háromszög egyik külső szöge, ezért a nem szomszédos belső szögek összegével egyenlő, és így az $RPQ\sphericalangle=2\cdot 25°=50°$. Hasonlóan kiszámolható, hogy a $PRQ\sphericalangle=2\cdot 35°=70°$. Így a $PQR$ háromszög szögei: 50°, 60°, 70°.

**2393** Mivel a magasságvonal merőleges arra az oldalra, amelyikhez tartozik, ezért a $CFME$ négyszögben az $E$ és $F$ csúcsoknál derékszögek vannak. Ebből következően a négyszög két szemközti szögének összege 180°, ami mutatja, hogy a $CFME$ négyszög valóban húrnégyszög. A $CFM$ (vagy a $CEM$) háromszögre alkalmazva Thalész tételének megfordítását láthatjuk, hogy a négyszög köré írt kör középpontja a $CM$ átló felezőpontjával esik egybe. (➡)




**2394** A keletkező négyszög húrnégyszög.

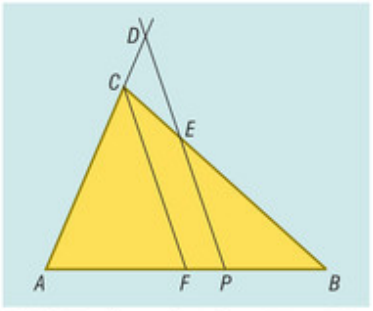
**2395** A keletkező négyszög húrnégyszög. Mivel minden szöge 90°-os, ezért a négyszög téglalap is egyben.

**2396** *a)* A trapéz átlói 1 : 3 arányban osztják egymást, és természetesen a rövidebb szakasz a rövidebb alaphoz illeszkedik.

*b)* Az átlók közé eső szakasz hossza 10 cm.

**2397** A behúzott szakasz a $BD$ átlót 2 : 1 arányban osztja.

**2398** Mivel a $DP$ egyenes párhuzamos a háromszög $CF$ súlyvonalával, ezért $AFC$ és $APD$ háromszögek, továbbá $BPE$ és $BFC$ háromszögek hasonlók egymáshoz. A megfelelő háromszögekben:



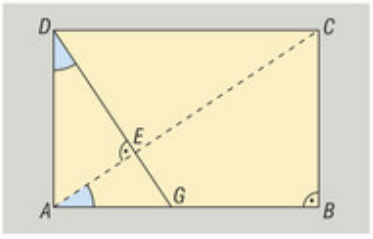

$$\frac{PD}{CF}=\frac{AP}{AF}, \quad \text{továbbá} \quad \frac{PE}{CF}=\frac{PB}{FB}.$$

A két egyenlőség megfelelő oldalait összeadva megkapjuk, hogy:

$$\frac{PD}{CF}+\frac{PE}{CF}=\frac{AP}{AF}+\frac{PB}{FB}=2.$$

Az utolsó egyenlőségnél csak azt kell észrevenni, hogy $F$ az $AB$ oldal felezőpontja, így $AF = FB$, továbbá $AP + PB = AB = 2 \cdot FB$. Átrendezés után valóban azt kapjuk, hogy $PD + PE = 2 \cdot CF$.

**2399** *a)* Vegyük észre, hogy az $ADE\sphericalangle$, valamint a $BAC\sphericalangle$ szárai páronként merőlegesek egymásra, így vagy megegyeznek, vagy 180°-ra egészítik ki egymást (merőleges szárú szögek). Mivel mindkettő hegyesszög, ezért csak egyenlők lehetnek. Ekkor viszont az $ADE$, $GDA$ és $CAB$ derékszögű háromszögekben egy-egy hegyesszög is megegyezik, ami igazolja, hogy a háromszögek hasonlók egymáshoz.

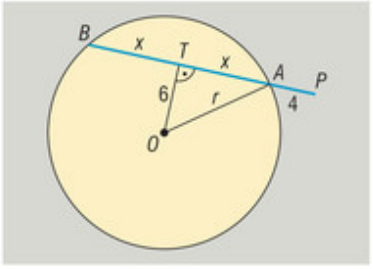



*b)* Az $ADE$ háromszög oldalai:

$$AD = 6 \text{ cm}, \quad AE=\frac{12\cdot\sqrt{13}}{13}\approx 3{,}33 \text{ cm}, \quad DE=\frac{18\cdot\sqrt{13}}{13}\approx 4{,}99 \text{ cm}.$$

A $GDA$ háromszög oldalai: $AG = 4$ cm, $AD = 6$ cm, $GD = 2 \cdot \sqrt{13} \approx 7{,}21$ cm.

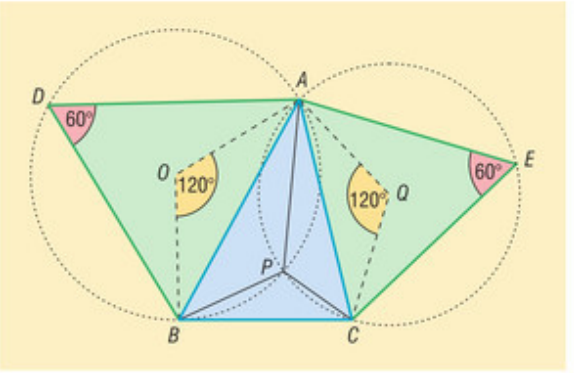
**2400** Az ábra jelöléseit használva $PA = 4$ cm, $OT = 6$ cm, $r = 10$ cm. Az $OTA$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét alkalmazva kapjuk, hogy $x = 8$ cm, így az $AB$ húr hossza 16 cm. A $P$ pontból húzott szelők szeletei $PA = 4$ cm, $PB = 20$ cm, így az érintő és szelőszakaszok tételét alkalmazva kapjuk, hogy a $P$ pontból húzott érintőszakaszok hossza $\sqrt{80} \approx 8{,}94$ cm.




**2401** Jelöljük a négyszög legkisebb szögét $\alpha$-val, ekkor a legnagyobb szög $\alpha + 140°$. Ha a másik két szög közül a kisebbet $\beta$ jelöli, akkor a nagyobb szög $\frac{3}{2}\cdot\beta$. Világos, hogy $\alpha$ és $\beta$ nem lehetnek szemközti szögek, hiszen így a szemközti szögek összege semmiképpen nem lehet egyenlő egymással. Ezért az alábbi esetek valamelyike teljesül:

1. $\alpha$ és $\frac{3}{2}\cdot\beta$ szemközti szögek. Ekkor $\alpha+\frac{3}{2}\cdot\beta = 180°$, továbbá $(\alpha + 140°) + \beta = 180°$. Ebben az esetben $\alpha$-ra negatív érték adódik, ami mutatja, hogy ez az eset szintén nem valósulhat meg.
2. $\alpha$ és $\alpha + 140°$ szemközti szögek. Ekkor $\alpha + (\alpha + 140°) = 180°$, továbbá $\beta+\frac{3}{2}\cdot\beta = 180°$, és így a négyszög szögei: 20°, 72°, 160°, 108°.

**2402** *a)* Az ábra jelöléseinek megfelelően az $AB$ oldalra rajzolt szabályos háromszög harmadik csúcsát $D$, az $ABD$ háromszög köré írt kör középpontját $O$, továbbá az $AC$ oldalra rajzolt háromszög harmadik csúcsát $E$, az $ACE$ háromszög köré írt kör középpontját $Q$ jelöli.



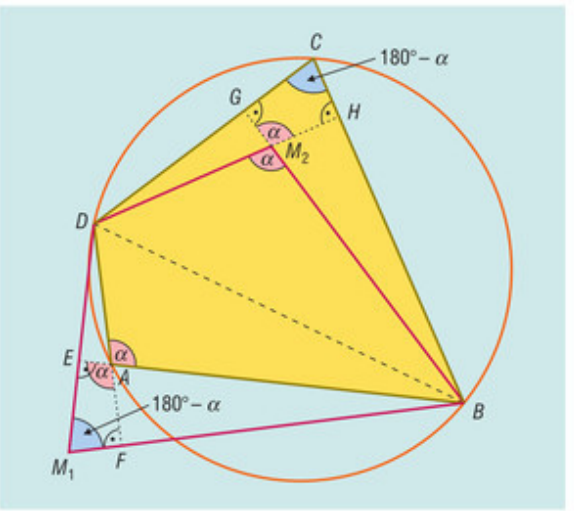

Az $O$ középpontú körben alkalmazva a kerületi és középponti szögek tételét láthatjuk, hogy a konvex $AOB\sphericalangle$ 120°-os, amiből következik, hogy a hosszabb $AB$ körívén nyugvó konkáv szög 240°-os. Mivel az $APB\sphericalangle$ e körben a hosszabb $AB$ íven nyugvó kerületi szög, ezért az $APB\sphericalangle = 120°$.

A $Q$ középpontú körben alkalmazott hasonló gondolatmenettel láthatjuk be, hogy $APC\sphericalangle = 120°$ is teljesül. Ez azt is jelenti, hogy a $P$ pontból a háromszög $AB$, valamint $AC$ oldala, és ebből kifolyólag a $BC$ oldala is 120°-os szög alatt látszik.

*b)* Ha a $BC$ oldal fölé rajzolt szabályos háromszög harmadik csúcsa $F$, akkor az *a)* részfeladat eredménye alapján láthatjuk, hogy $BPCF$ húrnégyszög, így található olyan kör, amelyre a négyszög minden csúcsa illeszkedik. Természetesen ez a kör tartalmazza a $B$, $C$, $F$ csúcsokat, amiből következik, hogy éppen a $BCF$ háromszög köré írt körről van szó.

*Megjegyzés:* A $P$ pontot az $ABC$ háromszög izogonális pontjának nevezzük. Az izogonális pont egy nevezetes szélsőérték-feladat megoldásaként is ismert: megmutatható, hogy ha ezt a pontot a háromszög csúcsaival összekötjük, akkor a keletkező szakaszok hosszának összege a lehető legkisebbnek adódik.

**2403** Ha az $ABCD$ húrnégyszög $A$ és $C$ csúcsánál derékszögek vannak, akkor a feladat állítása könnyen igazolható, hiszen ebben az esetben az $ABD$, illetve a $CBD$ háromszögek magasságpontja az $A$, illetve a $C$ csúcsba esik, így a két magasságpont a $BD$ átló végpontjaival valóban húrnégyszöget alkot, amely egybeesik az $ABCD$ négyszöggel.




Ha az $A$ és $C$ csúcsoknál nem derékszögek vannak, és $\alpha$ jelöli a négyszög $A$ csúcsánál lévő szöget, akkor a $DCB\sphericalangle = 180° - \alpha$. Az ábra jelöléseinek megfelelően legyen az $ABD$ háromszög magasságpontja $M_1$, megfelelő magasságainak talppontjai pedig $E$ és $F$. A $CBD$ háromszög magasságpontját $M_2$, míg megfelelő magasságainak talppontját $G$ és $H$ jelölje. Ekkor megfigyelhetjük, hogy az $AEM_1F$ négyszögben a két szemközti szög derékszög, így a négyszög húrnégyszög, amiből következik, hogy:

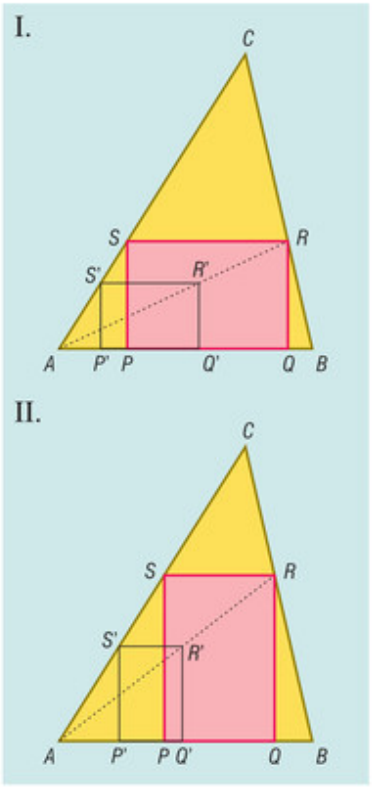
$$EM_1F\sphericalangle = 180° - EAF\sphericalangle = 180° - \alpha.$$

Az utolsó egyenlőségnél kihasználtuk, hogy az $A$ csúcsnál kialakuló szögek csúcsszögek, amik közismerten megegyeznek. Ugyanilyen gondolatmenettel a $CGM_2H$ is húrnégyszög, és ezért $GM_2H\sphericalangle = \alpha$, amiből $DM_2B\sphericalangle = \alpha$ adódik.

Eredményeinket összefoglalva láthatjuk, hogy az $M_1BM_2D$ négyszögben a két szemközti szög összege 180°, azaz valóban húrnégyszögről van szó.

**2404** A feladat megoldása előtt érdemes egy egyszerűbb feladatot megoldani: szerkesszünk olyan $P'Q'R'S'$ téglalapot, amelynek $P'Q'$ oldala az $ABC$ háromszög $AB$ oldalára, $S'$ csúcsa az $AC$ oldalára illeszkedik, továbbá $P'Q' : P'S' = 3 : 2$. Ilyen tulajdonságú téglalap valóban könnyen szerkeszthető, hiszen ha az $AC$ oldal egy tetszőleges $S'$ pontjából merőlegest állítunk az $AB$ oldalra, akkor e merőleges talppontjaként megkapjuk a $P'$ pontot, majd a $P'S'$ szakasz felét háromszor felmérve az $AB$ oldalra megkapjuk a $Q'$ pontot. Az $R'$ pont ezután már szerkeszthető. Az eredeti feladat megoldásához azt kell észrevennünk, hogy bármely két olyan téglalap hasonló egymáshoz, amelyben az oldalak aránya $3 : 2$, így a feladat minden feltételének eleget tevő $PQRS$ téglalap is hasonló a $P'Q'R'S'$ téglalaphoz. A megfelelő $R$ pont az $AR'$ félegyenes, valamint a $BC$ oldal metszéspontjaként szerkeszthető. A téglalap további csúcsai már értelemszerűen szerkeszthetők (I.).

Vegyük észre, hogy még egy olyan téglalap szerkeszthető, amelynek $PQ$ oldala az $AB$ oldalra, $R$ és $S$ csúcsai pedig a háromszög további oldalaira esnek (II.). Ebben a téglalapban $PQ : RS = 2 : 3$.



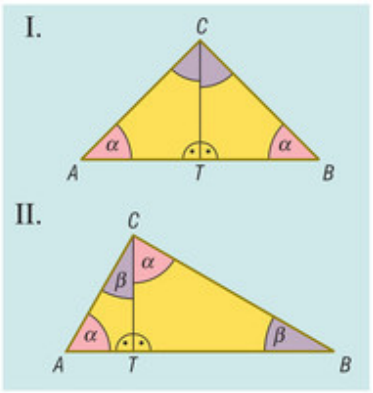

**2405** Tegyük fel, hogy az $ABC$ háromszögben a $CT$ magasság a háromszöget két hasonló háromszögre bontja. Hasonló háromszögekben a szögek páronként egyenlők, továbbá a $T$ csúcsnál mindkét részháromszögben derékszög van, ezért két eset lehetséges:

I. Az $ATC$, valamint a $BTC$ háromszögekben a $C$ csúcsnál ugyanakkora szögek vannak. Ebben az esetben természetesen a $CAT\sphericalangle = CBT\sphericalangle = \alpha$, ami igazolja, hogy az $ABC$ háromszög egyenlő szárú.

II. Az $ATC$ háromszög $C$ csúcsánál ugyanakkora szög van, mint a $BTC$ háromszög $B$ csúcsánál. Ez esetben $CAT\sphericalangle = BCT\sphericalangle = \alpha$, így az ábrán azonos módon jelölt szögek megegyeznek. Az $ABC$ háromszög belső szögeinek összege:

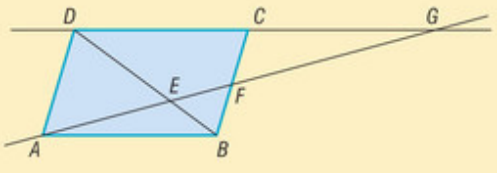
$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ,$$

amiből $\alpha + \beta = 90^\circ$, vagyis a háromszög $C$ csúcsánál derékszög van.




**2406** *a)* Az $AED$ háromszöghöz hasonló az $FEB$ háromszög, mivel az $E$ csúcsnál lévő szögeik csúcsszögek, a $D$ és $B$ csúcsnál lévők pedig váltószögek, így az említett szögek páronként megegyeznek.

*b)* A $GDE$ háromszög hasonló az $ABE$ háromszöghöz, mert az $E$ csúcsnál csúcsszögek vannak, a $G$ és $A$ csúcsoknál lévő szögeik pedig váltószögek.



*c)* Az $AED$ és $FEB$ háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{AE}{EF} = \frac{DE}{EB}.$$

Az $ABE$ és $GDE$ háromszögek hasonlósága alapján:

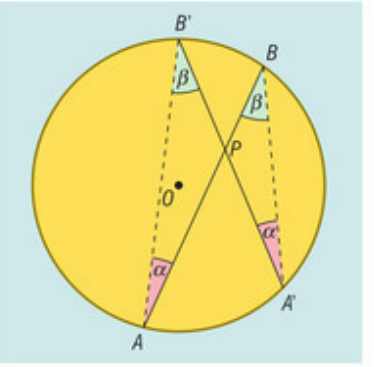
$$\frac{EG}{AE} = \frac{DE}{EB}.$$

Mivel a két egyenlőség jobb oldalán ugyanaz a tört áll, ezért a bal oldalak is megegyeznek, amit átrendezve éppen a bizonyítandó $AE^2 = EF \cdot EG$ egyenlőséget kapjuk.

**2407** *a)* Húzzuk be az $AB'$ és $A'B$ szakaszokat. Ekkor az ábrán azonos módon megjelölt szögek ugyanazon a köríven nyugszanak, így a kerületi szögek tétele alapján megegyeznek. Ebből következően az $APB'$ és $A'PB$ háromszögekben a szögek megegyeznek, és ezért a két háromszög hasonló egymáshoz. A megfelelő oldalak aránya:

$$\frac{PA}{PB'} = \frac{PA'}{PB}.$$

Az egyenlőséget átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk.

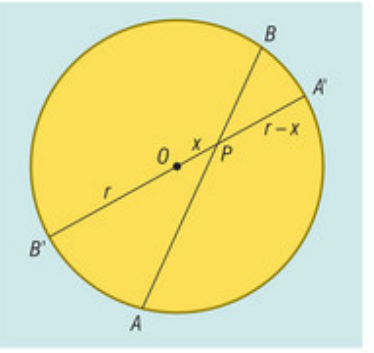



*b)* Az *a)* részfeladat eredménye alapján a $PA \cdot PB$ szorzat értéke a $P$-n átmenő húr helyzetétől függetlenül állandó. Vegyük ezért a $P$ és $O$ pontokon átmenő $A'B'$ húrt (ld. ábra). Ekkor

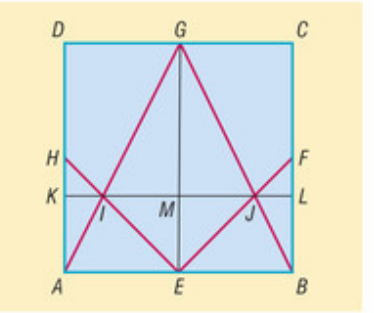
$$PA' = r - x, \text{ míg } PB' = r + x,$$

és így:

$$PA \cdot PB = (r - x) \cdot (r + x) = r^2 - x^2.$$




**2408** *a)* Használjuk az ábra jelöléseit. A $HAI$ háromszög hasonló az $EGI$ háromszöghöz, hiszen az $I$ csúcsnál csúcsszögek vannak, továbbá váltószögek lévén $AHI\sphericalangle = GEI\sphericalangle$, és így a két háromszög megfelelő szögei megegyeznek. A hasonlóság aránya az egymásnak megfelelő $AH$ és $GE$ oldalak arányával egyenlő, ami a feltételek szerint $\frac{1}{2}$. Ebből adódóan persze $IM = 2 \cdot IK$, és ehhez hasonlóan $MJ = 2 \cdot JL$. Egyszerű számolás mutatja, hogy $IK = \frac{a}{6}$, ahol $a$ az $ABCD$ négyzet oldalának hossza.

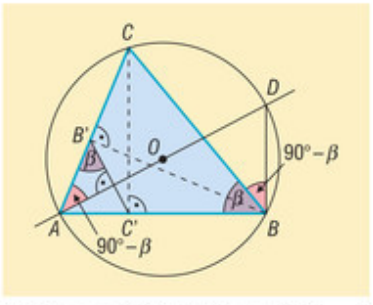



Ekkor viszont a $HAI$ háromszög területe $T_{AHI} = \frac{a^2}{24}$, a hozzá hasonló $EGI$ háromszög területe $T_{EGI} = 4 \cdot T_{AHI} = \frac{a^2}{6}$, és így az $EJGI$ sárkány területe $T_{EJGI} = \frac{a^2}{3}$.

A sárkány területe a kartonlap területének 33,33%-a.

*b)* A sárkány területe 3 $m^2$.

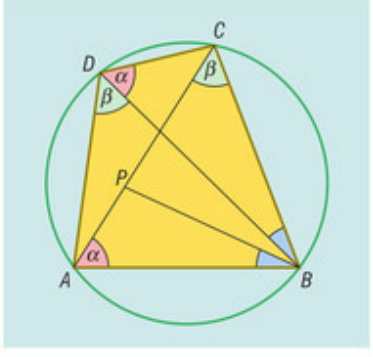
**2409** A $BCB'C'$ négyszög húrnégyszög, hiszen a $BC$ oldal a $B'$ és $C'$ csúcsokból egyaránt derékszög alatt látszik, így mindkét pont illeszkedik a $BC$ szakasz Thalész-körére. Ekkor viszont ha az $ABC$ háromszög $B$ csúcsánál lévő szöget $\beta$ jelöli, úgy $CB'C' \sphericalangle = 180^\circ - \beta$, amiből következik, hogy $AB'C' \sphericalangle = \beta$ is teljesül. Jelöljük $D$-vel az $A$ csúcsból a $B'C'$ egyenesre állított merőlegesnek az $ABC$ háromszög köré írt körrel való másik metszéspontját. Mivel az $AD$ egyenes az $AC'B'$ háromszög $B'C'$ oldalához tartozó magasságvonala, ezért $B'AD \sphericalangle = 90^\circ - \beta$, amit úgy is értelmezhetünk, hogy az $ABC$ háromszög köré írt körében a $CD$ köríven $90^\circ - \beta$ nagyságú kerületi szög nyugszik. A kerületi szögek tétele alapján $CBD \sphericalangle = 90^\circ - \beta$ szintén teljesül. Tekintsük most az $ABD$ háromszöget. A $B$ csúcsnál lévő szögre igaz, hogy:




$$ABD \sphericalangle = ABC \sphericalangle + CBD \sphericalangle = \beta + 90^\circ - \beta = 90^\circ,$$

így a háromszög derékszögű. Ebből az is következik, hogy a köré írt körének $O$ középpontja egybeesik az $AD$ szakasz felezőpontjával. Mivel az $O$ pont egyben az $ABC$ háromszög köré írható körének középpontja is, ezért a feladat állítását igazoltuk.

**2410** *a)* Az ábrán azonos módon jelölt szögek a kerületi szögek tétele alapján megegyeznek, hiszen az $\alpha$-val jelölt szögek az $ABCD$ négyszög köré írt körben a (rövidebb) $BC$ köríven, a $\beta$-val jelölt szögek pedig a (szintén rövidebb) $AB$ köríven nyugvó kerületi szögek. Ebből adódóan a $BPA$ háromszög két szöge megegyezik a $BCD$ háromszög két szögével, így a két háromszög hasonló egymáshoz.




A feltételek szerint:

$$ABD \sphericalangle = ABP \sphericalangle + PBD \sphericalangle =$$
$$= CBD \sphericalangle + DBP \sphericalangle = CBP \sphericalangle,$$

ezért az $ABD$ háromszög két szöge megegyezik a $PBC$ háromszög két szögével, így a két háromszög szintén hasonló egymáshoz. Ezzel igazoltuk, hogy a $BP$ szakasz az $ABC$ háromszöget két olyan részre vágja szét, amelyek közül a $BPA$ háromszög a $BCD$ háromszöghöz, a $PBC$ háromszög pedig az $ABD$ háromszöghöz hasonló.

*b)* A $BPA$ és $BCD$ háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{BD}{DC},$$
$$AB \cdot DC = BD \cdot AP. \quad (1)$$

Az $ABD$ és $PBC$ háromszögek hasonlósága alapján:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{PC}{BC},$$
$$AD \cdot BC = BD \cdot PC. \quad (2)$$

Az (1) és (2) összefüggések megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy

$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = BD \cdot AP + BD \cdot PC =$$
$$= BD \cdot (AP + PC) = BD \cdot AC.$$

A kapott egyenlőség szerint a húrnégyszög szemközti oldalainak szorzatösszege megegyezik az átlók szorzatával.





# Távolságok meghatározása hasonlóság segítségével, hegyesszögek szögfüggvényei – megoldások

**2411** Az épületek magassága: *a)* 40; *b)* 64; *c)* 112 méter.

**2412** A felvonó megközelítőleg 294 m magasra visz.

**2413** A padlástér legnagyobb magassága 7,5 m.

**2414** A helyesen kitöltött táblázat:

| $a$ | $b$ | $c$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\sin\beta$ | $\cos\beta$ | $\operatorname{tg}\beta$ | $\operatorname{ctg}\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 cm | 40 cm | 41 cm | $\frac{9}{41}$ | $\frac{40}{41}$ | $\frac{9}{40}$ | $\frac{40}{9}$ | $\frac{40}{41}$ | $\frac{9}{41}$ | $\frac{40}{9}$ | $\frac{9}{40}$ |
| 12 m | 35 m | 37 m | $\frac{12}{37}$ | $\frac{35}{37}$ | $\frac{12}{35}$ | $\frac{35}{12}$ | $\frac{35}{37}$ | $\frac{12}{37}$ | $\frac{35}{12}$ | $\frac{12}{35}$ |
| 33 dm | 56 dm | 65 dm | $\frac{33}{65}$ | $\frac{56}{65}$ | $\frac{33}{56}$ | $\frac{56}{33}$ | $\frac{56}{65}$ | $\frac{33}{65}$ | $\frac{56}{33}$ | $\frac{33}{56}$ |
| 2,1 km | 5,4 km | 5,79 km | 0,3627 | 0,9326 | 0,389 | 2,571 | 0,9326 | 0,3627 | 2,571 | 0,389 |
| $x-y$ | $2\cdot\sqrt{x\cdot y}$ | $x+y$ | $\frac{x-y}{x+y}$ | $\frac{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}{x+y}$ | $\frac{x-y}{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}$ | $\frac{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}{x-y}$ | $\frac{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}{x+y}$ | $\frac{x-y}{x+y}$ | $\frac{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}{x-y}$ | $\frac{x-y}{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}$ |

**2415** A szerkesztés a definíció alapján történhet. A feladatokban szereplő, a hosszegységgel össze nem mérhető szakaszokat a magasságtétel felhasználásával szerkeszthetjük.

**2416** A keresett szögfüggvények értékeit a következő táblázatban láthatjuk:

| $\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| 78°54' | 0,9813 | 0,1925 | 5,0970 | 0,1962 |
| 28°12' | 0,4726 | 0,8813 | 0,5362 | 1,8650 |
| 13°41' | 0,2366 | 0,9716 | 0,2435 | 4,1074 |
| 54,6° | 0,8151 | 0,5793 | 1,4071 | 0,7107 |
| 36,8° | 0,5990 | 0,8007 | 0,7481 | 1,3367 |
| 47,4° | 0,7361 | 0,6769 | 1,0875 | 0,9195 |
| $\frac{\pi}{10}$ | 0,3090 | 0,9511 | 0,3249 | 3,0777 |
| $\frac{\pi}{18}$ | 0,1736 | 0,9848 | 0,1763 | 5,6713 |
| $\frac{2\pi}{5}$ | 0,9511 | 0,3090 | 3,0777 | 0,3249 |

**2417** $\alpha = 4{,}75°;\ 51{,}66°;\ 33{,}24°$. $\beta = 62{,}02°;\ 28{,}92°;\ 15{,}8°$.
$\gamma = 66{,}08°;\ 77{,}03°;\ 28{,}1°$. $\delta = 70{,}44°;\ 16{,}14°;\ 35{,}6°$.



**2418** A helyesen kitöltött táblázat (➡):

| $a$ | $b$ | $c$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|
| 41 cm | 13 cm | 43,01 cm | 72,41° | 17,59° |
| 50,6 cm | 12 cm | 52 cm | 76,66° | 13,34° |
| 10 dm | 47,05 dm | 48,1 dm | 12° | 78° |
| 9,36 m | 12,98 m | 16 m | 35°48' | 54°12' |
| $c \cdot \sin\alpha$ | $c \cdot \cos\alpha$ | $c$ | $\alpha$ | $90° - \alpha$ |

**2419** A lehajtó 2,34 m mélyre visz.

**2420** A lejtő megközelítőleg 42,5 m magasra visz.

**2421** Az út hossza megközelítőleg 2518 méter.

**2422** A napsugarak a talajra 53,13°-ban érkeznek.

**2423** Egy csavarmenet 2,47 mm magas.

**2424** A templom toronyóráját 55,22° emelkedési szögben látjuk.

**2425** A folyó megközelítőleg 113 m széles.

**2426** Az énekes 41 méter távol van.

**2427** A létra alja a faltól legfeljebb 1,22 m távolságra lehet.

**2428** Ha a háromszög átfogója $c$, akkor a befogói $c \cdot \sin 50°$, illetve $c \cdot \cos 50°$. Mivel a kerület 70 cm, felírható:

$$c + c \cdot \sin 50° + c \cdot \cos 50° = 70.$$

Így az átfogó hossza:

$$c = \frac{70}{1 + \sin 50° + \cos 50°} \approx 29{,}06\,.$$

A háromszög oldalai 29,06 cm, 22,26 cm és 18,68 cm hosszúak.

**2429** Mivel a hegyesszög szinusza $\frac{5}{13}$, a szöggel szemben lévő befogó és az átfogó aránya $5 : 13$.

Legyen az átfogó $13x$, a szöggel szemben lévő befogó $5x$ hosszúságú. A másik befogó hossza Pitagorasz tétele alapján $12x$ hosszúságú.

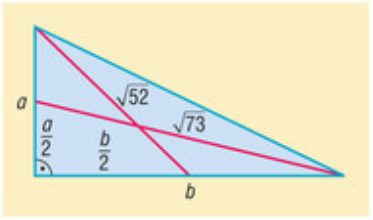
*a)* A hegyesszög koszinusza $\frac{12}{13}$.

*b)* A háromszög területe: $\frac{5x \cdot 12x}{2} = 1{,}2 \Rightarrow x^2 = 0{,}04 \Rightarrow x = 0{,}2.$

A háromszög oldalainak hossza tehát 1 m, 2,4 m és 2,6 m.

**2430** Legyenek a derékszögű háromszög befogói $a$ illetve $b$ hosszúságúak. Mivel az egy csúcsból kiinduló súlyvonal felezi a szemközti oldalt, az ábra alapján felírhatók a következő Pitagorasz-tételek:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = 73 \quad \text{és} \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = 52.$$




Az egyenletrendszer megoldásai: $a = 6$ és $b = 8$.

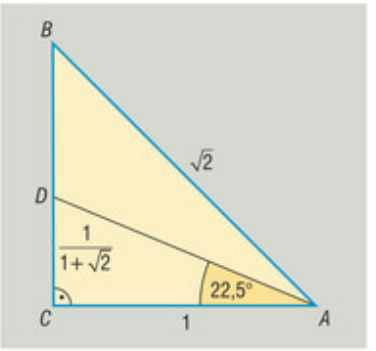
Az $a$ oldallal szemben levő $\alpha$ szögre tehát felírható, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{8}$, amiből $\alpha = 36{,}87°$.

A háromszög hegyesszögei: 36,87° és 53,13°.

**2431** Mivel egy racionális és egy irracionális szám hányadosa irracionális szám, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ és $\operatorname{ctg}\alpha$ irracionális szám.

Mivel két irracionális szám hányadosa lehet racionális és irracionális szám is, $\sin\alpha$ értékéről nem tudjuk eldönteni, hogy racionális vagy irracionális szám.

**2432** Vegyünk fel egy egységnyi befogójú $ABC$ egyenlő szárú derékszögű háromszöget, amelynek $AB$ átfogója $\sqrt{2}$ hosszúságú.




Az $A$ csúcsnál levő 45°-os hegyesszög szögfelezője a szemközti egységnyi befogót a szomszédos oldalak arányában, vagyis $1 : \sqrt{2}$ arányban osztja.

A szögfelező és a $BC$ befogó $D$ metszéspontjának a derékszögű csúcstól vett távolsága: $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ $(= DC)$.

Tekintsük az $ADC$ derékszögű háromszöget, amelynek egyik hegyesszöge 22,5°.

A háromszögben a szöggel szemben levő befogó hossza $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$, a szög melletti befogó hossza egységnyi.

Tehát $\operatorname{tg} 22{,}5° = \frac{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

**2433** A két szöget tekinthetjük egy derékszögű háromszög két hegyesszögének.

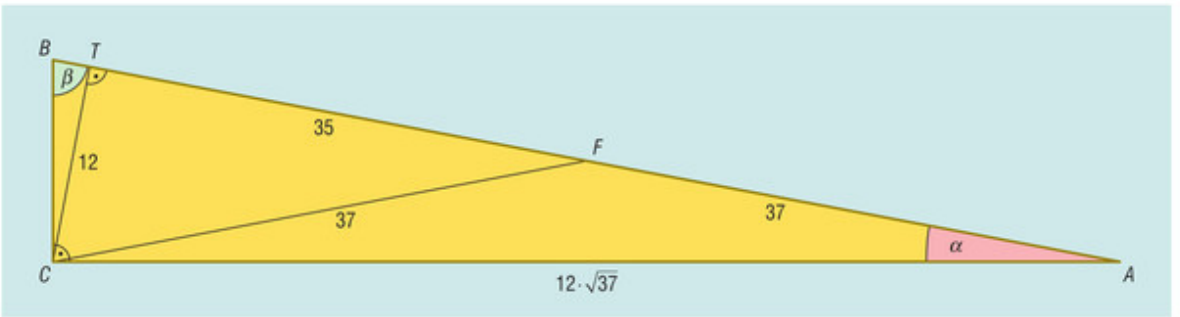
*a)* A háromszög hasonlóságtól eltekintve egyértelműen adott, ezért vehetjük az átfogóját egységnyinek. Legyen a két befogó hossza $a$ és $b$. A Pitagorasz-tétel alapján: $a^2 + b^2 = 1$. A feltétel szerint: $\frac{a}{1} - \frac{b}{1} = 0{,}2$.

Az egyenletrendszert megoldva: $a = 0{,}8$ és $b = 0{,}6$.

$\sin\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \alpha \approx 53{,}13°$ és $\beta \approx 36{,}87°$.

*b)* A szögeket megszerkeszthetjük egy 3 és 4 egység befogójú derékszögű háromszög hegyesszögeiként.

**2434** Az $ABC$ háromszögben $C$-nél derékszög van. Az átfogóhoz tartozó magasság talppontja legyen $T$, az átfogó felezőpontja $F$. A háromszög a hasonlóságtól eltekintve egyértelműen meghatározott, ezért vehetjük a $CT$ szakaszt 12, a $CF$ szakaszt 37 egységnyinek.




Thalész tételének megfordítása alapján a derékszögű háromszög köré írt körének középpontja az átfogó felezőpontja, $FA = FB = FC = 37$.

A $CFT$ háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$TF = \sqrt{37^2 - 12^2} = 35.$$

A $CTA$ derékszögű háromszögben:

$$TC = 12 \text{ és } TA = 35 + 37 = 72.$$

A Pitagorasz-tétel alapján:

$$CA = \sqrt{12^2 + 72^2} = \sqrt{5328} = 12 \cdot \sqrt{37}.$$

A $CTA$ derékszögű háromszögben:

$$\sin\alpha = \frac{12}{12\cdot\sqrt{37}} = \frac{1}{\sqrt{37}} = \frac{\sqrt{37}}{37}.$$

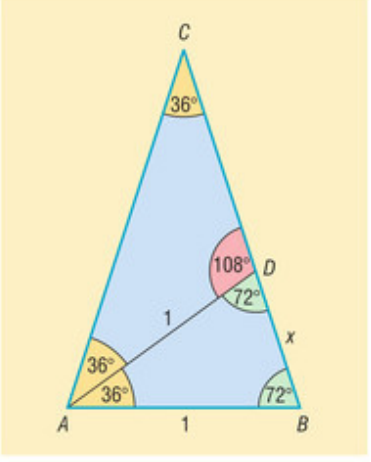
Az $ABC$ háromszögben az előzőek alapján $CA = 12\cdot\sqrt{37}$, illetve $AB = 2\cdot 37 = 74$, vagyis:

$$\sin\beta = \frac{12\cdot\sqrt{37}}{74} = \frac{6\cdot\sqrt{37}}{37}.$$

Tehát a háromszögben a hegyesszögek szinuszai:

$$\frac{\sqrt{37}}{37} \text{ és } \frac{6\cdot\sqrt{37}}{37}.$$

**2435** Vegyünk egy olyan $ABC$ egyenlő szárú háromszöget, amelynek az $AB$ alapon fekvő szögei 72°-osak. Az ábra szerint az $A$ csúcsból kiinduló belső szögfelező két egyenlő szárú háromszögre bontja az $ABC$ háromszöget. Legyen $AB = AD = DC = 1$, és $DB = x$. Az $ABC$, illetve a $BDA$ háromszögek szögei páronként egyenlők, tehát $ABC\triangle \sim BDA\triangle$.




A két hasonló háromszögben a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$\frac{1}{x} = \frac{1+x}{1},$$

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Az $x$ csak pozitív lehet, mivel szakasz hosszát jelöli, ezért:

$$DB = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Az $ABD$ egyenlő szárú háromszög szárai 1, alapja $x$ egység hosszú. Az alaphoz tartozó magasságot behúzva adódik, hogy:

$$\sin 18^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Tehát $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

**2436** A derékszögű háromszögben az egyik befogó 13 cm, a másik befogó hossza páratlan szám, tehát $2n + 1$ alakú ($n$ természetes szám). A Pitagorasz-tétel alapján az átfogó:

$$\sqrt{(2n+1)^2 + 13^2} = \sqrt{4n^2 + 4n + 1 + 169} = \sqrt{4n\cdot(n+1) + 170}.$$

Indirekt úton bizonyítjuk, hogy az átfogó hossza irracionális szám.

Tegyük fel, hogy racionális, vagyis felírható $\dfrac{p}{q}$ alakban ($p$, $q$ természetes szám):

$$\sqrt{4n\cdot(n+1) + 170} = \frac{p}{q}.$$

Az egyenlőség mindkét oldalát négyzetre emelve, majd $q^2$-tel beszorozva adódik:

$$[4n\cdot(n+1) + 170]\cdot q^2 = p^2.$$

Az egyenlőség jobb oldalán $p^2$ prímtényezős felbontásában a 2 páros kitevőjű hatványon szerepel.

Az egyenlőség bal oldalán $q^2$ prímtényezős felbontásában a 2 páros kitevőjű hatványon szerepel, a $4n \cdot (n+1) + 170$ kifejezés 2-vel osztható, de 4-gyel nem, tehát az egyenlőség bal oldalának prímtényezős felbontásában a 2 hatványkitevője páratlan.

Az egyenlőség jobb, illetve bal oldalán a 2 hatványkitevője különböző paritású. Ez ellentmond a számelmélet alaptételének, vagyis az átfogó hossza nem lehet racionális szám, tehát az átfogó hossza irracionális szám.

**2437** Az $ABC$, $ACC_1$, …, $AC_{n-2}C_{n-1}$ derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján az $AC, AC_1, \ldots, AC_{n-1}$ átfogók hossza rendre:

$$\sqrt{2}\,,\ \sqrt{3}\,,\ \ldots,\sqrt{n}.$$

Ekkor felírható:

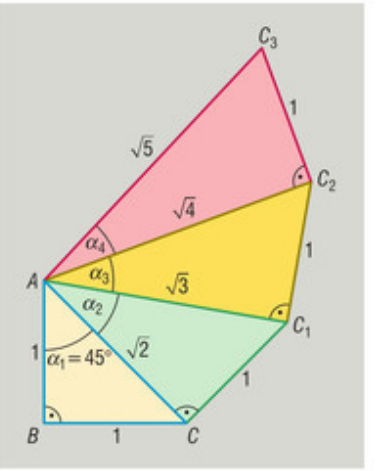
$$\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \ldots + \operatorname{tg}\alpha_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Az előző összegnek egyetlen tagja sem kisebb, mint $\frac{1}{\sqrt{n}}$, tehát

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} = \operatorname{ctg}\alpha_n.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $n = 1$.

Ezzel beláttuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \ldots + \operatorname{tg}\alpha_n \geq \operatorname{ctg}\alpha_n$.




## Összefüggések hegyesszögek szögfüggvényei között, nevezetes szögek szögfüggvényei – megoldások

**2438** A kifejezések egyszerűbb alakjai:

*a)* $\sin\alpha$; *b)* $\sin^2\alpha$; *c)* 1; *d)* 1;

*e)* $\sin\alpha - \cos\alpha$; *f)* 1.

**2439** Az *a)*, *b)* és *c)* részben a $\operatorname{ctg}\alpha$-t, illetve a $\operatorname{tg}\alpha$-t írjuk fel $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ segítségével, majd alakítsunk ki közös nevezőt. Használjuk fel, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

A *d)* részben felírhatjuk, hogy:

$$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 = \sin^6\alpha + 3 \cdot \sin^4\alpha \cdot \cos^2\alpha + 3 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^4\alpha + \cos^6\alpha =$$
$$= \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha).$$

Mivel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ezért:

$$1 = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha,$$

ami éppen a bizonyítandó egyenlőség.

**2440** Használjuk a pótszögekre vonatkozó összefüggéseket:

*a)* 1; *b)* 1; *c)* 2.

**2441** A kifejezések pontos értékei:

*a)* $\frac{3 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$; *b)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *c)* 1; *d)* $\frac{\sqrt{3}}{8}$;

*e)* $\frac{1}{4}$; *f)* 1; *g)* 0.



**2442** A helyesen kitöltött táblázat:

| $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{3}$ |
| $\sqrt{0{,}96} \approx 0{,}9798$ | $0{,}2$ | $\frac{\sqrt{0{,}96}}{0{,}2} \approx 4{,}899$ | $\frac{0{,}2}{\sqrt{0{,}96}} \approx 0{,}2041$ |
| $\frac{4}{\sqrt{17}}$ | $\frac{1}{\sqrt{17}}$ | $4$ | $0{,}25$ |
| $\frac{3}{\sqrt{10}}$ | $\frac{1}{\sqrt{10}}$ | $3$ | $\frac{1}{3}$ |
| $a$ | $\sqrt{1-a^2}$ | $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ | $\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ |
| $\frac{\sqrt{b^2-1}}{b}$ | $\frac{1}{b}$ | $\sqrt{b^2-1}$ | $\frac{1}{\sqrt{b^2-1}}$ |

**2443** *a)* $\alpha > 45°$; *b)* $\alpha < 45°$.

**2444** A kifejezések egyszerűbb alakjai:

*a)* $$\frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

*b)* A 2439. feladat *d)* részéből:

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha,$$

valamint

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha.$$

Ezeket felhasználva:

$$2\cdot(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3\cdot(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)=$$
$$=2\cdot(1-3\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)-3\cdot(1-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)=-1.$$

**2445** A kifejezés értéke 1.

**2446** Ismeretes, hogy bármely pozitív számnak és reciprokának az összege legalább 2, és az összeg csak abban az esetben lesz 2, ha a szám 1.

Mivel $\operatorname{tg}x$ reciproka $\operatorname{ctg}x$, az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\operatorname{tg}x=1$, azaz $x=\frac{\pi}{4}$.

**2447** A 2435. feladat eredményét használjuk:

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow \cos 72° = \sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4};$$

$$\sin 72° = \sqrt{1-\cos^2 72°} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{5}+10};$$

$$\operatorname{ctg}72° = \frac{\cos 72°}{\sin 72°} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{5}+10}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2\cdot\sqrt{5}+10}} = \sqrt{\frac{6-2\cdot\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}+10}} = \sqrt{\frac{5-2\cdot\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{25-10\cdot\sqrt{5}}}{5};$$

$$\operatorname{tg}72° = \frac{\sin 72°}{\cos 72°} = \sqrt{\frac{5}{5-2\cdot\sqrt{5}}} = \sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}.$$

**2448** Tekintsünk egy egységnyi átfogójú derékszögű háromszöget, amelynek egyik hegyesszöge $\alpha$. A háromszög befogói $\sin\alpha$, illetve $\cos\alpha$.

Területét a befogók szorzatának feleként számítjuk:

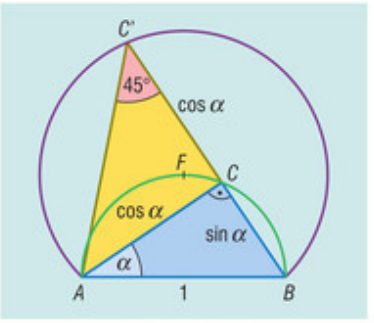
$$t = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2}.$$

Ismeretes, hogy adott átfogójú derékszögű háromszögek közül az egyenlő szárú derékszögű háromszög területe a legnagyobb, így $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ akkor a legnagyobb, ha $\alpha = 45°$:

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha \le \sin 45° \cdot \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Tehát a $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ kifejezés maximuma $\frac{1}{2}$, amelyet $\alpha = 45°$ esetén vesz fel.

**2449** Tekintsünk egy egységnyi $AB$ átfogójú derékszögű háromszöget, amelynek egyik hegyesszöge $\alpha$. A háromszög befogói $\sin\alpha$, illetve $\cos\alpha$.




A háromszög-egyenlőtlenség alapján a befogók összege nagyobb az átfogónál, tehát $1 < \sin\alpha + \cos\alpha$.

Be kell még bizonyítanunk, hogy $\sin\alpha + \cos\alpha \le \sqrt{2}$.

Az egységnyi $AB$ átfogó mint átmérő fölé emeljünk Thalész-kört. A $C$ derékszögű csúcs ezen a körön mozoghat. Mérjük fel a $C$-n túl $BC$ egyenesre az $AC$ oldal hosszát, így $C'$ ponthoz jutunk. Az $ACC'$ háromszög egyenlő szárú derékszögű, tehát $AC'C$ szög 45°. A $BC' = \sin\alpha + \cos\alpha$ szakasz hosszára kell felső becslést adnunk.

Mivel az $AB$ adott, a $C'$ pont az $AB$ húr 45°-os látószögkörívén van, amelynek középpontja az $AB$ ív $F$ felezőpontja. Ennek a körívnek a húrja $BC'$, ami akkor lesz a leghosszabb, ha éppen a látókör átmérője, vagyis áthalad az $AB$ körív $F$ felezéspontján. Ez alapján $BC'$ akkor a legnagyobb, ha az $ABC$ háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög.

Tehát $\sin\alpha + \cos\alpha$ akkor maximális, ha $\alpha = 45°$, tehát

$$\sin\alpha + \cos\alpha \le \sin 45° + \cos 45° = \sqrt{2}.$$

**2450** A 2444. feladat *b)* részéből:

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha;$$

$$\sin^8\alpha + \cos^8\alpha = (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)^2 - 2 \cdot \sin^4\alpha \cdot \cos^4\alpha =$$
$$= (1 - 2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha)^2 - 2 \cdot \sin^4\alpha \cdot \cos^4\alpha,$$

vagyis

$$\sin^8\alpha + \cos^8\alpha = 1 - 4 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + 2 \cdot \sin^4\alpha \cdot \cos^4\alpha.$$

Ezeket felhasználva:

$$2 \cdot (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha)^2 - (\sin^8\alpha + \cos^8\alpha) =$$
$$= 2 \cdot (1 - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha)^2 - (1 - 4 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + 2 \cdot \sin^4\alpha \cdot \cos^4\alpha) =$$
$$= 2 - 4 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + 2 \cdot \sin^4\alpha \cdot \cos^4\alpha - 1 + 4 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - 2 \cdot \sin^4\alpha \cdot \cos^4\alpha = 1.$$

A kifejezés értéke tehát 1.

**2451** Mivel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, valamint $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, illetve $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, az egyenlet bal oldala így is írható:

$$1 + 2 \cdot (\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) + 2.$$

Ismeretes, hogy bármely pozitív számnak és a reciprokának az összege legalább 2, tehát a bal oldal legalább $1 + 4 + 2 = 7$. Így nincs olyan $\alpha$ hegyesszög, amely teljesítené az egyenlőséget.



# Háromszögek különböző adatainak meghatározása szögfüggvények segítségével – megoldások

**2452** A háromszög szögei: 66,42°, 66,42° és 47,16°.

**2453** A háromszög szögei: 73,74°, 53,13° és 53,13°.

**2454** Az inga végpontjának két szélső helyzete közötti távolság 6,5 cm.

**2455** A két szomszédos fog által bezárt szöget megkapjuk, ha egy olyan egyenlő szárú háromszög szárszögét 8 egyenlő részre osztjuk, amelynek az alapja 40 cm és a szára 38 cm hosszú. A szárszögre:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{20}{38}\Rightarrow\alpha\approx 63{,}51°.$$

A lombseprű két szomszédos foga $\frac{63{,}51°}{8}\approx 7{,}94°$ szöget zár be.

**2456** A háromszög oldalai: 141,38 cm, 83,82 cm és 83,82 cm.

**2457** A helyesen kitöltött táblázat ($a>0$):

| Oldalak száma | Egy oldal hossza | Beírt kör sugarának hossza | Köré írt kör sugarának hossza |
|---|---|---|---|
| 5 | 10 cm | 6,88 cm | 8,51 cm |
| 12 | 3,62 cm | 6,76 cm | 7 cm |
| 9 | 6,55 cm | 9 cm | 9,58 cm |
| $n$ | $a$ | $\frac{a}{2\cdot\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$ | $\frac{a}{2\cdot\sin\frac{180°}{n}}$ |
| $n$ | $2r\cdot\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$ | $r$ | $\frac{r}{\cos\frac{180°}{n}}$ |
| $n$ | $2R\cdot\sin\frac{180°}{n}$ | $R\cdot\cos\frac{180°}{n}$ | $R$ |

**2458** A középponti szög: 77,36°.

**2459** Megközelítőleg 7,71 cm hosszú húrhoz tartozik 40°-os kerületi szög.

**2460** A kör sugara 6,55 cm.

**2461** A kerületi szög lehet 20,49° vagy 159,51°.

**2462** Az oldallal szemközti szög lehet 23,58° vagy 156,42°.

**2463** A háromszög területe: *a)* 408,95 dm$^2$; *b)* 430 dm$^2$; *c)* 329,40 dm$^2$.

**2464** A háromszög szárai 15,88 cm, az alapja 14,05 cm hosszú.

**2465** A paralelogramma területe: *a)* 258,58 dm$^2$; *b)* 420 dm$^2$; *c)* 269,97 dm$^2$.

**2466** A paralelogramma területe 596,16 cm$^2$.

**2467** *a)* A szabályos tízszög területe 769,4 cm$^2$. *b)* A szabályos hétszög területe 363,4 cm$^2$.

*c)* A szabályos $n$-szög területe $n\cdot\frac{25}{\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$ cm$^2$.

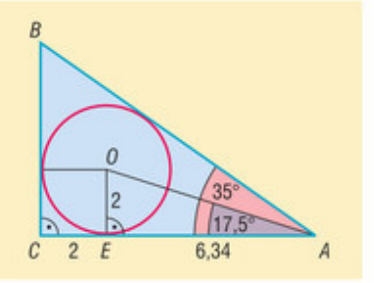
**2468** A területek aránya:

$$\frac{T_{\text{nyolcszög}}}{T_{\text{hatszög}}} = \frac{8 \cdot \dfrac{6^2 \cdot \sin 45^\circ}{2}}{6 \cdot \dfrac{8^2 \cdot \sin 60^\circ}{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4 \cdot \sqrt{3}} \approx 0{,}6124.$$

A nyolcszög területe a hatszög területének 61,24 százaléka.

**2469** A köré írt kör sugara 10,12 cm.

**2470** Tekintsük az ábra jelöléseit. A beírt kör középpontja rajta van az $A$ csúcsból kiinduló belső szögfelezőn. Mivel egy kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, az $OEA$ háromszög derékszögű. Ezért felírható:




$$\operatorname{tg} 17{,}5^\circ = \frac{2}{EA};$$

$$EA = \frac{2}{\operatorname{tg} 17{,}5^\circ} \approx 6{,}34 \text{ cm}.$$

A beírt kör középpontja, a derékszögű csúcs és a beírt körnek a befogókkal vett érintési pontjai négyzetet határoznak meg. Tehát $CE = 2$ és $CA = 2 + 6{,}34 = 8{,}34$ cm.

Az $ABC$ háromszög többi oldala a 35° szögfüggvényeiből számítható:

$$AB = \frac{8{,}34}{\cos 35^\circ} \approx 10{,}18 \quad \text{és} \quad BC = 8{,}34 \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \approx 5{,}84.$$

A háromszög oldalai: 8,34 cm, 5,84 cm és 10,18 cm.

**2471** Legyen a háromszög alapja $a$, a szárai $b$ hosszúságúak.

A háromszög alaphoz tartozó magasságát behúzva:

$$\frac{a}{2b} = \cos 72^\circ 35', \quad \text{amiből} \quad a = 2b \cdot \cos 72^\circ 35'.$$

A feladat feltétele szerint $a + b = 20$, tehát:

$$2b \cdot \cos 72^\circ 35' + b = 20, \quad \text{amiből} \quad b = \frac{20}{2 \cdot \cos 72^\circ 35' + 1} \approx 12{,}51;$$

$$a = 2 \cdot 12{,}51 \cdot \cos 72^\circ 35' \approx 7{,}49.$$

A háromszög oldalai: 12,51 cm, 12,51 cm és 7,49 cm.

**2472** *a)* A háromszög szára 34,3 cm.

*b)* A háromszög területe 587,0 cm$^2$.

*c)* A háromszög beírt körének a sugara 9,9 cm.

*d)* A háromszög köré írt körének a sugara 25,1 cm.

**2473** A háromszög szögei 54°, 65° és 61°.

*a)* A háromszög területe: $2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \approx 513{,}0$ cm$^2$.

*b)* A háromszög legrövidebb $m$ magassága a leghosszabb $a$ oldalhoz tartozik, ami a háromszög legnagyobb $\alpha$ szögével szemben van. Az oldal hossza $a = 2R \cdot \sin\alpha$.

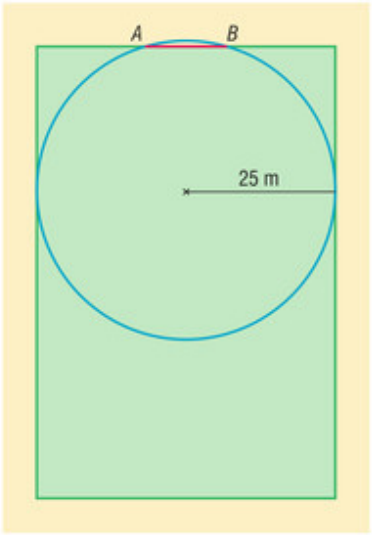
A legrövidebb magasságot a háromszög területéből számíthatjuk:

$$m = \frac{2T}{a} = \frac{4R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2R \cdot \sin\alpha} = 2R \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \approx 28{,}3 \text{ cm}.$$

*c)* A háromszög kerülete: $2R \cdot (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \approx 103{,}6$ cm.

*d)* A háromszög beírt körének a sugara: $r = \dfrac{T}{s} \approx 9{,}9$ cm.

**2474** Tekintsük a focipályát felülnézetben. A kapu $AB$ szélessége 7,35 m. Rajzoljuk meg azt a kört, amelyik áthalad az $A$ és $B$ pontokon, valamint érinti a két oldalvonalat. Ennek a körnek a sugara 25 m. Ismert, hogy egy szakasz fölé emelt $\alpha$ szögű látóköríven kívüli pontokból a szakasz $\alpha$-nál kisebb szög alatt látszik.




Ennek alapján az oldalvonal mentén az a pont, amelyből a kapu a legnagyobb szög alatt látszik, a kör és az oldalvonal érintési pontja. Ebből a pontból a kapu éppen akkora szögben látszik, mint a 25 m sugarú körben a 7,35 m hosszúságú húrhoz tartozó kerületi szög. A kör sugara, a húr hossza és a kerületi szög közötti ismert összefüggés alapján:

$$\sin\alpha = \frac{h}{2r} = \frac{7{,}35}{2 \cdot 25} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 8{,}45°.$$

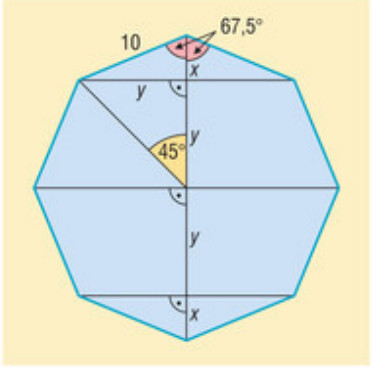
A partjelző legfeljebb 8,45° szögben láthatja a 735 cm szélességű kaput.

**2475** *a)* A nyolcszög beírt körének a sugara 12,07 cm.

*b)* A nyolcszög köré írt körének a sugara 13,07 cm.

*c)* A nyolcszög területe megközelítőleg 483 cm$^2$.

*d)* A szabályos nyolcszög egy oldala a középpontjából 45°-os szög alatt látszik, és egy belső szöge 135°. Az ábrán látható $x$, $y$ szakaszok hosszát egy olyan derékszögű háromszögből számíthatjuk, amelynek hegyesszöge 67,5° átfogója 10 cm:




$$x = 10 \cdot \sin 67{,}5° \approx 9{,}24 \quad \text{és} \quad y = 10 \cdot \cos 67{,}5° \approx 3{,}83.$$

A tengelyes szimmetria miatt a leghosszabb átlót a rá merőleges átlók két 9,24 cm, illetve két 3,83 cm-es részekre osztják.

**2476** Legyen az $ABC$ háromszög $BC$ oldalának felezőpontja $F$, az $AC$ oldalának felezőpontja $E$, valamint a súlyvonalak hossza $AF = 9$ cm és $BE = 12$ cm. Tudjuk, hogy a háromszög súlyvonalai harmadolják egymást, így az $ABC$ háromszög $S$ súlypontja az $AF$ súlyvonalat $AS = 6$ cm, illetve $SF = 3$ cm hosszúságú szakaszokra bontja. Ugyanígy $ES = 4$ cm, illetve $SB = 8$ cm.

Az $ABF$ és az $ABC$ háromszögek $BF$ és $BC$ oldalaihoz tartozó magasságai egyenlők, valamint:

$$BF = \frac{1}{2} \cdot BC; \quad T_{ABF\ \text{háromszög}} = \frac{1}{2} \cdot T_{ABC\ \text{háromszög}}.$$

A $BSF$ és a $BAF$ háromszögek $FS$ és $FA$ oldalaihoz tartozó magasságai egyenlők, valamint:

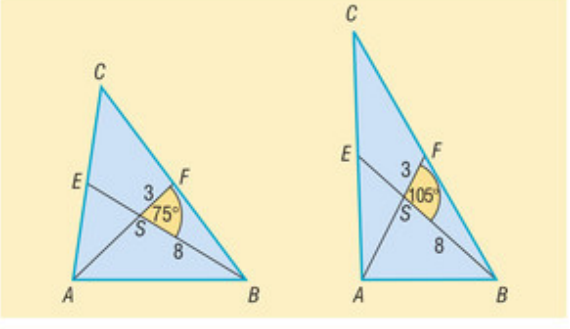
$$FS = \frac{1}{3} \cdot FA,$$

ezért

$$T_{BSF\ \text{háromszög}} = \frac{1}{3} \cdot T_{BAF\ \text{háromszög}}.$$

Tehát

$$T_{BSF\ \text{háromszög}} = \frac{1}{6} \cdot T_{ABC\ \text{háromszög}}.$$



A $BSF$ háromszög területe kiszámítható, mivel adott két oldalának hossza és az általuk bezárt szög, amely 75° vagy 105°:

$$T_{BSF\text{ háromszög}} = \frac{8 \cdot 3 \cdot \sin 75^\circ}{2} = \frac{8 \cdot 3 \cdot \sin 105^\circ}{2} \approx 11{,}59\ \text{cm}^2.$$

Az $ABC$ háromszög területe ennek hatszorosa: 69,54 cm$^2$.

**2477** A háromszög két oldala legyen $a$, illetve $b$. Ha a két oldal által bezárt szög $\gamma$, akkor:

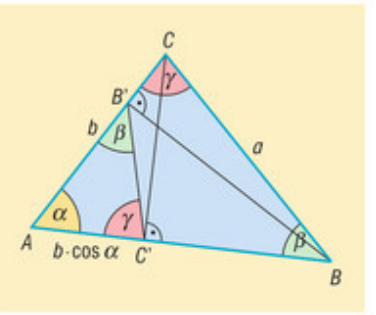
$$8 \cdot T_{\text{háromszög}} = 8 \cdot \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2} = 4 \cdot ab \cdot \sin\gamma.$$

A hegyesszög szinuszának definíciója alapján $\sin\gamma < 1 \Rightarrow 4ab \cdot \sin\gamma < 4ab$.

A számtani és mértani közép közti összefüggés alapján: $4ab = 4 \cdot \left(\sqrt{ab}\right)^2 \le 4 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = (a+b)^2$.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

**2478** Az $ABC$ háromszög oldalainak hossza a szokásos jelöléssel legyen $a$, $b$ és $c$, szögeinek nagysága $\alpha$, $\beta$ és $\gamma$. A háromszög $B$ csúcsából induló magasság talppontja legyen $B'$, a $C$ csúcsából induló magasság talppontja legyen $C'$.




A $BCB'C'$ négyszög húrnégyszög, mivel a $B'$ és $C'$ pontokat tartalmazza a $BC$ Thalész-köre.

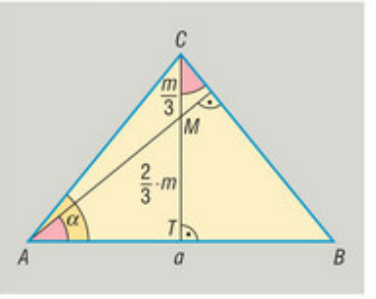
A húrnégyszög egy külső szöge egyenlő a vele szemben lévő belső szöggel, ezért az $AC'B'$ háromszög szögei páronként egyenlők az $ABC$ háromszög szögeivel, tehát a két háromszög hasonló.

A megfelelő oldalak aránya: $\frac{B'C'}{AC'} = \frac{a}{b}$. Az $AC'C$ derékszögű háromszögből $AC' = b \cdot \cos\alpha$, tehát:

$$\frac{B'C'}{b \cdot \cos\alpha} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad B'C' = a \cdot \cos\alpha.$$

**2479** Az $ABC$ háromszög $a$ hosszúságú $AB$ alapjához tartozó $m$ magasságának talppontja $T$, a magasságpontja $M$, amely a feltétel szerint $m$-nek a $C$-hez közelebbi harmadolópontja.

Az $AMT$ háromszög hasonló a $CTB$ háromszöghöz, mivel mindkettőben a $T$-nél lévő szög 90°, illetve a $TAM$ és $TCB$ szögek merőleges szárú hegyesszögek.




A két háromszögben a megfelelő befogók aránya egyenlő:

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot m}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{m}.$$

Átrendezve, majd megoldva:

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2 = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{a} = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Az alapon fekvő $\alpha$ szög tangense:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{m}{a}}{\frac{a}{2}} = 2 \cdot \frac{m}{a} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 50{,}77^\circ.$$

A háromszög szögei: 50,77°, 50,77° és 78,46°.

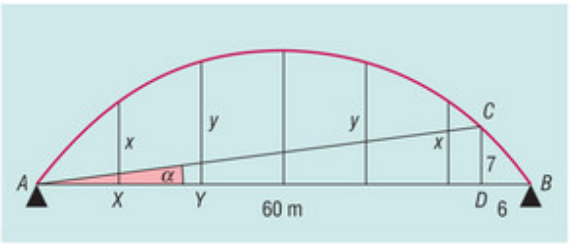
**2480** Tekintsük a mellékelt ábrát.

*a)* A kör $CB$ húrja a Pitagorasz-tétellel:

$$\sqrt{6^2 + 7^2} \approx 9{,}22 \text{ m}.$$

A húrhoz tartozó $CAB$ kerületi szög az $ADC$ háromszögből szögfüggvénnyel számolható:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{54} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 7{,}39^\circ.$$




Ismeretes, hogy a kör sugarát egy húrjának és a hozzá tartozó kerületi szögnek a segítségével kiszámolhatjuk:

$$R = \frac{h}{2 \cdot \sin\alpha} = \frac{9{,}22}{2 \cdot \sin 7{,}39^\circ} \approx 35{,}84 \text{ m}.$$

A kör sugara 35,84 m.

*b)* A híd legnagyobb magasságát megkaphatjuk úgy, hogy a kör sugarának hosszából kivonjuk az $AB$ húrjának a kör középpontjától vett távolságát.

A híd legnagyobb magassága: $35{,}84 - \sqrt{35{,}84^2 - 30^2} \approx 16{,}23$ m.

*c)* Az $x$ hosszúságú tartóoszlop hosszának meghatározásához tekintsük azt a kört, amelynek része a köríves tartószerkezet. Az oszlop $X$ talppontjának $A$-tól vett távolsága a 60 m hatod része, azaz 10 m.

Az $AB$ húrra merőleges húr a kör középpontjától 20 méter távolságra van, így hosszának a fele:

$$\sqrt{35{,}84^2 - 20^2}.$$

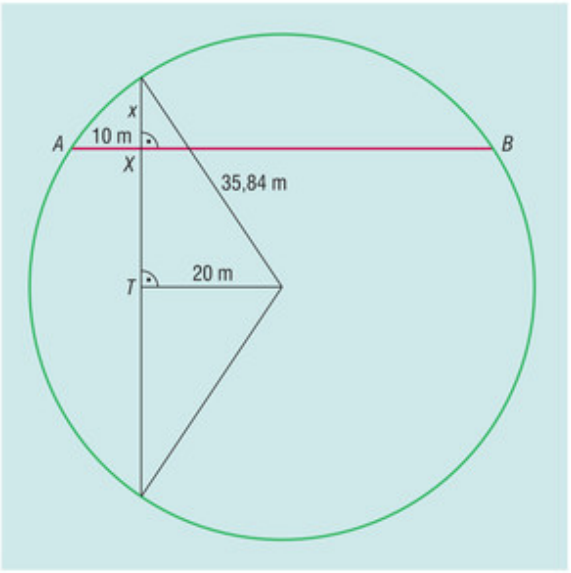
Az előző rész alapján $XT$ távolság az $AB$ húrnak a kör középpontjától vett távolsága:

$$\sqrt{35{,}84^2 - 30^2}.$$

Ez alapján:

$$x + \sqrt{35{,}84^2 - 30^2} = \sqrt{35{,}84^2 - 20^2},$$

$$x \approx 10{,}13 \text{ m}.$$




Az $x$ hosszúságú tartóoszlop hossza megközelítőleg 10,1 m.

Hasonlóan az $y$ hosszúságú tartóoszlop hossza megközelítőleg 14,8 m.

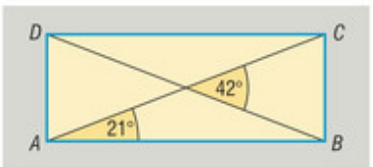
A függőleges tartóoszlopok tehát rendre 10,1, 14,8, 16,2, 14,8 és 10,1 méter hosszúak.

## Síkbeli és térbeli számítások a szögfüggvények segítségével – megoldások

**2481** A téglalap átlóinak a hosszabbik oldalakkal bezárt szöge éppen az átlók által bezárt szögnek a fele.

Ha a téglalap hosszabbik oldala 25 cm, akkor a másik oldal:

$$25 \cdot \operatorname{tg} 21^\circ \approx 9{,}60.$$



Ha a téglalap rövidebbik oldala 25 cm, akkor a másik oldal:

$$\frac{25}{\operatorname{tg} 21^\circ} \approx 65{,}13.$$

A téglalap kerülete lehet:

$$2 \cdot (25 + 9{,}60) = 69{,}20 \text{ cm}$$

vagy

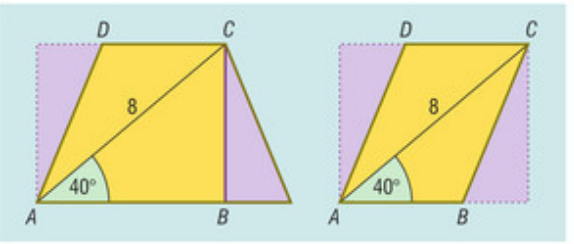
$$2 \cdot (25 + 65{,}13) = 180{,}26 \text{ cm}.$$

**2482** A trapéz szögei: 55°, 55°, 125° és 125°.

**2483** Ha a szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 21 cm, akkor a trapéz másik alapja 3,45 cm.
Ha a szimmetrikus trapéz rövidebbik alapja 21 cm, akkor a trapéz másik alapja 38,55 cm.
Ha a szimmetrikus trapéz paralelogramma, akkor a másik alapja is 21 cm.

**2484** A trapéz területe 1545,42 cm$^2$.

**2485** A szimmetrikus trapéz lehet húrtrapéz, vagy paralelogramma. Mindkét esetben átdarabolható egy olyan téglalapba, amelyik átlója 8 cm. Ez az átló a téglalap egyik oldalával 40°-os szöget zár be.




Területe:

$$t = 8 \cdot \sin 40^\circ \cdot 8 \cdot \cos 40^\circ \approx 31{,}51 \text{ cm}^2.$$

**2486** A közös külső érintők által bezárt szög 17,25°.
A közös belső érintők által bezárt szög 81,08°.

**2487** A körszelet területe 18,06 cm$^2$.

**2488** A két rész területe 65,27 cm$^2$, illetve 1190,73 cm$^2$.

**2489** A hulladék 4,46 százalék.

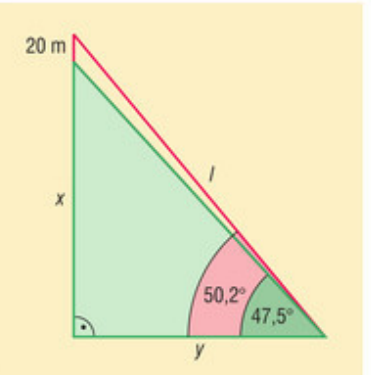
**2490** A lámpabúra átmérője 26 cm.

**2491** A hegy magasságát jelöljük $m$-mel. Felírhatjuk a következő egyenletet:

$$m \cdot \operatorname{ctg} 18^\circ 24' + m \cdot \operatorname{ctg} 22^\circ 43' = 8000 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{8000}{\operatorname{ctg} 18^\circ 24' + \operatorname{ctg} 22^\circ 43'} \approx 1483.$$

A hegy magassága: 1483 m.

**2492** A mellékelt ábra alapján:




$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} 47{,}5^\circ \quad \text{és} \quad \frac{x+20}{y} = \operatorname{tg} 50{,}2^\circ.$$

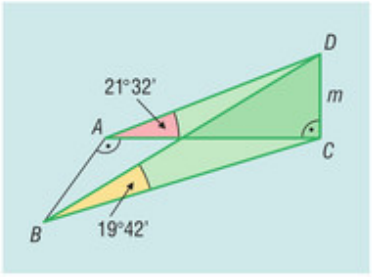
Az egyenletrendszert megoldva adódik, hogy $x = 200$ m.

A varjú által megtett $l$ út annak a derékszögű háromszögnek az átfogója, amelynek hegyesszöge 50,2° és a vele szemben levő befogója 220 m:

$$l = \frac{220}{\sin 50{,}2^\circ} \approx 286.$$

A varjú által megtett út 286 m.

**2493** Tekintsük a mellékelt ábrát. A hegy $DC$ magassága legyen $m$.




Az $ACD$ derékszögű háromszögben:

$$AC = m \cdot \operatorname{ctg} 21°32'.$$

A $BCD$ derékszögű háromszögben:

$$BC = m \cdot \operatorname{ctg} 19°42'.$$

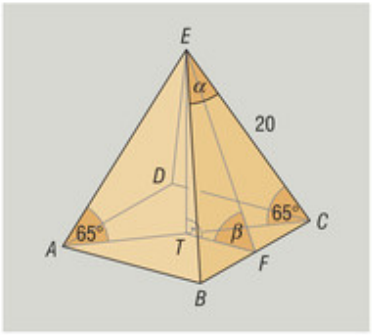
A Pitagorasz-tételt felírva az $ABC$ derékszögű háromszögben:

$$1{,}2^2 + (m \cdot \operatorname{ctg} 21°32')^2 = (m \cdot \operatorname{ctg} 19°42')^2.$$

Az egyenletet megoldva $m = 1{,}022$.

A hegy magassága 1022 m.

**2494** Tekintsük a mellékelt ábrát.




*a)* A gúla magassága a $TCE$ derékszögű háromszögben számolható:

$$ET = 20 \cdot \sin 65° \approx 18{,}13 \text{ cm}.$$

*b)* Az alaplap átlóját a $TCE$ derékszögű háromszögből számíthatjuk:

$$AC = 2 \cdot 20 \cdot \cos 65°.$$

Az alapél:

$$BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 20 \cdot \cos 65°}{\sqrt{2}} \approx 11{,}95 \text{ cm}.$$

*c)* Az oldallap és az alaplap $\beta$ szöge a $TFE$ szög. A $TFE$ derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{ET}{TF} \Rightarrow \beta = 71{,}76°.$$

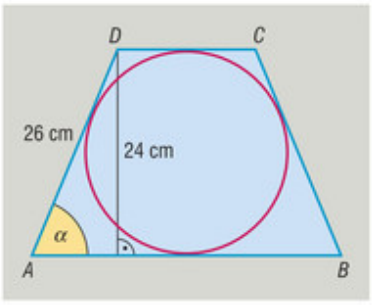
*e)* Két szomszédos oldalél által bezárt $\alpha$ szög a $BEC$ egyenlő szárú háromszögből számítható:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{FC}{EC} \Rightarrow \alpha = 34{,}77°.$$

**2495** *a)* Az érintők által bezárt szög: 106,26°. *b)* Az érintőszakasz hossza: 6 cm.

*c)* Az érintési pontok távolsága: 9,6 cm.

**2496** A trapéz két alapjának számtani közepe a középvonal hossza, így az alapok összege 52 cm. Az érintőnégyszögek tétele alapján az alapok hosszának összege a két egyenlő szár hosszának összege. A szár hossza $52 : 2 = 26$ cm. A trapéz magassága a beírható kör sugarának kétszerese: 24 cm.




A szár és a trapéz magassága által meghatározott derékszögű háromszög $\alpha$ hegyesszögére felírható:

$$\sin \alpha = \frac{24}{26} \Rightarrow \alpha = 67{,}38°.$$

A trapéz szögei: 67,38°, 67,38°, 112,62°, 112,62°.

**2497** A derékszögű háromszög – hasonlóságtól eltekintve – egyértelműen adott, így vehetjük az átfogót 5 egységnyinek, a két szeletét 1, illetve 4 egységnyinek. A befogótétel alapján a rövidebbik befogó $\sqrt{1 \cdot 5} = \sqrt{5}$ egység.

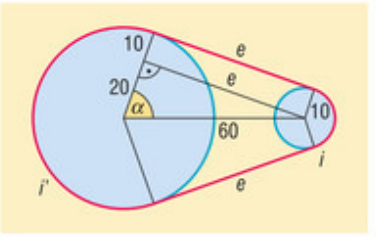
A háromszög kisebb $\alpha$ hegyesszöge számítható szögfüggvénnyel: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 26{,}57°$.

A háromszög hegyesszögei: 26,57°; illetve 63,43°.

**2498** A külső érintők 14,25°-os szöget zárnak be.

A két kör középpontjának távolsága 8,06 cm, ami nagyobb, mint a körök sugarainak összege, tehát a két kör nem metszi egymást.

**2499** *a)* Egyenes szíjhajtás esetén a szíj hossza az ábrán látható jelölés szerint: $2e + i + i'$.




Az $e$ külső érintő hossza: $e = \sqrt{60^2 - 20^2} = 40 \cdot \sqrt{2}$ cm.

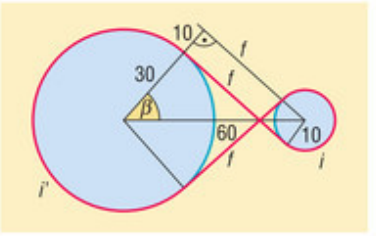
Az $i$ és $i'$ ívhossz középponti szögét meghatározhatjuk, ha az ábrán jelölt $\alpha$ szöget kiszámítjuk: $\cos\alpha = \frac{20}{60} \Rightarrow \alpha = 70{,}53°$.

Az $i$ ívhossz $2 \cdot 10 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot 70{,}53°}{360°} \approx 24{,}61$ cm.

Az $i'$ ívhossz $2 \cdot 30 \cdot \pi \cdot \frac{360° - 2 \cdot 70{,}53°}{360°} \approx 114{,}58$ cm.

A szíj hossza: $2e + i + i' = 252{,}33$ cm.

*b)* Keresztezett szíjhajtás esetén hasonlóan járhatunk el.




Az $f$ belső érintő hossza: $f = \sqrt{60^2 - 40^2} = 20 \cdot \sqrt{5}$ cm.

Az $i$ és $i'$ ívhossz középponti szögét meghatározhatjuk, ha az ábrán jelölt $\beta$ szöget kiszámítjuk:

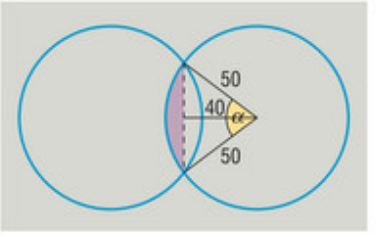
$$\cos\beta = \frac{40}{60} \Rightarrow \beta = 48{,}19°.$$

Az $i$ ívhossz: $2 \cdot 10 \cdot \pi \cdot \frac{360° - 2 \cdot 48{,}19°}{360°} \approx 45{,}99$ cm.

Az $i'$ ívhossz: $2 \cdot 30 \cdot \pi \cdot \frac{360° - 2 \cdot 48{,}19°}{360°} \approx 137{,}96$ cm.

A szíj hossza: $2f + i + i' = 273{,}39$ cm.

**2500** A gabonakörök által lefedett területet kell meghatároznunk. A mindkét kör által lefedett rész területe a két egybevágó körszelet területének összege. Ezen körszelet középponti szöge meghatározható:



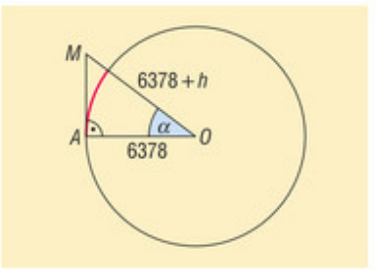

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{40}{50} \Rightarrow \alpha = 73{,}74°.$$

A körszelet területe: 407,94 m$^2$.

A körök által lefedett terület: $2 \cdot 50^2\pi - 2 \cdot 407{,}94 \approx 14\,884$ m$^2$ = 1,4884 ha.

A bevételkiesése tehát: $1{,}4884 \cdot 4\,000 \cdot 20 \approx 119\,000$ forint.

**2501** A mellékelt sematikus ábrát tekintve a hegy magasságát $h$-val jelöltük. Az $A$ megfigyelési pontból a hegy csúcsa akkor látszik, ha a látóhatár felett van. A látóhatár az $AOM$ derékszögű háromszög $AM$ egyenese. Az $O$ csúcsnál levő $\alpha$ szög az $O$ középpontú, 6378 km sugarú körben a 250 km hosszú ívhez tartozó középponti szög:




$$\alpha = \frac{250}{2 \cdot 6378 \cdot \pi} \cdot 360° \approx 2{,}247°.$$

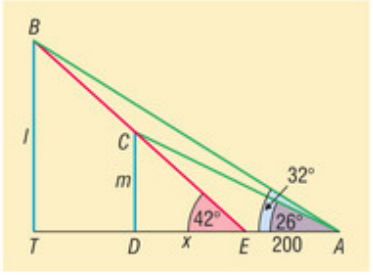
Az említett háromszögben számolva:

$$\frac{AO}{MA} = \cos\alpha,$$

$$\frac{6378}{6378 + h} = \cos 2{,}247^\circ \quad \Rightarrow \quad h \approx 4{,}908.$$

A hegy tehát legalább 4908 m magas.

**2502** Az ábra jelöléseit használva a közelebbi hegy csúcsa legyen $C$, a távolabbié pedig $B$.




Először a közelebbi hegy $DC$ magasságát határozzuk meg.

A $CDA$ háromszögben: $\dfrac{m}{x + 200} = \operatorname{tg} 26^\circ$.

A $CDE$ háromszögben: $\dfrac{m}{x} = \operatorname{tg} 42^\circ$.

Az egyenletrendszer megoldásából adódik:

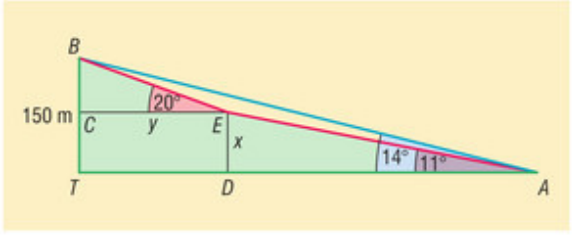
$$m = \frac{200 \cdot \operatorname{tg} 26^\circ \cdot \operatorname{tg} 42^\circ}{\operatorname{tg} 42^\circ - \operatorname{tg} 26^\circ} \approx 212{,}83.$$

A közelebbi hegycsúcs a síkság felett 213 m-re van.

A $BT$ magasság meghatározása hasonló módon történhet a $BTE$ és a $BTA$ háromszögek segítségével.

A távolabbi hegycsúcs a síkság felett 408 m-re van.

**2503** Az ábra jelöléseivel: a sikló $BT = 150$ m magasra visz. Az $ABT$ derékszögű háromszögben:




$$TA = \frac{150}{\operatorname{tg} 14^\circ} \approx 601{,}62 \text{ m}.$$

Az $ADE$ háromszögben:

$$\operatorname{tg} 11^\circ = \frac{x}{601{,}62 - y}.$$

A $BCE$ háromszögben:

$$\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{150 - x}{y}.$$

Az egyenletrendszert megoldva adódik, hogy:

$$y = \frac{150 - 601{,}62 \cdot \operatorname{tg} 11^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 11^\circ} \approx 194{,}92.$$

$BE$ hosszúság a $BCE$ háromszögből számítható:

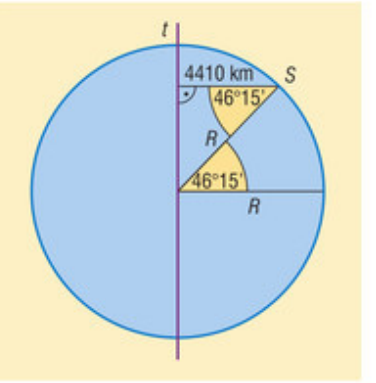
$$BE = \frac{194{,}92}{\cos 20^\circ} \approx 207{,}43.$$

AE hosszúság az ADE háromszögből számítható:

$$AE = \frac{601{,}62 - 194{,}92}{\cos 11^\circ} \approx 414{,}31.$$

A $BE$ és $AE$ szakaszok hosszának összege a sikló által megtett út, amely megközelítőleg 622 méter.

**2504** Az ábrán az $S$ pont Szeged helyét jelzi, $t$ egyenes a Föld tengelye, $R$ a sugara.

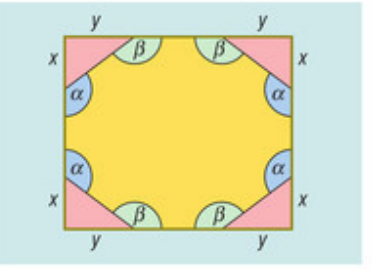



Az $S$ pontnak $t$ egyenestől vett távolsága:

$$R \cdot \cos 46°15' \approx 4410 \text{ km}.$$

A $t$ tengely körül elfordulva $S$ pont 23,95 óra alatt akkora utat tesz meg, mint egy 4410 km sugarú kör kerülete. Ezért Szeged a Föld tengelye körül $\dfrac{2\pi \cdot 4410}{23{,}95} \approx 1157 \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel forog.

**2505** A megmaradó nyolcszög szimmetrikus a téglalap szimmetriatengelyeire, tehát az ábrán látható módon négy egybevágó derékszögű háromszöget kell levágni a téglalap csúcsaiból. A megmaradó nyolcszög egyenlő oldalú, tehát a háromszögek $x$ és $y$ befogóira teljesülnie kell, hogy:




$$\left.\begin{aligned} 13 - 2y &= 11 - 2x \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= 11 - 2x \end{aligned}\right\}.$$

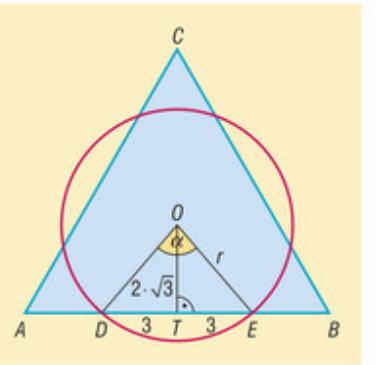
Az első egyenletből kifejezve $x$-et, majd a másodikba beírva az $y^2 - 25y + 84 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. Innen $y$-ra 21 vagy 4 adódik, de ezek közül csak az $y = 4$ lehet megoldás.

Visszahelyettesítve valamelyik egyenletbe $x = 3$.

Szögfüggvénnyel számíthatók a 3 és 4 befogójú derékszögű háromszög hegyesszögei: 53,13° és 36,87°.

A nyolcszög szögei: $\alpha = 180° - 53{,}13° = 126{,}87°$, illetve $b = 180° - 36{,}87° = 143{,}13°$.

**2506** A kör középpontja a szabályos háromszög $O$ középpontja. Az ábrán látható $ABC$ szabályos háromszög $AB$ oldalának felezőpontja $T$, a csúcsokhoz közelebbi negyedelőpontok $D$ és $E$.




Ahhoz, hogy megmondjuk, a kör területének hány százaléka esik a háromszögön kívül, ki kell számolni a kör $DE$ húrja által létrehozott kisebbik körszelet területét. Ehhez szükségünk van a kör sugarára és a $DOE$ középponti szögre.

Az $OT$ szakasz hossza a 12 cm oldalú szabályos háromszög magasságának harmada:

$$OT = \frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}.$$

A kör sugara számítható az $ODT$ háromszögből:

$$r = \sqrt{(2 \cdot \sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{21} \text{ cm}.$$

Az $\alpha$ középponti szög felére felírható:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 81{,}79°.$$

A kisebbik körszelet területe:

$$T_{\text{körszelet}} = (\sqrt{21})^2 \cdot \pi \cdot \frac{81{,}79°}{360°} - \frac{(\sqrt{21})^2 \cdot \sin 81{,}79°}{2} \approx 4{,}6 \text{ cm}^2.$$

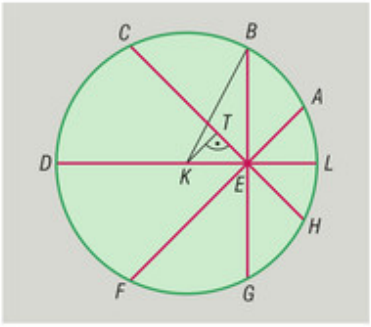
A körnek a háromszögön kívül eső területe ennek háromszorosa, vagyis $13{,}8\ \text{cm}^2$.

A kör területének $\dfrac{13{,}8}{21\pi}\cdot 100 \approx 20{,}9$ százaléka esik a háromszögön kívül.

A háromszög körön kívül eső területének kiszámításához a háromszög területéből kivonjuk a kör és a háromszög közös területét:

$$\frac{12^2\cdot\sqrt{3}}{4}-\left[\left(\sqrt{21}\right)^2\cdot\pi-13{,}8\right]\approx 10{,}18\ \text{cm}^2.$$

**2507** Tekintsük a mellékelt ábrát. Az emlékmű helyét jelölje $E$, a park középpontját $K$.




A két szomszédos ösvény által bezárt szög a 360° nyolcada, azaz 45°. Az ábra tengelyesen szimmetrikus $DL$ egyenesére, így elegendő meghatározni az $EL$, $EA$, $EB$, $EC$ és $ED$ ösvények hosszát.

Először $EL$ és $ED$ hossza:

$$EL = 300-70 = 230\ \text{m};$$
$$ED = 300+70 = 370\ \text{m}.$$

Az $EB$ szakasz merőleges $KE$-re, így a $KEB$ derékszögű háromszögből a Pitagorasz-tétel alapján:

$$EB=\sqrt{300^2-70^2}\approx 291{,}72\ \text{m}.$$

Az $EC$ és $EA$ ösvények hosszának összege éppen $CH$ távolsággal egyenlő, ami a kör egy húrja.

A húrnak a kör $K$ középpontjától vett távolsága a $KTE$ egyenlő szárú derékszögű háromszögből számítható:

$$KT = KE\cdot\sin 45^\circ = 70\cdot\sin 45^\circ = 35\cdot\sqrt{2}\approx 49{,}5\ \text{m}.$$

Ez alapján:

$$CT=\sqrt{300^2-\left(35\cdot\sqrt{2}\right)^2}\approx 295{,}89\ \text{m}.$$

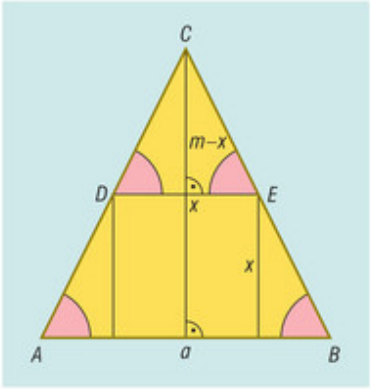
Mivel $KT = TE$, a $CE$ ösvény hossza $295{,}89+49{,}5 = 345{,}39$ m.

$$EH = 295{,}89-49{,}5\approx 246{,}39\ \text{m}.$$

Az ösvények hossza megközelítőleg:

$$EL = 230\ \text{m};\quad EA = EH = 246{,}39\ \text{m};\quad EB = EG = 291{,}72\ \text{m};$$
$$EC = EF = 345{,}39\ \text{m};\quad DE = 370\ \text{m}.$$

**2508** A háromszög alapja legyen $a$, a hozzá tartozó magassága $m$, a négyzet oldala $x$ hosszúságú. A feladat feltétele szerint:




$$2x^2=\frac{m\cdot a}{2},\quad \text{amiből}\quad 4x^2=m\cdot a. \qquad (1)$$

Az ábra jelöléseit használva, az $ABC$ és $DEC$ háromszög szögei páronként egyenlők, tehát $ABC\triangle \sim DEC\triangle$.

A két háromszög alapjának és magasságának aránya egyenlő:

$$\frac{x}{a}=\frac{m-x}{m},\quad \text{amiből}\quad x=\frac{a\cdot m}{a+m}. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenleteket összevetve, majd rendezve:

$$4 \cdot \left(\frac{a \cdot m}{a+m}\right)^2 = m \cdot a,$$

$$4 \cdot a \cdot m = (a+m)^2,$$

$$0 = m^2 - 2 \cdot a \cdot m + a^2,$$

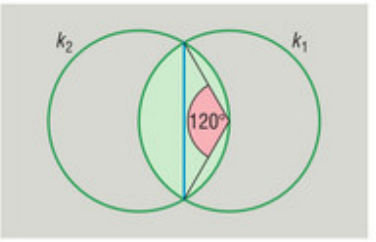
$$0 = (m-a)^2.$$

Ez utóbbi egyenlőség akkor teljesül, ha $m = a$. A háromszög alapon fekvő $\alpha$ szögének tangense:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{\frac{a}{2}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 63{,}43^\circ.$$

A háromszög szögei: 63,43°, 63,43° és 53,14°.

**2509** A vonalkázott terület nagysága legyen $T$. Az ábrán látható $k_1$ és $k_2$, valamint a $k_2$ és $k_3$ körök középpontjainak távolsága éppen a sugaruk hossza.




Tehát a $k_1$ és $k_2$ körök közös részének területe egy 6 cm sugarú kör 120°-os középponti szögéhez tartozó körszelet területének a kétszerese:

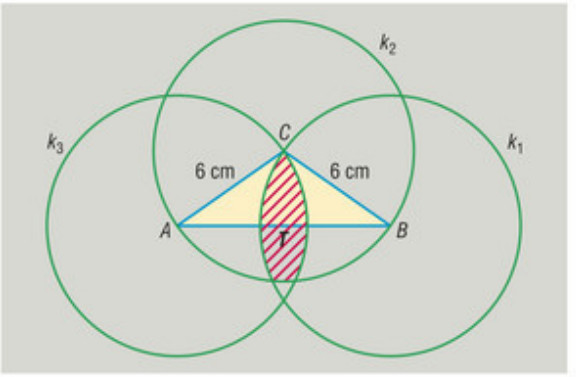
$$2 \cdot \left(6^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} - \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = 44{,}18 \text{ cm}^2.$$

Hasonlóan a $k_3$ és $k_2$ körök közös részének területe: 44,18 cm$^2$.

Tekintsük a $k_1$ és $k_2$, valamint a $k_2$ és $k_3$ körök közös része által lefedett területet.

Ezt a területet kétféleképpen számíthatjuk. Egyrészt: $2 \cdot 44{,}18 - T$.

Másrészt kiszámítható a terület úgy is, hogy a $C$ középpontú, 6 cm sugarú, 110°-os körcikk területéhez hozzáadjuk a $k_1$ és $k_2$, valamint a $k_2$ és $k_3$ körök közös része területének a felét:



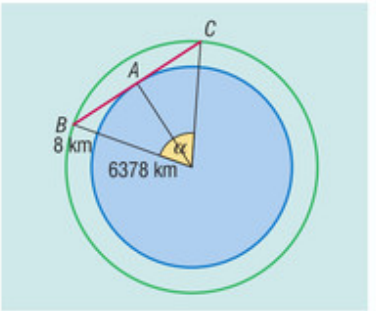

$$6^2 \cdot \pi \cdot \frac{110^\circ}{360^\circ} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 44{,}18 = 78{,}72 \text{ cm}^2.$$

A kétféle módon számított terület egyenlő:

$$2 \cdot 44{,}18 - T = 78{,}72 \quad \Rightarrow \quad T = 9{,}64 \text{ cm}^2.$$

A vonalkázott terület tehát 9,64 cm$^2$.

**2510** A repülőgép 6378 + 8 = 6386 km sugarú köríven repül. A sematikus ábrát tekintve, ha a szemlélő az $A$ pontban van, akkor a repülőgép számára addig tartózkodik a látóhatár felett, amíg a $BC$ köríven végigrepül. A $BC$ körív $\alpha$ középponti szögére teljesül, hogy:




$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{6378}{6386} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 5{,}74^\circ.$$

A repülőgép által megtett út: $2 \cdot 6386 \cdot \pi \cdot \frac{5{,}74^\circ}{360^\circ} \approx 639{,}43$ km.

Ezt az utat $t = \frac{639{,}43}{700} \approx 0{,}91$ óra alatt teszi meg.

A repülőgép körülbelül 55 percig tartózkodik a látóhatár felett.



# Vegyes feladatok II. – megoldások

**2511** *a)* A kifejezés értéke 0.

*b)* A kifejezés egyszerűbb alakja $\operatorname{ctg}^2\alpha$.

*c)* A kifejezés értéke 1.

*d)* A kifejezés értéke 1.

*e)* A kifejezés egyszerűbb alakja $\operatorname{tg}\alpha$.

**2512** *a)* A kifejezés pontos értéke 3.

*b)* A kifejezés pontos értéke 0,25.

*c)* A kifejezés pontos értéke 0.

**2513** *a)* A szög koszinusza $\frac{60}{61}$, tangense $\frac{11}{60}$ és kotangense $\frac{60}{11}$.

*b)* A szög szinusza $\frac{21}{29}$, tangense $\frac{21}{20}$ és kotangense $\frac{20}{21}$.

*c)* A szög szinusza $\frac{8}{17}$, koszinusza $\frac{15}{17}$ és kotangense $\frac{15}{8}$.

*d)* A szög szinusza $\frac{1}{\sqrt{10}}$, koszinusza $\frac{3}{\sqrt{10}}$ és tangense $\frac{1}{3}$.

**2514** A keletkezett részek hossza 1,99 cm, 2,15 cm, 2,54 cm és 3,32 cm.

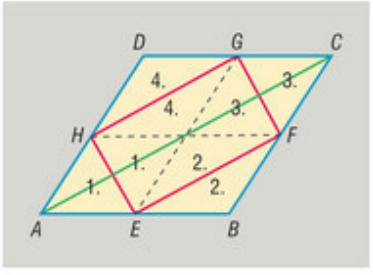
**2515** Az akna megközelítőleg 50 m mély.

**2516** A másik alap 16,41 cm, a másik szár 3,9 cm hosszú.

**2517** Az oldalak hossza 20,32 és 15,24 cm.

**2518** Ismeretes, hogy egy háromszög középvonala a háromszögből egy az eredetihez hasonló háromszöget metsz le. A hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$, tehát a középvonallal lemetszett háromszög területe az eredeti háromszög területének negyede.

Az ábra jelöléseit használva, az $ABCD$ rombusz oldalainak felezőpontjai $E$, $F$, $G$ és $H$.




A rombuszt az $AC$ átlója két egybevágó háromszögre bontja. Az $ABC$ háromszög középvonala $EF$, így az $EBF$ háromszög területe negyede az $ABC$ háromszög területének, illetve nyolcada a rombusz területének. Hasonlóan a rombusz területének nyolcad része a $GFC$, $HGD$ és $HAE$ háromszögek területe is. Tehát az $EFGH$ négyszög területe fele a rombusz területének.

Ha a rombusz oldala $a$, akkor területének felére felírható:

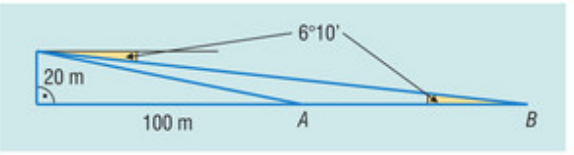
$$110 = \frac{1}{2}\cdot a^2\cdot \sin 50^\circ \;\Rightarrow\; a = 16{,}95.$$

Tehát a rombusz oldala 16,95 cm.

*Megjegyzés:* A rombuszt a szaggatott vonallal jelölt középvonalai és az $EFGH$ négyszög oldalai nyolc darab háromszögre darabolják fel. Az azonos számmal jelölt háromszögek területe páronként megegyezik, így ezzel az átdarabolással látványosan is igazolható, hogy az EFGH négyszög területe fele a rombusz területének.

**2519** A kört a két egyenes két $131{,}92\ \text{cm}^2$ és egy $188{,}32\ \text{cm}^2$ területű részre osztja.

**2520** Tekintsük az ábra jelöléseit. A folyó $AB$ szélességére felírhatjuk:

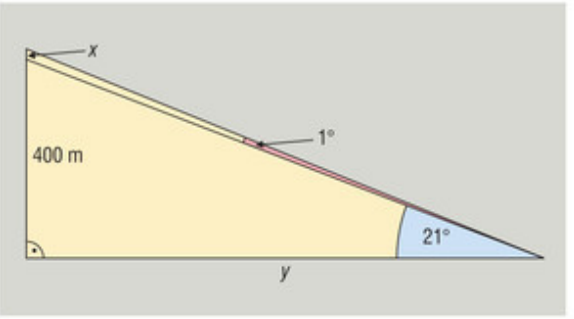



$$\frac{100+AB}{20}=\operatorname{ctg}6°10' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB=20\cdot\operatorname{ctg}6°10'-100\approx 85.$$

A folyó szélessége megközelítőleg 85 m.

**2521** Tekintsük a mellékelt ábrát. Legyen a torony magassága $x$. Az $y$ távolság számítható:




$$y=400\cdot\operatorname{ctg}21°.$$

Továbbá felírható:

$$\frac{x+400}{y}=\operatorname{tg}22°.$$

Az egyenletrendszert megoldva adódik, hogy $x=21$. A torony magassága 21 m.

**2522** *a)* és *b)* rész esetén a kifejezés értéke egyszerűsítés után 1.

*c)* Négyzetre emelve, majd összevonva a kifejezés: $4\cdot\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=4\cdot\sqrt{3}$.

*d)* Felhasználva, hogy $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$, adódik, hogy a kifejezés: $\dfrac{4\cdot\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=4$.

*e)* A második törtben $\operatorname{ctg}\alpha$-t átírva:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-3\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-3}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-3\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}-3}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-3\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1-3\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1.$$

**2523** *a)* A szárak 30,78 cm hosszúak.

*b)* A szárhoz tartozó magasság 17,21 cm.

*c)* A háromszög területe $264{,}86\ \text{cm}^2$.

**2524** Mivel a beírt kör befogókkal vett érintési pontjai, a beírt kör középpontja és a derékszögű csúcs négyzetet határoznak meg, a beírt kör sugara $12\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=6\cdot\sqrt{2}$ cm.

A 2470. feladat gondolatmenete alapján az átfogó 41,51 cm.

**2525** *a)* A rombusz átlói: 9,52 cm és 28,45 cm.

*b)* A rombuszba írt kör sugara a rombusz magasságának fele: 4,51 cm.

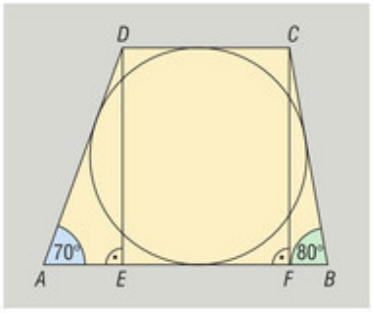
*c)* A rombusz területe $135{,}41\ \text{cm}^2$.

**2526** Legyen a rombusz oldala $a$. Mivel a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást és felezik a csúcsoknál lévő szögeket, felírható: $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{e}{2a}$, illetve $\sin\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{f}{2a}$. A kettőt összeadva:

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}=\frac{e}{2a}+\frac{f}{2a}=\frac{e+f}{2a}.$$

Innen az állítás közvetlenül adódik, hiszen a rombusz kerülete $4a$.

**2527** *a)* A trapéz magassága a beírt kör sugarának kétszerese, azaz 20 cm.




Az ábra jelöléseit használva:

Az $AED$ derékszögű háromszögből:

$$AD = \frac{20}{\sin 70^\circ} \approx 21{,}28; \quad AE = \frac{20}{\operatorname{tg} 70^\circ}.$$

A $BFC$ derékszögű háromszögből:

$$BC = \frac{20}{\sin 80^\circ} \approx 20{,}31; \quad BF = \frac{20}{\operatorname{tg} 80^\circ}.$$

Az érintőnégyszögek tétele alapján:

$$AB + DC = AD + BC = \frac{20}{\sin 70^\circ} + \frac{20}{\sin 80^\circ}.$$

Tehát a trapéz területe:

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{m \cdot (a+c)}{2} = \frac{20 \cdot \left(\frac{20}{\sin 70^\circ} + \frac{20}{\sin 80^\circ}\right)}{2} \approx 415{,}9 \text{ cm}^2.$$

*b)* Mivel $AB + DC = 2DC + AE + BF$, ezért:

$$\frac{20}{\sin 70^\circ} + \frac{20}{\sin 80^\circ} = 2DC + \frac{20}{\operatorname{tg} 70^\circ} + \frac{20}{\operatorname{tg} 80^\circ} \Rightarrow DC \approx 15{,}39.$$

A másik alap kiszámítása: $AB = DC + AE + BF \approx 26{,}2$.

A trapéz szárai 21,28 és 20,31 cm, az alapjai 15,39 és 26,2 cm hosszúak.

**2528** *a)* A két emelet közötti magasság $22 \cdot 17 = 374$ cm.

A kérdéses $\alpha$ szög tangense:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3{,}74}{10} \Rightarrow \alpha \approx 20{,}51^\circ.$$

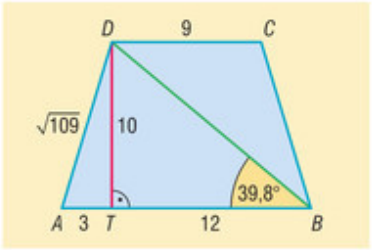
A felvonó hajlásszöge tehát 20,51°.

*b)* A lejtő hossza:

$$\frac{10}{\cos 20{,}51^\circ} \approx 10{,}68 \text{ m}.$$

A felvonó $\frac{10{,}68}{0{,}2} = 53{,}4$ másodperc alatt ér fel.

**2529** Az ábra jelöléseit használva: $AT = 3$ cm.




Az $ATD$ derékszögű háromszögben Pitagorasz-tételből:

$$AD = \sqrt{109}.$$

A $TBD$ derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg} TBD\sphericalangle = \frac{10}{15-3} \Rightarrow TBD\sphericalangle = 39{,}8^\circ.$$

Tehát a trapéz köré írt kör egy húrjának hossza $\sqrt{109}$, és ehhez a húrhoz tartozó kerületi szög 39,8°.

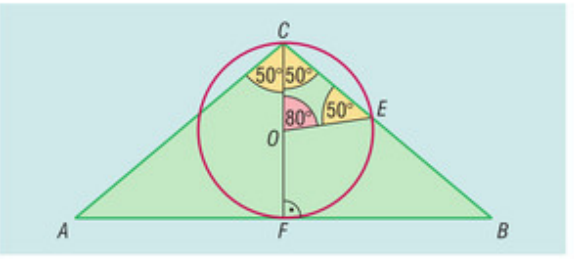
Innen az ismert összefüggés alapján:

$$R = \frac{\sqrt{109}}{2 \cdot \sin 39{,}8^\circ} \approx 8{,}16.$$

A trapéz köré írt kör sugara 8,16 cm.

**2530** Tekintsük az ábra jelöléseit. A $BCF$ derékszögű háromszögben az $AB$ alaphoz tartozó magasság:

$$CF = \frac{20}{\operatorname{tg} 50^\circ} = 16{,}78 \text{ cm}.$$




Tehát a magasság mint átmérő fölé írt kör sugara 8,39 cm:

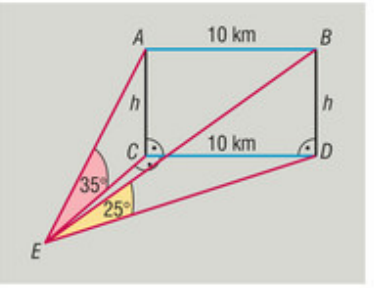
$$OC = OE = OF = 8{,}39.$$

Az $OEC$ egyenlő szárú háromszögben: $COE\sphericalangle = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$. A kör $CE$ húrjának a középponti szöge tehát 80°. A kör háromszögön kívül eső területe a 80°-os középponti szöghöz tartozó körszelet területének kétszerese:

$$T = 2 \cdot \left( 8{,}39^2 \cdot \pi \cdot \frac{80^\circ}{360^\circ} - \frac{8{,}39^2 \cdot \sin 80^\circ}{2} \right) = 28{,}91.$$

A kör és a háromszög közös részének területe tehát $8{,}39^2 \cdot \pi - 28{,}91 = 192{,}12 \text{ cm}^2$.

**2531** A vízszintes terep síkja legyen a $DCE$ háromszög síkja, a vár helyét jelölje $E$ pont. A repülőgép repülési magassága $h$, és egy perc alatt az $A$ pontból a $B$ pontba ér. A repülőgép egy perc alatt 10 km utat tesz meg, tehát $AB = CD = 10$ km.




Az $ECD$ derékszögű háromszögben a derékszögű csúcs $C$-nél van. Oldalainak hosszát fejezzük ki $h$-val.

Az $ACE$ háromszögből: $EC = h \cdot \operatorname{ctg} 35^\circ$.

A $BDE$ háromszögből: $ED = h \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ$.

Az $ECD$ derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

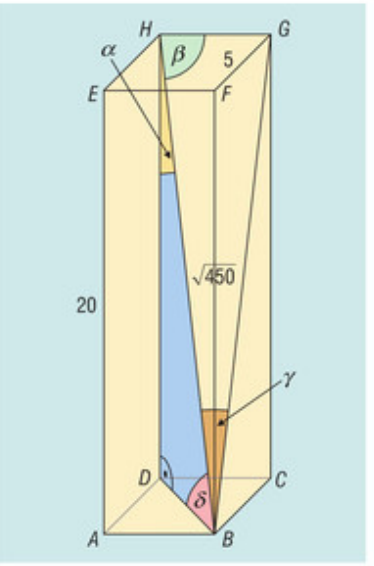
$$(h \cdot \operatorname{ctg} 35^\circ)^2 + 10^2 = (h \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ)^2,$$

$$h^2 = \frac{100}{(\operatorname{ctg} 25^\circ)^2 - (\operatorname{ctg} 35^\circ)^2},$$

$$h \approx 6{,}251.$$

A repülőgép repülési magassága megközelítőleg 6251 m.

**2532** A testátlók hossza $\sqrt{450}$ cm.




*a)* A $BH$ testátlónak az oldalélekkel bezárt $\alpha$ szöge a $BDH$ derékszögű háromszögből határozható meg:

$$\cos \alpha = \frac{20}{\sqrt{450}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 19{,}47^\circ.$$

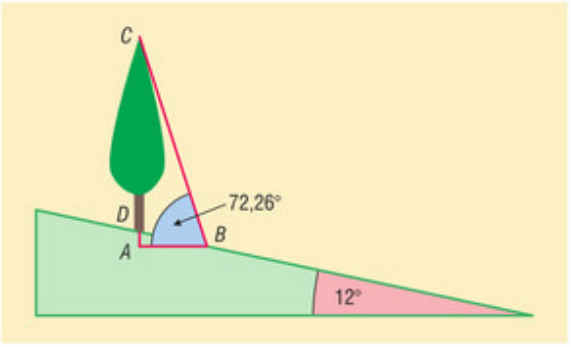
*b)* A $BH$ testátlónak az alapélekkel bezárt $\beta$ szöge a $BGH$ derékszögű háromszögből határozható meg:

$$\cos \beta = \frac{5}{\sqrt{450}} \quad \Rightarrow \quad \beta = 76{,}37^\circ.$$

*c)* A $BH$ testátlónak az oldallapokkal bezárt $\gamma$ szöge a $BGH$ derékszögű háromszögből határozható meg, a $\gamma$ szög éppen a $\beta$ szög pótszöge, vagyis $\gamma = 13{,}63^\circ$.

*d)* A $BH$ testátlónak az alaplapokkal bezárt $\delta$ szöge a $BDH$ derékszögű háromszögből határozható meg, a $\delta$ szög éppen az $\alpha$ szög pótszöge, vagyis $\delta = 70{,}53^\circ$.

**2533** Az ábra jelöléseit használva a fa magassága $DC$, árnyéka $DB = 5$ m és a $BAC$ szög derékszög.




Az $ABC$ szög tangense:

$$\frac{1}{0{,}32} \Rightarrow ABC\sphericalangle = 72{,}26°.$$

Az $ABD$ derékszögű háromszögben:

$$AB = 5 \cdot \cos 12° \approx 4{,}89,$$

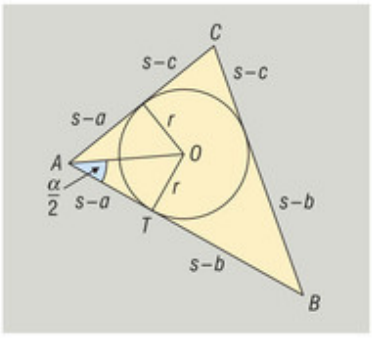
$$AD = 5 \cdot \sin 12° \approx 1{,}04.$$

Az $ABC$ derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg} 72{,}26° = \frac{1{,}04 + DC}{4{,}89} \Rightarrow DC \approx 14{,}24.$$

A fa magassága 14,24 m.

**2534** Ismeretes, hogy az $ABC$ háromszögben az oldalakat a szokásos módon jelölve, a beírt kör érintési pontjainak a csúcsoktól vett távolsága $s - a$, $s - b$ és $s - c$.

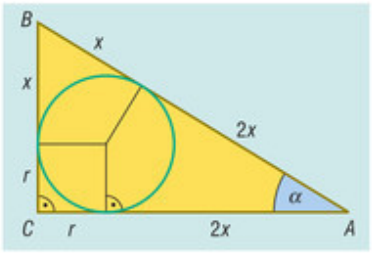



Mivel a háromszög beírt körének középpontját a belső szögfelezők metszéspontja szolgáltatja, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ kifejezhető az $AOT$ derékszögű háromszögből: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$ ($r$ a beírt kör sugara).

A háromszög területét kétféleképpen számolhatjuk. Egyrészt a beírt kör $r$ sugarával, másrészt a Heron-képlettel:

$$s \cdot r = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}, \quad \text{amiből} \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a} = \sqrt{\frac{(s-b)\cdot(s-c)}{s\cdot(s-a)}}.$$

**2535** Ha a háromszög átfogójának hossza $3x$, a beírt kör sugara $r$, akkor a beírt körhöz a csúcsokból húzott érintőszakaszok hosszának egyenlőségéből következően a befogók hossza $x + r$, illetve $2x + r$.




A derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján:

$$(x + r)^2 + (2x + r)^2 = (3x)^2.$$

Átrendezéssel adódik:

$$2r^2 + 6xr - 4x^2 = 0,$$

$$\left(\frac{r}{x}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{r}{x}\right) - 2 = 0,$$

$$\left(\frac{r}{x}\right)_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Mivel $\frac{r}{x}$ értéke nem lehet negatív,

$$\frac{r}{x} = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}.$$

A derékszögű háromszög kisebb $\alpha$ szögére felírható, hogy:

$$\sin\alpha = \frac{r+x}{3x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{r}{x} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{-3+\sqrt{17}}{2} + \frac{1}{3} = \frac{-1+\sqrt{17}}{6} \Rightarrow \alpha = 31{,}37°.$$

A háromszög hegyesszögei 31,37° és 58,63°.

**2536** A háromszög szögei: $\alpha = 50°$, $\beta = 60°$ és $\gamma = 70°$.

Mivel a háromszög hegyesszögű, az oldalakra kifelé rajzolt félkör mindegyike kívül esik a háromszög köré írható körén. Ahhoz, hogy a kérdést megválaszoljuk, elég a félkörök területének összegéből kivonni a háromszög köré írt körének a háromszögön kívül eső területét.

A háromszög oldalait az ismert összefüggés alapján számolhatjuk:

$$a = 2 \cdot 20 \cdot \sin 50°, \quad b = 2 \cdot 20 \cdot \sin 60° \quad \text{és} \quad c = 2 \cdot 20 \cdot \sin 70°.$$

A háromszög oldalaira kifelé rajzolt félkörök sugarai az oldalhosszak fele, ezért területük összege:

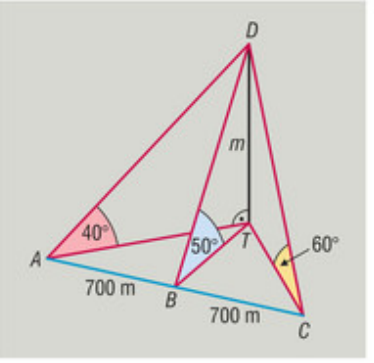
$$\frac{\pi}{2} \cdot \left[(20 \cdot \sin 50°)^2 + (20 \cdot \sin 60°)^2 + (20 \cdot \sin 70°)^2\right] =$$
$$= 200\pi \cdot (\sin^2 50° + \sin^2 60° + \sin^2 70°) \approx 1394.$$

A háromszög köré írt körének a háromszögön kívül eső területe számolható úgy, hogy a kör területéből kivonjuk a háromszög területét:

$$20^2 \cdot \pi - 2 \cdot 20^2 \cdot \sin 50° \cdot \sin 60° \cdot \sin 70° \approx 757{,}3.$$

A kérdéses terület a két terület különbsége: 636,7 cm$^2$.

**2537** Az ábra jelöléseit használva a hegy $m$ magasságával számíthatók a következő távolságok:




$$AT = m \cdot \operatorname{ctg} 40°,$$
$$BT = m \cdot \operatorname{ctg} 50°,$$
$$CT = m \cdot \operatorname{ctg} 60°.$$

Az $ACT$ háromszög $AC$ oldalának felezéspontja $B$. Erre a pontra tükrözve a háromszöget, az eredeti és tükrözött háromszög együtt egy paralelogrammát alkot. Ismeretes, hogy egy paralelogramma oldalai hosszának négyzetösszege egyenlő az átlói hosszának négyzetösszegével, ezért felírható:

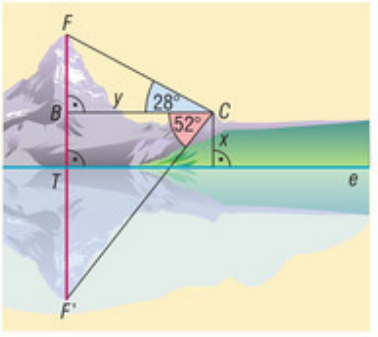
$$2 \cdot (m \cdot \operatorname{ctg} 40°)^2 + 2 \cdot (m \cdot \operatorname{ctg} 60°)^2 = (2 \cdot m \cdot \operatorname{ctg} 50°)^2 + 1400^2,$$

$$m^2 = \frac{1400^2}{2 \cdot \operatorname{ctg}^2 40° + 2 \cdot \operatorname{ctg}^2 60° - 4 \cdot \operatorname{ctg}^2 50°},$$

$$m \approx 1685.$$

A hegy magassága 1685 méter.

**2538** Az ábrán a turista a $C$ pontban van, a hegycsúcs helyét $F$, a hegycsúcs tükörképét a tóban $F'$ pont jelöli. A tó tükrének szintje az $e$ egyenes. A tengerszint feletti magasságokból, illetve a tükröződésből adódóan:




$$TF = TF' = 2000 - 500 = 1500 \text{ m}.$$

Az $FBC$, illetve az $F'BC$ háromszögben:

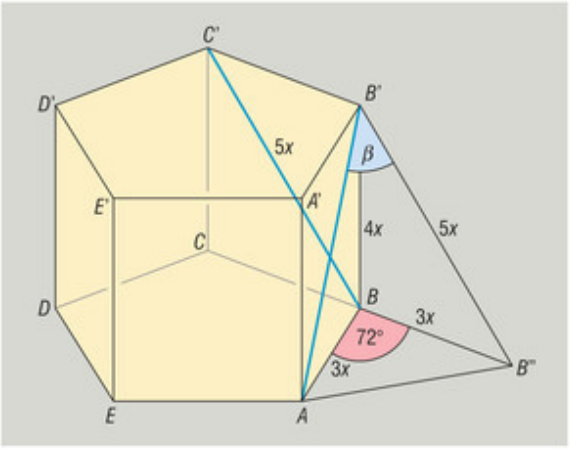
$$\operatorname{tg} 28° = \frac{1500 - x}{y}, \quad \text{illetve} \quad \operatorname{tg} 52° = \frac{x + 1500}{y}.$$

Az egyenletrendszert megoldva: $x \approx 619{,}52$; $y \approx 1656$.

*a)* A turista a tengerszint felett $619{,}5 + 500 = 1119{,}5$ méterre van.

*b)* Az $FC$ távolság az $FBC$ derékszögű háromszögből számítható: $FC = \dfrac{y}{\cos 28°} \approx 1875{,}5$.
A turista légvonalban a szemközti hegycsúcstól 1875,5 méterre van.

**2539** Tekintsük az ábra jelöléseit. Legyen az alapél $3x$, az oldalél $4x$ hosszúságú. Az oldallap átlóinak hossza Pitagorasz-tétel alapján $5x$ hosszú. Toljuk el a $C'B$ átlót úgy, hogy a $C'$ végpontja $B'$-be kerüljön. Az eltolt átló másik végpontja legyen $B''$.




Feladatunk az $AB'B''$ szög kiszámolása ($\beta$).

Az $AB'B''$ háromszög egyenlő szárú, szárainak hossza $5x$. Az $AB''$ hosszúság meghatározható az $ABB''$ egyenlő szárú háromszögből. Az $ABB''$ háromszög szárainak hossza $3x$, szárszöge pedig a szabályos ötszög egy külső szöge, azaz 72°. Ezekből az adatokból kapjuk:

$$AB'' = 2 \cdot 3x \cdot \sin 36° = 6 \cdot x \cdot \sin 36°.$$

Tehát az $AB'B''$ egyenlő szárú háromszög alapja $6 \cdot x \cdot \sin 36°$, szára $5x$. A háromszög $\beta$ szárszögére felírható:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{3 \cdot x \cdot \sin 36°}{5x} = \frac{3}{5} \cdot \sin 36° \quad \Rightarrow \quad \beta = 41{,}3°.$$

Az $AB'$ és $BC'$ átlók 41,3° szöget zárnak be egymással.

## Vektorok (emlékeztető), vektorok felbontása különböző irányú összetevőkre – megoldások

**2540** A szerkesztések a vektorműveletek definíciói alapján elvégezhetők.

**2541** Használjuk a vektorműveletek definícióit.

**2542** *a)* $3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$;

*b)* $\left(\sqrt{2}+1\right) \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right)$;

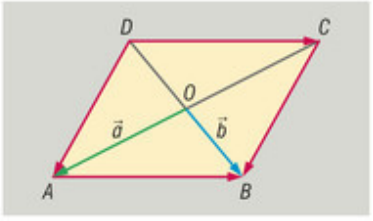
*c)* $\dfrac{7 \cdot \vec{x} + \vec{y}}{2}$.

**2543** *a)* $\vec{e} = \vec{c} - \vec{d}$ és $\vec{f} = -\vec{c} - \vec{d}$.

*b)* $\vec{a} + \vec{c} = \vec{0}$, $\vec{b} + \vec{d} = \vec{0}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

*c)* $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \dfrac{5}{\sin 35°} \approx 8{,}72$ cm, $|\vec{f}| = \dfrac{10}{\operatorname{tg} 35°} \approx 14{,}28$ cm.

**2544** Az ábra alapján (➡):




$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{b} - \vec{a};$$
$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} = \vec{a} + \vec{b}.$$

**2545** A lejtővel párhuzamos erő: $200 \cdot \sin 32° \approx 105{,}98$ N.

A lejtőre merőleges erő: $200 \cdot \cos 32° \approx 169{,}61$ N.

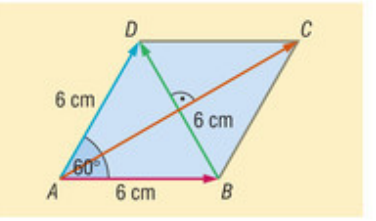
**2546** A vektor végpontja a $DC$ oldal $D$-hez közelebbi harmadolópontja.

**2547** A három vektort egymáshoz fűzve szabályos háromszöget kapunk. A vektorok egymással 120°-os szöget zárnak be.

**2548** Ha a három vektor páronként 120°-os szöget zár be, akkor összegük nullvektor. A minimális hossz nulla. A maximális hossz 15 cm. Ekkor a három vektor azonos állású és azonos irányú.

**2549** A nullvektor egyenlő az ellentettjével.

**2550** Az ábra alapján:




$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.$$

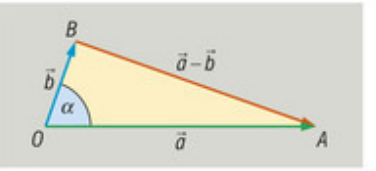
Mivel az $ABD$ háromszög 6 cm oldalú szabályos háromszög:

$$|\overrightarrow{BD}| = 6 \text{ cm}.$$

Az $AC$ átló egy 6 cm oldalú szabályos háromszög magasságának kétszerese:

$$|\overrightarrow{AC}| = 2 \cdot \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}.$$

**2551** Az ábrán látható módon toljuk el a két vektort egy közös $O$ kezdőpontba, és a vektorok végpontjai legyenek $A$ és $B$.




A feladat feltétele szerint az $ABO$ háromszög derékszögű, valamint az $OA$ átfogó hossza háromszorosa az $AB$ befogó hosszának.

A két vektor által bezárt $\alpha$ szög szögfüggvény segítségével számítható:

$$\cos\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 70{,}53°.$$

A két vektor által bezárt szög tehát 70,53°.

**2552** *a)* 9; *b)* $\frac{9}{5}$; *c)* $3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$.

**2553** A vektorösszeadásra vonatkozó paralelogrammaszabály alapján a szerkesztés elvégezhető.

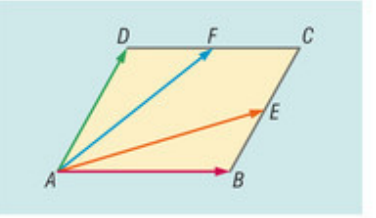
**2554** A vektorfelbontás egyértelműségéből adódóan:

*a)* $\alpha = 2,\ \beta = -3$;

*b)* $\alpha - 2\beta = 2\alpha$, illetve $\beta = 4 \Rightarrow \alpha = -8$;

*c)* $a - 2\beta = 0$, illetve $5\alpha - \beta + 27 = 0 \Rightarrow \alpha = -6$ és $\beta = -3$.

**2555** Az ábra alapján:




$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}, \quad \text{illetve} \quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AD}}{2}.$$

Tehát:

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AD}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

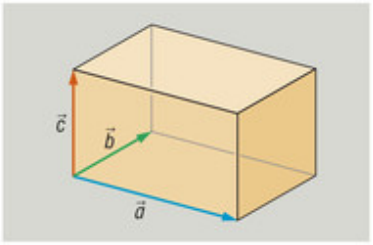
**2556** A harmadolópontba mutató vektorok:

$$\frac{2 \cdot \vec{b} + \vec{c}}{3} \quad \text{és} \quad \frac{\vec{b} + 2 \cdot \vec{c}}{3}.$$

**2557** A pontokba mutató vektorok:

$$2 \cdot \vec{b} - \vec{c} \quad \text{és} \quad 2 \cdot \vec{c} - \vec{b}.$$

**2558** Az egy csúcsból kiinduló oldalélek vektorai legyenek $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$.




A lapátlók vektorai ezekkel kifejezve:

$$\vec{a}+\vec{b},\quad \vec{b}+\vec{c}\quad \text{és}\quad \vec{c}+\vec{a}.$$

A testátló vektora:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

A feladatban szereplő hét vektor összege:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{b}+\vec{c})+(\vec{c}+\vec{a})+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=4\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

A vektorok összege éppen a csúcsból kiinduló testátló vektorának a négyszerese.

**2559** A keresett vektorok:

*a)* $\overrightarrow{OF}=-\vec{a}$; *b)* $\overrightarrow{OG}=-\vec{b}$; *c)* $\overrightarrow{OH}=-\vec{c}$;

*d)* $\overrightarrow{FC}=\vec{a}+\vec{c}$; *e)* $\overrightarrow{OK}=\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$; *f)* $\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$;

*g)* $\overrightarrow{DC}=\vec{b}-\vec{a}$.

**2560** A kocka $A$ csúcsából kiinduló élvektorok legyenek $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Az $\vec{e}$, $\vec{f}$ és $\vec{g}$ lapközéppontokba mutató vektorok az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ segítségével előállíthatók:

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \vec{f}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\quad \text{és}\quad \vec{g}=\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}.$$

Az egyenletrendszert $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ ismeretlenekre megoldva adódik:

$$\vec{a}=\vec{e}+\vec{g}-\vec{f},\quad \vec{b}=\vec{e}+\vec{f}-\vec{g}\quad \text{és}\quad \vec{c}=\vec{f}+\vec{g}-\vec{e}.$$

**2561** *a)* Az $\overrightarrow{FE}$ vektor a háromszög középvonalának a vektora, tehát párhuzamos az $\overrightarrow{AB}$ vektorral és fele olyan hosszú:

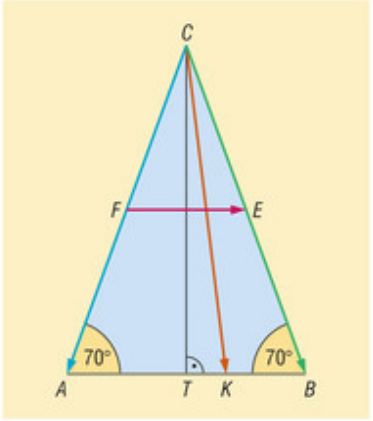
$$\overrightarrow{FE}=\frac{\overrightarrow{AB}}{2}=\frac{\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}}{2}.$$

A $C$ pontból az $AB$ szakasz harmadolópontjába mutató vektort a végpontokba mutató vektorok segítségével kifejezhetjük:

$$\overrightarrow{CK}=\frac{2\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}}{3}.$$

*b)* Az előzőek alapján:

$$|\overrightarrow{FE}|=\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right|=\frac{18}{2}=9\text{ cm}.$$




A háromszög $AB$ oldalához tartozó magasságának talppontja legyen $T$. Tudjuk, hogy a $CTB$ derékszögű háromszög $TB$ befogója 9 cm, valamint:

$$TBC\sphericalangle=70^\circ\Rightarrow CT=9\cdot\operatorname{tg}70^\circ.$$

A $TKC$ derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétel alapján:

$$|\overrightarrow{CK}|=\sqrt{3^2+(9\cdot\operatorname{tg}70^\circ)^2}\approx 24{,}91.$$

Tehát $|\overrightarrow{CK}|\approx 24{,}91$ cm.

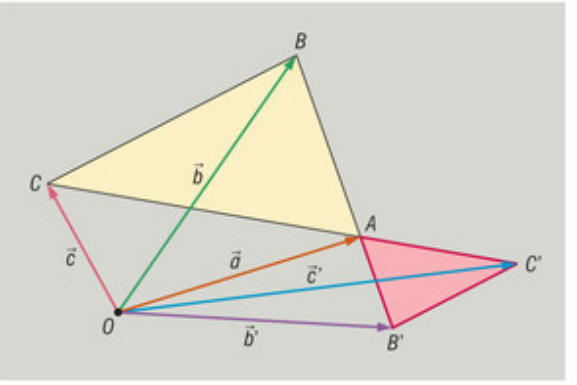
**2562** Az $A$ csúcs képe önmaga, tehát $O$-ból $A$-ba mutató vektor $\vec{a}$.

Ha a $B$ csúcs képe $B'$, akkor a $BB'$ szakasz $B'$-höz közelebbi harmadolópontja az $A$ pont, ezért az ismert képlet alapján:

$$\vec{a} = \frac{2 \cdot \vec{b'} + \vec{b}}{3} \Rightarrow \vec{b'} = \frac{3 \cdot \vec{a} - \vec{b}}{2}.$$

Hasonlóan adódik:

$$\vec{a} = \frac{2 \cdot \vec{c'} + \vec{c}}{3} \Rightarrow \vec{c'} = \frac{3 \cdot \vec{a} - \vec{c}}{2}.$$




Tehát az $O$ vonatkoztatási pontból a képháromszög csúcsaiba mutató vektorok:

$$\vec{a}, \quad \frac{3 \cdot \vec{a} - \vec{b}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{3 \cdot \vec{a} - \vec{c}}{2}.$$

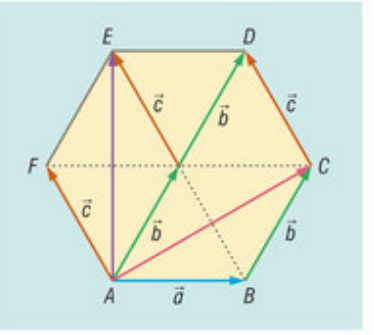
**2563** Tekintsük az ábra jelöléseit.

A szabályos hatszögben $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ és $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$. Mivel a hatszög hat szabályos háromszögre bontható, az ábrán jelölt vektorok egyenlőségét kihasználva:

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{AE} = \vec{b} + \vec{c} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AF} = \vec{c}.$$

Tehát:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{c} =$$
$$= 2 \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 2 \cdot \overrightarrow{AD}.$$



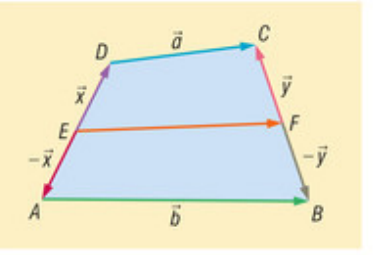

**2564** Legyen $\overrightarrow{ED} = \vec{x}$, $\overrightarrow{FC} = \vec{y}$. Ezen vektorok ellentettjei: $\overrightarrow{EA} = -\vec{x}$, illetve $\overrightarrow{FB} = -\vec{y}$.

Az $\overrightarrow{EF}$ vektort kétféleképpen is kifejezhetjük:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \vec{x} + \vec{a} - \vec{y},$$
$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\vec{x} + \vec{b} + \vec{y}.$$

A két egyenletet összeadva adódik, hogy:

$$2 \cdot \overrightarrow{EF} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}.$$



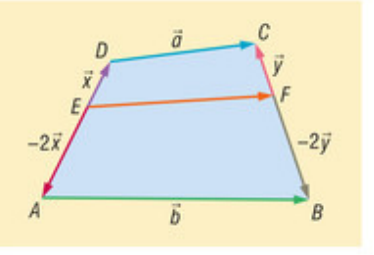

**2565** Legyen $\overrightarrow{ED} = \vec{x}$, $\overrightarrow{FC} = \vec{y}$. Mivel $E$ és $F$ harmadolópontok, ezért $\overrightarrow{EA} = -2 \cdot \vec{x}$ és $\overrightarrow{FB} = -2 \cdot \vec{y}$.

Az $\overrightarrow{EF}$ vektort kétféleképpen is kifejezhetjük:

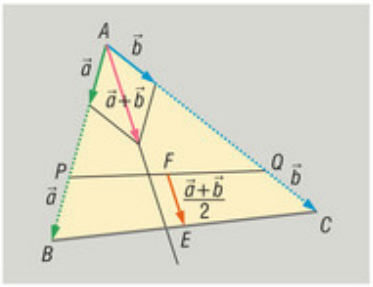
$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \vec{x} + \vec{a} - \vec{y},$$
$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -2 \cdot \vec{x} + \vec{b} + 2 \cdot \vec{y}.$$

Az első egyenletet kétszereséhez hozzáadva a második egyenletet:

$$3 \cdot \overrightarrow{EF} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \frac{2 \cdot \vec{a} + \vec{b}}{3}.$$



**2566** A $BCQP$ négyszög $PB$ és $QC$ oldalait az ábrán látható módon irányítsuk vektorokként. Mivel az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor a feladat feltétele alapján egyenlő hosszú, az általuk kifeszített paralelogramma rombusz. Az összegük vektora felezi a két vektor szögét, vagyis az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor párhuzamos az $ABC$ háromszög $A$ csúcsából induló belső szögfelezőjével. A $BCQP$ négyszögnek $EF$ középvonala, így a 2564. feladat alapján:

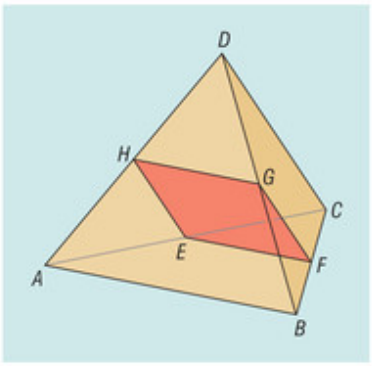



$$\overrightarrow{FE}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\overrightarrow{FE}$ vektor párhuzamos az $\vec{a}+\vec{b}$ vektorral, ami párhuzamos az $ABC$ háromszög $A$ csúcsából induló belső szögfelezőjével.

Ezzel igazoltuk, hogy $EF$ egyenes párhuzamos az $ABC$ háromszög $A$ csúcsából induló belső szögfelezőjével.

**2567** Legyen $O$ egy tetszőleges, de rögzített vonatkoztatási pont. Egy pontba mutató helyvektort jelöljünk ugyanolyan kisbetűvel, mint a pont betűjelét.




Az ábrán látható $ABCD$ tetraéder $AC$ élének felezőpontja $E$, $BC$ élének felezőpontja $F$, $BD$ élének felezőpontja $G$ és $AD$ élének felezőpontja $H$. Az $O$ vonatkoztatási pontból egy szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató helyvektorok számtani közepe:

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2},\quad \vec{f}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\quad \vec{g}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}\quad \text{és}\quad \vec{h}=\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}.$$

Az $EFGH$ négyszög $EF$ és $HG$ szemközti oldalának vektorai:

$$\overrightarrow{EF}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2},\quad \text{illetve}\quad \overrightarrow{HG}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}.$$

Mivel a négyszög két szemben lévő oldalának vektora egyenlő, a két szemben lévő oldal párhuzamos és egyenlő hosszú.

Beláttuk, hogy az $EFGH$ négyszög paralelogramma. Hasonlóan járhatunk el bármely két szemközti élpárból kiindulva.

Egy tetraéder bármely két szemközti élpárjának felezőpontjai paralelogrammát alkotnak.

## Vektorok alkalmazása a síkban és a térben – megoldások

**2568** $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$.

**2569** Az $ABCD$ paralelogramma $A$ csúcsából az átlóinak $O$ metszéspontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{AO}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

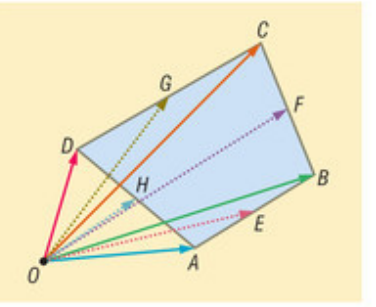
Az $O$ pontot eltolva $2\cdot\overrightarrow{BC}=2\cdot\vec{b}$ vektorral $O'$ pontot kapjuk:

$$\overrightarrow{AO'}=\overrightarrow{AO}+2\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+2\cdot\vec{b}=\frac{\vec{a}+5\cdot\vec{b}}{2}.$$

Az $A$ csúcsból az eltolt paralelogramma átlóinak metszéspontjába mutató vektor:

$$\frac{\vec{a}+5\cdot\vec{b}}{2}.$$

**2570** A sík egy tetszőleges $O$ pontjából az ábra pontjaiba mutató helyvektorokat jelöljük ugyanolyan kisbetűvel, mint az ábrán lévő betű.




Az ábrán látható $ABCD$ négyszög oldalainak felezőpontjai $E$, $F$, $G$ és $H$. Bizonyítandó, hogy $e+\vec{f}+\vec{g}+\vec{h}=a+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

Egy vonatkoztatási pontból egy szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató helyvektorok számtani közepe:

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \vec{f}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\quad \vec{g}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\quad \text{és}\quad \vec{h}=\frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}.$$

Ez alapján:

$$e+\vec{f}+\vec{g}+\vec{h}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}+\frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}.$$

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

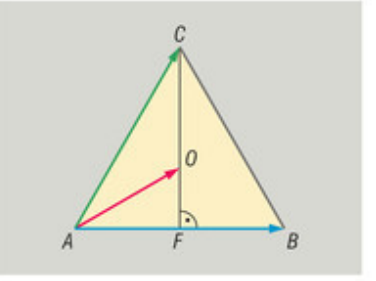
**2571** *a)* $\overrightarrow{BC}=2\cdot\left(\vec{f}-\vec{b}\right)$; *b)* $\overrightarrow{OC}=\vec{b}+\overrightarrow{BC}=2\cdot\vec{f}-\vec{b}$;

*c)* $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=2\cdot\vec{f}-\vec{b}-\vec{a}$.

**2572** *a)* $\dfrac{2\cdot\vec{a}+\vec{b}}{3}$; *b)* $\dfrac{3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}}{5}$; *c)* $\dfrac{10\cdot\vec{a}+\vec{b}}{11}$;

*d)* $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\vec{a}+\vec{b}}{1+\sqrt{2}}=\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\vec{a}+\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\vec{b}$.

**2573** *a)* Az ábra alapján:




$$\overrightarrow{AF}=\frac{\overrightarrow{AB}}{2}.$$

A szabályos háromszög köré írt körének középpontja a háromszög súlypontja is egyben, tehát $O$ pont harmadolja a $CF$ súlyvonalat. Az $A$ vonatkoztatási pontból $CF$ szakasz harmadolópontjába mutató vektort a szakasz végpontjaiba mutató vektorok segítségével kifejezhetjük:

$$\overrightarrow{AO}=\frac{2\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}}{3}=\frac{2\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}+\overrightarrow{AC}}{3}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}.$$

*b)* Az előzőekből következik, hogy a keresett arány:

$$\frac{\left|\overrightarrow{CF}\right|}{\left|\overrightarrow{CO}\right|}=\frac{3}{2}.$$

**2574** $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4\cdot\overrightarrow{AB}+3\cdot\overrightarrow{AC}}{7}$, és $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}$.

**2575** $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3\cdot\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AC}}{5}$.

**2576** *a)* $\vec{b}=\dfrac{7\cdot\vec{p}-4\cdot\vec{a}}{3}$; *b)* $\vec{b}=4\cdot\vec{p}-3\cdot\vec{a}$; *c)* $\vec{b}=\dfrac{12\cdot\vec{p}-7\cdot\vec{a}}{5}$.

**2577** A bizonyítás a 2570. feladat alapján történhet.

**2578** Az $ABC$ háromszög súlypontjából a $BDC$ háromszög súlypontjába mutató vektor:

$$\frac{\vec{d}-\vec{a}}{3}.$$

**2579** Jelöljük egy tetszőleges, de rögzített vonatkoztatási pontból az egyes pontok helyvektorait ugyanazzal a kisbetűvel, mint amelyik pontba mutat.

A súlypontra vonatkozó összefüggés alapján:

$$\vec{s}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \quad \text{és} \quad \vec{p}=\frac{\vec{e}+\vec{f}+\vec{g}}{3}.$$

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CG}=(\vec{e}-\vec{a})+(\vec{f}-\vec{b})+(\vec{g}-\vec{c})=(\vec{e}+\vec{f}+\vec{g})-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=3\cdot(\vec{p}-\vec{s})=3\cdot\overrightarrow{SP},$$

amit bizonyítani kellett.

**2580** Az $AB$ oldalél felezőpontjából a tetraéder súlypontjába mutató vektor:

$$\frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{a}-\vec{b}}{4}.$$

**2581** Egy vonatkoztatási pontból egy szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató helyvektorok számtani közepe.

A tetraéder $D$ csúcsából az $ABC$ alaplap éleinek felezőpontjaiba mutató vektorokat az $A$, $B$ és $C$ csúcsokba mutató vektorok segítségével felírhatjuk:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}.$$

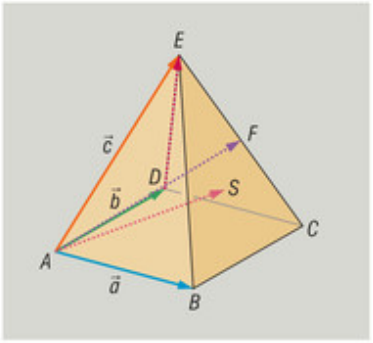
A $D$ csúcsból az $ABC$ alaplap éleinek felezőpontjai által meghatározott háromszög $S$ súlypontjába mutató vektort a felezőpontokba mutató vektorok számtani közepeként kapjuk:

$$\overrightarrow{DS}=\frac{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

Ez a vektor azonos a $D$ csúcsból az $ABC$ háromszög súlypontjába mutató vektorral.

**2582** *a)* A $\overrightarrow{DE}$ vektor felírható két vektor különbségeként:

$$\overrightarrow{DE}=\vec{c}-\vec{b}.$$




*b)* A vektorösszeadás paralelogrammaszabálya alapján:

$$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}, \quad \text{illetve} \quad \overrightarrow{AE}=\vec{c}.$$

Az $A$ csúcsból a $CE$ oldalél $F$ felezőpontjába mutató vektor $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AE}$ számtani közepe:

$$\overrightarrow{AF}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}.$$

*c)* Az $A$ csúcsból a $BCE$ háromszög csúcsaiba mutató vektorok:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \quad \overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AE}=\vec{c}.$$

Az $A$ csúcsból a háromszög $S$ súlypontjába mutató vektor ezek számtani közepe:

$$\overrightarrow{AS}=\frac{2\cdot\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

**2583** Egy tetszőleges vonatkoztatási pontból az $ABC$ háromszög súlypontjába mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepe:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

A vonatkoztatási pontból a háromszög $AB$, $BC$ és $CA$ oldalainak felezőpontjaiba mutató vektorok rendre:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}.$$

A súlypontból a háromszög oldalainak felezőpontjaiba mutató vektorok:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}-2\cdot\vec{c}}{6},$$

$$\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{\vec{b}+\vec{c}-2\cdot\vec{a}}{6},$$

$$\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{\vec{c}+\vec{a}-2\cdot\vec{b}}{6}.$$

A felezőpontokba mutató vektorok összege nullvektor.

**2584** A sokszög oldalait „körbe” mint vektorokat irányítva, összegük nullvektor.

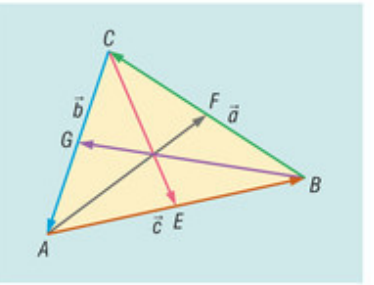
Mivel $\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_3F_4}+\ldots+\overrightarrow{F_{2007}F_{2008}}+\overrightarrow{F_{2008}F_1}$ az oldalvektorok összegével egyenlő:

$$\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_3F_4}+\ldots+\overrightarrow{F_{2007}F_{2008}}+\overrightarrow{F_{2008}F_1}=\vec{0}.$$

**2585** Ha három vektor összege nullvektor, akkor azokat egymáshoz fűzve az első vektor kezdőpontja egybeesik a harmadik végpontjával, tehát háromszöget alkot. Elég megmutatni, hogy a háromszög súlyvonalait mint vektorokat alkalmasan irányítva, azok összege nullvektor.

Legyenek az $ABC$ háromszög oldalaiból képzett vektorok: $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ és $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$. Ezen három vektor összege nullvektor.

Az ábra jelöléseit használva az $AB$ oldal felezőpontja $E$, a $BC$ oldal felezőpontja $F$ és az $AC$ oldal felezőpontja $G$.




Az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok segítségével állítsuk elő a súlyvonalak vektorait:

$$\overrightarrow{AF}=\vec{c}+\frac{\vec{a}}{2},\quad \overrightarrow{BG}=\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{CE}=\vec{b}+\frac{\vec{c}}{2}.$$

Ezek összege:

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CE}=\frac{3}{2}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{0},$$

vagyis a súlyvonalak szakaszait el lehet úgy tolni, hogy azok egy háromszög oldalait alkossák.

**2586** Ismert, hogy bármely vonatkoztatási pontból egy tetraéder súlypontjába mutató helyvektort ki lehet számítani a vonatkoztatási pontból a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepeként. Legyen most a vonatkoztatási pont éppen az $ABCD$ tetraéder $S$ súlypontja. Ebből a pontból a csúcsokba mutató helyvektorokat jelöljük ugyanolyan kisbetűvel, mint a csúcs betűjele. Az előzőek alapján:

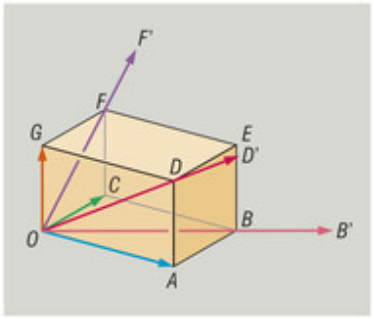
$$\overrightarrow{SS}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}.$$

Mivel egy pontból önmagába irányított vektor a nullvektor:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}=\vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}.$$

Egy tetraéder súlypontjából a csúcsokba mutató vektorok összege nullvektor.

**2587** Az ábra jelöléseit használva a meghosszabbított lapátlók vektorai:




$$\overrightarrow{OB'}=\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right),\quad \overrightarrow{OD'}=\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}\right),$$

$$\overrightarrow{OF'}=\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}\right).$$

Ismert, hogy egy vonatkoztatási pontból egy háromszög súlypontjába mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepe, tehát az $O$ csúcsból a $B'D'F'$ háromszög $S$ súlypontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{OS}=\frac{\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OD'}+\overrightarrow{OF'}}{3}=\frac{\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}\right)}{3}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}.$$

Mivel $O$ pontból az $E$ pontba mutató helyvektor is $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}$, az $E$ és az $S$ pontok azonosak.

**2588** Az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok végpontjai legyenek $A$, $B$ és $C$. Tegyük fel, hogy a $C$ pont az $AB$ szakaszt $m:n$ arányban osztja úgy, hogy $AC:CB=m:n$.

Ismert, hogy $\vec{c}$ vektor előáll a következő alakban:

$$\vec{c}=\frac{n\cdot\vec{a}+m\cdot\vec{b}}{n+m}.$$

Ezt írhatjuk a következő formában:

$$\vec{c}=\frac{n\cdot\vec{a}+m\cdot\vec{b}}{n+m}=\frac{n}{n+m}\cdot\vec{a}+\frac{m}{n+m}\cdot\vec{b}.$$

Mivel $\frac{n}{n+m}+\frac{m}{n+m}=1$, az állítást bizonyítottuk.

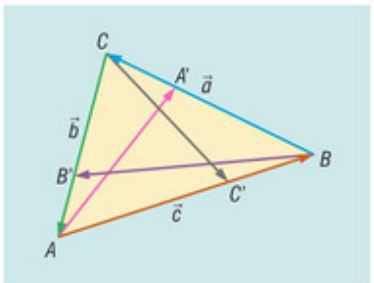
Hasonlóan bizonyítható az állítás, ha a $C$ az $AB$ szakaszon kívül van.

**2589** Az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok végpontjai legyenek $A$, $B$ és $C$. Ekkor:

$$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+(1-\alpha)\cdot\vec{b}-\vec{a}=(1-\alpha)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=(1-\alpha)\cdot\overrightarrow{AB}.$$

Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok párhuzamosak, tehát az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok végpontjai egy egyenesre esnek.

**2590** Legyenek az $ABC$ háromszög oldalaiból képzett vektorok: $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ és $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$. Ezen három vektor háromszöget alkot, összegük nullvektor.




Ha három vektor összege nullvektor, akkor azokat egymáshoz fűzve az első vektor kezdőpontja egybeesik a harmadik végpontjával, tehát háromszöget alkot.

Ez alapján elég megmutatni, hogy az $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ és $\overrightarrow{CC'}$ vektorok összege is nullvektor.

Mivel az $A'$, $B'$ és $C'$ pontok a megfelelő oldalakat azonos arányban osztják:

$$\frac{BA'}{BC}=\frac{CB'}{CA}=\frac{AC'}{AB}=\lambda,$$

amiből következik, hogy:

$$\overrightarrow{BA'}=\lambda\cdot\overrightarrow{BC}=\lambda\cdot\vec{a},\quad \overrightarrow{CB'}=\lambda\cdot\overrightarrow{CA}=\lambda\cdot\vec{b}\quad\text{és}\quad \overrightarrow{AC'}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda\cdot\vec{c}.$$

Fejezzük ki az oldalak vektoraival az $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ és $\overrightarrow{CC'}$ vektorokat:

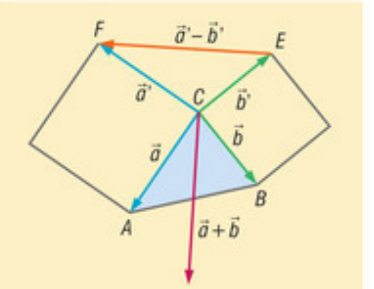
$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}=\vec{c}+\lambda\cdot\vec{a},$$
$$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB'}=\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b},$$
$$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}=\vec{b}+\lambda\cdot\vec{c}.$$

Ezek összegére adódik:

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=(\lambda+1)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{0}.$$

Tehát az $AA'$, $BB'$ és $CC'$ szakaszokat egy háromszöggé lehet összetolni.

**2591** Az ábra jelöléseit használva elég belátni, hogy $|\overrightarrow{EF}|=|\vec{a}+\vec{b}|$, hiszen az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor a paralelogrammaszabály alapján a súlyvonal vektorának kétszerese.

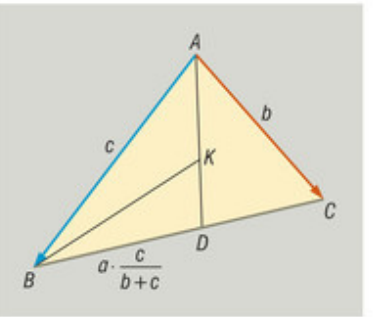



Az $\vec{a}$ vektor $-90°$-os forgatottja $\vec{a}'$, a $\vec{b}$ vektor $-90°$-os forgatottja $-\vec{b}'$. Ez alapján az $\vec{a}+\vec{b}$ vektornak is $-90°$-os forgatottja az $\overrightarrow{EF}=\vec{a}'-\vec{b}'$ vektor. A forgatás távolságtartó transzformáció, ezért $\vec{a}+\vec{b}$ és $\overrightarrow{EF}$ vektorok egyenlő hosszúak.

Tehát az $EF$ a háromszög $C$ csúcsából induló súlyvonalának kétszerese.

A többi súlyvonalra is hasonlóan bizonyítható az állítás.

**2592** A háromszög beírt körének középpontját a belső szögfelezők metszéspontja adja.




Tudjuk, hogy egy háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.

Az $ABC$ háromszög $A$ csúcsából induló belső szögfelező az $a$ hosszúságú oldalt egy olyan $D$ belső pontban metszi, amelyre igaz, hogy $BD:DC=c:b$. A $BD$ szakasz hossza tehát:

$$a\cdot\frac{c}{b+c}.$$

Az $ABC$ háromszög $B$ csúcsánál levő belső szögfelezője az $AD$ szakaszt a háromszög beírt körének $K$ középpontjában metszi. Ez a szögfelező az $ABD$ háromszög $B$ csúcsánál levő belső szögfelezője is, tehát az $AD$ oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja:

$$\frac{AK}{KD}=\frac{c}{a\cdot\frac{c}{b+c}}=\frac{b+c}{a}.$$

Ismert, ha $P$ pont az $AB$ szakasz azon osztópontja, amelyre $AP:PB=m:n$, akkor egy rögzített $O$ vonatoztatási pont esetén az $A$ és a $B$ végpontok $\vec{a}$ és $\vec{b}$ helyvektoraira, és a $P$ osztópont $\vec{p}$ helyvektorára fennáll a következő összefüggés:

$$\vec{p}=\frac{n\cdot\vec{a}+m\cdot\vec{b}}{n+m}.$$

Az $O$ vonatkoztatási pontot tekintve az $A$, $B$ és $C$ csúcsok helyvektorai rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Mivel $BD:DC = c:b$, az osztópont helyvektorára vonatkozó képlet szerint:

$$\overrightarrow{OD} = \frac{b\cdot\vec{b}+c\cdot\vec{c}}{b+c}.$$

Mivel

$$\frac{AK}{KD} = \frac{b+c}{a},$$

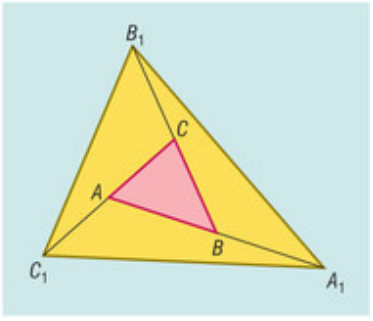
ezért

$$\overrightarrow{OK} = \frac{a\cdot\vec{a}+(b+c)\cdot\overrightarrow{OD}}{a+(b+c)} = \frac{a\cdot\vec{a}+(b+c)\cdot\dfrac{b\cdot\vec{b}+c\cdot\vec{c}}{b+c}}{a+(b+c)} = \frac{a\cdot\vec{a}+b\cdot\vec{b}+c\cdot\vec{c}}{a+b+c}.$$

Tehát a beírt kör középpontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{a\cdot\vec{a}+b\cdot\vec{b}+c\cdot\vec{c}}{a+b+c}.$$

**2593** Egy tetszőleges, de rögzített $O$ vonatkoztatási pontból az $ABC$ háromszög $A$, $B$ és $C$ csúcsaiba mutató helyvektorok legyenek rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$, valamint az $A_1B_1C_1$ háromszög $A_1$, $B_1$ és $C_1$ csúcsaiba mutató helyvektorok rendre $\vec{a_1}$, $\vec{b_1}$ és $\vec{c_1}$. Ha az adott $\vec{a_1}$, $\vec{b_1}$ és $\vec{c_1}$ vektorok felhasználásával az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok szerkesztésére eljárást tudunk adni, akkor a feladatot megoldottuk.




Mivel az $A$ pont felezi a $CC_1$ szakaszt, felírható:

$$\vec{a} = \frac{\vec{c}+\vec{c_1}}{2} \Rightarrow 2\cdot\vec{a} = \vec{c}+\vec{c_1}. \quad (1)$$

Hasonlóan:

$$\vec{c} = \frac{\vec{b}+\vec{b_1}}{2} \Rightarrow 2\cdot\vec{c} = \vec{b}+\vec{b_1}, \quad (2)$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{a}+\vec{a_1}}{2} \Rightarrow 2\cdot\vec{b} = \vec{a}+\vec{a_1}. \quad (3)$$

Az (1) egyenlet kétszeresét hozzáadva a (2) egyenlethez, adódik:

$$4\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{c} = 2\cdot\vec{c}+2\cdot\vec{c_1}+\vec{b}+\vec{b_1} \Rightarrow 4\cdot\vec{a} = 2\cdot\vec{c_1}+\vec{b}+\vec{b_1}. \quad (4)$$

A (4) egyenlet kétszeresét a (3) egyenlethez adva:

$$8\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b} = 4\cdot\vec{c_1}+2\cdot\vec{b}+2\cdot\vec{b_1}+\vec{a}+\vec{a_1} \Rightarrow 8\cdot\vec{a} = 4\cdot\vec{c_1}+2\cdot\vec{b_1}+\vec{a}+\vec{a_1}.$$

Ez utóbbi egyenletből $\vec{a}$-t kifejezve:

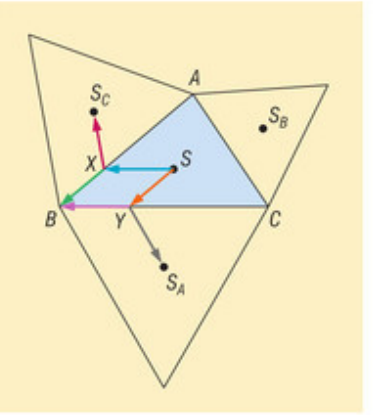
$$\vec{a} = \frac{4\cdot\vec{c_1}+2\cdot\vec{b_1}+\vec{a_1}}{7}.$$

Hasonlóan:

$$\vec{b} = \frac{4\cdot\vec{a_1}+2\cdot\vec{c_1}+\vec{b_1}}{7} \quad \text{és} \quad \vec{c} = \frac{4\cdot\vec{b_1}+2\cdot\vec{a_1}+\vec{c_1}}{7}.$$

Ezek alapján az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok szerkeszthetők az $\vec{a_1}$, $\vec{b_1}$ és $\vec{c_1}$ vektorok ismeretében.

**2594** Tekintsük az ábra jelöléseit. Legyen az $ABC$ háromszög súlypontja $S$, a háromszög oldalaira kifelé rajzolt szabályos háromszögek középpontjai $S_A$, $S_B$ és $S_C$.




Az $AB$ oldal $B$-hez közelebbi harmadolópontja legyen $X$, a $BC$ oldal $B$-hez közelebbi harmadolópontja legyen $Y$.

A $BYSX$ négyszög az $S$ súlypont harmadoló tulajdonsága miatt paralelogramma:

$$\overrightarrow{SY} = \overrightarrow{XB} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{SX} = \overrightarrow{YB}.$$

Ezért:

$$\overrightarrow{SS_C} = \overrightarrow{SX} + \overrightarrow{XS_C} = \overrightarrow{YB} + \overrightarrow{XS_C}$$

és

$$\overrightarrow{SS_A} = \overrightarrow{SY} + \overrightarrow{YS_A} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{YS_A}.$$

Mivel a háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket rajzoltunk:

$$XB = XS_C \quad \text{és} \quad YB = YS_A,$$

és páronként 120°-os szöget zárnak be.

Ebből adódóan $\overrightarrow{XS_C}$ vektor az $\overrightarrow{XB}$ vektor –120°-os forgatottja, és az $\overrightarrow{YB}$ vektor az $\overrightarrow{YS_A}$ vektor –120°-os forgatottja.

Tehát az $\overrightarrow{SS_C}$ vektor $\overrightarrow{XS_C}$ és $\overrightarrow{YB}$ összetevői az $\overrightarrow{SS_A}$ vektor $\overrightarrow{XB}$ és $\overrightarrow{YS_A}$ összetevőinek –120°-os forgatottja.

Ez azt jelenti, hogy az $\overrightarrow{SS_C}$ vektor az $\overrightarrow{SS_A}$ vektor –120°-os forgatottja.

Hasonlóan belátható, hogy az $\overrightarrow{SS_B}$ vektor az $\overrightarrow{SS_C}$ vektor –120°-os forgatottja.

Tehát $S_AS_BS_C$ háromszög szabályos, és súlypontja $S$.

## Vektorok a koordináta-rendszerben, vektor koordinátái, műveletek koordinátákkal adott vektorokkal – megoldások

**2595** A szerkesztés során használhatjuk a párhuzamos szelők tételét és a magasságtételt.

**2596** A 2595. feladatnak megfelelően járhatunk el.

**2597** *a)* Az $x$ tengelyre vonatkozó tükrözéskor a vektor első koordinátája marad változatlanul, a második koordinátája az ellentettjére változik.

*b)* Az $y$ tengelyre vonatkozó tükrözéskor a vektor második koordinátája marad változatlanul, az első koordinátája az ellentettjére változik.

*c)* Az origóra vonatkozó tükrözéskor a vektor első és második koordinátája is az ellentettjére változik.

*d)* Az origón áthaladó és az $x$ tengely pozitív felével 45°-os szöget bezáró egyenesre vonatkozó tükrözéskor a vektor első és második koordinátája felcserélődik.

**2598** *a)* A helyvektorok végpontjának halmaza az $x$ tengely.

*b)* A helyvektorok végpontjának halmaza az $y$ tengely.

*c)* A helyvektorok végpontjának halmaza egy olyan egyenes, amely az $y$ tengelyt a $-3$ pontjában metszi és az $x$ tengellyel párhuzamos.

*d)* A helyvektorok végpontjának halmaza egy olyan egyenes, amely az $x$ tengelyt a 2 pontjában metszi és az $y$ tengellyel párhuzamos.

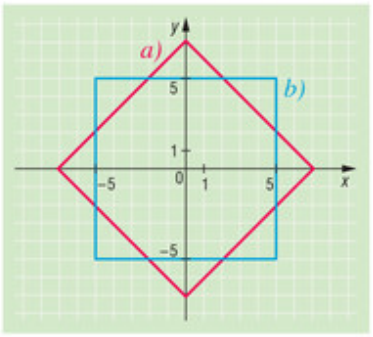


**2599** *a)* Ha a négyzet oldala 10 egység hosszú, akkor az átlója $10 \cdot \sqrt{2}$. A középpontjának a csúcsoktól vett távolsága $5 \cdot \sqrt{2}$. Tehát a csúcsok helyvektorai:

$(5 \cdot \sqrt{2}; 0)$, $(0; 5 \cdot \sqrt{2})$, $(-5 \cdot \sqrt{2}; 0)$ és $(0; -5 \cdot \sqrt{2})$.

*b)* A négyzet oldala 10 egység hosszú, így az oldalaknak a tengelyektől vett távolsága 5 egység, vagyis a csúcspontok helyvektorai:

$(5; 5)$, $(-5; 5)$, $(-5; -5)$ és $(5; -5)$.




**2600** *a)* $(8; -12)$; *b)* $\left(\frac{2}{3}; -1\right)$; *c)* $(126; -189)$.

**2601** *a)* $\left(0{,}5; -\frac{3}{2}\right)$; *b)* $(2; -6)$; *c)* $(5; 12{,}6)$;

*d)* $(1{,}375; 0{,}475)$.

**2602** *a)* $\overrightarrow{AB}(-13; -4)$; *b)* $\overrightarrow{AB}(-17; 10)$; *c)* $\overrightarrow{AB}(\sqrt{3}; -6)$;

*d)* $\overrightarrow{AB}(a - 8; 5 - b)$.

**2603** Egy szakasz vektorát megkaphatjuk úgy, hogy a végpont helyvektorából kivonjuk a kezdőpont helyvektorát. Tehát:

$\overrightarrow{AB}(-6; 4)$, $\overrightarrow{BC}(7; 2)$ és $\overrightarrow{CA}(-1; -6)$.

Ezen vektorok összege a nullvektor.

**2604** Az $A$ pont képének helyvektorát megkaphatjuk úgy, hogy az $A$ pont helyvektorához hozzáadjuk a $\vec{v}$ vektort. Az $A$ pont képének helyvektora: $(3; 8)$. Az $A$ pont képe:

*a)* $A'(3; 8)$; *b)* $A'(-4; 11)$; *c)* $A'(\sqrt{3} - 2; 8)$; *d)* $A'(0; 0)$.

**2605** A négy pont négyszöget határoz meg és $\overrightarrow{AB}(3, -5)$, illetve $\overrightarrow{CD}(3; -5)$. Mivel a két vektor egyenlő, a négy pont által meghatározott négyszög szemben levő oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak, tehát paralelogrammát határoznak meg.

**2606** Az $\overrightarrow{AB}(1; 2)$ és az $\overrightarrow{AC}(2004; 4008)$. Mivel az $\overrightarrow{AC} = 2004 \cdot \overrightarrow{AB}$, az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok párhuzamosak, tehát a $B$ és $C$ végpontjaik $A$-val egy egyenesbe esnek.

Bebizonyítottuk, hogy az $A(4; 7)$, $B(5; 9)$ és $C(2008; 4015)$ pontok egy egyenesre esnek.

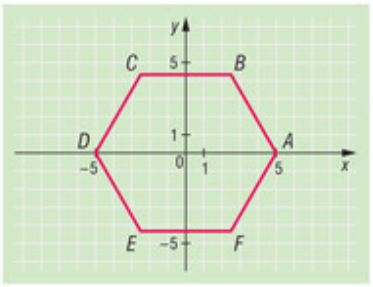
**2607** Egy szabályos hatszög oldalai a köré írt körének középpontjából 60°-os szög alatt látszanak, tehát a hatszög köré írt körének sugara éppen a hatszög oldala.

*a)* Az $ABCDEF$ szabályos hatszög $A$ csúcsa illeszkedjen az $x$ tengely pozitív felére.

Mivel a hatszög oldala 5 egység hosszú, a hatszög köré írt körének sugara is 5 egység $\Rightarrow A(5; 0)$ és $D(-5; 0)$.

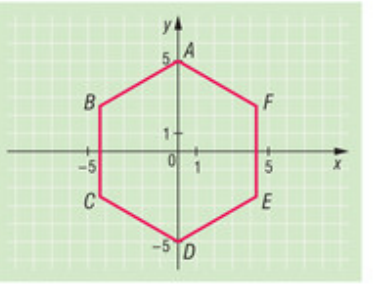
A hatszög $B$, $C$, $E$ és $F$ csúcsának koordinátái előjelesen egy olyan derékszögű háromszögnek a befogói, amelyek egyik hegyesszöge 60°, átfogója 5 egység.

Tehát:




$$B\left(\frac{5}{2}; \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}\right),\quad C\left(-\frac{5}{2}; \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}\right),\quad E\left(-\frac{5}{2}; -\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}\right),\quad F\left(\frac{5}{2}; -\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}\right).$$

*b)* Ha az $ABCDEF$ szabályos hatszög $A$ csúcsa az $y$ tengely pozitív felére illeszkedik, akkor:




$$A(0;5),\quad B\left(-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2};\frac{5}{2}\right),\quad C\left(-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2};-\frac{5}{2}\right),$$

$$D(0;-5),\quad E\left(\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2};-\frac{5}{2}\right),\quad F\left(\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2};\frac{5}{2}\right).$$

**2608** *a)* A helyvektorok végpontjainak halmaza az első és harmadik síknegyed szögfelzői.

*b)* A helyvektorok végpontjainak halmaza a második és negyedik síknegyed szögfelzői.

*c)* A helyvektorok végpontjainak halmaza az első és második síknegyed szögfelzői.

*d)* A helyvektorok végpontjainak halmaza az első és negyedik síknegyed szögfelzői.

*e)* A helyvektorok végpontjainak halmaza a négy síknegyed szögfelzői.

**2609** A $\vec{v}\left(\frac{p-2}{5-p};p^2+p-12\right)$ vektor két koordinátájára egyszerre kell teljesülni, hogy:

$$\frac{p-2}{5-p}\geq 0 \quad \text{és} \quad p^2+p-12\geq 0.$$

Az első egyenlőtlenség megoldása: $2\leq p<5$.

A második egyenlőtlenség megoldása: $p\geq 3$ vagy $p\leq -4$.

Az két egyenlőtlenség közös megoldása: $3\leq p<5$.

Ez utóbbi egyenlőtlenségrendszert a $p=3$ és $p=4$ egészek elégítik ki.

Tehát két olyan $p$ egész szám van, amelyre a $\vec{v}\left(\frac{p-2}{5-p};p^2+p-12\right)$ helyvektor mindkét koordinátája nemnegatív: $p=3$ és $p=4$.

**2610** A $\vec{v}\left(\frac{5n+2}{4};\frac{n^2+6}{n-1}\right)$ második koordinátája más alakba átírva: $\frac{n^2+6}{n-1}=n+1+\frac{7}{n-1}$.

Mivel $n$ egész, ez a kifejezés akkor egész, ha $\frac{7}{n-1}$ egész.

A $\frac{7}{n-1}$ kifejezés akkor lesz egész, ha $n-1$ osztója a 7-nek. Az $n-1$ lehet: $-7, -1, 1, 7$.

A második koordináta tehát akkor egész, ha $n=-6,\ 0,\ 2$ vagy $8$.

Ezen $n$-ek közül az első koordináta csak $n=2$ és $n=-6$ esetén egész.

Tehát a $\vec{v}\left(\frac{5n+2}{4};\frac{n^2+6}{n-1}\right)$ helyvektor mindkét koordinátája $n=2$ és $n=-6$ esetén egész.

**2611** Az első koordináták összege:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\ldots+\frac{1}{2008\cdot 2009}.$$

A törteket elemi törtekre bontva:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\ldots+\frac{1}{2008\cdot 2009}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009}.$$



A közbülső tagok összege 0, így az első koordináták összege:

$$1-\frac{1}{2009}=\frac{2008}{2009}.$$

A második koordináták összege:

$$1+2+3+\ldots+k+\ldots+2007+2008=$$
$$=\frac{2008\cdot 2009}{2}=2017036.$$

Az összegvektor tehát:

$$\left(\frac{2008}{2009};2017036\right).$$

## Vegyes feladatok III. – megoldások

**2612** *a)* 20 egység; *b)* 19,32 egység;
*c)* 14,14 egység; *d)* 6,84 egység;
*e)* 0 egység.

**2613** Az eredő mindkét esetben nullvektor.

**2614** A felezőpontokat összekötő vektor: $\frac{\vec{a}-\vec{c}}{2}$.

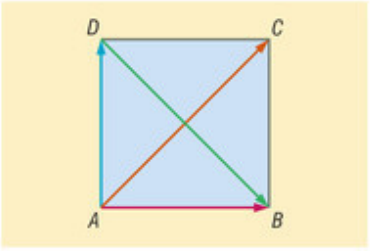
**2615** Az ábra alapján:

$$\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AC}}{2}+\frac{\overrightarrow{DB}}{2}$$

és

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AC}}{2}-\frac{\overrightarrow{DB}}{2}.$$

Az $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$ hossza az $\overrightarrow{AB}$ hosszának kétszerese, vagyis 4 egység.




**2616** Az $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ és $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ egységnyi hosszú vektorok. A paralelogrammaszabály alapján a két vektor rombuszt feszít ki, amelynek átlója felezi az annál a csúcsnál levő szöget, amelyből kiindul, tehát az állítás igaz.

**2617** *a)* $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$; *b)* $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{BA}=-\vec{c}$;

*c)* $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}-2\cdot\overrightarrow{SC}=-2\cdot\overrightarrow{SC}=-2\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\vec{c}+\vec{a}\right)=-\frac{2}{3}\cdot\vec{c}-\frac{4}{3}\cdot\vec{a}.$

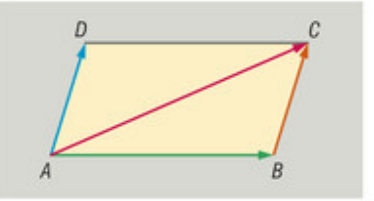
**2618** $\overrightarrow{HP}=\frac{9\cdot\vec{d}-5\cdot\vec{b}-4\cdot\vec{c}}{15}$.

**2619** A harmadolópontba mutató vektor:

$$\frac{2\cdot\vec{x}+\vec{y}}{3}=\frac{2\cdot\left(2\cdot\vec{a}-5\cdot\vec{b}\right)+\left(3\cdot\vec{b}-4\cdot\vec{a}\right)}{3}=-\frac{7\cdot\vec{b}}{3}.$$

**2620** Tekintsük a mellékelt ábrát, és használjuk fel, hogy:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \quad \text{valamint} \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$




A bal oldalt alakítva éppen a jobb oldalhoz jutunk:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{BC}.$$

**2621** $\overrightarrow{FH} = \dfrac{4 \cdot \vec{c} - 3 \cdot \vec{a} - \vec{b}}{6}$.

**2622** *a)* $\overrightarrow{AB}(3;10)$, $\overrightarrow{BC}(1;-6)$ és $\overrightarrow{CA}(-4;-4)$. *b)* $A'\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, $B'\left(-2;-\frac{7}{2}\right)$ és $C'\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

*c)* $C''(8;11)$. *d)* A négyszög paralelogrammma.

**2623** A két szélső kutya által kifejtett erő összege a középső kutya irányába mutat, és nagysága:

$$2 \cdot 200 \cdot \cos 22^\circ \approx 370{,}87 \text{ N}.$$

Ehhez a vektorhoz adjuk még a harmadik kutya által kifejtett 200 N nagyságú vektort. A három kutya 570,87 N erővel húzza a szánt.

**2624** Jelöljük egy tetszőleges, de rögzített vonatkoztatási pontból az egyes pontok helyvektorait ugyanazzal a kisbetűvel, mint amelyik pontba vezet. A felezőpont képlete alapján számolunk:

$$\vec{p} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \quad \text{és} \quad \vec{q} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2}.$$

Írjuk fel az $AB$, $CD$ és $PQ$ szakaszok felezőpontjaiba mutató vektorokat.

Azt kell bizonyítani, hogy a következő vektorok végpontjai egy egyenesre esnek:

$$\frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}, \quad \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \dfrac{\vec{c} + \vec{d}}{2}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}.$$

Mivel a két első vektor összegének a fele éppen a harmadik vektor, ezért a három vektor végpontja egy egyenesbe esik, és $PQ$ felezőpontja felezi az $AB$ és $CD$ szakaszok felezőpontjai által meghatározott szakaszt.

**2625** $x = -10$ és $y = 1$.

**2626** Egy tetszőleges, de rögzített $O$ vonatkoztatási pontból a hatszög csúcsaiba vezető vektorok legyenek az adott körüljárási irány szerint $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$. A felezőpontokba mutató vektorok ezek segítségével kifejezhetők:

$$\overrightarrow{f_1} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \quad \overrightarrow{f_2} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \quad \overrightarrow{f_3} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2},$$

$$\overrightarrow{f_4} = \frac{\vec{d} + \vec{e}}{2}, \quad \overrightarrow{f_5} = \frac{\vec{e} + \vec{f}}{2}, \quad \overrightarrow{f_6} = \frac{\vec{f} + \vec{a}}{2}.$$

Az $O$ pontból az $F_1F_3F_5$ háromszög súlypontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{s_1} = \frac{\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_3} + \overrightarrow{f_5}}{3} = \frac{\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \dfrac{\vec{c} + \vec{d}}{2} + \dfrac{\vec{e} + \vec{f}}{2}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}}{6}.$$



Az $O$ pontból az $F_2F_4F_6$ háromszög súlypontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{s_2} = \frac{\overrightarrow{f_2} + \overrightarrow{f_4} + \overrightarrow{f_6}}{3} = \frac{\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} + \frac{\vec{d}+\vec{e}}{2} + \frac{\vec{f}+\vec{a}}{2}}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{6}.$$

Az $O$ pontból kiinduló $F_1F_3F_5$ és $F_2F_4F_6$ háromszögek súlypontjába mutató vektorok egyenlők, tehát a két háromszög súlypontja azonos.

**2627** A feltétel szerint az $\overrightarrow{AB}(x-4; 15)$ és $\overrightarrow{AC}(-11; 14)$ vektorok párhuzamosak, tehát létezik egy olyan $\alpha$ valós szám, hogy $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC} \Rightarrow x - 4 = \alpha \cdot (-11)$. Felhasználva, hogy $15 = \alpha \cdot 14$:

$$x = -\frac{109}{14}.$$

**2628** Jelöljük egy tetszőleges, de rögzített vonatkoztatási pontból az egyes pontok helyvektorait ugyanazzal a kisbetűvel, mint amelyik pontba vezet.

A $P$ pont $A$-ra vonatkozó tükörképe legyen $P_1$, $P_1$ $B$-re vonatkozó tükörképe $P_2$, és így tovább. Be kell bizonyítani, hogy a $P_4$ és a $P$ pontok azonosak.

A tükrözések miatt:

$$\overrightarrow{p_1} = 2 \cdot \vec{a} - \vec{p},$$

$$\overrightarrow{p_2} = 2 \cdot \vec{b} - \overrightarrow{p_1} = 2 \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + \vec{p},$$

$$\overrightarrow{p_3} = 2 \cdot \vec{c} - \overrightarrow{p_2} = 2 \cdot (\vec{c} - \vec{b} + \vec{a}) - \vec{p},$$

$$\overrightarrow{p_4} = 2 \cdot \vec{d} - \overrightarrow{p_3} = 2 \cdot (\vec{d} - \vec{c} + \vec{b} - \vec{a}) + \vec{p}.$$

Mivel paralelogrammáról van szó:

$$\vec{d} - \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{d} - \vec{c} + \vec{b} - \vec{a} = \vec{0},$$

vagyis $P$ és $P_4$ helyvektora egyenlő, tehát $P$ és $P_4$ pontok azonosak.

**2629** A 2567. feladat jelöléseit használva egy rögzített, de tetszőleges $O$ vonatkoztatási pontból az $AC$ és a $BD$ szemközti élek $F$ és $H$ felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontjába mutató helyvektor az $\vec{f}$ és $\vec{h}$ vektorok számtani közepe:

$$\frac{\vec{f}+\vec{h}}{2} = \frac{\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} + \frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}.$$

Ugyanakkor tudjuk, hogy egy tetraéder súlypontjába mutató helyvektort ki lehet számítani a vonatkoztatási pontból a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepeként:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}.$$

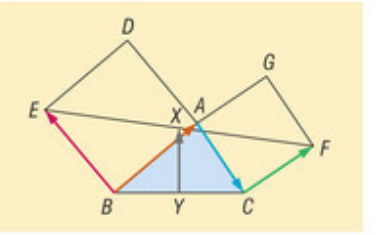
Mivel az $O$ pontból a súlypontba mutató helyvektor azonos az $FH$ szakasz felezőpontjának helyvektorával, a súlypont és az $FH$ szakasz felezőpontja ugyanaz a pont.

Hasonlóan járhatunk el bármely két szemközti él esetén.

Egy tetraéder súlypontja felezi a szemközti élek felezőpontjait összekötő szakaszokat.

Ezzel azt is bebizonyítottuk, hogy egy tetraéderben a szemközti élek felezőpontjait összekötő szakaszok felezve metszik egymást.

**2630** Legyen az $EF$ felezőpontja $X$ és $BC$ felezőpontja $Y$.




A 2564. feladat alapján:

$$\overrightarrow{YX} = \frac{\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}}{2}.$$

A $\overrightarrow{BE}$ vektor $-90°$-os forgatottja $\overrightarrow{BA}$, a $\overrightarrow{CF}$ vektor $-90°$-os forgatottja pedig $\overrightarrow{AC}$.

Ebből következik, hogy:

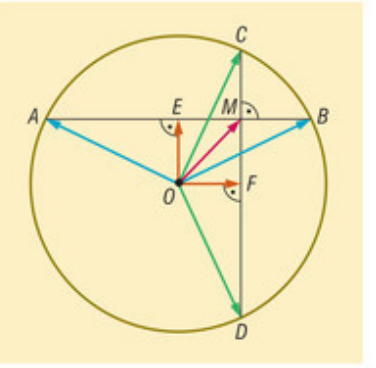
$$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 2 \cdot \overrightarrow{YX},$$

és ennek a vektornak a $-90°$-os forgatottja:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}.$$

Ez azt jelenti, hogy $XY$ távolság a $BC$ távolság fele, tehát $X$ valóban a $BC$ átmérőjű körön van.

**2631** Egy vonatkoztatási pontból egy szakasz felezőpontjába mutató helyvektor a végpontokba mutató helyvektorok számtani közepe.




A kör $O$ középpontjából az $AB$ húr $E$ felezőpontjába mutató vektor merőleges $AB$-re, és:

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

Ugyanígy az $O$ pontból a $CD$ húr $F$ felezőpontjába mutató vektor merőleges $CD$-re, és:

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}.$$

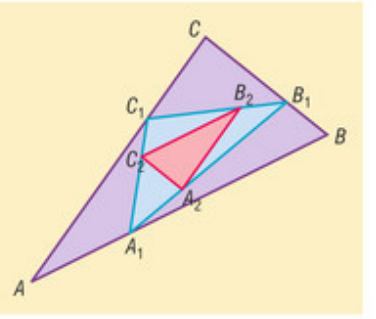
Mivel a két húr merőleges egymásra, az $OEMF$ négyszög téglalap, amelynek átlóvektora az oldalak vektorainak összege:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} + \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}.$$

Tehát:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2 \cdot \overrightarrow{OM}.$$

**2632** Jelöljük egy tetszőleges, de rögzített vonatkoztatási pontból az egyes pontok helyvektorait ugyanazzal a kisbetűvel, mint amelyik pontba vezetnek.




A harmadolópontok helyvektorára vonatkozó összefüggésekből:

$$\vec{a}_1 = \frac{2 \cdot \vec{a} + \vec{b}}{3}, \quad \vec{b}_1 = \frac{2 \cdot \vec{b} + \vec{c}}{3}, \quad \vec{c}_1 = \frac{2 \cdot \vec{c} + \vec{a}}{3},$$

$$\vec{a}_2 = \frac{2 \cdot \vec{a}_1 + \vec{b}_1}{3}, \quad \vec{b}_2 = \frac{2 \cdot \vec{b}_1 + \vec{c}_1}{3}, \quad \vec{c}_2 = \frac{2 \cdot \vec{c}_1 + \vec{a}_1}{3}.$$

Ezeket összevetve:

$$\vec{a}_2 = \frac{2 \cdot \vec{a}_1 + \vec{b}_1}{3} = \frac{\frac{4 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}}{3} + \frac{2 \cdot \vec{b} + \vec{c}}{3}}{3} = \frac{4 \cdot \vec{a} + 4 \cdot \vec{b} + \vec{c}}{9}.$$

Ugyanígy:

$$\vec{b}_2 = \frac{4 \cdot \vec{b} + 4 \cdot \vec{c} + \vec{a}}{9}.$$



Tehát:

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{b_2} - \overrightarrow{a_2} = \frac{\vec{c} - \vec{a}}{3} = \frac{\overrightarrow{AC}}{3},$$

vagyis az $AC$ oldal párhuzamos az $A_2B_2$ oldallal.

Hasonlóan adódik, hogy a $BC$ oldal párhuzamos az $A_2C_2$ oldallal és az $AB$ oldal párhuzamos a $B_2C_2$ oldallal.

Így az $ABC$ és az $A_2B_2C_2$ háromszögek oldalai párhuzamosak, tehát a két háromszög hasonló.

A megoldásból az is kitűnik, hogy a hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$.

A hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának a négyzete, tehát:

$$\frac{T_{A_2B_2C_2 \text{ háromszög}}}{T_{ABC \text{ háromszög}}} = \frac{1}{9}.$$

# 10.5. SZÖGFÜGGVÉNYEK

## A szinusz- és koszinuszfüggvény definíciója, egyszerű tulajdonságai – megoldások

**2633** *a)* Pozitív. *b)* Pozitív.
*c)* Negatív. *d)* Mivel $\sin 3 > 0$, $\cos 4 < 0$, ezért negatív.

**2634** A következő táblázatot kapjuk:

| $\alpha$ | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | –1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | –1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |

**2635** *a)* 1; *b)* –4; *c)* $\frac{\sqrt{3}}{8}$; *d)* $-\frac{\sqrt{3}}{8}$; *e)* 2.

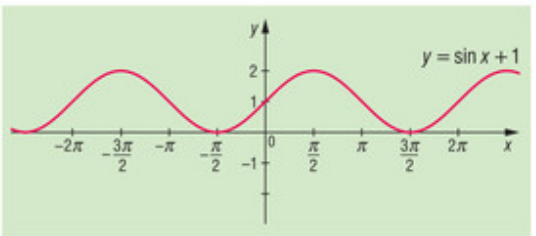
**2636** *a)* $\frac{1}{2}$; *b)* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; *c)* $\frac{1}{2}$; *d)* 0; *e)* $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; *f)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
*g)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$; *h)* $-\frac{1}{2}$.

**2637** *a)* 0; *b)* 1; *c)* 0; *d)* 1; *e)* 0; *f)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
*g)* $-\frac{1}{2}$; *h)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

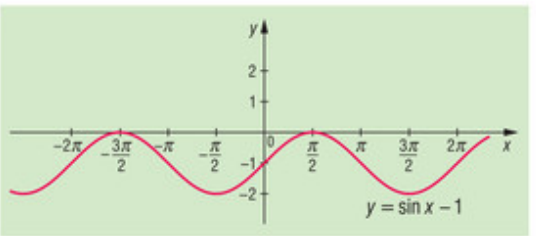
**2638** *a)* 0; *b)* 0.

## A szinuszfüggvény grafikonja – megoldások

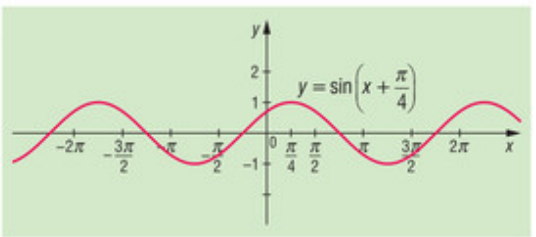
**2639** *a)*



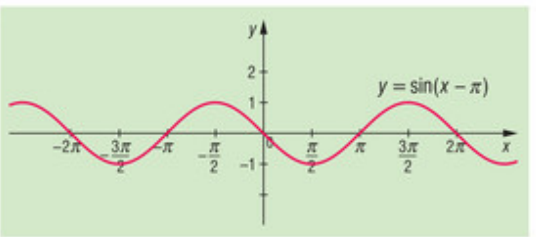

*b)*



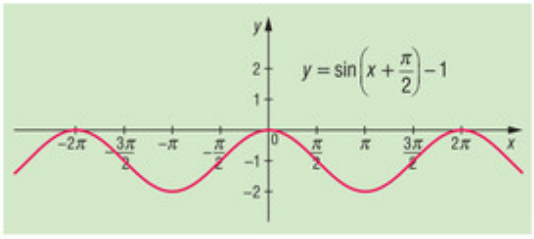

*c)*



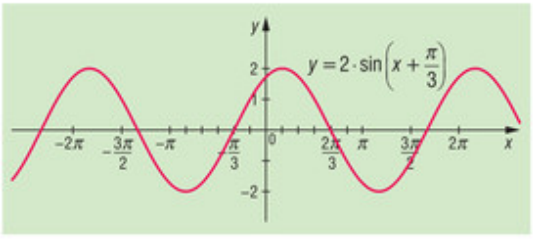

*d)*



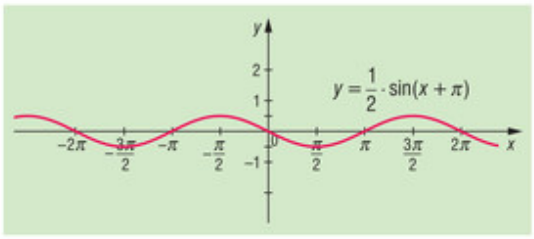
*e)*



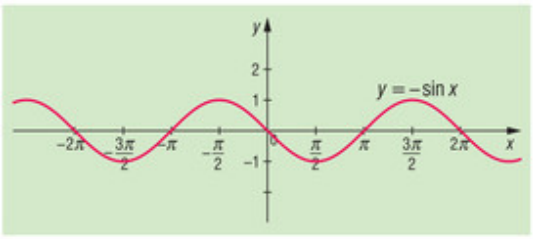

*f)*



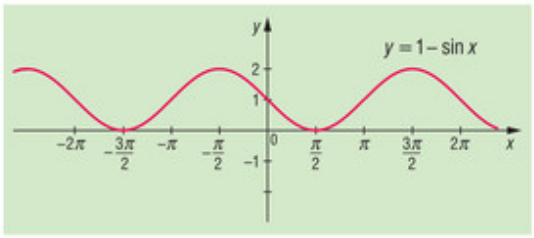

*g)*



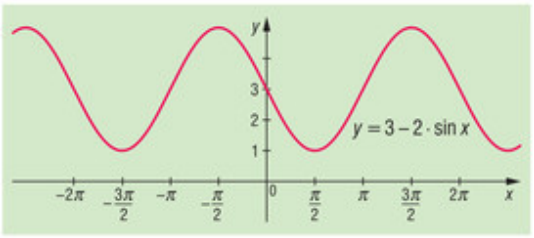

*h)*



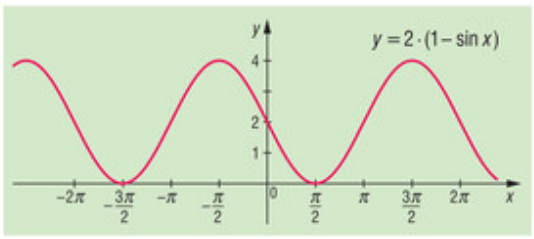

*i)*



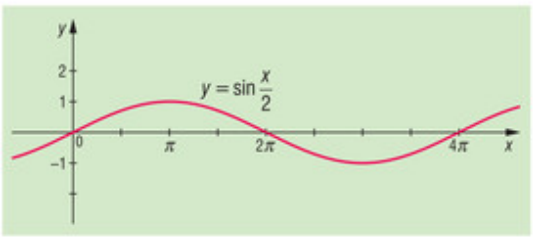

*j)*



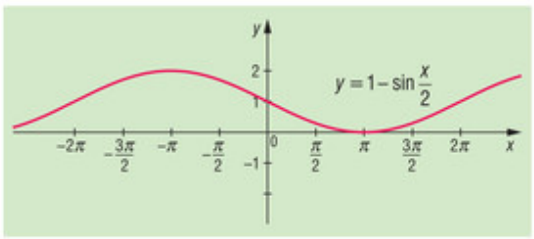

*k)*



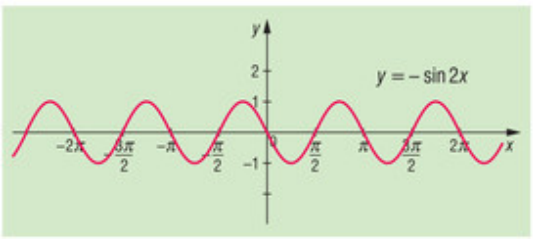

*l)*



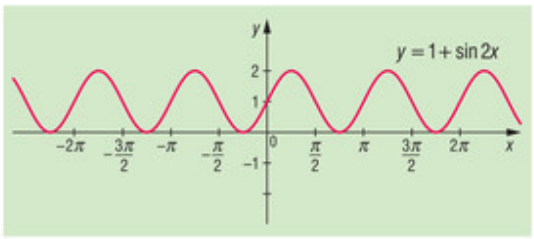

*m)*




*n)*



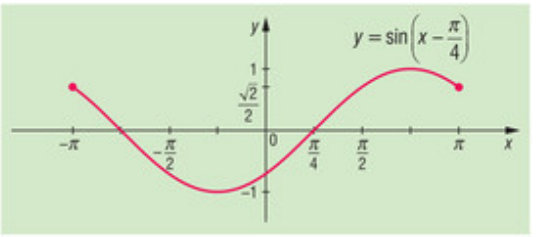

*o)*



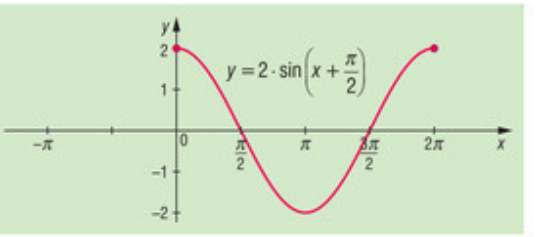

**2640** *a)* $\sin\frac{1}{2} < \sin 1$; *b)* $\sin(-0{,}2) > \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; *c)* $\sin 2 > \sin 3$; *d)* $\sin(\pi - 2) = \sin 2$.

**2641** *a)* $x = 0$; *b)* $x = \pi$; *c)* $x = -\pi$.

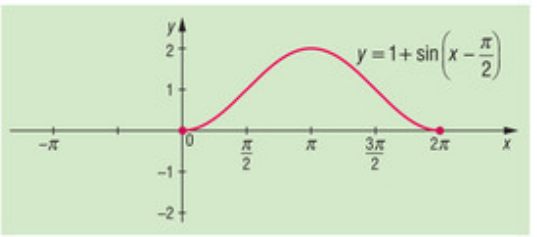
**2642** *a)*



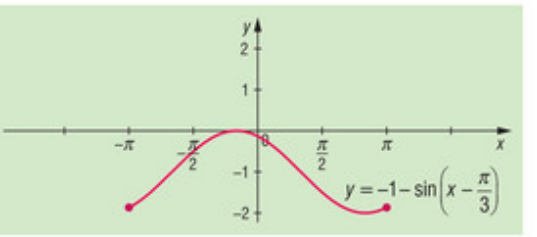

*b)*



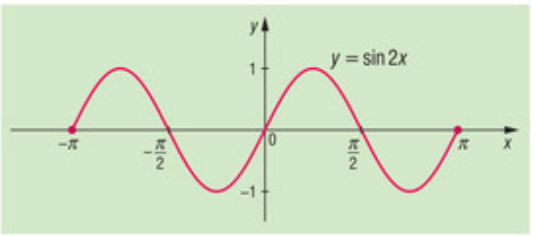

*c)*



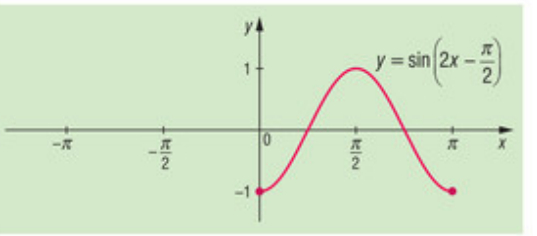

*d)*



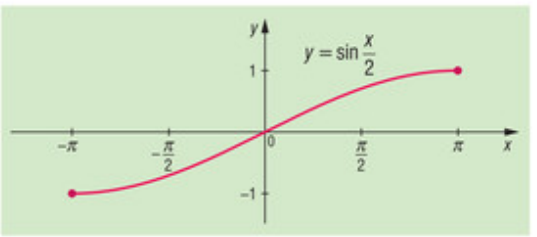

*e)*



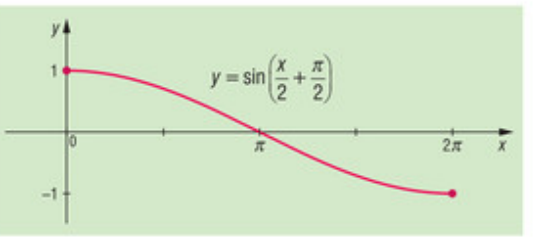

*f)*



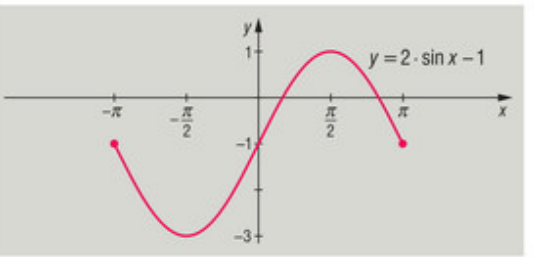

*g)*



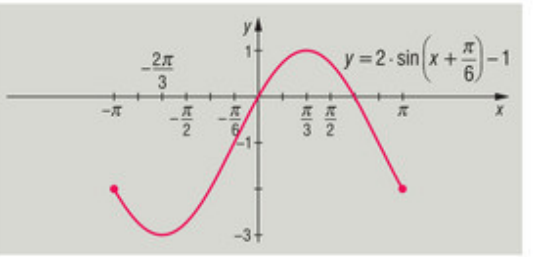

*h)*




**2643** *a)* A függvény $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$-ban és $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ban csökken, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$-ban nő. A $-\frac{\pi}{2}$ helyen minimuma, a $\frac{\pi}{2}$ helyen pedig maximuma van. A minimum értéke $-3$, a maximum értéke 1.

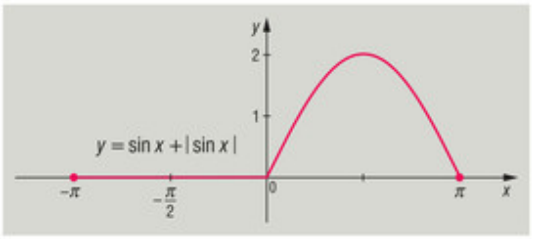



*b)* A függvény $\left[-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]$-ban és $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$-ban csökken, $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$-ban nő. A $-\frac{2\pi}{3}$ helyen minimuma, a $\frac{\pi}{3}$ helyen pedig maximuma van. A minimum értéke $-3$, a maximum értéke 1.



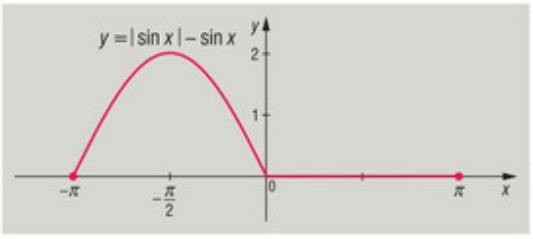
*c)* A megadott függvény $[-\pi; 0]$-ban konstans, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$-ben nő, $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ben pedig csökken.

A $\frac{\pi}{2}$ helyen maximuma van, értéke itt 2, minimuma 0, ezt $[-\pi; 0]$-ban és $\pi$-ben veszi fel.




*d) Megjegyzés:*

$$|\sin x| - \sin x = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \sin x \geq 0, \\ -2 \cdot \sin x, & \text{ha} \quad \sin x < 0. \end{cases}$$




**2644** Például:

*a)* $\alpha = 60°, 120°, 420°$;

*b)* $\alpha = 210°, 330°, 570°$;

*c)* $\alpha = 127°, 413°, 487°$;

*d)* $\alpha = 340°, 560°, 700°$.

**2645** *a)* $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, illetve $\frac{5\pi}{3} + 2n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$;

*b)* $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, illetve $\frac{4\pi}{3} + 2n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$;

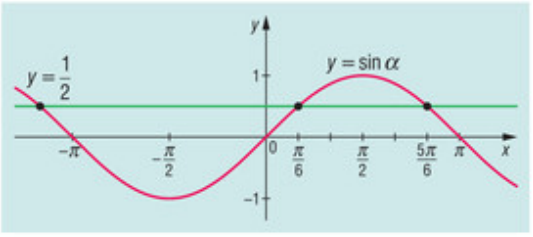
*c)* $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

*d)* $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, illetve $\frac{2\pi}{3} + n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

**2646** *a)* Vegyük észre, hogy a $2x + 30° = \alpha$ helyettesítéssel csak a $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ egyenletet kell megoldani.

Visszahelyettesítés után a megoldások:

$x_1 = k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{Z}$; $x_2 = 60° + n \cdot 180°$, $n \in \mathbb{Z}$.

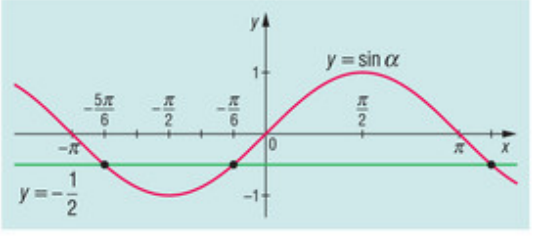



*b)* Helyettesítéssel a $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ egyenletet kell megoldani függvénygrafikonnal.

Visszahelyettesítés után a megoldások:

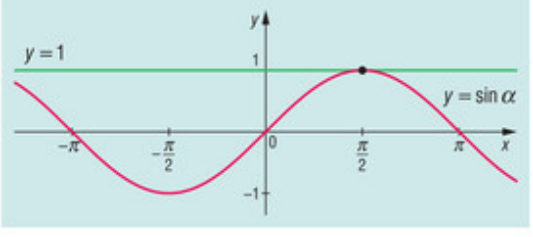
$$x_1 = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$




*c)* Hasonlóan az *a)* és *b)* feladat megoldásához, helyettesítéssel a $\sin\alpha = 1$ egyenletet kapjuk, amiből visszahelyettesítés után a megoldás:

$$x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

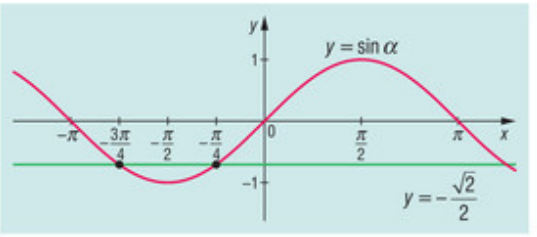


*d)* Vegyük észre, hogy (–2)-vel osztás után:

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldások:

$$x_1=\frac{\pi}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z};\ x_2=-\frac{\pi}{8}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$$

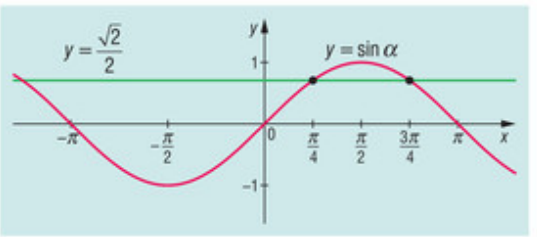



*e)* Helyettesítéssel:

$$\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldások:

$$x_1=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z};\ x_2=\frac{\pi}{5}+\frac{2n\pi}{5},\ n\in\mathbb{Z}.$$

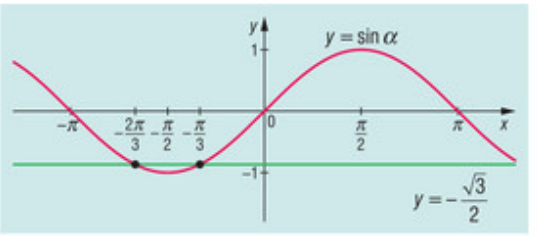



*f)* Vegyük észre, hogy 2-vel osztás után:

$$\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldások:

$$x_1=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z};\ x_2=-\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$$

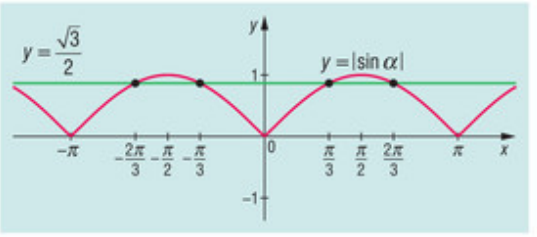



*g)* 4-gyel osztás, majd négyzetgyökvonás után:

$$\left|\sin\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)\right|=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\sin\alpha|=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldások:

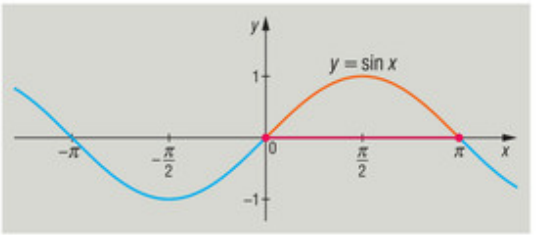
$$x_1=\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z};\ x_2=\frac{\pi}{9}+\frac{n\pi}{3},\ n\in\mathbb{Z}.$$




**2647** *a)* *B)*; *b)* *C)*; *c)* *A)*; *d)* *B)*.

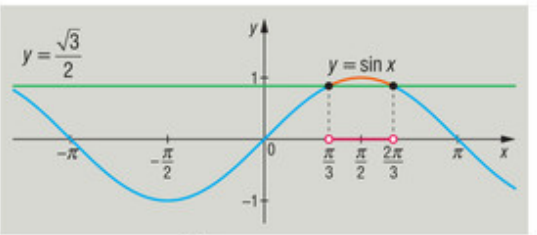
**2648** *a)* $10\pi$; *b)* $\frac{\pi}{2}$; *c)* $\frac{2\pi}{7}$; *d)* $2\pi$; *e)* $4\pi$; *f)* $\frac{2\pi}{5}$.

**2649** *a)*



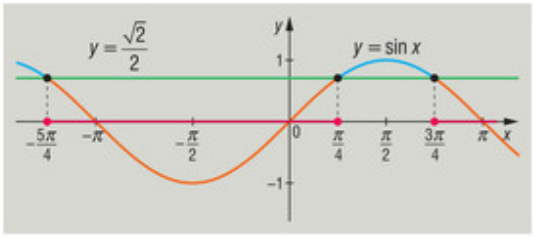

$2k\pi\le x\le\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$;

*b)*



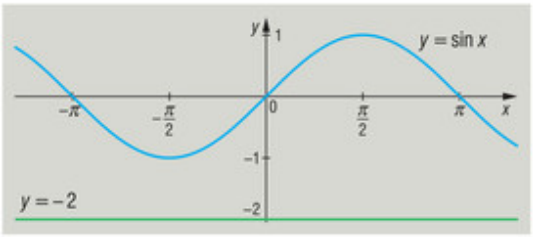

$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$;

*c)*



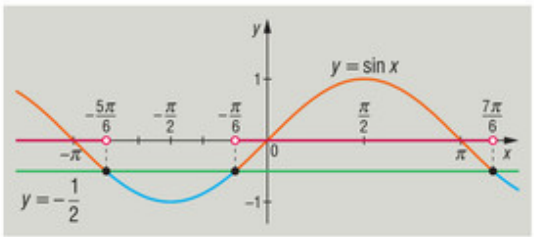

$$-\frac{5\pi}{4}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$$

*d)*




nincs megoldás, mert $-1\le\sin x\le 1$;

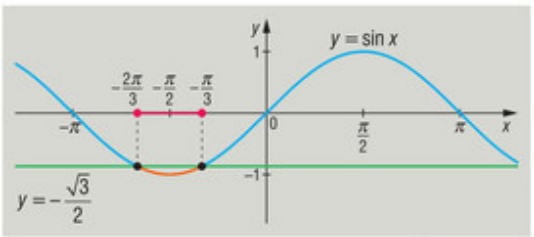
*e)*




2-vel való osztás után: $\sin x>-\frac{1}{2}$,

$$-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$$

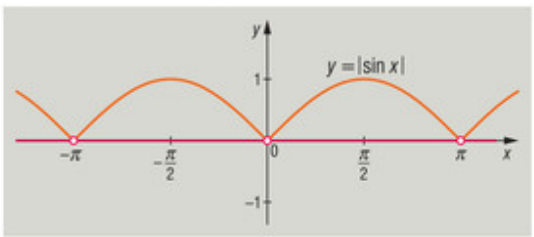
*f)*




2-vel való osztás után: $\sin x\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\le x\le-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$$

*g)*




átalakítás után: $|\sin x|>0,\ x\ne k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

**2650** *a)* Alakítsuk át az eredeti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>-1\ \Rightarrow\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vegyük észre, hogy így csak a $\sin\alpha>-\frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenlőtlenséget kell függvénygrafikonok segítségével megoldani. A grafikonok a 2646. feladat *d)* pontjában láthatók. A megoldás:

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi<\alpha<\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z},$$

amiből:

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi<x+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}+2k\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\pi+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

*b)* (–2)-vel való osztás után:

$$-2\cdot\sin\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)\le\sqrt{2}\ \Rightarrow\ \sin\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)\ge-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Grafikonnal megoldandó a $\sin\alpha\ge-\frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenlőtlenség (ld. 2646. feladat *d)* pontja).
A megoldás:

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le\alpha\le\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z},$$

amiből:

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le2x-\frac{3\pi}{2}\le\frac{5\pi}{4}+2k\pi,$$

$$\frac{5\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{11\pi}{8}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

*c)* 2-vel való osztás után:

$$2\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Grafikonnal megoldandó a $\sin\alpha<\frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlőtlenség (ld. 2649. feladat *b)* pontja).
A megoldás:

$$-\frac{4\pi}{3}+2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z},$$

amiből:

$$-\frac{4\pi}{3}+2k\pi<x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}+2k\pi,$$

$$-\frac{7\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

*d)* Hasonlóan az előző feladatokhoz:

$$-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le\alpha\le\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z},$$

amiből:

$$-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{4\pi}{3}+2k\pi,$$

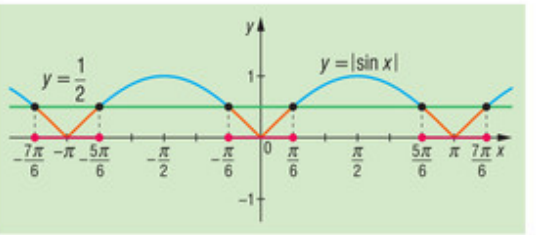
$$k\pi\le x\le\frac{5\pi}{6}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

**2651** *a)* 2-vel való osztás után:

$$|\sin x|\le\frac{1}{2}.$$

A megoldás:

$$-\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

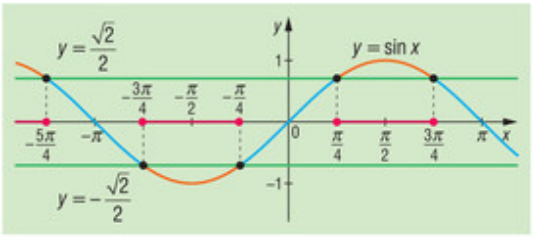


*b)* Alakítsuk át az egyenlőtlenséget:

$$\sin^2 x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

amiből:

$$\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{vagy} \quad \sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$




A megoldás:

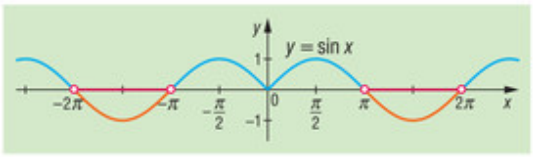
$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rövidebben:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*c)* A $\sin|x|$ felbontása:

$$\sin|x| = \begin{cases} \sin x, & \text{ha} \quad x \geq 0, \\ -\sin x, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$



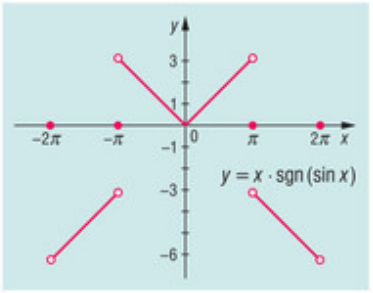

A megoldás:

$$-2\pi + 2k\pi < x < -\pi + 2k\pi, \quad k \leq 0, k \in \mathbb{Z}$$

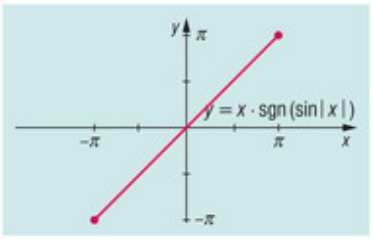
vagy

$$\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi, \quad k \geq 0, k \in \mathbb{Z}.$$

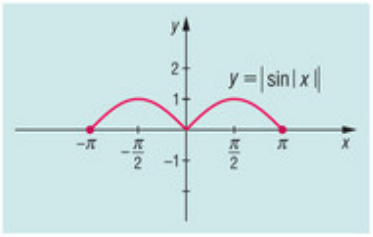
**2652** *a)* A függvény értéke a $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ helyen 0, a grafikon egyenes szakaszokból áll. Páros függvény.
$]2k\pi; (2k+1)\cdot\pi[$-ban $(k \in \mathbb{Z})$ nő,
$](2k-1)\cdot\pi; 2k\pi[$-ban $(k \in \mathbb{Z})$ csökken,
szélsőértéke nincs.




*b)* A függvény $]-\pi; \pi[$-ban nő.
Az $x = -\pi$ helyen minimuma van, értéke $-\pi$.
Az $x = \pi$ helyen maximuma van, értéke $\pi$.

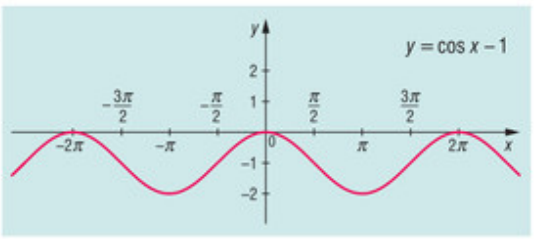



*c)* A megadott függvény páros, $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$-ben és $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$-ben nő, $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$-ban és $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$-ben csökken.
A $-\pi$; 0; $\pi$ helyen minimuma van, itt értéke 0.
A $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ helyen maximuma van, itt értéke 1.

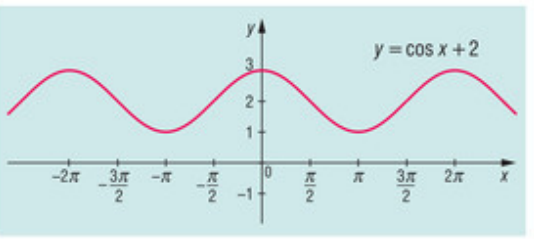


# A koszinuszfüggvény grafikonja, egyenletek, egyenlőtlenségek – megoldások

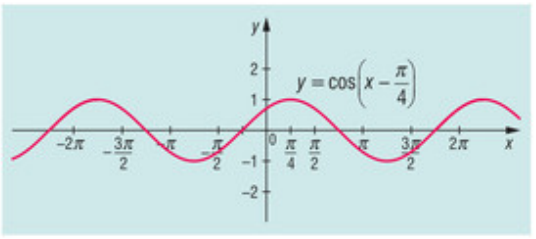
**2653** *a)*



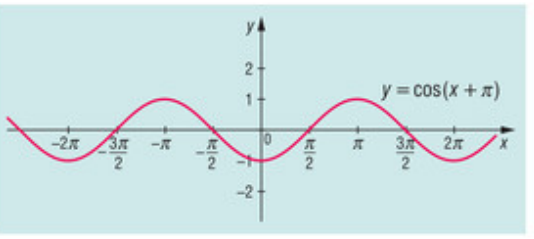

*b)*



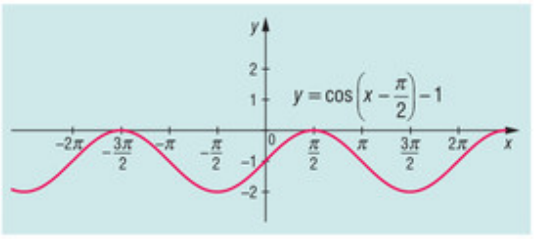

*c)*



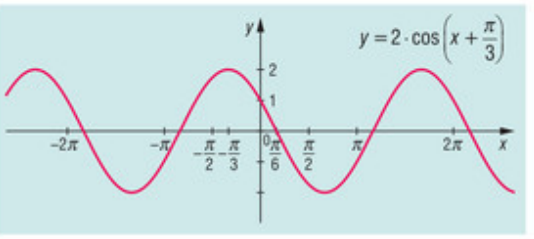

*d)*



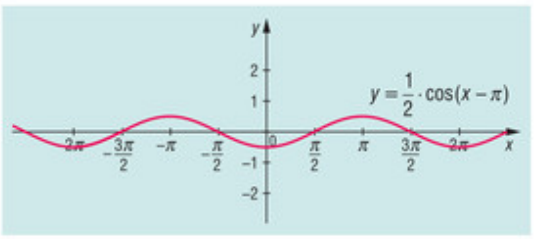

*e)*



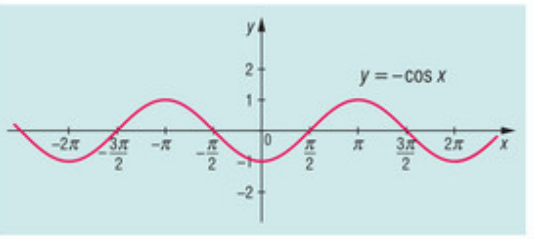

*f)*



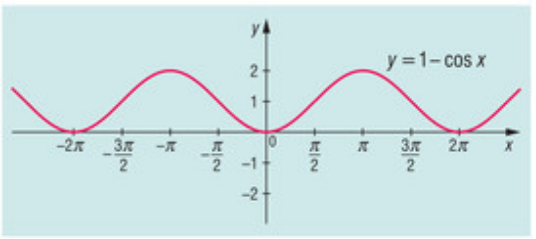

*g)*



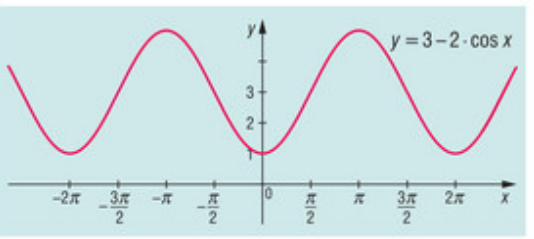

*h)*



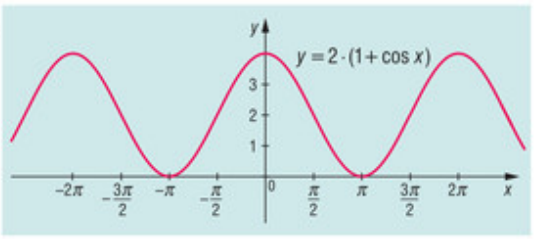

*i)*



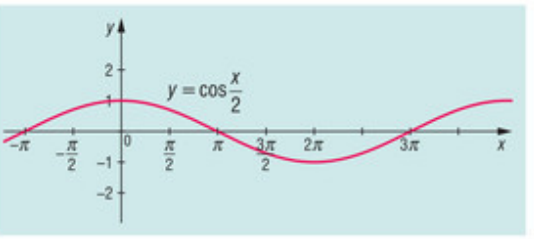

*j)*



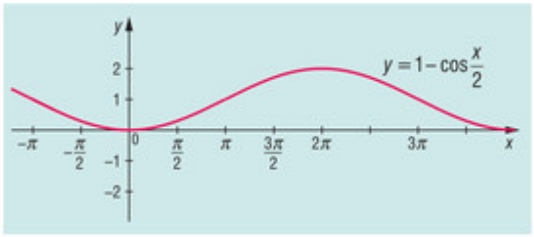

*k)*



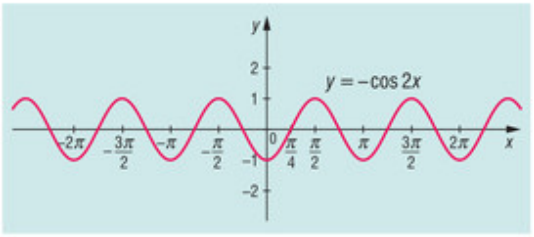

*l)*



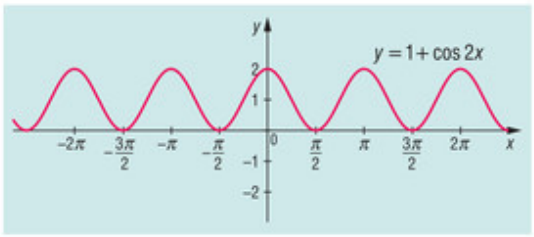
*m)*




*n)*



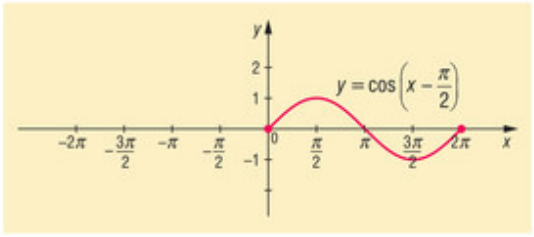

*o)*



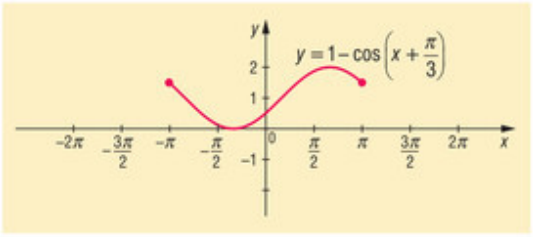

**2654** *a)* $x = \frac{\pi}{2}$; *b)* $x = -\frac{\pi}{2}$; *c)* $x = -\frac{\pi}{2}$.

**2655** *a)* $\cos 1 > \cos 1{,}5$; *b)* $\cos 1 = \cos(-1)$; *c)* $\cos 1 > \cos 3$.

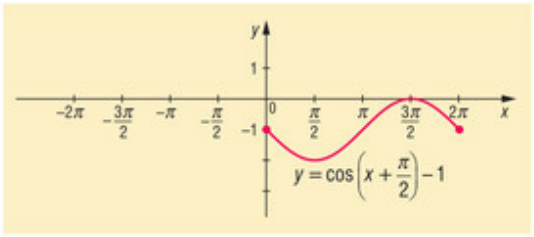
**2656** *a)*



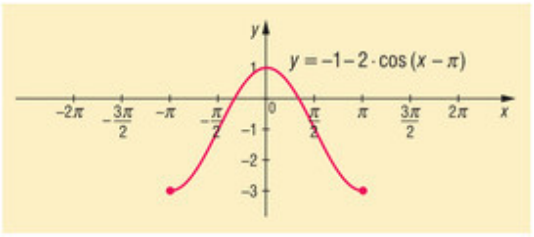

*b)*



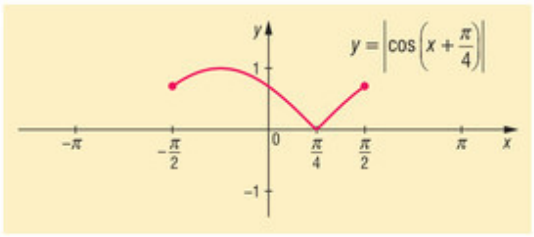

*c)*



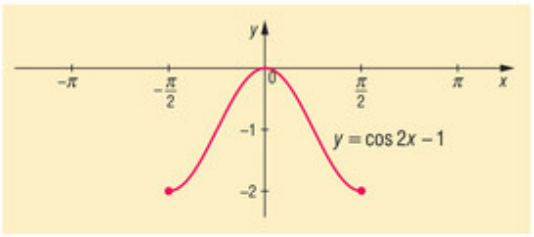

*d)*



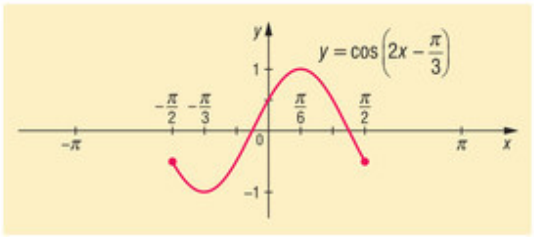

*e)*



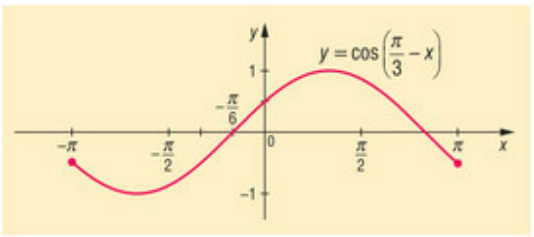

*f)*




*g)*




*h)*

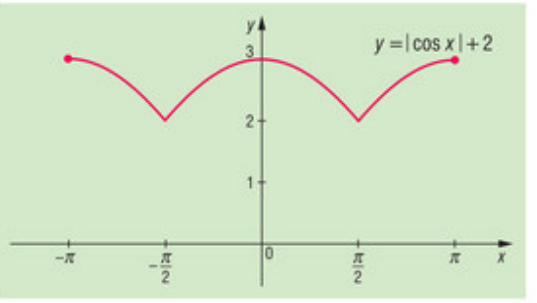


**2657** *a)* $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$-ben és $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$-ben csökken,

$\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$-ben és $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$-ben nő.

Maximuma van a $-\pi$, 0, $\pi$ helyeken, értéke 3.

Minimuma van a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ helyeken, értéke 2.

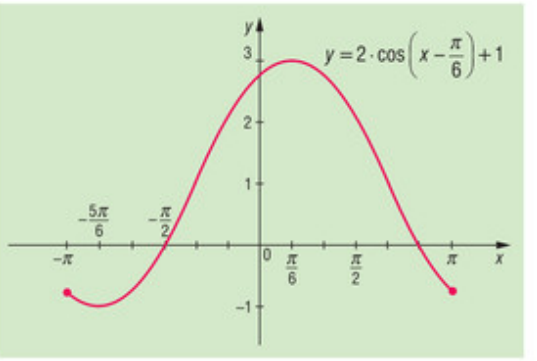



*b)* $\left[-\pi;-\frac{5\pi}{6}\right]$-ben és $\left[\frac{\pi}{6};\pi\right]$-ben csökken,

$\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$-ben nő.

Minimuma van a $-\frac{5\pi}{6}$ helyen, értéke $-1$.

Maximuma van a $\frac{\pi}{6}$ helyen, értéke 3.

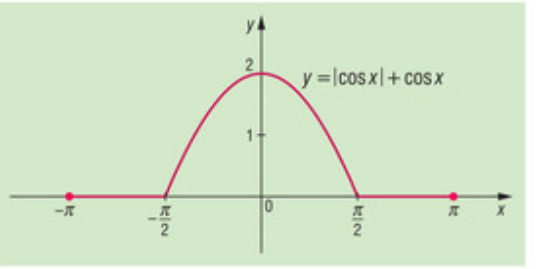



*c)* Bontsuk fel az abszolút értéket:

$$|\cos x| + \cos x = \begin{cases} 2 \cdot \cos x, & \text{ha} \quad \cos x \geq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad \cos x < 0. \end{cases}$$

$\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$-ben és $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$-ben konstans,

$\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$-ben nő, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$-ben csökken.




Minimuma van a $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$-ben és $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$-ben, értéke 0, maximuma van $x = 0$ helyen, értéke 2.

**2658** Például:

*a)* $\alpha = 45°, 315°, 405°$;

*b)* $\alpha = 150°, 210°, 510°$;

*c)* $\alpha = 320°, 400°, 680°$;

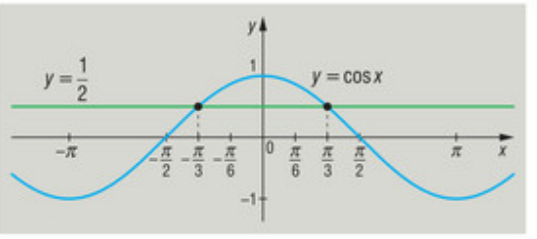
*d)* $\alpha = 230°, 490°, 590°$.

**2659** *a)* $x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Rövidebben: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

*b)* Hasonlóan az *a)* feladathoz:

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.




*c)* $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

*d)* $x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Rövidebben: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

*e)* $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Rövidebben: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

*f)* Nincs megoldás.

*g)* Nincs megoldás.

*h)* Átalakítás után: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Megoldások: $x_1 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.
Rövidebben: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

*i)* Átalakítás után: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Megoldások: $x_1 = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.
Rövidebben: $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

*j)* $x_1 = -70{,}53° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = 70{,}53° + n \cdot 360°,\ n \in \mathbb{Z}$.
Rövidebben: $x = \pm 70{,}53° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$.

*k)* $x_1 = -66{,}42° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = 66{,}42° + n \cdot 360°,\ n \in \mathbb{Z}$.
Rövidebben: $x = \pm 66{,}42° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$.

**2660** *a)* A függvény grafikonja a 2653. feladat *c)* pontjában látható. A megoldás:

$$x \in \left]-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right[,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

*b)* A függvény grafikonja a 2653. feladat *h)* pontjában látható. A megoldás:

$$x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

*c)* A függvény grafikonja a 2653. feladat *l)* pontjában látható. A megoldás:

$$x \in \left]-\pi + 4k\pi;\ \pi + 4k\pi\right[,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

*d)* A függvény grafikonja a 2653. feladat *k)* pontjában látható. A megoldás:

$$x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq -\pi + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

**2661** Az egyenleteket a 2646. feladathoz hasonlóan lehet megoldani.

*a)* Helyettesítsünk $2x = \alpha$-t, így a $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ egyenletet kell megoldanunk. A megoldások:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = \frac{5\pi}{3} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

*b)* Az *a)* feladathoz hasonlóan $\alpha = 2x + 60°$ helyettesítéssel a megoldások:

$$\alpha_1 = 60° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = 300° + l \cdot 360°,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = 120° + l \cdot 180°,\ l \in \mathbb{Z}.$$

*c)* Az *a)* feladathoz hasonlóan $\alpha = 3x - \frac{\pi}{3}$ helyettesítéssel a megoldások:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{\pi}{36} + \frac{2l\pi}{3},\ l \in \mathbb{Z}.$$

*d)* Az *a)* feladathoz hasonlóan $\alpha = 2x - \frac{\pi}{6}$ helyettesítéssel a megoldások:

$$\alpha_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

*e)* $(-2)$-vel való osztás és $\alpha = 5x - \frac{\pi}{4}$ helyettesítéssel a megoldások:

$$\alpha_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = -\frac{\pi}{10} + \frac{2l\pi}{5},\ l \in \mathbb{Z}.$$

*f)* 2-vel való osztás és $\alpha = 2x - \frac{3\pi}{4}$ helyettesítéssel a megoldások:

$$\alpha_1 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

*g)* 4-vel való osztás után:

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow |\cos x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2}.$$

Mind a négy síknegyedben keressünk megoldást:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{2\pi}{3} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

*h)* $\alpha = 2x + \frac{\pi}{2}$ helyettesítéssel:

$$\cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow |\cos \alpha| = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm 1.$$

A megoldások:

$$\alpha_1 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = \pi + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

*i)* 4-gyel való osztás és $\alpha = 3x - \frac{\pi}{2}$ helyettesítés után:

$$\cos^2\alpha = \frac{3}{4} \Leftrightarrow |\cos\alpha| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mivel mind a négy síknegyedben keresünk megoldást:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad \alpha_2 = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha_3 = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_4 = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z},$$

amiből:

$$x_1 = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}, \qquad x_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{2l\pi}{3},\ l \in \mathbb{Z},$$

$$x_3 = \frac{4\pi}{9} + \frac{2m\pi}{3},\ m \in \mathbb{Z}, \quad x_4 = \frac{5\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Egyszerűbben:

$$x_1 = \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{4\pi}{9} + \frac{l\pi}{3},\ l \in \mathbb{Z}.$$

*j)* Hasonlóan az előző feladathoz:

$$x_1 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z},$$

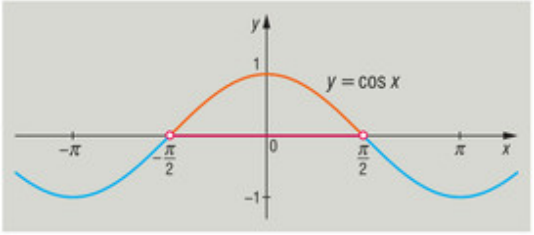
$$x_3 = \frac{9\pi}{4} + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}, \quad x_4 = \frac{11\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Egyszerűbben:

$$x_1 = \frac{7\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{9\pi}{4} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

**2662** *a)* A megoldás:

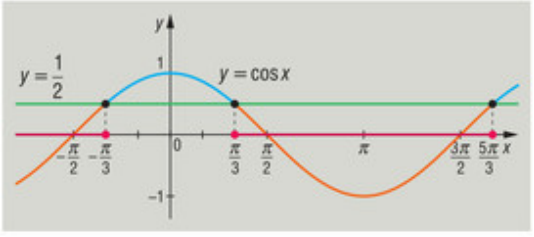
$$x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}.$$




*b)* Mindig teljesül, mert $-1 \le \cos x \le 1$.

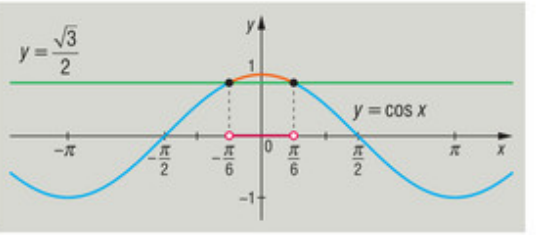
*c)* A megoldás:

$$x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right],\ k \in \mathbb{Z}.$$



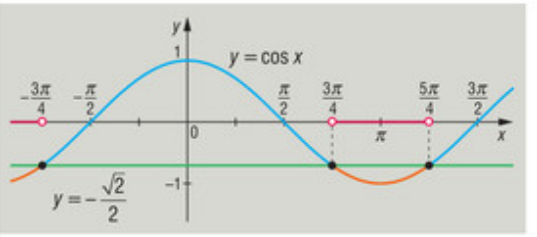
*d)* A megoldás:

$$x \in \left]-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$




*e)* A megoldás:

$$x \in \left]\frac{3\pi}{4}+2k\pi;\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

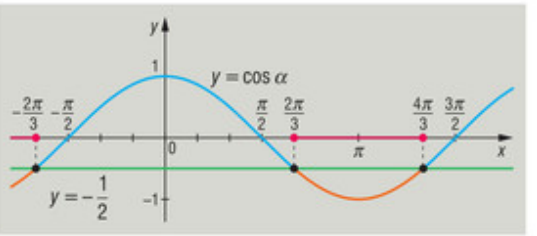



*f)* Helyettesítéssel:

$$\cos 2x \le -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha \le -\frac{1}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldás:

$$x \in \left[\frac{\pi}{3}+k\pi;\frac{2\pi}{3}+k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

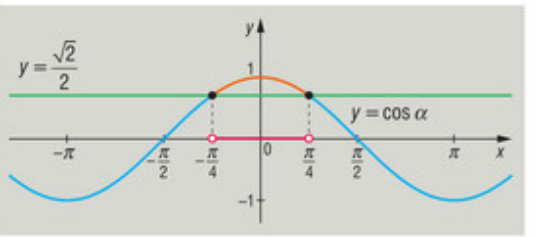



*g)* 2-vel osztva és helyettesítve:

$$2\cdot\cos\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)>\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha>\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldás:

$$x \in \left]\frac{5\pi}{8}+k\pi;\frac{7\pi}{8}+k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

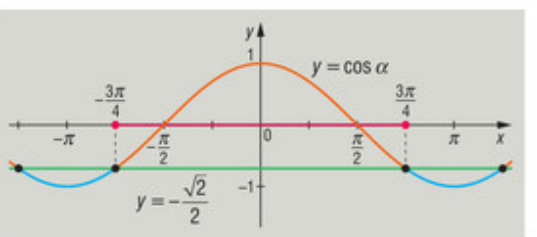



*h)* 2-vel osztva és helyettesítve:

$$2\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\ge-\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha\ge-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Visszahelyettesítés után a megoldás:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3};\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$




*i)* Használjuk ki, hogy $\cos x$ páros függvény:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\left[-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

Helyettesítéssel tehát a $\cos\alpha>\frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget kapjuk.

A *c)* pont grafikonja alapján visszahelyettesítés után a megoldás:

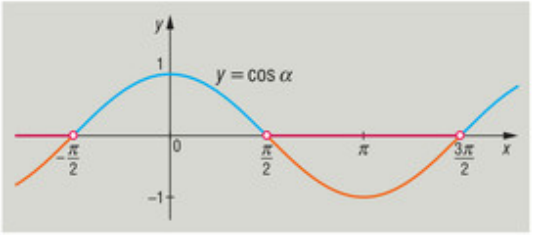
$$x \in \left]2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*j)* Helyettesítéssel:

$$\cos 4x < 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha < 0.$$

Visszahelyettesítés után a megoldás:

$$x \in \left]\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$




**2663** Mivel a szinusz- és koszinuszfüggvény értéke abszolút értékben 1-nél nem nagyobb, ezért:

$$\sin^6 x \le \sin^2 x \quad \text{és} \quad \cos^6 x \le \cos^2 x.$$

Így azt kaptuk, hogy

$$f(x) \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Az $f$ értéke akkor 1, ha $|\sin x| = 1$ vagy $|\cos x| = 1$, tehát $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ esetén.

**2664** A megoldás: $f(-x) = -\sin x - \sin^3 x - 5 \cdot \cos x \cdot \sin 2x = -f(x)$.

**2665** A megoldás: $f(-x) = f(x)$.

**2666** *a)* Használjuk fel, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$(1 - \cos^2 x) - |\cos x| < \frac{1}{4},$$

$$4 - 4 \cdot \cos^2 x - 4 \cdot |\cos x| < 1,$$

$$4 \cdot \cos^2 x + 4 \cdot |\cos x| - 3 > 0,$$

$$4 \cdot |\cos x|^2 + 4 \cdot |\cos x| - 3 > 0.$$

Legyen $p = |\cos x|$. Ekkor $4p^2 + 4p - 3 > 0$, ahonnan $p < -\frac{3}{2}$ vagy $p > \frac{1}{2}$.

Visszahelyettesítve: $|\cos x| < -\frac{3}{2}$ vagy $|\cos x| < \frac{1}{2}$. Csak ez utóbbinak van megoldása:

$$-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

*b)* A nevező miatt $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Alakítsuk át az egyenlőséget:

$$\frac{5 - 4 \cdot \sin^2 x}{\cos x} \le 4,$$

$$\frac{5 - 4 \cdot \sin^2 x - 4 \cdot \cos x}{\cos x} \le 0,$$

$$\frac{5 - 4 \cdot (1 - \cos^2 x) - 4 \cdot \cos x}{\cos x} \le 0,$$

$$\frac{5 - 4 + 4 \cdot \cos^2 x - 4 \cdot \cos x}{\cos x} \le 0,$$

$$\frac{4 \cdot \cos^2 x - 4 \cdot \cos x + 1}{\cos x} \le 0,$$

$$\frac{(2 \cdot \cos x - 1)^2}{\cos x} \le 0.$$

A kapott hányados számlálója nemnegatív.

A hányados akkor 0, ha a számlálója nulla, azaz ha $2 \cdot \cos x - 1 = 0$, amiből $\cos x = \frac{1}{2}$. Ekkor a megoldások:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

A hányados negatív, ha a nevezője negatív, azaz ha $\cos x < 0$. Ekkor a megoldás:

$$\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

**2667** Az ábrázolt függvények hozzárendelési szabályai:

$$a(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1; \quad b(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2; \quad c(x) = 2 \cdot \sin 2x; \quad d(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\frac{1}{2} \cdot x.$$

**2668** Akkor értelmezett az egyenlőség, ha $x \neq 0$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$2 \cdot \cos y \cdot x = x^2 + 1,$$
$$x^2 - 2 \cdot \cos y \cdot x + 1 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet megoldásai:

$$x_{1,2} = \frac{2 \cdot \cos y \pm \sqrt{4 \cdot \cos^2 y - 4}}{2} = \frac{2 \cdot \cos y \pm 2 \cdot \sqrt{\cos^2 y - 1}}{2} = \cos y \pm \sqrt{-\sin^2 y}.$$

Ez akkor, és csak akkor létezik valós $x$-re, ha $\sin y = 0$, vagyis $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ha $y = 2n\pi$, akkor $x = 1$; ha $y = (2n + 1) \cdot \pi$, akkor $x = -1$.

A keresett számpárok tehát:

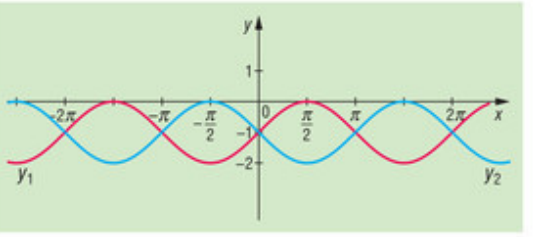
$$(1; 2n\pi) \quad \text{és} \quad (-1; (2n + 1) \cdot \pi),\ n \in \mathbb{Z}.$$

**2669** Használjuk a megoldóképletet:

$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \cos^2\alpha}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - \cos^2\alpha}.$$

A megoldások tehát:

$$y_1 = -1 + \sin\alpha \quad \text{és} \quad y_2 = -1 - \sin\alpha.$$




**2670** A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát így alakíthatjuk át:

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x \cdot (\cos x - \sin x)} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)} = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)}.$$

Ha $0 < x < \frac{\pi}{4}$, akkor $0 < \operatorname{tg} x < 1$, ezért $\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x > 2$, és a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján $0 < \operatorname{tg} x \cdot (1 - \operatorname{tg} x) \leq \frac{1}{4}$, ezzel ekvivalens: $\frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)} \geq 4$.

Ezek alapján:

$$\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)} > 8.$$

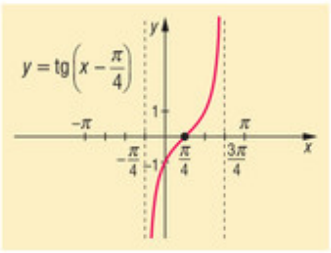
**2671** Mivel $\cos^2 x \le 1$ és $\cos 2x \le 1$ minden $k \in \mathbb{R}$ esetén:

$$2 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \cos 2x \le 5.$$

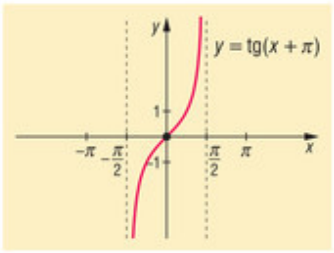
**2672** Mivel az egyenlőség bal oldalán $\sin 2x \le 1$ és $\cos x \le 1$, ezért $4 \cdot \sin 2x + \cos x \le 5$, az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $\sin 2x = 1$ és $\cos x = 1$. Ez a két feltétel egyszerre nem teljesül, hiszen ha $\cos x = 1$, akkor $\sin x = 0$, és így $\sin 2x = 0$. Az egyenletnek tehát nincs valós gyöke.

## A tangens- és kotangensfüggvény – megoldások

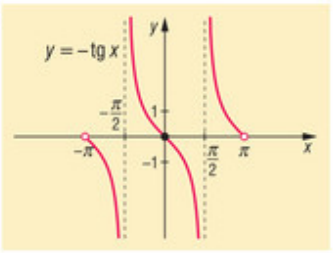
**2673** *a)*



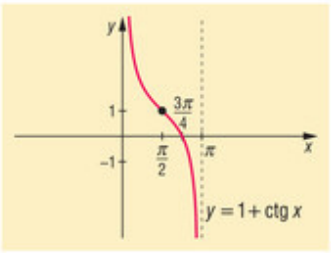

*b)*



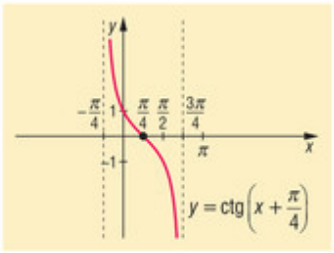

*c)*



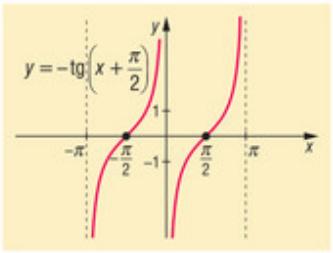

*d)*



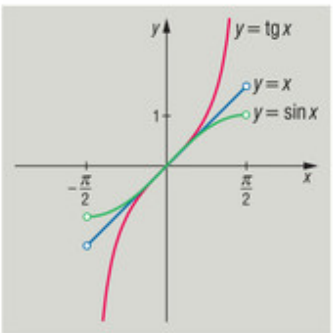

*e)*




*f)*




**2674** A három függvény grafikonja az ábrán látható.



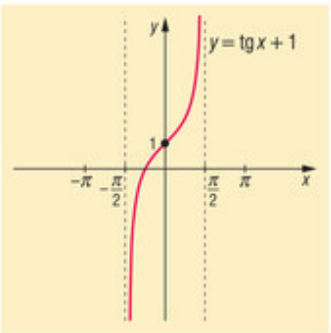

**2675** *a)* $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

*b)* $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

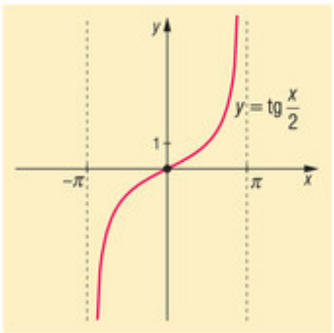
*c)* $\frac{3\pi}{4} + k\pi < x < \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

*d)* $k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

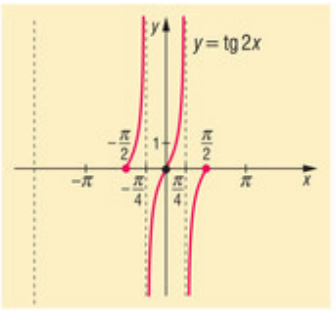
**2676** *a)*



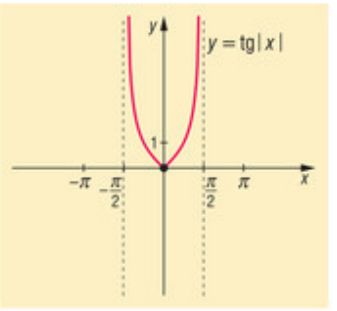

*b)*



*c)*

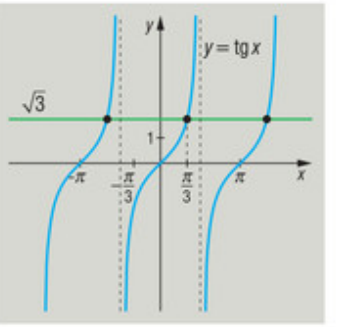



*d)*




**2677** *a)* A megoldások:

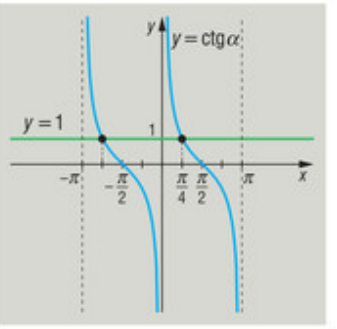
$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$




*b)* Ábrázoljuk a függvényt az $\alpha = \frac{\pi}{3} - x$ helyettesítéssel.

Visszahelyettesítés után a megoldások:

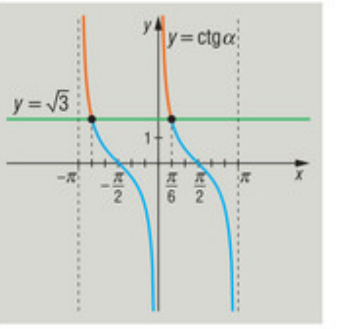
$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$




*c)* Ábrázoljuk a függvényt az $\alpha = x - \frac{\pi}{3}$ helyettesítéssel.

Visszahelyettesítés után a megoldások:

$$\frac{\pi}{3} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$



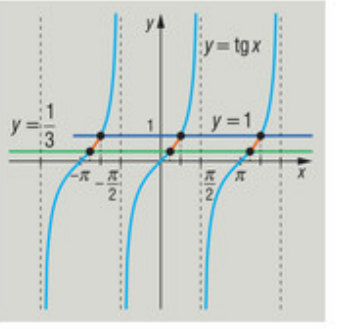

*d)* Alakítsuk át a bal oldalt:

$$3 \cdot \mathrm{tg}^2 x - 4 \cdot \mathrm{tg}\, x + 1 = (3 \cdot \mathrm{tg}\, x - 1) \cdot (\mathrm{tg}\, x - 1) < 0.$$

Tényezőnként keressük meg a zérushelyeket, majd tartsunk előjelvizsgálatot.

A megoldások:

$$0{,}32 + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$



**2678** *a)* $k\cdot\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

*b)* $-2\pi + 4k\pi < x < 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

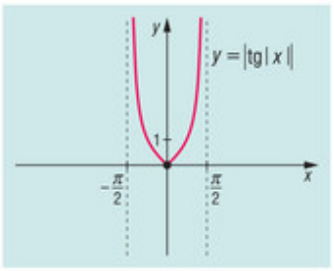
*c)* $-\frac{\pi}{12} + k\pi \le x < \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

*d)* $\frac{\pi}{4} + k\pi < x \le \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

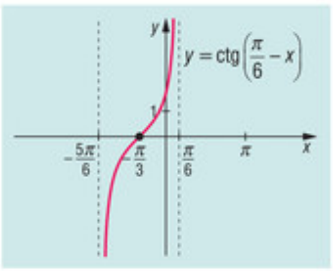
*e)* $-\frac{\pi}{2} + k\pi \le x < -\frac{\pi}{4} + k\pi$ és $\frac{\pi}{4} + k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

*f)* $\frac{\pi}{6} + k\pi \le x \le \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

**2679** *a)* A függvény $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$-ban csökken, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$-ben nő, a 0 helyen minimuma van, értéke itt 0.




*b)* A függvény $\left]-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right[$-ban nő, a 0 értéket $-\frac{\pi}{3}$-nál veszi fel.




**2680** A függvény legkisebb értéke 2, ezt az $x = \frac{\pi}{4}$-nél veszi fel, legnagyobb értéke nincs.

*Megjegyzés:* $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \ge 2$, mivel $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$-on a $\operatorname{tg} x$ pozitív.

**2681** *a)* A bal oldal értéke minden $x$-re 1, így az egyenlet ekvivalens a következővel: $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, azaz $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

*b)* $\frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{8} + k\cdot\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

*c)* $\frac{\pi}{8} + k\cdot\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} + k\cdot\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

*d)* $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

**2682** Mivel $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ esetén $\operatorname{tg} x \ge 0$, és $\operatorname{tg} x$ szigorúan nő, ezért kiemelés után:

$$2\cdot\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x\cdot(2 - \operatorname{tg} x).$$

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\operatorname{tg} x + (2 - \operatorname{tg} x)}{2} \ge \sqrt{\operatorname{tg} x\cdot(2 - \operatorname{tg} x)},$$

$$1 \ge \operatorname{tg} x\cdot(2 - \operatorname{tg} x).$$

Az egyenlőség csak akkor igaz, ha $\operatorname{tg} x = 2 - \operatorname{tg} x$, azaz $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4}$.

Ha $\operatorname{tg} x > 2$, akkor $2\cdot\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x < 0$.

Így a függvény legnagyobb értéke 1, és ezt $x = \frac{\pi}{4}$-nél veszi fel.

**2683** Alakítsuk át az $f$-et definiáló kifejezést, bővítsük a törtet $\sin x$-szel:

$$\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x} = \frac{\left(\sin x + \dfrac{\sin x}{\cos x}\right) \cdot \sin x}{\left(\cos x + \dfrac{\cos x}{\sin x}\right) \cdot \sin x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}.$$

Mivel az értelmezési tartományban $0 < |\cos x|, |\sin x| < 1$, $\cos x$ és $\sin x$ korlátossága miatt mindkét tört számlálója és nevezője pozitív, tehát $f$ értéke pozitív.

**2684** A $\operatorname{tg} x$ miatt $\cos x \neq 0$. A megadott értelmezési tartományban $\cos x$ pozitív, ezért:

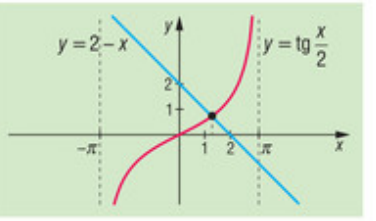
$$1 - \cos x < \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x,$$

$$\cos x \cdot (1 - \cos x) < \sin x \cdot (1 - \cos x).$$

Mivel az adott értelmezési tartományban $(1 - \cos x) > 0$, így egyszerűsítés után a $\cos x < \sin x$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ennek megoldása az adott intervallumon:

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}.$$

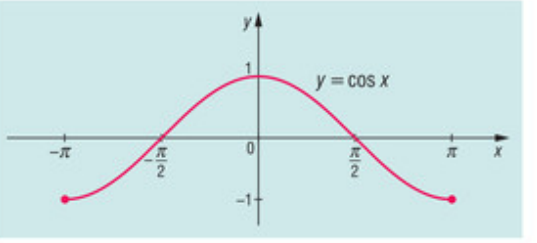
**2685** Ábrázoljuk $]-\pi; \pi[$-ben az $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ és $g(x) = 2 - x$ függvényeket.



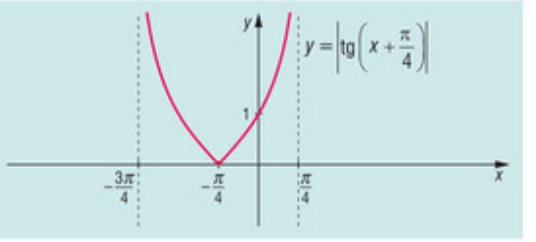

Az ábráról leolvasható, hogy a keresett gyök 1,2 és 1,3 között van, zsebszámológép használatával eljuthatunk az $x \approx 1{,}27$ értékhez.

## Összetett feladatok és alkalmazások – megoldások

**2686** *a)* A szinuszfüggvény pótszöges összefüggéséből látható, hogy $g(x) = \cos x$, $x \in [-\pi; \pi]$.
A függvény $[-\pi; 0]$-ban nő, $[0; \pi]$-ban csökken.
Minimuma van a $-\pi$ és $\pi$ helyen, értéke $-1$.
Maximuma van az $x = 0$ helyen, értéke 1.




*b)* A függvény $\left]-\dfrac{3\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}\right]$-ban csökken, majd $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right[$-ban nő.
Minimuma van az $x = -\dfrac{\pi}{4}$ helyen, értéke 0.




**2687** *a)* Mivel $|\sin x| \leq 1$, $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, így $1 \leq \sin^2 x + 1 \leq 2$.
Az $f$ minimális értéke 1, ezt az $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ alakú helyeken veszi fel.
Az $f$ maximális értéke 2, ezt a $\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ alakú helyeken veszi fel.

*b)* Átalakítás után: $g(x) = 3 + \cos^2 x$, tehát $3 \leq g(x) \leq 4$, hiszen $0 \leq \cos^2 x \leq 1$, ha $x \in \mathbb{R}$.

**2688** A $\cos x$-re másodfokú egyenlet egyik gyöke $\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}>1$, ez nem lehet koszinuszérték, a másik gyök $\frac{\sqrt{3}}{3}$, ez már lehet egy szám koszinusza.

A megoldások: $x_1 = 0{,}96 + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ és $x_2 = 5{,}33 + 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

**2689** *a)* $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ x_2 = \frac{\pi}{8} + n\cdot\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.

*b)* $x_1 = -\frac{\pi}{3} + 4k\cdot\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z},\ x_2 = -\frac{\pi}{5} + 4n\cdot\frac{\pi}{5},\ n\in\mathbb{Z}$.

*c)* $x_1 = k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2n\cdot\frac{\pi}{6},\ n\in\mathbb{Z}$.

*d)* $x_1 = k\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z},\ x_2 = n\cdot\frac{\pi}{4},\ n\in\mathbb{Z}$.

**2690** Azonos átalakításokkal az egyenlet így írható:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x = 1.$$

Kivonva az 1-et, és tudva, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, kapjuk:

$$-2\cdot\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x) = 0 \iff 2\cdot\sin^2 x\cdot(\sin^2 x - 1) = 0.$$

Ez akkor teljesülhet, ha $\sin x = 0$ vagy $|\sin x| = 1$. Így a megoldások:

$$x_1 = k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ x_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 2l\pi,\ l\in\mathbb{Z};\ \text{rövidebben: } x = k\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

**2691** Az egyenlet így írható:

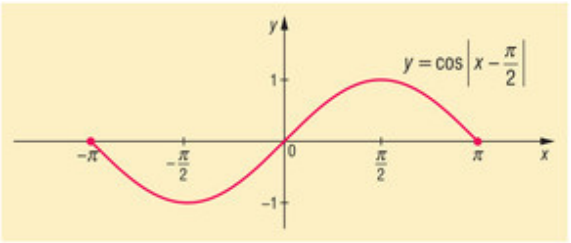
$$6\cdot\sin^2 x - 11\cdot\sin x + 4 = 0.$$

Ebből csak $\sin x = 0{,}5$ jöhet szóba megoldásként, és így

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$$

**2692** A függvény átírható a következő alakra:

$$\cos\left|x-\frac{\pi}{2}\right| = \begin{cases}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x, \text{ ha } \frac{\pi}{2}\le x\le\pi;\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x, \text{ ha } -\pi\le x\le\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$




**2693** *a)* Ekvivalens átalakítást végzünk:

$$\sqrt{3}\cdot\cos x > 1 - \sin x.$$

Mivel az $1-\sin x\ge 0$ (hiszen $-1\le\sin x\le 1$), ezért az egyenlőtlenség bal oldalának határozottan pozitívnak kell lennie (az egyenlőséget a feladat nem engedi). Vagyis $\cos x > 0$, tehát

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Négyzetre emelés után:

$$0 > 2\cdot\sin^2 x - \sin x - 1,$$

aminek a megoldása:

$$-0{,}5 < \sin x < 1,\ x\ne\frac{\pi}{2} + k\pi,\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Tehát az egyenlőtlenség megoldása:

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

*b)* Felismerve, hogy a bal oldal $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ és $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, az egyenlet $\sin x$-szel való osztása után a következő alakban írható fel:

$$\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \operatorname{ctg} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \operatorname{tg} x=\sqrt{2}.$$

Ebből

$$x=0{,}96+k\pi.$$

**2694** Alakítsuk át a függvény hozzárendelési szabályát:

$$f(x)=\sin^2 x-\sin x-2\cdot\cos^2 x=\sin^2 x-\sin x-2\cdot(1-\sin^2 x)=$$
$$=3\cdot\sin^2 x-\sin x-2=(\sin x-1)\cdot(3\cdot\sin x+2).$$

Így a függvény zérushelyét a $(\sin x-1)\cdot(3\cdot\sin x+2)=0$ egyenlet adja. Ebből $\sin x=1$, vagy $\sin x=-\frac{2}{3}$, azaz $x_1=\frac{\pi}{2}$ vagy $x_2=3{,}87+2k\pi$, $x_3=5{,}55+2n\pi$, $k, n\in\mathbb{Z}$.

A $[-\pi;\pi]$-ba eső zérushelyek: $x_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=-0{,}73$, $x_3=-2{,}41$.

**2695** Mivel $\sin x+\cos x$ legnagyobb értéke $\sqrt{2}$, ezért a nevező $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ mindig pozitív. Az egyenlőtlenség tehát akkor és csak akkor teljesül, ha a számláló pozitív:

$$\sin^2 x-\frac{1}{4}>0,$$
$$|\sin x|>\frac{1}{2}.$$

A megoldás:

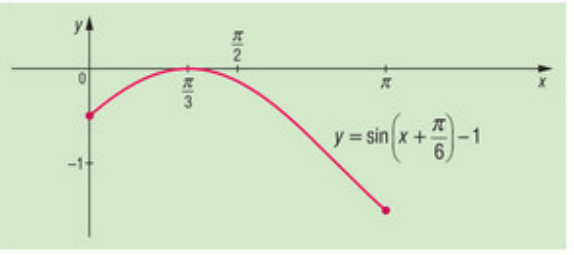
$$\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

**2696** Mivel $0\le x\le\pi$ esetén $0<x+\frac{\pi}{6}$, ezért:

$$\left|x+\frac{\pi}{6}\right|=x+\frac{\pi}{6},$$

tehát

$$\sin\left|x+\frac{\pi}{6}\right|-1=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1.$$




**2697** Az egyenlet így írható $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ helyettesítés és $(-1)$-gyel való beszorzás után:

$$\sin^2 x-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\sin x+\frac{\sqrt{3}}{4}=0.$$

A megoldóképletet alkalmazva:

$$(\sin x)_{1,2}=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}\pm\frac{\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}{2}}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}\pm\frac{|1-\sqrt{3}|}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1\pm(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

Tehát a megoldások:

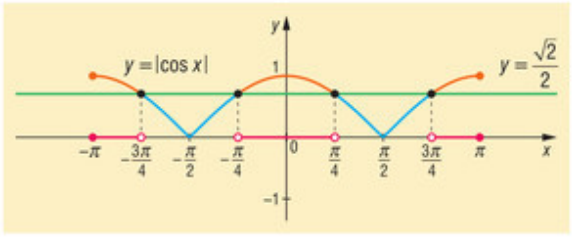
$$\sin x=\frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy a $[-\pi;\pi]$ intervallumban az egyenletnek 4 gyöke van.

**2698** A $\cos^2 x - \frac{1}{2} > 0$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha $|\cos x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

A grafikonról leolvasható a megoldás:

$$-\pi \le x < -\frac{3\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} < x \le \pi.$$




**2699** *a)* Értelmezési tartomány: $\sin x \neq 0$, azaz $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin x \cdot \operatorname{ctg} x = 0,$$
$$\sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 0,$$
$$\cos x = 0,$$
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

*b)* A $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{ctg} x$ értelmezési tartománya miatt $\sin x \neq 0$ és $\cos x \neq 0$. A feladatnak nincs megoldása.

*c)* Értelmezési tartomány: $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$3 \cdot \operatorname{ctg} x = 2 \cdot \cos x,$$
$$3 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \cdot \cos x,$$
$$\cos x = 0,$$
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\cos x \neq 0$, akkor nincs megoldás, mert a következőt kapjuk: $\frac{3}{\sin x} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} = \sin x$.

*d)* $\cos x = 0$ esetén nincs megoldás, mert ekkor $\sin x = 1$, így:

$$\sqrt{3} \cdot \sin x = 3 \cdot \cos x,$$
$$\sqrt{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 3,$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{\sqrt{3}},$$
$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

*e)* Értelmezési tartomány: a tangens miatt $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, és a nevező miatt $\sin x \neq 0$, azaz $x \neq l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x},$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x},$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos x,$$

amiből a megoldások:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi, \; l \in \mathbb{Z}.$$

*f)* Ha $\cos x = 0$, akkor nincs megoldás, ezért oszthatunk $\cos x$-szel:

$$\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x = 0,$$

$$1 + \sqrt{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

*g)* Az egyenlet átalakítása:

$$\cos^3 x = \cos^2 x,$$

$$\cos^3 x - \cos^2 x = 0,$$

$$\cos^2 x \cdot (\cos x - 1) = 0.$$

A kapott szorzat akkor lesz 0, ha $\cos x = 0$ vagy $\cos x - 1 = 0$:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\quad x_2 = 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

**2700** A függvényt értelmező képlet első tényezője $\pi$ szerint, második tényezője $4\pi$ szerint periodikus, így a szorzat periódusa $4\pi$.

**2701** Az egyenletnek a valós számok körében nincs megoldása, mert azonos átalakítással a következő alakra hozható:

$$(x^2 + 2)^2 = -\cos^2 y.$$

A bal oldal $2^2$-nél nem kisebb, a jobb oldal pedig nem pozitív.

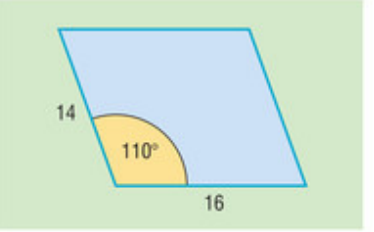
**2702** A jobb oldal így írható: $2 - (y - 3)^2 \le 2$, és az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $y = 3$.

A bal oldalon $\operatorname{tg} x > 0$, $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, így $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \ge 2$, és az egyenlőség csak akkor igaz, ha $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4}$.

## Geometriai alkalmazások – megoldások

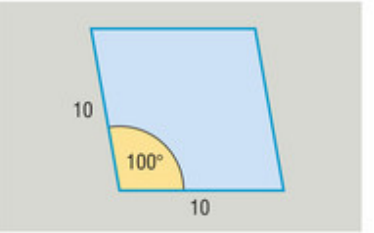
**2703** Alkalmazzuk a tanult képletet:

$$t = 14 \cdot 16 \cdot \sin 110° = 14 \cdot 16 \cdot \sin 70° \approx 210{,}5.$$




**2704** Itt is a paralelogramma területképlete vezet eredményre:

$$t = 10 \cdot 10 \cdot \sin 100° = 100 \cdot \sin 80° \approx 98{,}5.$$



**2705** A háromszög köré írt kör sugarának kiszámítása:

$$b = 2 \cdot R \cdot \sin\beta, \quad \text{azaz} \quad 8 = 2 \cdot R \cdot \sin 71{,}36^\circ,$$

amiből

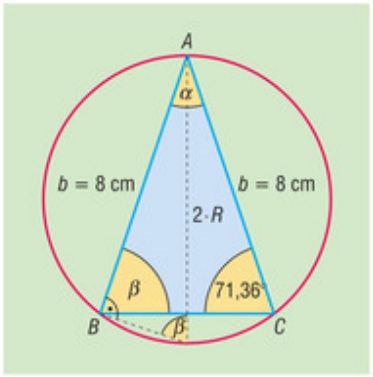
$$R = 4{,}22 \text{ cm}.$$

A hiányzó szög:

$$\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 71{,}36^\circ = 37{,}28^\circ.$$

A háromszög területe:

$$t = \frac{b \cdot b \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{64 \cdot \sin 37{,}28^\circ}{2} = 19{,}38 \text{ cm}^2.$$




**2706** *a)* A szabályos nyolcszög középponti szöge: $360^\circ : 8 = 45^\circ$, így:

$$T_\triangle = \frac{R \cdot R \cdot \sin 45^\circ}{2}, \quad T_{\text{nyolcszög}} = 8 \cdot T_\triangle.$$

Kétféleképpen felírva egy kis háromszög területetét:

$$\frac{R \cdot R \cdot \sin 45^\circ}{2} = \frac{R \cdot a \cdot \sin 67{,}5^\circ}{2},$$

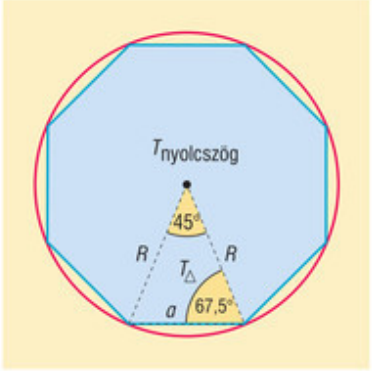
$$R \cdot 0{,}7071 = 10 \cdot 0{,}9239,$$

$$R = 13{,}07 \text{ dm}.$$

Ebből kapjuk, hogy:

$$T_\triangle = 60{,}4 \text{ dm}^2 \text{ és } T_{\text{nyolcszög}} = 483{,}2 \text{ dm}^2.$$

Tehát a nyolcszög köré írható kör sugara 13,07 dm, a nyolcszög területe pedig 483,2 dm$^2$.




*b)* A szabályos ötszög középponti szöge: $360^\circ : 5 = 72^\circ$.

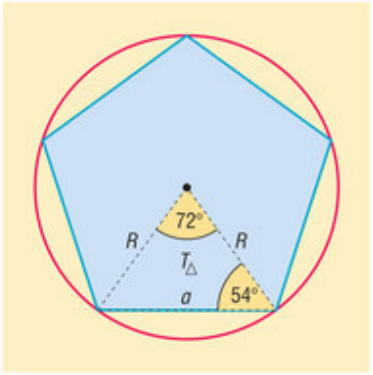
Kétféleképpen felírva egy kis háromszög területetét:

$$\frac{R \cdot R \cdot \sin 72^\circ}{2} = \frac{R \cdot a \cdot \sin 54^\circ}{2},$$

$$R \cdot 0{,}9510 = 10 \cdot 0{,}8090,$$

$$R = 8{,}5 \text{ cm}.$$

Tehát 8,5 cm sugarú körbe írhatunk egy 10 cm-es oldalú szabályos ötszöget.

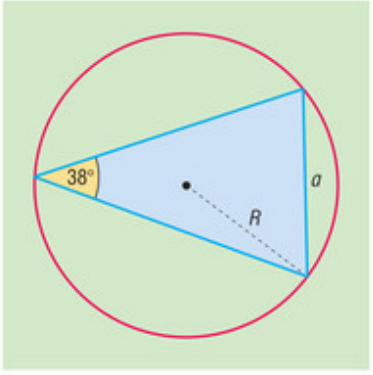



**2707** A háromszög ismert oldalára felírható:

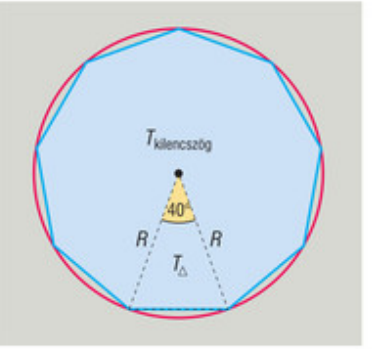
$$a = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha,$$

$$6{,}8 = 2 \cdot R \cdot \sin 38^\circ,$$

$$R = 5{,}52 \text{ cm}.$$



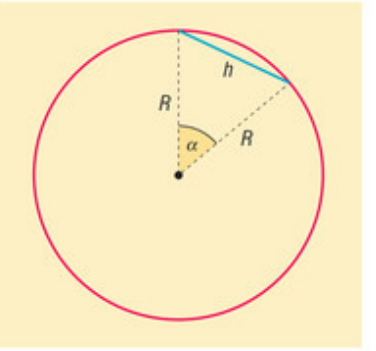
**2708** A szabályos kilencszög középponti szöge: $360° : 9 = 40°$.
Írjuk fel a kilencszög területetét:




$$T_{\text{kilencszög}} = 1080 = 9 \cdot \frac{R \cdot R \cdot \sin 40°}{2},$$
$$2160 = 9 \cdot R^2 \cdot 0{,}6427,$$
$$R^2 = 373{,}42,$$
$$R = 19{,}32 \text{ dm}.$$

Tehát a kilencszög köré írható kör sugara 19,32 dm.

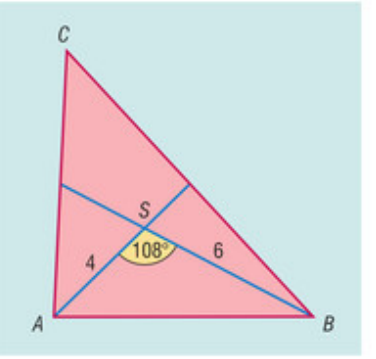
**2709** A húr hosszára felírható:




$$h = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha,$$
$$13{,}4 = 2 \cdot 8{,}7 \cdot \sin\alpha,$$
$$0{,}7701 = \sin\alpha,$$
$$\alpha = 50{,}36°.$$

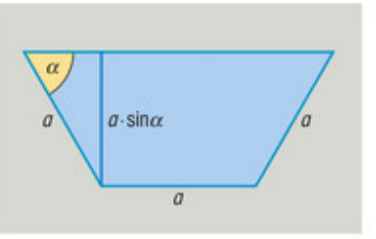
A kerületi szög $\alpha$-nak a fele, tehát 25,18°.

**2710** Az $ABS$ háromszög területe harmada az $ABC$ háromszög területének, így a tanult képlet alapján az $ABC$ háromszög területe:




$$t = 3 \cdot \frac{4 \cdot 6 \cdot \sin 108°}{2} = 36 \cdot \sin 72° \approx 34{,}2.$$

**2711** Az ábra alapján a trapéz területe:
$t = (a \cdot \cos\alpha + a) \cdot a \cdot \sin\alpha = a^2 \cdot (1 + \cos\alpha) \cdot \sin\alpha$, $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.
Elég meghatározni a következő függvény maximumát:




$$f(\alpha) = (1 + \cos\alpha) \cdot \sin\alpha = (1 + \cos\alpha) \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha} =$$
$$= \sqrt{(1 + \cos\alpha)^3 \cdot (1 - \cos\alpha)}, \quad 0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával ezt kapjuk:

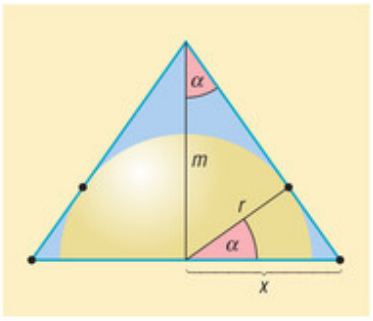
$$(1 + \cos\alpha)^3 \cdot 3 \cdot (1 - \cos\alpha) \le \left(\frac{3 \cdot (1 + \cos\alpha) + 3 \cdot (1 - \cos\alpha)}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4,$$

és itt az egyenlőség csak akkor igaz, ha $1 + \cos\alpha = 3 - 3 \cdot \cos\alpha$, azaz:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

A keresett maximum tehát $\alpha = 60°$ esetében érhető el.

**2712** A forgáskúp alapkörének sugara $x$, magassága $m$, félnyílásszöge pedig $\alpha$. Az adott értékek közt a következő összefüggések állnak fenn:




$$x = \frac{r}{\cos\alpha}, \quad m = \frac{r}{\sin\alpha}.$$

Mivel a forgáskúp térfogata:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot x^2 \cdot m,$$

így

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha} = \frac{\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \frac{1}{\sin\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha)}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

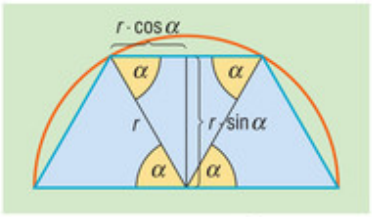
Mivel $V$ minimumát keressük, elég meghatározni $\sin\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha)$ maximumát $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ esetén. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint:

$$2 \cdot \sin^2\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha)^2 \le \left(\frac{2 \cdot \sin^2\alpha + 2 \cdot (1 - \sin^2\alpha)}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

Az egyenlőség csak akkor igaz, ha:

$$2 \cdot \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha, \quad \text{azaz} \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}5773, \quad \text{így} \quad \alpha = 35{,}3°.$$

**2713** A trapéz területét a félkör $r$ sugarával és $\alpha$-val $\left(0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}\right)$ így írhatjuk fel:




$$t = r^2 \cdot \sin\alpha + r^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = r^2 \cdot (\sin\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha).$$

Az $f(x) = \sin\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha$, $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ függvény maximumát keressük. Elég meghatározni a következő szorzat maximumát:

$$3 \cdot \sin^2\alpha \cdot (1 + \cos\alpha)^2 = 3 \cdot (1 - \cos\alpha) \cdot (1 + \cos\alpha)^3 \le \left(\frac{3 \cdot (1 - \cos\alpha) + 3 \cdot (1 + \cos\alpha)}{4}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

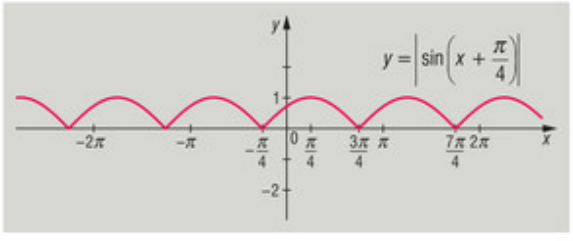
a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján.

Az egyenlőség csak akkor teljesül, ha:

$$3 \cdot (1 - \cos\alpha) = 1 + \cos\alpha, \quad \text{azaz} \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \text{így} \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

## Vegyes feladatok – megoldások

**2714** A függvény grafikonja az ábrán látható.




**2715** *a)* $\cos 5\pi = \cos\pi = -1$;

*b)* $\sin 7\pi = \sin\pi = 0$;

*c)* $\operatorname{tg} 800° = \operatorname{tg} 80° \approx 5{,}6713$;

*d)* $\operatorname{ctg} 500° = \operatorname{ctg} 140° = -\operatorname{tg} 50° \approx -1{,}1917$.

**2716** *a)* $x \mapsto \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $x \mapsto \cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$, $x \mapsto -\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$;

*b)* $x \mapsto \cos(x+\pi)$, $x \mapsto -\cos x$, $x \mapsto \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$;

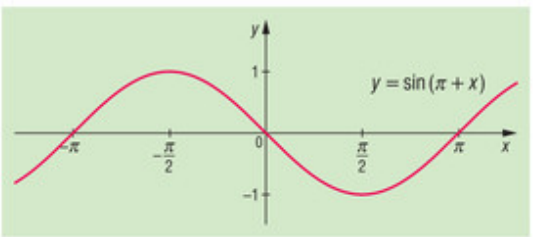
*c)* $x \mapsto 1-\sin x$, $x \mapsto 1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $x \mapsto 1+\sin(x-\pi)$;

*d)* $x \mapsto 2+\cos 2x$, $x \mapsto 2+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$, $x \mapsto 2-\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$;

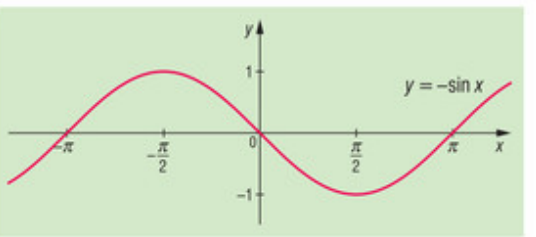
*e)* $x \mapsto \operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, $x \mapsto \operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$;

*f)* $x \mapsto \operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$, $x \mapsto 1+\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

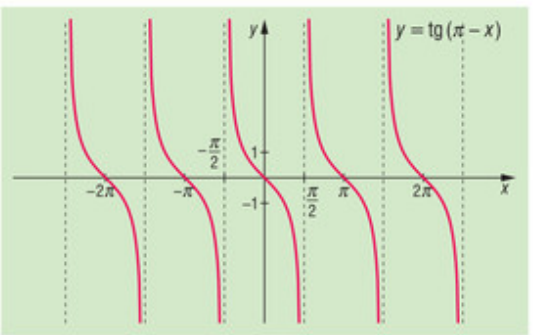
**2717** *a)*



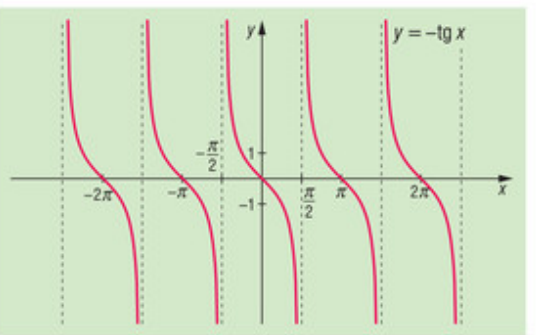

*b)*




*c)*




*d)*




**2718** *a)* ÉT: $\mathbb{R}$;

*b)* ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;

*c)* ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;

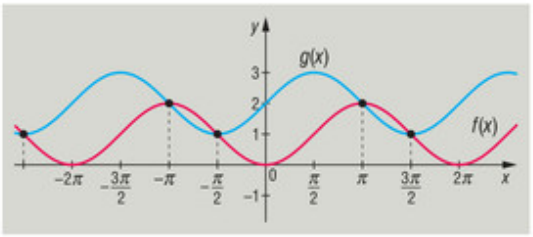
*d)* ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;

*e)* ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;

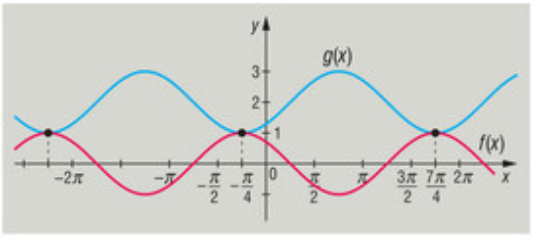
*f)* ÉT: $\mathbb{R} \setminus \left\{k\pi;\ \frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;

*g)* ÉT: $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{1}{6}+2k\le x\le\frac{5}{6}+2k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**2719** *a)*




*b)*




$x_1 = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$; $\qquad x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

**2720** *a)* $-1 \le f(x) \le 0$; $\qquad$ *b)* $1 \le g(x) \le 3$; $\qquad$ *c)* $-3 \le h(x) \le -1$; $\qquad$ *d)* $-1 \le i(x) \le 3$.

**2721** *a)* Írjuk be az ismert értékeket:

$$\frac{\cos 60^\circ - \sin 60^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$$

Gyöktelenítés után:

$$\frac{(1-\sqrt{3})^2}{1-3} = \frac{1+3-2\cdot\sqrt{3}}{-2} = \frac{4-2\cdot\sqrt{3}}{-2} = \frac{2\cdot\sqrt{3}-4}{2} = \sqrt{3}-2.$$

*b)* Írjuk be az ismert értékeket:

$$\frac{\cos 45^\circ - \sin 45^\circ}{2\cdot \operatorname{tg} 45^\circ - 3} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\cdot 1 - 3} = \frac{\frac{2}{4}}{-1} = -\frac{1}{2}.$$

*c)* Mivel $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$, ezért

$\cos 20^\circ = -\cos 160^\circ$, $\cos 40^\circ = -\cos 140^\circ$, $\cos 60^\circ = -\cos 120^\circ$, $\cos 80^\circ = -\cos 100^\circ$.

Továbbá $\cos 180^\circ = -1$, így az összeg értéke is $-1$ lesz.

*d)* Mivel $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$, ezért

$\operatorname{tg} 20^\circ = -\operatorname{tg} 160^\circ$, $\operatorname{tg} 40^\circ = -\operatorname{tg} 140^\circ$, $\operatorname{tg} 60^\circ = -\operatorname{tg} 120^\circ$, $\operatorname{tg} 80^\circ = -\operatorname{tg} 100^\circ$.

Továbbá $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$, így az összeg értéke is 0 lesz.

**2722** Használjuk fel a pótszöges összefüggéseket a gondolkodásnál.

*a)* $a(x)$-nél:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Tehát az $a(x) = \sin x + \sin x = 2 \cdot \sin x$ függvényt kell ábrázolni.

*b)* $b(x)$-nél:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x.$$

Tehát a $b(x) = \cos x + (-\cos x) = 0$ függvényt kell ábrázolni.

*c)* $c(x)$-nél: mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ezért a $c(x) = 1$ függvényt kell ábrázolni.

*d)* $d(x)$-nél: mivel $\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 = 1^2 = 1$, ezért a $d(x) = 1$ függvényt kell ábrázolni.

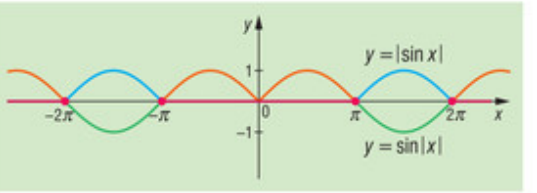
*e)* $e(x)$-nél:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Tehát az $e(x) = \sin x - \sin x = 0$ függvényt kell ábrázolni.

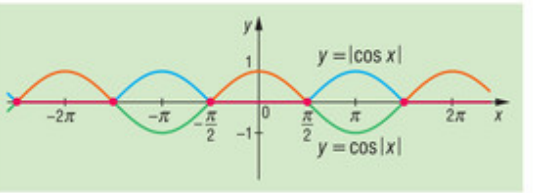
**2723** *a)* A megoldások:

$$2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi,\ k \ge 0,\ k \in \mathbb{Z};$$
$$-\pi + 2n\pi \le x \le 2n\pi,\ n \le 0,\ n \in \mathbb{Z}.$$



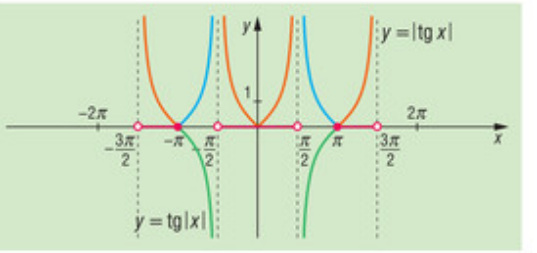

*b)* A megoldások:

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$




*c)* A megoldások:

$$k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \ge 0,\ k \in \mathbb{Z};$$
$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < x \le n\pi,\ n \le 0,\ n \in \mathbb{Z}.$$




*d)* A megoldások:

$$k\pi < x \le \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \ge 0,\ k \in \mathbb{Z};$$
$$-\frac{\pi}{2} + n\pi \le x < n\pi,\ n \le 0,\ n \in \mathbb{Z}.$$




**2724** *a)* Használjuk fel, hogy $-\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$. A megoldás: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

*b)* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

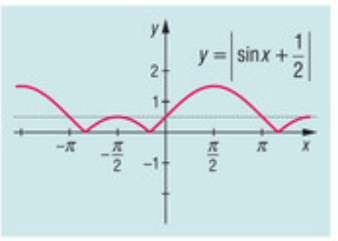
*c)* $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ és $x = -\frac{7\pi}{12} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

*d)* $x = 60° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$.

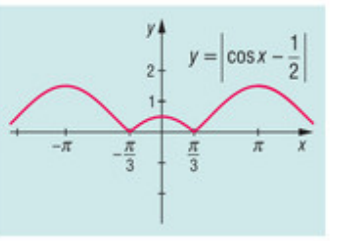
**2725** *a)* $0 < x < \frac{\pi}{4}$; *b)* $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$; *c)* $225° < x < 360°$;

*d)* $0 \le x < \frac{7\pi}{12}$.

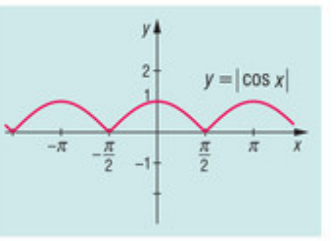
**2726** *a)*




*b)*




*c)*



**2727** *a)* Értelmezési tartomány: $\cos x \neq 1$, azaz $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$1 + \cos x = \frac{\sin x}{1 - \cos x},$$
$$1 - \cos^2 x = \sin x,$$
$$\sin^2 x - \sin x = 0,$$
$$\sin x \cdot (\sin x - 1) = 0.$$

Ha $\sin x = 0$, akkor $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, az értelmezési tartomány miatt a megoldás:

$$x_1 = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $(\sin x - 1) = 0$, akkor a megoldás:

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

*b)* Ha $\cos^2 x = 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $\cos^2 x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{\sin^2 x}{3} = \cos^2 x,$$
$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3,$$
$$\operatorname{tg}^2 x = 3,$$
$$|\operatorname{tg} x| = \sqrt{3}.$$

Ha $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, a megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, a megoldás:

$$x_2 = \frac{2\pi}{3} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

*c)* Ha $\cos^2 x = 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $\cos^2 x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, akkor oszthatunk vele:

$$6 \cdot \cos^2 x - 3 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0,$$
$$6 - 3 \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 0,$$
$$6 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 3 \cdot \operatorname{tg} x = 0,$$
$$2 - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $(\operatorname{tg} x)_1 = 1$ és $(\operatorname{tg} x)_2 = -2$.

Ha $\operatorname{tg} x = 1$, a megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\operatorname{tg} x = -2$, a megoldás:

$$x_2 = -1{,}1 + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

*d)* Ha $\cos x = 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, akkor oszthatunk vele:

$$\sqrt{3} \cdot \sin x - \cos x = 0,$$
$$\sqrt{3} \cdot \sin x = \cos x,$$
$$\sqrt{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos} = 1,$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

*e)* Értelmezési tartomány: $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Szorozzunk be $\cos x$-szel:

$$\cos x - \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} x,$$
$$\cos^2 x - 1 = \frac{1}{2} \cdot \sin x,$$
$$0 = \sin^2 x + \frac{1}{2} \cdot \sin x,$$
$$\sin x \cdot \left( \sin x + \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Ha $\sin x = 0$, akkor:

$$x_1 = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\sin x = \frac{1}{2}$, akkor a megoldások:

$$x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi, \; l \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2m\pi, \; m \in \mathbb{Z}.$$

*f)* Átrendezés után:

$$\cos^2 x + 4 \cdot \cos x = 3 - 3 \cdot \cos^2 x,$$
$$4 \cdot \cos^2 x + 4 \cdot \cos x - 3 = 0,$$
$$(\cos x)_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8}.$$

Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, akkor:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\cos x = -\frac{3}{2}$, akkor nincs megoldás.

**2728** *a)* Átrendezve: $\operatorname{ctg}^2 x = 1 - \sin^2 x$, azaz $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cos^2 x$, így $\cos^2 x \cdot \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = 0$.

Ebből vagy $\cos x = 0$, vagy $\sin^2 x = 1$, azaz $\sin x = 1$ vagy $\sin x = -1$. Tehát:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

*b)* A $\sin x + \cos x = z$ helyettesítéssel a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$5z^2 - 13z + 8 = 0.$$

Ennek gyökei: $z_1 = \frac{8}{5}$, $z_2 = 1$. Mivel $\sin x + \cos x = \frac{8}{5}$ nem lehet a valós számok körében, így $\sin x + \cos x = 1$, ahonnan:

$$x_1 = 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

*c)* Az egyenlet így írható:

$$\sin x + \cos x + (\sin x + \cos x)^2 = 0,$$
$$(\sin x + \cos x) \cdot (1 + \sin x + \cos x) = 0.$$

Tehát vagy $\sin x + \cos x = 0$ vagy $\sin x + \cos x = -1$.

Ha $\sin x + \cos x = 0$, $\cos x$-szel osztva ($\cos x \neq 0$): $\operatorname{tg} x = -1$, tehát:

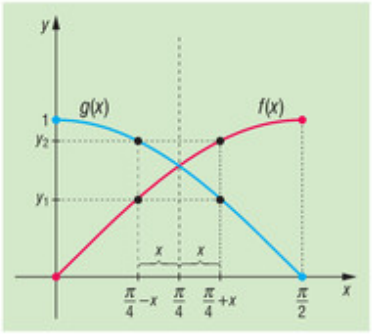
$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\sin x + \cos x = -1$, akkor:

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ vagy } x_3 = \pi + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

(Ez utóbbi eset megoldásához használhatunk függvénygrafikont is.)

**2729** A függvények grafikonja az ábrán látható.




Az ábra szimmetrikus az $x = \frac{\pi}{4}$ egyenesre, ebből következnek az azonosságok. (Az ábrán csak $0 < x < \frac{\pi}{4}$ esetén szemléltettük.)

**2730** *a)* Az egyenlőtlenség így írható:

$$\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} > 2, \quad x \neq n \cdot \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ismert, hogy ha $a > 0$, akkor $a + \frac{1}{a} \geq 2$, ezért mivel $\operatorname{tg}^2 x > 0$, így ez minden olyan esetben igaz, amikor $\operatorname{tg}^2 x \neq 1$, azaz $|\operatorname{tg} x| \neq 1$, tehát ha:

$$x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

*b)* Az egyenlőtlenség így írható:

$$\sin^4 x - 6 \cdot \sin^2 x + 5 > 0.$$

Helyettesítsünk $\sin^2 x = p$-t, így a $p^2 - 6p + 5 > 0$ zérushelyei: $p = 5$ és $p = 1$ miatt akkor és csak akkor lehet igaz, ha

$$\sin^2 x < 1 \quad \text{vagy} \quad \sin^2 x > 5.$$

Az utóbbi nem lehetséges, így a megoldások csak azok az $x$-ek, amelyekre $|\sin x| < 1$, tehát:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

*c)* A két függvény, $f(x) = \sin \pi x$ és $g(x) = \cos \pi x$, $x \in \mathbb{R}$ grafikonjáról leolvasható, hogy az egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha:

$$\frac{1}{4} + 2k < x < \frac{5}{4} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

*Megjegyzés:* Ügyeljünk arra, hogy csak $\sin \alpha > \cos \alpha$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk $\alpha$-ra, majd $\alpha = \pi x$-et helyettesíteni.

*d)* Ha a $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ azonosságot használjuk, akkor az egyenlőtlenség így írható:

$$1 + \sin x < \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x,$$

ahonnan ekvivalens átalakításokkal ezt kapjuk:

$$1 - \cos x < \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (1 - \cos x).$$

Ha $\cos x \neq 1$, azaz $x \neq 2k\pi$, akkor $1 - \cos x > 0$, tehát elég megoldani az

$$1 < \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

egyenlőtlenséget. Ennek a következő $x$ értékek tesznek eleget:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ha $\cos x = 1$, akkor nincs megoldás $x$-re.



# 10.6. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS

## Események – megoldások

**2731** *a)* Igen, igen, nem, igen.

*b)* és *c)* {gól; nem gól}, {kosár jó; kosár nem jó}, –, cserepek száma.

**2732** *a)* $\{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$; *b)* $\{0, 1, 2\}$;

*c)* $\{-20, -19, \ldots, -1, 1, \ldots, 19, 20\}$.

**2733** *a)* Igen. *b)* $8 \le x \le 13$

*c)* Rudi jó: $\{9{,}5 \le x \le 10{,}5\}$; rudi nem jó: $\{x < 9{,}5$ vagy $10{,}5 < x\}$; 10 cm-nél rövidebb: $\{x < 10\}$.

**2734** *a)* $\{1, 2, 3, \ldots, 29\}$;

*b)* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{20, 21, 22, \ldots, 29\}$, $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.

*c)* $A = \{6, 7, 8, \ldots, 29\}$ = {legalább 6.-ra húzunk királyt};

$B = \{1, 2, 3, \ldots, 19\}$ = {legfeljebb 19.-re húzunk királyt};

$C = \{1, 4, 6, \ldots, 28\}$ = {elsőre vagy összetett sorszámra húzunk királyt}.

*d)* Biztos esemény például: {legfeljebb 32.-re húzunk királyt}.

Lehetetlen esemény például: {29.-re sem húzunk királyt}.

**2735** *a)* $\{3, 4, 5, \ldots, 18\}$.

*b)* Biztos esemény: {pozitív összeget dobunk}. Lehetetlen esemény: {20-nál többet dobunk}.

**2736** *a)* {piros, zöld, fehér}.

*b)* {(p; p); (p; z); (p; f); (z; z); (z; p); (z; f); (f; p); (f; z)}.

*c)* {(p; p); (p; z); (p; f); (z; z); (z; f)}.

*d)* {(p; p; p); (p; p; z); (p; p; f); (p; z; z); (p; z; f); (z; z; f)}.

*e)* {(p; p); (p; z); (p; f); (z; z); (z; p); (z; f); (f; p); (f; z); (f; f)}.

**2737** *a)* A lehetséges kimenetelek táblázata:

*b)* 3-3-3.

| Zsolt \ Jenő | Kő | Papír | Ollló |
|---|---|---|---|
| Kő | *D* | *J* | *Zs* |
| Papír | *Zs* | *D* | *J* |
| Ollló | *J* | *Zs* | *D* |

**2738** *a)* A lehetséges kimenetelek táblázata:

*b)* 30.

*c)* Mindkettőt ugyanannyi elemi esemény valósítja meg.

| T \ P | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | – | *P* | *P* | *P* | *P* | *P* |
| 2 | *T* | – | *P* | *P* | *P* | *P* |
| 3 | *T* | *T* | – | *P* | *P* | *P* |
| 4 | *T* | *T* | *T* | – | *P* | *P* |
| 5 | *T* | *T* | *T* | *T* | – | *P* |
| 6 | *T* | *T* | *T* | *T* | *T* | – |

# Műveletek eseményekkel – megoldások

**2739** *a)* $\overline{A}$ = {nincs fej}; $\overline{B}$ = {van fej}; $\overline{C}$ = {0, 1 vagy 3 fej}; $\overline{D}$ = lehetetlen.

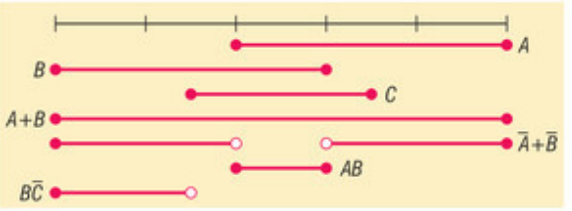
*b)* Nem.

*c)* Igen, {mind írás} és {pontosan kettő fej}.

**2740** *a)* és *b)*-nél az eseményeket az ábrán láthatjuk:

*c)* $A + B$ biztos, $\overline{A} \cdot \overline{B}$, $A \cdot B \cdot \overline{C}$ lehetetlen.

*d)* Például $A$ és $B \cdot \overline{C}$, illetve $A + B$ és $\overline{A} \cdot \overline{B}$.




**2741** *a)* $3! \cdot 2 = 12$, illetve $3! \cdot 3! = 36$. *b)* Igaz. *c)* $3! \cdot 2 \cdot 2 = 24$.

**2742** *a)* Az események szövegesen:

$A + B$ = {tököt vagy tízest vagy ászt húzunk};

$A \cdot B$ = {tök tízest vagy tök ászt húzunk};

$B \cdot C$ = {ászt húzunk};

$A + C$ = {tököt vagy figurás lapot húzunk};

$\overline{C} \cdot A$ = {számozott tök lapot húzunk};

$A \cdot B \cdot C$ = {tök ászt húzunk}.

*b)* $|A| = 8$, $|B| = 8$, $|C| = 16$;

$|A + B| = 14$, $|A \cdot B| = 2$, $|B \cdot C| = 4$, $|A + C| = 20$, $|\overline{C} \cdot A| = 4$, $|A \cdot B \cdot C| = 1$.

**2743** *a)* $E = \overline{A}$; $F = \overline{B + D}$; $G = \overline{A + C} \cdot B$; $H = C \cdot \overline{D}$.

*b)* Igen, a következő párok: $A$ és $C$, $E$, $G$ vagy $H$; $B$ és $D$ vagy $F$; $C$ és $G$; $D$ és $F$, $G$ vagy $H$; $F$ és $G$.

**2744** *a)* $A + B$;



$A \cdot \overline{B}$;



$\overline{C} \cdot \overline{E}$.



*b)* $F = A \cdot B$; $G = E \cdot \overline{D}$; $H = (E + D) \cdot \overline{E \cdot D}$.

*c)* $A \cdot B \cdot C$; $\overline{A} \cdot D$; $\overline{B} \cdot (C + E \cdot D) + A \cdot B \cdot (E + D) \cdot \overline{E \cdot D} + \overline{A} \cdot (C + E \cdot D)$.

**2745** *a)* $(A \cdot B) \backslash C = (A \cdot B) \cdot \overline{C}$;

*b)* $A + B + C$;

*c)* $\overline{A + B + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$;

*d)* $(A \cdot B) + (B \cdot C) + (A \cdot C)$;

*e)* $(A + C) \backslash B = (A + C) \cdot \overline{B}$;

*f)* $(\overline{A} + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + \overline{C}) \cdot (\overline{B} + \overline{C}) = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC}$.



**2746** *a)* A megjelölt körívek a bal oldali ábrán láthatók.

*b)* $A + B + C = \{12; 5; 20; 1; 18; 4; 13; 6; 10; 15; 2\}$ (sárga körcikk a jobb oldali ábrán);

$C \cdot \overline{A + B} = \{12; 18; 4\}$ (narancssárga körcikk a jobb oldali ábrán);

$B \cdot \overline{D} = B$;

$\overline{A + B + C + D} = \{17; 3; 19; 11; 14; 9\}$ (zöld körcikk a jobb oldali ábrán).

*c)* Bármely kettő, kivéve az $A$ és $C$ párt.

*d)* $A$ bekövetkezése maga után vonja $C$ bekövetkezését.




## Kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség – megoldások

**2747** –

**2748** *a)* Géza: $\frac{12}{23} \approx 0{,}52$; Tamás: $\frac{7}{19} \approx 0{,}37$; Ferenc: $\frac{13}{22} \approx 0{,}59$.

*b)* Ferencre kell bízni a szabadrúgások elvégzését.

**2749** *a)* Piros: $\frac{12}{40} = 0{,}3$; kék: $\frac{8}{40} = 0{,}2$; sárga: $\frac{20}{40} = 0{,}5$.

*b)* Piros: 30 db $(100 \cdot 0{,}3 = 30)$; kék: 20 db $(100 \cdot 0{,}2 = 20)$; sárga: 50 db $(100 \cdot 0{,}5 = 50)$.

**2750** –

**2751** Legfeljebb 11.

**2752** Legalább négy.

**2753** –

**2754** –

## A valószínűség klasszikus modellje – megoldások

**2755** $\frac{1}{6} = 0{,}1\dot{6}$.

**2756** $\frac{2}{16} = 0{,}125$.

**2757** $\frac{24}{30} = 0{,}8$.





**2758** *a)* $\frac{3}{7} \approx 0{,}43$. *b)* $\frac{2}{7} \approx 0{,}29$.

**2759** $\frac{10}{90} = 0{,}\dot{1}$.

**2760** $1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

**2761** $1 - \frac{7}{30} = 0{,}7\dot{6}$.

**2762** $1 - \frac{7+9}{40} = 0{,}6$.

**2763** $\frac{14}{50} = 0{,}28$.

**2764** $\frac{6}{25} = 0{,}24$.

**2765** $\frac{x}{15} = 0{,}8$; $x = 12$.

**2766** $\frac{4}{x} = 0{,}2$; $x = 20$.

**2767** $\frac{x}{x+12} = 0{,}6$; $x = 18$.

**2768** $1 - \frac{20}{20+x} = 0{,}2$; $x = 5$.

**2769** $\frac{80^\circ}{360^\circ} = 0{,}\dot{2}$.

**2770** *a)* $\frac{1}{10} = 0{,}1$; *b)* $\frac{1}{10} = 0{,}1$; *c)* $3 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}3$.

**2771** $\frac{11}{37} = 0{,}\dot{2}9\dot{7}$.

**2772** Például: {1; 2; 3; 4} vagy {nem összetett szám dobása}.

**2773** *a)* $\frac{120}{150} = 0{,}8$. *b)* Hetente egyszer.

**2774** *a)* Nem.

*b)* 31, 32, 41, 42, 43, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63, 64, 65, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 21.

*c)* $\frac{4}{21} \approx 0{,}19$.

*d)* $\frac{11}{21} \approx 0{,}524$.

**2775** *a)* $\frac{8}{8^8} \approx 0{,}000000476$; *b)* $\frac{2}{8^8} \approx 0{,}000000119$.



**2776** *a)* $\frac{1}{5!} \approx 0{,}0083$; *b)* $\frac{2}{5!} \approx 0{,}0167$.

**2777** *a)* $\frac{6 \cdot 6 \cdot 3}{6^3} = 0{,}5$; *b)* $\frac{6+6+2 \cdot 6 \cdot 6}{6^3} \approx 0{,}389$; *c)* $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} \approx 0{,}556$.

**2778** *a)* $\frac{11}{100} = 0{,}11$; *b)* $\frac{11-5}{100-16} \approx 0{,}071$; *c)* $\frac{19}{100} = 0{,}19$.

**2779** *a)* $\frac{6}{6^2} \approx 0{,}167$; *b)* $\frac{9+9+9}{6^2} = 0{,}75$; *c)* $\frac{6}{6^2} \approx 0{,}167$;
*d)* $\frac{20}{6^2} = 0{,}\dot{5}$.

**2780** $\frac{8}{20} = 0{,}4$.

**2781** Érdemes áttérnünk a komplementer eseményre, hiszen az a csupa írás (1 eset). Az összes események száma $2^3$, így:

$$P = \frac{8-1}{2^3} = 0{,}875.$$

**2782** *a)* Feltehetjük, hogy egyetlen Kis Misi jár ebbe az osztályba:

$$P = \frac{1}{30} \approx 0{,}033.$$

*b)* A 30 tanulónak pontosan a fele szerepel a kinyitott napló jobb oldalán:

$$P = \frac{15}{30} = 0{,}5.$$

*c)* Az első 10 tanuló között:

$$P = \frac{10}{30} \approx 0{,}333.$$

*Megjegyzés:* Kis Misi esetében (és a többiben is) gondolkodhatunk úgy is, hogy 15 oldalpárnál nyílhat ki a napló, majd az ott levő két tanuló közül választ a tanár. Vagyis:

$$P = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2}.$$

**2783** *a)* Ha felcsapjuk a könyvet, egyszerre mindig két oldalt látunk. Azaz csak 180 lehetőség marad, hogy valahol kinyissuk, ebből 9 fő fejezethatár:

$$P = \frac{9}{180} = 0{,}05.$$

*b)* A 9 fő fejezet és a $9 \cdot 5 = 45$ szakaszhatár együtt 54 oldalt foglal el:

$$P = \frac{54}{180} = 0{,}3.$$

**2784** *a)* A keresett valószínűség:

$$P = \frac{1}{24} \approx 0{,}04167.$$

*b)* A kedvező esetek száma 1, az összes esetek száma $24 \cdot 24$, így:

$$P = \frac{1}{24^2} \approx 0{,}0017361.$$





*c)* A kedvező esetek száma itt 3!, az összes eseteké pedig $24 \cdot 24 \cdot 24$:

$$P = \frac{3!}{24^3} \approx 0{,}000434.$$

**2785** *a)* Minden színből 8-8 darab van a csomagban. Ha nem tesszük vissza a lapokat, akkor minden húzás után a még húzható lapok száma eggyel csökken:

$$P = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} \approx 0{,}004746.$$

*b)* Figyeljük meg, hogy a számlálót nem befolyásolja a visszatevés, azonban a nevező már nem csökken. Azaz a valószínűség kevesebb lesz, méghozzá $\frac{31 \cdot 30 \cdot 29}{32 \cdot 32 \cdot 32}$-szeresével:

$$P = \frac{8^4}{32^4} = 0{,}00390625.$$

**2786** *a)* 3 és 2 egyforma dolgot $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$-féleképpen tehetünk sorba. Mindannyiszor $8 \cdot 7 \cdot 6$-féleképpen húzhatunk pirosat a pirosak, $8 \cdot 7$-féleképpen tököt a tökök közül.

Az összes esetek száma $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28$, így:

$$P = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28} \approx 0{,}00779.$$

*b)* Az első szorzótényező, a sorba rakások lehetősége nem változik. A többi igen, mivel nem csökken az egyes lehetőségek száma sem a kedvező, sem az összes esetek között:

$$P = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 8^3 \cdot 8^2}{32^5} \approx 0{,}009766.$$

**2787** *a)* Mivel a bástya csak a sorában és az oszlopában üt, ha az egyik oszlopban valamelyik mezőre elhelyezünk egy bástyát, akkor abban a sorban más bástya nem lehet. Így az első oszlopban 8, a másodikban már csak 7, aztán 6 stb. lehetőségünk van a bástyák elhelyezésére. A kedvező esetek száma 8!. Az összes eset száma $8^8$, ekkor ugyanis egymás mellé is tehetjük a figurákat, minden oszlopban nyolc helyre:

$$P = \frac{8!}{8^8} \approx 0{,}0024.$$

*b)* Ebben a részkérdésben az összes esetek száma megegyezik az előző példa kedvező eseteivel (nem ütik egymást), azaz 8!.

A kedvező esetek összeszámlálásához két dolgot kell észrevennünk: egyrészt minden sorban két átlómező található, egy világos és egy sötét (például az első és utolsó sorban a két szélső, a negyedik és ötödik sorban pedig a középső négyes); másrészt ezek a mezők szimmetrikusan helyezkednek el. Felülről indulva szabadon választhatunk az átlómezők közül az első négy sorban, azonban utána már a szimmetria miatt csak egy-egy szabad lehetőségünk van minden sorban. Vagyis a kedvező esetek száma $2^4$, így:

$$P = \frac{2^4}{8!} \approx 0{,}000397.$$

*Megjegyzés:* Mindkét részben a sorok és oszlopok szerepe felcserélhető.



**2788** *a)* Az öt szám hatféleképpen egyezhet meg (kedvező esetek). Az összes esetekhez bármelyik kockával dobhatunk 6-félét: $6^5$,

$$P = \frac{6}{6^5} \approx 0{,}00077.$$

*b)* Kis pókernél az egy különböző 5-féle kockára jöhet (megkülönböztetve a kockákat). A különböző kocka 5-féle számot mutathat. A többi négy 6-féleképpen lehet egyforma. A kedvező esetek száma így $5 \cdot 5 \cdot 6 = 150$, ebből:

$$P = \frac{150}{6^5} \approx 0{,}0193.$$

**2789** *a)* A kis sor valószínűsége:

$$P = \frac{5!}{6^5} = 0{,}0154.$$

*b)* A két valószínűség egyenlő.

**2790** *a)* A rulettasztal számtáblázata az ábrán látható.




*b)* Minden sorban 3 szám áll:

$$P = \frac{3}{37} \approx 0{,}081.$$

(A 0 nem tartozik a sorok közé.)

*c)* Egy-egy oszlopban 12 szám áll:

$$P = \frac{12}{37} \approx 0{,}324.$$

(A 0 nem tartozik hozzá egy oszlophoz sem.) Az első tucatban ismét csak 12 szám van, így annak valószínűsége ugyanekkora.

*d)* Két szomszédos oszlopban 24 darab szám található, így:

$$P = \frac{24}{37} \approx 0{,}648.$$

Tehát 30 játékból kb. 20-szor nyerünk. (Ez azt jelenti, hogy kicsit ritkábban, mint három pörgetésenként kétszer nyerünk a fogadással – legalábbis ez *várható*.)

**2791** *a)* $P = \frac{1}{37} \approx 0{,}027$; *b)* $P = \frac{2}{37} \approx 0{,}054$; *c)* $P = \frac{n}{37} \approx n \cdot 0{,}027$.

*d)* 18 darab piros színű és 18 darab páratlan van a számok között, esélyük így ugyanakkora:

$$P = \frac{18}{37} \approx 0{,}486.$$

**2792** *a)* Mivel az összes esetek száma hat, ezért a valószínűségeik alapján $A$ és $B$ is 3-3 elemi eseményt kell, hogy tartalmazzon, szorzatuk (metszetük) pedig 2-t. Például: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4\}$, $A \cdot B = \{2; 3\}$.

*b)* $A$ most is 3 elemi eseményből áll, $B$ azonban kettőből, összegük (egyesítésük) négyből. Például: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{3; 4\}$, $A + B = \{1; 2; 3; 4\}$.

**2793** Nem ismerjük a pontos darabszámokat, legyen például a jó csokikból $n$ darab. Ekkor $0{,}25n$ lejárt szavatosságú van. A keresett valószínűség:

$$P = \frac{n}{n + 0{,}25n} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8.$$

*Megjegyzés:* Tökéletes megoldás, ha a feladat elején választunk egy „kellemes” darabszámot a jó csokiknak, például 100-at. Ekkor 25 darab lejárt szavatosságú csoki volt a dobozban:

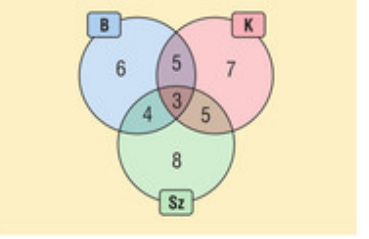
$$P = \frac{100}{125} = 0{,}8.$$

**2794** *a)* Ha csak egy irányban közlekedik, akkor a 9 vagy a –9 pontba juthat el. Ha 8 egységet lép az egyik, és egyet a másik irányba, akkor a 7 vagy a –7 pontba jut. És így tovább: láthatjuk, hogy csak a páratlan számoknál fejezheti be a kilenc perces sétáját.

*b)* Számoljuk össze a rendelkezésre álló kilenc perc alatt bejárható, összes és kedvező útvonalak számát. Mivel minden percben két irányban közlekedhet egy egységet, a kilenc perc alatt összesen $2^9$ lehetősége van a katicának mozogni. Az 5-ös pontban akkor fejezi be a sétát, ha öt percig a pozitív irányba halad, a maradék négy percben pedig kétszer előre, kétszer hátra mozog. Hogy mikor teszi meg ezeket a mozgásokat a kilenc perc alatt, az nem érdekes. Ha + és – jelekkel jelöljük az egyes lépéseket, akkor összesen hét + és kettő – jelet kell leírnunk minden kilenc jelből álló sorozatban. Például: +, –, +, +, +, +, –, +, +. Ezek száma $\frac{9!}{7!\cdot 2!}$, így a keresett valószínűség:

$$P = \frac{\frac{9!}{7!\cdot 2!}}{2^9} \approx 0{,}07.$$

**2795** Mielőtt a konkrét kérdésekre válaszolnánk, ábrázoljuk Venn-diagrammal a gyümölcsimádókat. Szokás szerint haladhatunk belülről kifelé:




*a)* $P = \frac{8}{38} \approx 0{,}21$; *b)* $P = \frac{8+7+6}{38} \approx 0{,}55$;

*c)* $P = \frac{38-3}{38} = \frac{6+5+7+5+8+4}{38} = 1 - \frac{3}{38} \approx 0{,}89.$

*Megjegyzések:* Nem érdemes logikai szitát használnunk, hiszen legfeljebb arra jövünk rá, hogy nincs olyan tanuló, aki ne szeretné legalább az egyik gyümölcsöt. A *c)* részkérdésnél áttérhetünk a komplementerre is. Így nincs szükség a Venn-diagramra, a szöveg tartalmazza a hármas metszet elemszámát.

Valószínűségek számításánál a komplementer eseményre való áttéréskor két dolgot is tehetünk: felírhatjuk az összes eseményből kivont ellentett eseményt; vagy kivonjuk a biztos esemény valószínűségéből (1-ből) a komplementer valószínűségét.

**2796** *a)* Minden színből 8 van a csomagban. Ha visszatevés nélkül húzunk, akkor minden húzás után eggyel csökken a csomag elemszáma, és vele együtt az egyes színek száma is. Ne feledjük, még a 3, 2, 2 azonos színű lapok lehetséges sorrendjeit is figyelembe kell vennünk. A megoldás:

$$P = \frac{\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 8\cdot 7\cdot 8\cdot 7}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26} \approx 0{,}013.$$

*b)* Ha a kivett lapokat visszatesszük, akkor az új húzásnál nem csökken a választási lehetőségek száma:

$$P = \frac{\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot 8^3\cdot 8^2\cdot 8^2}{32^7} \approx 0{,}0128.$$

*Megjegyzés:* Az *a)* részfeladatban a csökkenő szorzatokat felírhattuk volna például a következő formában is:

$$\frac{32!}{(32-7)!}.$$



**2797** *a)* Kombinatorikából ismert a feladat: tegyünk sorba több dolgot, melyek között azonosak is vannak (az előző példában is alkalmaznunk kellett). A megoldás:

$$\frac{14!}{8!\cdot 4!\cdot 2!} = 45\,045.$$

*b)* A feladat által megadott pillanatban az összes esetek száma 8, a kedvező (rózsaszín) esetek száma 2, így:

$$P = \frac{2}{8} = 0{,}25.$$

*c)* Két megoldást is adunk. A bonyolultabb szerint, ha csak egy lilát nem vettünk ki eddig, akkor a kivett 13 golyót $\frac{13!}{8!\cdot 3!\cdot 2!}$-féleképp tehetjük sorba. Az egyes színekből 8!, 4!, 2!-féleképp húzhatunk golyókat. A nevezőben gyakorlatilag 14! szerepel – a végére elvileg nem írhatjuk oda az egyest (ahogy a 4! végére sem), de értékét ez nem befolyásolja:

$$P = \frac{\frac{13!}{8!\cdot 3!\cdot 2!}\cdot 8!\cdot 4!\cdot 2!}{14!} \approx 0{,}286.$$

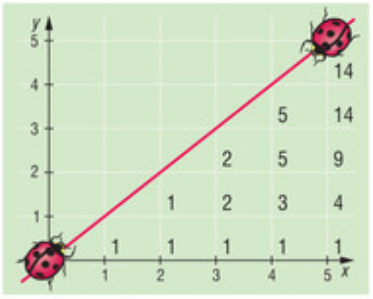
Az egyszerűbb megoldás csak az utolsó golyóra koncentrál: a 14 golyó között 4 lila van, így az utolsó $P = \frac{4}{14} \approx 0{,}286$ valószínűséggel lesz lila. Természetesen megfelelő egyszerűsítések után a bonyolultabból is megkapjuk az egyszerűbbet.

*d)* A három szín 3!-féleképp követheti egymást, azokon belül a szokásos 8!, 4!, 2!-féleképp következhetnek az egyes golyók. Az összes esetek száma 14!, így:

$$P = \frac{3!\cdot 8!\cdot 4!\cdot 2!}{14!} = 0{,}000\,133.$$

**2798** *a)* Bármerre megy, 5-ször kell felfelé, és 5-ször jobbra lépnie. Összesen 10 lépés, ami 10 perc.

*b)* Össze kell számolnunk az összes lehetséges útvonalat. Ezt megtehetjük úgy, hogy a lehetséges 5 jobbra és 5 felfelé lépés összes sorrendjét összeszámoljuk: $\frac{10!}{5!\cdot 5!} = 252$. Ez azonban nem ad útmutatást a kérdezett $y = x$ egyenes alatt haladó esetekre.




Az biztos, hogy a járkálás első (és utolsó) néhány lépése meghatározott: az origóból csak (1; 0)-n, majd (2; 0)-n át vezet az út, ugyanis nem érinthetjük az $y = x$ egyenest. Jegyezzük fel magunknak a pontok mellé, hányféleképpen juthattunk el odáig. Így az $x$ tengely minden pontjához 1-est kell írni. A (3; 1)-hez viszont már 2-t, hiszen (3; 0)-n és (2; 1)-n át is odajuthatunk, azokba a pontokba viszont csak 1-1 útvonalon. Azaz minden pontban összeadhatjuk a hozzájuk vezető pontok útvonalait. Így már ki is tudjuk tölteni az ábrát. A kérdéses útvonalak száma 14. Ellenőrzésképpen írjuk fel az előbb kiszámolt összes eseteket is. Újra 252-t kapunk. Így a keresett valószínűség:

$$P = \frac{14}{252} \approx 0{,}0556.$$

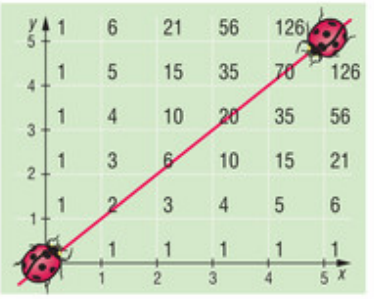
*c)* Az $y = x$ egyenesre szimmetrikus az előző és ez az eset, így valószínűségeik is egyenlők.

*d)* Észrevehetjük, hogy *b)* és *c)* esetekben éppen a kérdezett esemény komplementerét számoltuk össze. Ezért:

$$P = \frac{252 - (14+14)}{252} = 1 - 2 \cdot \frac{14}{252} \approx 0{,}889.$$

*Megjegyzések:* A feladat több általánosítási, bővítési lehetőséget tartalmaz.

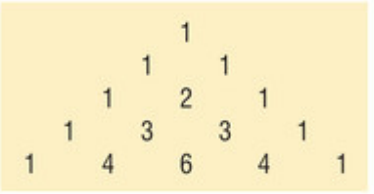
Az egyik lehetőség, ha úgy értelmezzük a feladatot, hogy az $y = x$ egyenest csak átlépni nem szabad útközben, hozzáérni igen. Oldjuk meg így is a feladatot!




Másik lehetőség, ha nem az (5; 5), hanem például a (9; 6) pontba tart a katica. Természetesen ekkor az $y = \frac{2}{3} \cdot x$ egyenes alatti és feletti részeket kérdezzük. Vigyázzunk, ekkor már nem lesz szimmetrikus az egyenes alatti és feletti lépegetés!

Akár azon is gondolkodhatunk, hogy az általában $(n; k)$ pontba tartó katicabogárra feltett hasonló kérdéseket hogyan válaszolhatnánk meg. Mi lenne ekkor a vízválasztó egyenes?

Az összes eseteknél kapott ábrát figyelmesen szemlélve, esetleg ismerős alakzatot fedezhetünk fel a számok rengetegében. 135°-ban, negatív irányban elfordítva *Pascal-háromszöget* kapunk. Jobban belegondolva, teljesen egyértelmű, hogy ezt kell látnunk, hiszen kétoldalt 1-esek állnak, a közöttük levő számokat pedig a háromszög képzési szabályának megfelelően állítjuk elő.




**2799** A kockákat különböztessük meg, és tegyük sorba (pl. sorszámozzuk őket). Két megoldást is adunk az egyes lehetőségekre:

**Pár, I. megoldás.** Az egy párt tekinthetjük úgy, hogy kettő azonos és három azonos. Az utóbbiak a feladat szempontjából egy csoportot alkotnak „különbözőségükben". Talán furcsán hangzik, de nézzük tovább: szabad hely négy van, ugyanis csak a második ismétlődő helye rögzített. Az első szabad helyre 6, a másodikra 5, aztán 4 és végül 3 lehetőségünk van, egy rögzített. A pár valószínűsége:

$$P_{\text{pár}} = \frac{\frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^5} \approx 0{,}463.$$

**Pár, II. (III.) megoldás.** Írjuk össze, hány lehetőség van a pár kialakítására. A kockák sorszámaival adjuk meg az azonos értéket mutatókat: (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5), (4; 5).

Még jobban látszik, ha táblázatba gyűjtjük az azonosakat.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. kocka | x | x | x | x | | | | | | |
| 2. kocka | x | | | | x | x | x | | | |
| 3. kocka | | x | | | x | | | x | x | |
| 4. kocka | | | x | | | x | | x | | x |
| 5. kocka | | | | x | | | x | | x | x |

Ez tíz lehetőség. Az első kockán 6-félét, utána a szabad helyeken 5-, 4-, 3-félét dobhatunk. A második $x$ helyén viszont csak egyet, hiszen annak meg kell egyeznie az első $x$-szel.

Természetesen az eredmény nem változik:

$$P_{\text{pár}} = \frac{10 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^5} \approx 0{,}463.$$



**Drill, I. megoldás.** A helyzet nem változik a párhoz képest, csak itt három és két egyformát keresünk (az utóbbi kettő játssza a különböző számok szerepét). Illetve annyiban változik, hogy – mivel a szabad helyek száma eggyel csökken – $6 \cdot 5 \cdot 4$-gyel szorozzuk:

$$P_{\text{drill}} = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} \approx 0{,}154.$$

**Drill, II. megoldás.** Alkalmazzuk a pár második megoldásánál bemutatott táblázatot, ezzel ismét 10 lehetőségig jutunk. Most azonban az $x$-ek jelentik a különböző számokat, az üres helyeken vannak az azonos dobások. Mivel eggyel kevesebb szabad helyünk van, ezért a szorzótényező végéről lemarad a hármas:

$$P_{\text{drill}} = \frac{10 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} \approx 0{,}154.$$

**Full, I. megoldás.** Itt már tényleg kettő és három azonos értéket kell sorba raknunk. Azonban csak két szabad helyünk van (a többit meghatározzák), így:

$$P_{\text{full}} = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 6 \cdot 5}{6^5} \approx 0{,}0386.$$

**Full, II. megoldás.** Bármilyen furcsa, táblázatunk még mindig a korábban látott, csak képzeljünk az üres helyekre például $y$-t. Így:

$$P_{\text{full}} = \frac{10 \cdot 6 \cdot 5}{6^5} \approx 0{,}0386.$$

**Két pár, I. megoldás.** Ebben az esetben kettő-kettő azonos, és egy ezektől is különböző dobásunk van, sorrendjükre $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!}$-t kapunk. Azonban a sorrendek között nem számít különbözőnek, ha a két pár szerepét felcseréljük (5-5-6-6-2 ugyanaz, mint 6-6-5-5-2), így ezt még 2!-sal osztani kell. A három szabad helyre $6 \cdot 5 \cdot 4$-félét dobhatunk. A keresett valószínűség:

$$P_{\text{két pár}} = \frac{\frac{\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2!}}{6^5} \approx 0{,}231.$$

**Két pár, II. megoldás.** Vegyük a korábbi táblázatot, csak most $x$-$x$ és $y$-$y$ jelölje a két párt.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. kocka | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | | | | |
| 2. kocka | $x$ | $x$ | $x$ | $y$ | $y$ | | | | | |
| 3. kocka | $y$ | $y$ | | $x$ | $x$ | $x$ | … | | | |
| 4. kocka | $y$ | | $y$ | $y$ | | $y$ | | | | |
| 5. kocka | | $y$ | $y$ | | $y$ | $y$ | | | | |

Láthatjuk, hogy a párhoz képest minden $x$-$x$ eset háromszor fordul elő az $y$-ok elhelyezkedése miatt. Így nem 10, hanem 30 lehetőségünk lesz a párok helyét kijelölni. Azonban $x$ és $y$ szerepe is felcserélhető (végeredményben nem különböztetjük meg az $x$-$x$-$z$-$y$-$y$ és $y$-$y$-$z$-$x$-$x$ dobásokat), ezért 2-vel osztanunk kell a lehetséges sorrendek számát, ami 15. A szabad helyek száma eggyel csökkent a párhoz képest ($6 \cdot 5 \cdot 4$). A keresett valószínűség:

$$P_{\text{két pár}} = \frac{15 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} \approx 0{,}231.$$

Végül álljon itt a kérdésre adandó válasz: pár, két pár, drill, full.





**2800** *a)* Eredetileg annak az esélye, hogy Balázs felel:

$$P_1 = \frac{1}{30} \approx 0{,}0333.$$

A strigula után a szoftver úgy veszi, mintha Balláb úr kétszer lenne a naplóba írva. Ezzel eggyel növekszik az összes esetek és eggyel a „kedvező" esetek száma is:

$$P_2 = \frac{2}{31} \approx 0{,}0645.$$

A növekedési szorzó a kettő hányadosa, $\frac{60}{31} \approx 1{,}935$-szeres. Százalékban kifejezve a növekedés 93,5%-os, illetve egy strigula (feltéve, hogy a többieknek még nincs ilyen) után a felelés valószínűsége 93,5%-kal nagyobb.

*b)* Tegyük fel, hogy Balázsnak $n$ strigulája van (a többieknek még nincs). Ekkor a felelés valószínűsége:

$$P = \frac{1+n}{30+n}.$$

A következő egyenlőtlenséget kell megoldanunk a pozitív egészek halmazán:

$$\frac{1+n}{30+n} > 0{,}5.$$

Innen:

$$n > 28.$$

*c)* Legyen Balázsnak $n$, Borisznak $m$ strigulája (másnak nincs, $n$, $m$ pozitív egészek). Ekkor:

$$P_{\text{Balázs}} = \frac{1+n}{30+n+m}, \quad P_{\text{Borisz}} = \frac{1+m}{30+n+m}.$$

A feltétel szerint azt akarjuk, hogy:

$$\frac{1+n}{30+n+m} > 0{,}2 \quad \text{és} \quad \frac{1+m}{30+n+m} > 0{,}3.$$

Átalakítva mindkét egyenlőtlenséget és megszabadulva a tizedes törtektől, ezt kapjuk:

$$4n - m > 25 \quad \text{és} \quad 7m - 3n > 80.$$

Mit kezdhetünk két egyenlőtlenséggel? Alapvetően két választási lehetőségünk van: próbálkozunk vagy rajzolunk. Kezdjük a próbálkozással! Segít, ha $m$-et két $n$-es kifejezés közé szorítjuk:

$$4n - 25 > m > \frac{80+3n}{7}.$$

Az első egyenlőtlenség miatt $n > 6$. Azonban $n = 7, 8, 9, 10$-re sem kapunk megfelelő megoldást, mert a harmadik kifejezés nem kisebb az elsőnél. Végre $n = 11$-re megkapjuk az első két megoldást, $m = 17$ és 18. Készítsünk egy kis táblázatot a lehetséges $n$, $m$ párokról. Az adott $n$-hez megtalált összes $m$ értéket nem soroljuk fel, csak a legkisebbet és a legnagyobbat.

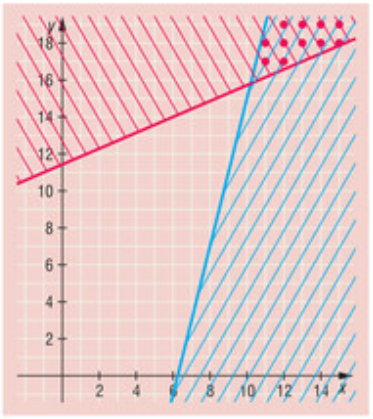
| $n$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_{\text{min.}}$ | 17 | 17 | 18 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 20 | 21 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 23 | 24 | 24 | 24 | … |
| $m_{\text{max.}}$ | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 58 | 62 | 66 | 70 | 74 | 78 | 82 | 86 | 90 | |

Ennyi felírásból már megfogalmazhatunk két szabályszerűséget is: ha $n$ egyesével növekszik, akkor $m_{\text{min.}}$ váltakozva 3-2-2-es csoportokban teszi ugyanezt, $m_{\text{max.}}$ pedig $n$ minden ugrását négyesével követi.



A másik lehetőség, ha külön-külön a két egyenlőtlenségre mint két lineáris függvényre gondolunk, és ábrázoljuk őket a koordináta-rendszerben ($n$ helyére $x$ kerül, $m$ szerepét pedig $y$ veszi át).

$$y = 4x - 25 \quad \text{és} \quad y = \frac{3}{7} \cdot x + \frac{80}{7}.$$




Satírozzuk be az egyenlőtlenségeknek megfelelő tartományokat. Mivel $n$ és $m$ csak egész értékek lehetnek, a közös részben található egész koordinátájú pontok, az ún. *rácspontok* adják a megoldást.

Akárhogyan is oldjuk meg a feladatot, végtelen sok megoldást kapunk Balázs és Borisz strigulái számára, a megadott határokon belül.

*Megjegyzés:* Oldjuk meg úgy is a feladatot, ha azt keressük, hogy mikor kisebb a fiúk felelésének valószínűsége a megadott 0,2 és 0,3 értékeknél.

*d)* Jelölje $N$ a Jolán osztálytársainak kiosztott strigulákat. Ekkor az ő felelésének valószínűsége:

$$P = \frac{1}{30 + N}.$$

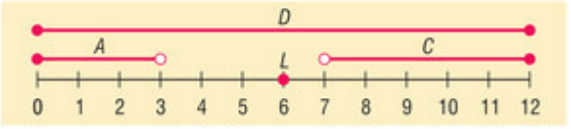
Ezt szeretnénk 0,01 alá csökkenteni:

$$\frac{1}{30 + N} < 0{,}01.$$

Egyszerű átalakításokkal: $N > 70$.

## Vegyes feladatok – megoldások

**2801** *a)* és *b)* esetén a számegyenes és a megadott események ábrázolása a rajzon látható.




*c)* Biztos esemény: $D$, lehetetlen esemény: $B$.

**2802** *a)* Hatos dobások száma: {0; 1; 2; 3; 4; 5}.

*b)* A dobott számok összege: {5; 6; 7; …, 30}.

*c)* $A$: lehetetlen (hatos), $B$: biztos (mindkettő), $C$: lehetetlen (dobott összeg), $D$: biztos (hatos).

**2803** *a)* $C$ és $D$.

*b)* $\overline{A}$ = {legalább 16-ot dobunk}; $\overline{B}$ = {páratlant dobunk}; $\overline{C}$ = {prímet vagy 1-est dobunk}; $\overline{D}$ = {összetett számot vagy 1-est dobunk}.

*c)* $A + \overline{D}$ = {1; 2; 3; …; 14; 15; 16; 18; 20};

$\overline{A} \cdot B \cdot C$ = {16; 18; 20};

$\overline{B + C}$ = {1; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19}.

*d)* $\overline{C} \cdot \overline{D} = \overline{C + D}$.

**2804** *a)* Bármely kettő kizárja egymást.

*b)* $\overline{A \cdot B \cdot C}$ = biztos esemény; $A \cdot B + C = C$; $A \cdot (B + C)$ = lehetetlen esemény.

*c)* A pirossal jelölt esemény = $\overline{A + B + C}$.





**2805** –

**2806** *a)* 3 éve: 0,17; 2 éve: 0,19; tavaly: 0,18; *b)* még 64-et.

**2807** $\frac{8}{20}=0{,}4$.

**2808** $\frac{5}{45}=0{,}\dot{1}$.

**2809** $\frac{3!}{5!}=0{,}05$.

**2810** *a)* $\frac{29}{134}\approx 0{,}216$; *b)* $\frac{29\cdot 28}{134\cdot 133}\approx 0{,}04556$; *c)* $\frac{29^2}{134^2}\approx 0{,}0468$.

**2811** *a)* 1; *b)* $\frac{10}{35}\approx 0{,}29$.

**2812** *a)* $\frac{1}{6}\approx 0{,}167$; *b)* $\frac{5\cdot 1}{6^2}\approx 0{,}1389$; *c)* $\frac{5^{n-1}\cdot 1}{6^n}$.

**2813** *a)* $\frac{2}{25}=0{,}08$; *b)* $\frac{51}{54}\approx 0{,}944$.

**2814** *a)* $1-\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=0{,}5$; *b)* $\frac{6}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}\approx 0{,}000198$.




Kiadja a Mozaik Kiadó, 6723 Szeged, Debreceni u. 3/B. Telefon: (62) 470-101, 554-664
E-mail: kiado@mozaik.info.hu • Honlap: www.mozaik.info.hu • Felelős kiadó: Török Zoltán
Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben, Gyulán • Felelős vezető: Fekete Viktor
Terjedelem: 26,10 (A/5) ív • 2015. május • Tömeg: 520 g • Raktári szám: MS-2322