I. Síkgeometria

Bevezetés a síkgeometriába

Szakaszok; sokszögek átlói

1. A szakasz kétszereséből az eredeti szakaszt a szakaszfelező merőleges és a kétszeres szakasz metszéspontjának megjelölésével kaphatjuk. A felezéspont és a kétszeres szakasz bármelyik végpontja meghatározza a szerkesztendő szakaszt.

2. A $3m - 2n$ szakasz csak akkor szerkeszthető, ha $3m - 2n \geq 0 \Rightarrow m \geq \frac{2}{3}n$. Egyenlőség esetén a keresett szakasz 0 hosszúságú.

3. Legyen a két szakasz összege $a + b$, különbsége $a - b$ és $a + b > a - b$! Az összeg- és különbségszakasz összege a nagyobb szakasz kétszeresét adja ($a + b + a - b = 2a$), így ennek felezésével a nagyobb szakaszhoz jutunk. Az összeg- és különbségszakasz különbsége a kisebb szakasz kétszeresét adja ($a + b - (a - b) = 2b$), így ennek felezésével a kisebb szakaszhoz jutunk.

4. Legyen a két adott szakasz $2a + b$ és $2a - b$! $2a + b + 2a - b = 4a \Rightarrow$ A $4a$ szakasz felének felezésével az egyik szakaszhoz jutunk. $2a + b - (2a - b) = 2b \Rightarrow$ A $2b$ szakasz felezésével a másik szakaszhoz jutunk.

5. $CD = CB + BD \Rightarrow BD = CD - CB = 8\text{ cm}$; $AD = AB + BD = 10\text{ cm} + 8\text{ cm} = \underline{\underline{18\text{ cm}}}$.

6. *a)* $AC + BD < AB$ miatt a pontok A; C; D; B sorrendben helyezkednek el.
$CD = AB - AC - BD = \underline{\underline{14\text{ m}}}$;

b) $AC + BD > AB$ miatt a pontok A; D; C; B sorrendben helyezkednek el.
$DC = AC + BD - AB = \underline{\underline{4{,}7\text{ m}}}$.

7. $AB = 5\text{ cm} \Rightarrow F_1B = \frac{5}{2}\text{ cm}$; $BC = 17\text{ cm} \Rightarrow BF_2 = \frac{17}{2}\text{ cm}$; $F_1F_2 = F_1B + BF_2 = \underline{\underline{11\text{ cm}}}$.

8. Legyen az AB szakasz felezőpontja F_1, az AC szakasz felezőpontja pedig F_2.

a) **1. eset:** B elválasztja A-t és C-t. $AF_1 = 50\text{ m}$; $AF_2 = 80\text{ m}$;
$AF_2 = AF_1 + F_1F_2 \Rightarrow F_1F_2 = AF_2 - AF_1 = \underline{\underline{30\text{ m}}}$.

2. eset: A elválasztja B-t és C-t. $AF_1 = 50\text{ m}$; $F_2A = 80\text{ m}$;
$F_1F_2 = F_1A + AF_2 = \underline{\underline{130\text{ m}}}$.

b) **1. eset:** C elválasztja A-t és B-t. $AF_1 = \frac{a}{2}$; $AF_2 = \frac{b}{2}$;
$AF_2 + F_2F_1 = AF_1 \Rightarrow F_2F_1 = AF_1 - AF_2 = \underline{\underline{\frac{a-b}{2}}}$. C és F_1 sorrendje nem befolyásolja a megoldást.

2. eset: A elválasztja B-t és C-t. $AF_1 = \frac{a}{2}$; $F_2A = \frac{b}{2}$; $F_2A + AF_1 = F_2F_1 = \underline{\underline{\frac{a+b}{2}}}$.

I

9. $AC = AB + BC = a + b$; $\quad AF = \frac{1}{2} \cdot AC = \underline{\underline{\frac{a+b}{2}}}$.

10. $AP : PB = 2:3 \Rightarrow 2x + 3x = 90\,\text{m} \Rightarrow x = 18\,\text{m}$; $\quad \underline{\underline{AP = 36\,\text{m}}}$; $\quad \underline{\underline{PB = 54\,\text{m}}}$.

11. $AP : PB = b : c \Rightarrow b \cdot x + c \cdot x = a \Rightarrow x = \frac{a}{b+c}$; $\quad \underline{\underline{AP = b \cdot \frac{a}{b+c}}}$; $\quad \underline{\underline{PB = c \cdot \frac{a}{b+c}}}$.

12. Jelöljük a felezőpontot F-fel, a $2:3$ arányú osztópontot G-vel! $AF = FB = \frac{35}{2}\,\text{m}$;

$AG : GB = 2:3 \Rightarrow 2x + 3x = 35\,\text{m} \Rightarrow x = 7\,\text{m} \Rightarrow AG = 14\,\text{m}$;

$AG + GF = AF \Rightarrow GF = AF - AG = \underline{\underline{3\frac{1}{2}\,\text{m}}}$.

13. Jelöljük a felezőpontot F-fel, a $\frac{2}{3} : \frac{4}{15}$ arányú osztópontot G-vel!

$AF = FB = \frac{5,6}{2}\,\text{m} = 2,8\,\text{m}$; $\quad AG : GB = \frac{2}{3} : \frac{4}{15} \Rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{4}{15}x = 5,6\,\text{m} \Rightarrow x = 6\,\text{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow AG = 4\,\text{m}$; $\quad AG = AF + FG \Rightarrow FG = AG - AF = \underline{\underline{1,2\,\text{m}}}$.

14. $AC : CB = 2:5 \Rightarrow 2x + 5x = 42\,\text{cm} \Rightarrow x = 6\,\text{cm} \Rightarrow AC = 12\,\text{cm}$; $\quad AD : DB = 3:4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 4x = 42\,\text{cm} \Rightarrow x = 6\,\text{cm} \Rightarrow AD = 18\,\text{cm}$; $\quad AD = AC + CD \Rightarrow CD = AD - AC = \underline{\underline{6\,\text{cm}}}$.

15. $AC = AB + BC$; $\quad DB = DC + CB = -CD - BC$; $\quad AD = AB + BC + CD$;

$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC =$

$= AB \cdot CD + (AB + BC) \cdot \{-CD - BC\} + (AB + BC + CD) \cdot BC =$

$= AB \cdot CD - AB \cdot CD - BC \cdot CD - AB \cdot BC - BC^2 + AB \cdot BC + BC^2 + CD \cdot BC = 0.$

A feladat általánosítható. A pontok más sorrendben való elhelyezkedésekor is fennáll az előjeles szakaszok között felírt összes egyenlőség. Például A, D, C, B sorrend esetén:

$AC = AB - CB = AB + BC$; $\quad DB = DC + CB = -CD - BC$; $\quad AD = AB - CB - DC =$

$= AB + BC + CD$.

16. $AC = AB + BC$; $\quad BD = BC + CD$; $\quad AD = AB + BC + CD$.

(1) $AC^2 \cdot BD + CD^2 \cdot AB = (AB + BC)^2 \cdot (BC + CD) + CD^2 \cdot AB =$

$= (AB^2 + 2AB \cdot BC + BC^2) \cdot (BC + CD) + CD^2 \cdot AB =$

$= AB^2 \cdot BC + AB^2 \cdot CD + 2AB \cdot BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD + BC^3 + BC^2 \cdot CD + CD^2 \cdot AB.$

(2) $BC^2 \cdot AD + AB \cdot BD \cdot AD = BC^2 \cdot (AB + BC + CD) + AB \cdot (BC + CD) \cdot (AB + BC + CD) =$

$= AB \cdot BC^2 + BC^3 + BC^2 \cdot CD + (AB \cdot BC + AB \cdot CD) \cdot (AB + BC + CD) =$

$= AB \cdot BC^2 + BC^3 + BC^2 \cdot CD + AB^2 \cdot BC + AB^2 \cdot CD + AB \cdot BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD + AB \cdot CD^2 =$

$= AB^2 \cdot BC + AB^2 \cdot CD + 2AB \cdot BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD + BC^3 + BC^2 \cdot CD + CD^2 \cdot AB.$

(1) és **(2)** összefüggések jobb oldala egyenlő, tehát az állítás igaz.

17. *a)* 4 pont esetén $\frac{4 \cdot 3}{2} = \underline{\underline{6}}$ lehetséges egyenes van. *b)* 5 pont esetén $\frac{5 \cdot 4}{2} = \underline{\underline{10}}$ lehetséges egyenes van. *c)* 212 pont esetén $\frac{212 \cdot 211}{2} = \underline{\underline{22\,366}}$ lehetséges egyenes van. *d)* n pont esetén $\underline{\underline{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}}$ lehetséges egyenes van. Bármely két pont egyetlen egyenest határoz meg, mivel semelyik három nincs egy egyenesen. Annyi egyenes van, ahányféleképpen n pontból 2-t ki lehet választani.

18. A kiválasztott csúcsból önmagába és a két szomszédjába nem indul átló. Az egy csúcsból induló átlók száma: *a)* $5-3=\underline{\underline{2}}$; *b)* $16-3=\underline{\underline{13}}$; *c)* $\underline{\underline{n-3}}$.

19. *a)* Az egyik csúcsból kiinduló 2 átló $\underline{\underline{3}}$ db háromszöget hoz létre.

b) Az egy csúcsból kiinduló átlók száma $12-3=9$. Az 1. átló 1 db háromszöget és egy tizenegyszöget hoz létre a tizenkétszögből. A 2. átló újabb háromszöget és egy tízszöget, a 3. átló a 3. háromszöget és egy kilencszöget, ... a 9. átló a 9. háromszöget és még egy háromszöget, azaz összesen $\underline{\underline{10}}$ db-ot hoz létre.

c) $\underline{\underline{(n-2)}}$ db háromszög keletkezik.

20. Az n oldalú konvex sokszög egy csúcsából $(n-3)$ db átló húzható. $n-3=12 \Rightarrow \underline{\underline{n=15}}$.

21. Az n oldalú konvex sokszöget az egy csúcsból induló átlók $(n-2)$ db háromszögre bontják. $n-2=18 \Rightarrow \underline{\underline{n=20}}$.

22. $n+(n-3)=17 \Rightarrow \underline{\underline{n=10}}$.

23. Az n oldalú sokszög egy csúcsából $(n-3)$ db átló indul. n csúcsból $n\cdot(n-3)$ db átló indul, de így minden átlót kétszer számoltunk, tehát az összes átlók száma: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$. A feltétel szerint: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=27$. Ebből a pozitív megoldás $\underline{\underline{n=9}}$.

24. *a)* Egy kiszemelt gyerek minden társával helyet cserélhet, tehát $\underline{\underline{6}}$ cserepartnere lehet.

b) 1 játékos 6 helyre cserélhet. 7 játékos $7\cdot 6=42$ helyre, de minden cserében ketten szerepelnek, így a valóságos cserék száma: $\frac{7\cdot 6}{2}=\underline{\underline{21}}$.

25. Az n oldalú konvex sokszög átlóinak száma $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

A feltétel szerint: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=6n$. Ebből a pozitív megoldás $\underline{\underline{n=15}}$.

26. Az n oldalú konvex sokszög átlóinak száma $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

A feltétel szerint: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=n$. Ebből a pozitív megoldás $\underline{\underline{n=5}}$.

Szögek, szögpárok

27. $45°=90°:2$, tehát $\measuredangle$-et kell felezni.

A szabályos háromszög mindhárom szöge 60°, tehát szabályos háromszöget kell szerkeszteni.

$30°=\frac{1}{2}\cdot 60°$, tehát 60°-os szöget kell felezni. $22,5°=\frac{1}{2}\cdot 45°$, tehát 45°-os szöget kell felezni.

$15°=\frac{1}{2}\cdot 30°=\frac{1}{4}\cdot 60°$, tehát a 60°-os szög felét kell felezni.

I

28. A 90°-os és a 60°-os szögekből szögfelezéssel és összeadással többféleképpen is szerkeszthetők a kérdéses szögek, például: $105° = 60° + \frac{1}{2} \cdot 90°$; $52,5° = \frac{1}{2} \cdot 60° + \frac{1}{4} \cdot 90°$; $75° = \frac{1}{2} \cdot (60° + 90°)$; $67,5° = \frac{3}{4} \cdot 90°$; $135° = \frac{3}{2} \cdot 90°$.

29. Szerkesztési feladat, megoldását az olvasóra bízzuk.

30. Legyen $\alpha + \beta = \delta$ az egyik, $\alpha - \beta = \varepsilon$ a másik megadott szög! Az értelmezés miatt $\alpha > \beta$ és $\delta > \varepsilon$. A két egyenlet összegéből $\alpha = \frac{\delta + \varepsilon}{2} \Rightarrow$ a nagyobb szög megkapható a megadott szögek összegének felezésével. Az első és a második egyenlet különbségéből $\beta = \frac{\delta - \varepsilon}{2} \Rightarrow$ a kisebb szög megkapható a megadott szögek különbségének felezésével.

31. Legyen $2\alpha + \beta = \delta$ az egyik, $2\alpha - \beta = \varepsilon$ a másik megadott szög! Az értelmezés miatt $\alpha > \frac{\beta}{2}$ és $\delta > \varepsilon$. A két egyenlet összegéből $\alpha = \frac{\delta + \varepsilon}{4} \Rightarrow$ az egyik szög megkapható a megadott szögek összegének kétszeri felezésével. Az első és a második egyenlet különbségéből $\beta = \frac{\delta - \varepsilon}{2} \Rightarrow$ a másik szög megkapható a megadott szögek különbségének felezésével.

32. $\alpha : \beta = 7:3 \Rightarrow \alpha = 7\varepsilon$ és $\beta = 3\varepsilon$. A feltétel szerint: $7\varepsilon = 3\varepsilon + 72° \Rightarrow \varepsilon = 18° \Rightarrow \alpha + \beta = \underline{\underline{180°}}$.

33. $\alpha : \beta = 5:2 \Rightarrow \alpha = 5\varepsilon$ és $\beta = 2\varepsilon$. A feltétel szerint: $5\varepsilon = 2\varepsilon + 54° \Rightarrow \varepsilon = 18° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 90°}}$ és $\underline{\underline{\beta = 36°}}$.

34. $\alpha + \beta = 216°$ és $\alpha + \frac{\beta}{2} = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 72°}}$ és $\underline{\underline{\alpha = 144°}}$.

35. $\alpha + \alpha + 10° + \alpha + 20° + \alpha + 30° = 180° \Rightarrow \alpha = 30°$. A szögek nagysága: $\underline{\underline{30°}}$; $\underline{\underline{40°}}$; $\underline{\underline{50°}}$; $\underline{\underline{60°}}$.

36. Jelöljük az első és a második sugár szögét α-val! $\alpha + 2\alpha + 4\alpha + 8\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 24°$. A keresett szögek: $\underline{\underline{24°}}$; $\underline{\underline{48°}}$; $\underline{\underline{96°}}$; $\underline{\underline{192°}}$.

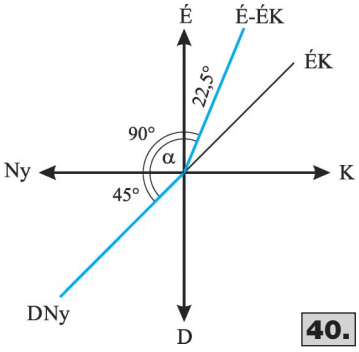
37. 0 órától 12 óráig rendre a mutatók által bezárt szög: 0°; 30°; 60°; 90°; 120°; 150°; 180°; 150° (210°); 120° (240°); 90° (270°); 60° (300°); 30° (330°) és 0° (360°).

38. 1 óra alatt a kismutató 30°-ot fordul el. *a)* negyed hét; $\frac{1}{4}$ óra alatt a 30° negyedét tette meg, így a 6-ostól számítva 7,5°-ot fordult a kismutató. A nagymutató pillanatnyi állásával $90° + 7,5° = \underline{\underline{97,5°}}$-os szöget zár be.

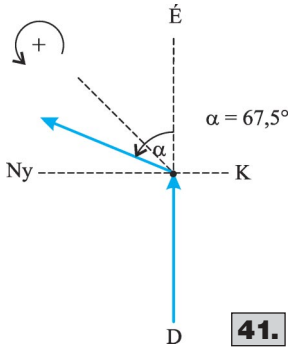
b) fél tíz; $\frac{1}{2}$ óra alatt a kismutató a 30° felét tette meg, így 15°-ot fordult. A nagymutató pillanatnyi állásával $90° + 15° = \underline{\underline{105°}}$-os szöget zár be.

c) háromnegyed öt; $\frac{3}{4}$ óra alatt a kismutató a 30° háromnegyedét tette meg, így 22,5°-ot fordult. A nagymutató pillanatnyi állásával $90° + 30° + (30° - 22,5°) = \underline{\underline{127,5°}}$-os szöget zár be.

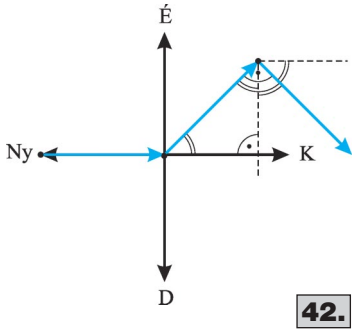
39. 1 óra alatt a kismutató 30°-ot fordul el. *a)* 2 óra 20 perc; a kismutató a 2-höz képest $\frac{1}{3} \cdot 30° = 10°$-ot, a nagymutató pedig 60°-ot haladt. A bezárt szög $60° - 10° = \underline{\underline{50°}}$.



40.



41.



42.

b) 3 óra 32 perc; a kismutató a 3-hoz képest $\frac{32}{60}\cdot 30° = 16°$-ot, a nagymutató pedig $90° + 12° = 102°$-ot haladt. A bezárt szög $102° - 16° = \underline{\underline{86°}}$.

40. Az ábra jelöléseit használva $\alpha = 45° + 90° + 22,5° = \underline{\underline{157,5°}}$.

41. $\alpha = 67,5° = 45° + 22,5° \Rightarrow$ a hajó *nyugat-északnyugati* irányban halad.

42. A repülőgép *délkelet* felé halad.

43. *a)* $21°\,36' = \underline{\underline{21,6°}}$; *b)* $49°\,9' = \underline{\underline{49,15°}}$; *c)* $51°\,24'\,18'' = \underline{\underline{51,405°}}$; *d)* $17°\,27'\,45'' = \underline{\underline{17,4625°}}$.

44. *a)* $108,5° = \underline{\underline{108°\,30'}}$; *b)* $20,7° = \underline{\underline{20°\,42'}}$; *c)* $18,3° = \underline{\underline{18°\,18'}}$; *d)* $59,7° = \underline{\underline{59°\,42'}}$;
e) $100,01° = \underline{\underline{100°\,36''}}$.

45. $\delta = \alpha = 32°\,42'$, mert csúcsszögek; $\varepsilon = \alpha = 32°\,42'$, mert egyállású szögek;
$\sigma = \alpha = 32°\,42'$, mert váltószögek; $\beta = \gamma = 180° - 32°\,42' = 147°\,18'$, mert α mellékszögei;
$\eta = \omega = 180° - 32°\,42' = 147°\,18'$, mert α társszögei.

46. $\alpha = 90° - \alpha + 16°\,28' \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 53°\,14'}}$.

47. $\alpha = \frac{1}{5}\cdot(180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 30°}}$.

48. $\alpha = 180° - \alpha \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 90°}}$.

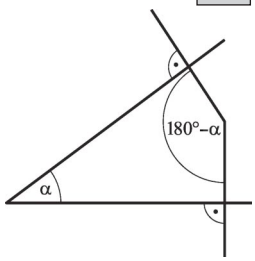
49. $\alpha = 180° - \alpha \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 90°}}$. Akkor egyenlő a szög a társszögével, ha 90°-os.

50. *a)* $\alpha = \frac{2}{3}\cdot(180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 72°}}$; *b)* $\alpha = \frac{3}{7}\cdot(180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 54°}}$;
c) $\alpha = \frac{3}{5}\cdot(180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 67,5°}}$.

51. *a)* $\alpha + (180° - \alpha) + (180° - \alpha) = 1\frac{3}{16}\cdot 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 146,25°}}$;
b) $\alpha + (180° - \alpha) + (180° - \alpha) = 1\frac{5}{9}\cdot 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 80°}}$.

52. A feltételeknek megfelelő merőleges szárú szögek nem egyenlők, hanem egymás kiegészítő szögei.
a) $\alpha = 3\cdot(180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 135°}}$; $\underline{\underline{180° - \alpha = 45°}}$;
b) $\alpha = 4\cdot(180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 144°}}$; $\underline{\underline{180° - \alpha = 36°}}$;
c) $\alpha = 3\cdot(180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 150°}}$; $\underline{\underline{180° - \alpha = 30°}}$.

52.



I

53. A feltételeknek megfelelő merőleges szárú szögek nem egyenlők, hanem egymás kiegészítő szögei. *a)* $\beta = 11\alpha \Rightarrow \alpha + 11\alpha = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 15°}}$; $\underline{\underline{\beta = 165°}}$; *b)* $\beta = \frac{1}{3}\alpha \Rightarrow \alpha + \frac{1}{3}\alpha = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 135°}}$; $\underline{\underline{\beta = 45°}}$; *c)* $\beta = \frac{7}{2}\alpha \Rightarrow \alpha + \frac{7}{2}\alpha = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 40°}}$; $\underline{\underline{\beta = 140°}}$.

54. $TCA\triangle$-ben $CTA\sphericalangle = 90° \Rightarrow TCA\sphericalangle = 90° - \alpha$. Az $ABC\triangle$-ben $\beta = 90° - \alpha$, így az előző állítással összevetve $TCA\sphericalangle = \beta$ adódik. A másik állítás hasonlóan belátható.

55. A párhuzamos szárú konvex szögek nagysága csak akkor különbözhet egymástól, ha társszögek. $\alpha + \beta = 180°$; $\alpha = \beta + 90°$; $\beta + 90° + \beta = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 45°}}$; $\underline{\underline{\alpha = 135°}}$.

56. A párhuzamos szárú konvex szögek nagysága csak akkor különböző, ha társszögek.

a) $\alpha + \beta = 180°$; $\beta = 90° + \alpha$; $\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 45°}}$; $\underline{\underline{\beta = 135°}}$.

b) $\alpha + \beta = 180°$; $\beta = 120° + \alpha$; $\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 30°}}$; $\underline{\underline{\beta = 150°}}$.

c) $\alpha + \beta = 180°$; $\beta = 75° + \alpha$; $\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 52{,}5°}}$; $\underline{\underline{\beta = 127{,}5°}}$.

57. $\delta = 1\frac{3}{5} \cdot 90° = 144°$; $ADB\sphericalangle = 180° - \delta = 36°$, mert δ-val társszögek.

$ADB\triangle$-ben $DAB\sphericalangle = 180° - 36° - \frac{144°}{2} = \underline{\underline{72°}}$.

58. $2 \cdot \frac{\beta}{2} + 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 180° \Rightarrow \sphericalangle(f_1; f_2) = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \underline{\underline{90°}}$.

59. $\sphericalangle(a; b) = 2\alpha$; felezője f_1 és $\sphericalangle(b; c) = 2\beta$; felezője f_2. $f_1 \perp f_2 \Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle(a; c) = 2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow a$ és c egy egyenest alkot.

60. A keletkezett szögek vagy csúcsszögek vagy mellékszögek vagy egyállású szögek vagy társszögek. A csúcsszögeknek közös a szögfelezőjük, a mellékszögeknek az **58.** feladat állítása szerint merőleges, az egyállású szögeknek párhuzamos, a társszögeknek pedig merőleges. Az állítás is párhuzamosságot vagy merőlegességet fogalmazott meg.

61. $f_\alpha \perp f_\beta$ miatt az **59.** feladat állítását felhasználva: $\alpha + \beta = 180°$.

A feltétel szerint: $\beta = \alpha + 130° \Rightarrow \alpha + \alpha + 130° = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 25°}}$; $\underline{\underline{\beta = 155°}}$.

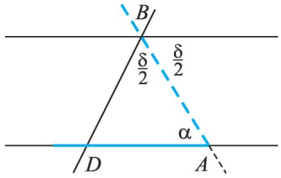
62. Az ábra jelöléseit használva: $\delta_1 = 127°\ 17'$;

B_1AC_1M négyszögben $360° = \alpha + 90° + 90° + 127°\ 17' \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 52°\ 43'}}$.

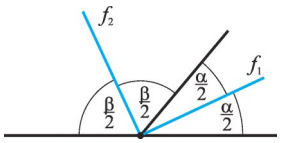
63. **1. eset:** A tompaszög az A csúcsnál van. A 63/I. ábra jelöléseivel: $\delta_2 = 47°\ 6'\ 42''$.

B_1AC_1M négyszögben $360° = \alpha + 90° + 90° + 47°\ 6'\ 42'' \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 132°\ 53'\ 18''}}$.

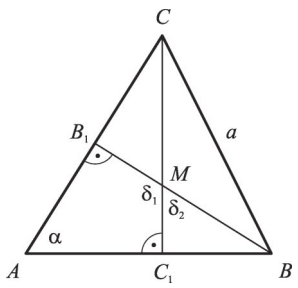
57.



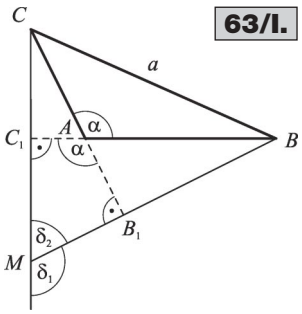
58.



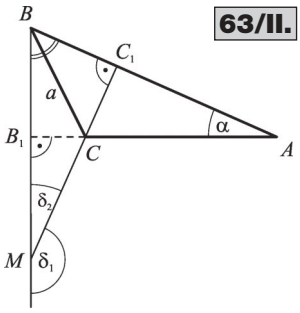
62.



2. eset: A tompaszög a C csúcsnál van. BC_1M derékszögű háromszögben $MBC_1\sphericalangle = 90° - \delta_2$;
AB_1B derékszögű háromszögben $B_1BA\sphericalangle\ (= MBC_1\sphericalangle) = 90° - \alpha$.
A két egyenlőséget összevetve: $\underline{\underline{\alpha = \delta_2 = 47°6'42''}}$.



63/I.



63/II.

Sokszögek szögösszege

64. n darab háromszög keletkezett, szögeik összege $n \cdot 180°$. E szögek közül azok, amelyeknek csúcsa az adott pont, nem tartoznak a sokszög belső szögeihez, és együtt 360°-ot alkotnak. Ezért az állítás igaz.

65. Az n oldalú konvex sokszög egy csúcsból induló átlói $(n - 2)$ db háromszögre bontják a sokszöget. A háromszögek szögei részben vagy egészen a sokszög szögeit alkotják, és a sokszög minden szöge ezen háromszögek szögeiből adódik. A sokszög belső szögeinek összege:
$(n - 2) \cdot 180°$. *a)* négyszög esetében $(4 - 2) \cdot 180° = \underline{\underline{360°}}$; *b)* nyolcszög esetében $(8 - 2) \cdot 180° = \underline{\underline{1080°}}$; *c)* tizenháromszög esetében $(13 - 2) \cdot 180° = \underline{\underline{1980°}}$; *d)* kilencvenhatszög esetében $(96 - 2) \cdot 180° = \underline{\underline{16\,920°}}$;

66. A konkáv csúcsból induló átló a konkáv négyszöget 2 db háromszögre bontja. A négyszög belső szögeinek összege egyenlő a két háromszög belső szögeinek összegével, azaz 360°-kal.

67. $(n - 2) \cdot 180° = 1620° \Rightarrow \underline{\underline{n = 11}}$. Tizenegy oldalú a sokszög.

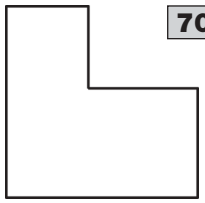
68. *a)* egyenlő szögű ötszög: $\alpha_5 = \dfrac{(5-2)\cdot 180°}{5} = \underline{\underline{108°}}$;

b) egyenlő szögű hatszög: $\alpha_6 = \dfrac{(6-2)\cdot 180°}{6} = \underline{\underline{120°}}$;

c) egyenlő szögű hétszög: $\alpha_7 = \dfrac{(7-2)\cdot 180°}{7} = \underline{\underline{128{,}57°}}$;

d) egyenlő szögű tízszög: $\alpha_{10} = \dfrac{(10-2)\cdot 180°}{10} = \underline{\underline{144°}}$;

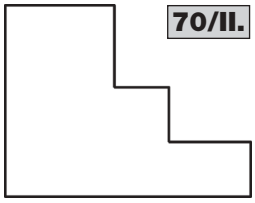
e) egyenlő szögű n-szög: $\alpha_n = \dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.



70/I.

69. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy a négyszög α, β, γ, δ szögei 90°-nál kisebbek! $\Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta < 90° + 90° + 90° + 90° = 360°$, ami ellentmond annak, hogy a négyszög belső szögeinek összege 360°.

70. Például: *a)* 70/I. ábra; *b)* 70/II. ábra.



70/II.

71. Ha bármely két szomszédos oldal merőleges egymásra, akkor a sokszögnek csak 90°-os és 270°-os szögei lehetnek. Tegyük fel, hogy az $(n + k)$ oldalú sokszögnek n db 90°-os és k db 270°-os szöge van! A belső

I

szögek összegére fennáll: $n \cdot 90° + k \cdot 270° = (n + k - 2) \cdot 180° \Rightarrow k = n - 4 \Rightarrow k$ és n azonos paritásúak, tehát az összegük (a sokszög oldalszáma) páros.

72. n oldalú sokszög belső szögeinek összege: $(n - 2) \cdot 180°$; $(n + 4)$ oldalú sokszög belső szögeinek összege: $(n + 2) \cdot 180°$. A változás $4 \cdot 180° = \underline{\underline{720°}}$ növekedés.

73. Az n oldalú sokszög belső szögeinek összege: $(n - 2) \cdot 180° = s$; $2n$ oldalú sokszög belső szögeinek összege: $(2n - 2) \cdot 180° = (2n - 4) \cdot 180° + 360° = 2 \cdot (n - 2) \cdot 180° + 360° = 2s + 360°$. A szögösszeg $(s + 360°)$-kal nőtt.

74. *a)* Tekintsük a háromszög belső és külső szögeinek összegét! $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 180° + 180° + 180°$; $\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 540°$; $\alpha' + \beta' + \gamma' = 540° - (\alpha + \beta + \gamma) = 540° - 180° = \underline{\underline{360°}}$.

b) Az *a)* pontban látott gondolatmenetet követjük. Az ötszög belső és külső szögeinek összege: $5 \cdot 180° = 900°$. A belső szögek összege: $540°$. A külső szögek összege: $900° - 540° = \underline{\underline{360°}}$.

c) Az *a)* pontban látott gondolatmenetet követjük. Az n oldalú konvex sokszög belső és külső szögeinek összege: $n \cdot 180°$; a belső szögek összege: $(n - 2) \cdot 180°$. A külső szögek összege: $n \cdot 180° - (n - 2) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = \underline{\underline{360°}}$.

75. $(n - 2) \cdot 180° + \alpha' = 1846°$; $0 < \alpha' < 180°$; $(n - 2) \cdot 180° - 1800° + \alpha' = 46°$; $(n - 12) \cdot 180° = 46° - \alpha'$. Az egyenlet bal oldala osztható 180-nal. A jobb oldal csak akkor lehet osztható, ha $\underline{\underline{\alpha' = 46°}} \Rightarrow \underline{\underline{n = 12}}$. A sokszög 12 oldalú, a külső szög 46°.

76. A feladat feltételei szerint az ötszög belső szögeinek összege: $x + 2x + 3x + 4x + 5x = 540° \Rightarrow x = 36°$. A keresett szögek: 36°; 72°; 108°; 144°; 180°. Mivel belső szög nem lehet 180°, így ilyen ötszög nem létezik.

77. Tekintsük a négyszög egyik oldalegyenesén lévő belső és külső szögek összegét! $\alpha + \alpha' = 180°$; $\beta + \beta' = 180° \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha' + \beta' = 360°$. A négyszög belső szögeinek összege 360°: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360° = \alpha + \beta + \alpha' + \beta' \Rightarrow \alpha' + \beta' = \gamma + \delta$.

78. A belső szögek összege $(n - 2) \cdot 180°$, a külső szögeké 360°. $(n - 2) \cdot 180° = 3 \cdot 360° \Rightarrow \underline{\underline{n = 8}}$ oldalú a sokszög.

79. *a)* Legyen α és γ szögfelezőjének metszéspontja M!

$AMCB$ négyszögben $AMC\sphericalangle = 360° - \frac{\alpha}{2} - \beta - \frac{\gamma}{2} = 360° - 36° - 122° - 34° = 168°$.

A két szögfelező hajlásszöge: $180° - AMC\sphericalangle = \underline{\underline{12°}}$.

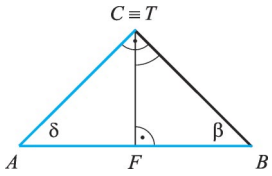
b) Legyen α és β szögfelezőjének metszéspontja P! $ABP\triangle$-ben $\delta = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180° - 36° - 61° = 83°$. A két szögfelező hajlásszöge: $\underline{\underline{\delta = 83°}}$.

80. Tekintsük át az egyes háromszögtípusok belső és külső szögeinek számát az alábbi táblázat segítségével!

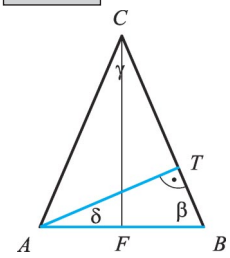
	Belső szögek			Külső szögek		
	hegyesszög	tompaszög	derékszög	hegyesszög	tompaszög	derékszög
Hegyesszögű háromszög	3 db				3 db	
Derékszögű háromszög	2 db		1 db		2 db	1 db
Tompaszögű háromszög	2 db	1 db		1 db	2 db	

A külső szögek között legfeljebb egy volt hegyesszög és legalább kettő a tompaszög.

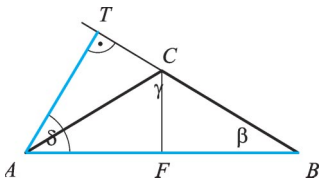
84/I.



84/II.



84/III.



81. Jelöljük a keresett sokszög oldalainak számát n-nel! Tegyük fel, hogy a sokszög minden külső szöge legalább 90°! A külső szögek összege 360°, így fennáll a $360° \geq n \cdot 90° \Rightarrow n \leq 4$ egyenlőtlenség. Tehát $n \geq 5$ esetén biztosan van a külső szögek között hegyesszög.

82. Jelöljük a háromszög alapját BC-vel, az A-nál lévő külső szögfelezőt pedig e-vel!

$\sphericalangle(e;\ AC) = \dfrac{180° - \alpha}{2}$; $\quad BCA\sphericalangle = \dfrac{180° - \alpha}{2} \Rightarrow \sphericalangle(e;\ AC) = BCA\sphericalangle$.

A két egyenlő szög egyik szára ugyanannak az egyenesnek két ellentétes irányú félegyenese, másik száruk a fenti egyenes által határolt más-más félsíkban van. $\Rightarrow$ A két szög váltószög $\Rightarrow e \parallel a$.

83. Jelöljük az A csúcsnál lévő külső szög felezőjét e-vel! $a \parallel e \Rightarrow \gamma = \dfrac{\alpha'}{2}$, mert váltószögek,

$\beta = 180° - \alpha - \dfrac{\alpha'}{2} = 180° - \alpha - \dfrac{180° - \alpha}{2} = \dfrac{180° - \alpha}{2} = \dfrac{\alpha'}{2} = \gamma \Rightarrow \beta = \gamma \Rightarrow \underline{\underline{c = b}}$.

84. $ATB\triangle$-ben: $\delta = 90° - \beta$; F az AB alap felezéspontja $\Rightarrow CF$ szimmetriatengely felezi a szárszöget és merőleges az alapra. $CFB\triangle$-ben: $\dfrac{\gamma}{2} = 90° - \beta$. Az állításokból $\delta = \dfrac{\gamma}{2}$ adódik.

85. Legyen α és β szögfelezőjének metszéspontja P, az $ABP\triangle$ P-nél lévő külső szöge δ!

$\delta = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 90° - \dfrac{\gamma}{2} < 90°$, tehát δ a szögfelezők hajlásszöge.

a) $\delta = 90° - 16,3° = \underline{\underline{73,7°}}$; *b)* $\delta = 90° - 45° = \underline{\underline{45°}}$; *c)* $\delta = 90° - 75°\,7' = \underline{\underline{14°\,53'}}$.

86. A külső szögre vonatkozó tételből: $\alpha' = \beta + \gamma$; a feladat feltétele szerint: $\alpha' = 2\beta$. A két állítást összevetve: $\beta = \gamma \Rightarrow$ a háromszög egyenlő szárú.

87. *a)* A szárszög 60° $\Rightarrow$ az alapon fekvő szögek $\dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$-osak $\Rightarrow$ a háromszög szabályos. *b)* Az alapon fekvő szögek 60°-osak $\Rightarrow$ a szárszög $180° - 2 \cdot 60° = 60° \Rightarrow$ a háromszög szabályos.

Háromszögek belső és külső szögei

88. A feladat feltételei szerint: $\alpha = 5x$; $\quad \beta = 7x$; $\quad \gamma = 5x + \dfrac{1}{18} \cdot 180° = 5x + 10°$. A háromszög belső szögeinek összege: $5x + 7x + 5x + 10° = 180° \Rightarrow x = 10° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 50°}}$; $\quad \underline{\underline{\beta = 70°}}$; $\underline{\underline{\gamma = 60°}}$.

I

89. A feladat feltételei szerint: $\alpha = 70°$; $\beta = 5x$; $\gamma = 6x$. A háromszög belső szögeinek összege: $70° + 5x + 6x = 180° \Rightarrow x = 10° \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 50°}}$; $\underline{\underline{\gamma = 60°}}$.

90. *a)* A feladat feltételei szerint: $\alpha = x$; $\beta = 2x$; $\gamma = 3x$. A háromszög belső szögeinek összege: $x + 2x + 3x = 180° \Rightarrow x = 30° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 30°}}$; $\underline{\underline{\beta = 60°}}$; $\underline{\underline{\gamma = 90°}}$.

b) A megoldásmenet *a)*-hoz hasonló: $\underline{\underline{\alpha = 45°}}$; $\underline{\underline{\beta = 60°}}$; $\underline{\underline{\gamma = 75°}}$.

c) A megoldásmenet *a)*-hoz hasonló: $\underline{\underline{\alpha = 30°}}$; $\underline{\underline{\beta = 70°}}$; $\underline{\underline{\gamma = 80°}}$.

91. A feladat feltételei szerint: $\alpha = 42° 24'$; $\beta = \gamma + 27{,}1° = \gamma + 27° 6'$. A háromszög belső szögeinek összege: $42° 24' + \gamma + 27° 6' + \gamma = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 55° 15'}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 82° 21'}}$.

92. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy a P pontból az e egyenesre két merőleges egyenes húzható! Legyen ezeknek e-vel való metszéspontja T_1 és T_2! $T_1 \neq T_2 \Rightarrow$ A két merőleges egymással bezárt szöge: $\gamma > 0$. A $T_1T_2P\triangle$ belső szögeinek összege $90° + 90° + \gamma > 180°$, ami lehetetlen. $\Rightarrow$ Nem létezhet a két merőleges.

93. Legyen $\alpha' = 87°! \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 93°}}$. Jelöljük a 27°-os szöget β-val!

A harmadik szög $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = \underline{\underline{60°}}$.

94. A feladat feltételei szerint $\alpha = 2\gamma'$; $\beta = 3\gamma'$; $\gamma = 180° - \gamma'$. A háromszög belső szögeinek összege: $2\gamma' + 3\gamma' + 180° - \gamma' = 180 \Rightarrow \gamma' = 0°$. Ilyen háromszög nem létezik.

95. A feladat feltételei szerint $\alpha' = 128° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 52°}}$; és $\beta' = 116° \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 64°}}$. A belső szögek összegéből: $\gamma = 180° - 52° - 64° = 64°$.

96. Az adott szög a szárszög külső szöge, mivel alapon fekvő szög csak hegyesszög lehet, és ahhoz tompaszög a külső szög. $\gamma' = 87° \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 93°}}$ a háromszög szárszöge. Az alapon fekvő szögek: $\alpha = \beta = \dfrac{\gamma'}{2} = \underline{\underline{43{,}5°}}$.

97. *a)* **1. eset:** Az adott szög a szárszög külső szöge: $\gamma' = 96° \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 84°}} \Rightarrow \alpha = \beta = \dfrac{\gamma'}{2} = \underline{\underline{48°}}$.

2. eset: Az adott szög az alapon fekvő egyik szög külső szöge: $\alpha' = 96° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 84°}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 84°}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \gamma = 180° - 2 \cdot 84° = \underline{\underline{12°}}$.

b) 64°-os szög csak szárszög külső szöge lehet, mivel hozzá tompaszög tartozik belső szögként.
$\gamma' = 64° \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 116°}} \Rightarrow \alpha = \beta = \dfrac{\gamma'}{2} = \underline{\underline{32°}}$.

98. Legyen α és β szögfelezőjének metszéspontja P; az $ABP\triangle$ P-nél lévő külső szöge $\delta \Rightarrow \delta = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 90° - \underline{\underline{\dfrac{\gamma}{2}}}$.

99. Jelölje A_1 az A-ból induló, B_1 a B-ből induló magasság talppontját, M a két magasságvonal metszéspontját, $\delta \leq 90°$ a két magasságvonal hajlásszögét! δ az MBA_1 derékszögű háromszögben hegyesszög. γ és δ merőleges szárú szögek. *a)*, *b)* és *d)* esetben egyenlők, mert egyaránt hegyesszögek, *c)* esetben γ tompaszög, ezért γ és δ kiegészítő szögek.

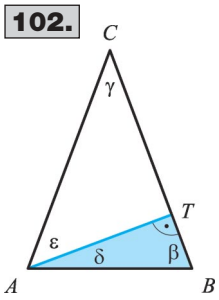
a) $\alpha = 22{,}5°$; $\beta = 75° \Rightarrow \gamma = 82{,}5° \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 82{,}5°}}$ a hajlásszög.

b) $\alpha = 15°$; $\beta = 105° \Rightarrow \gamma = 60° \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 60°}}$ a hajlásszög.

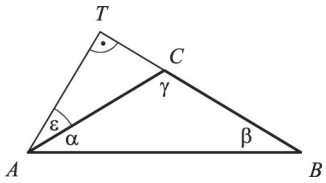
c) $\alpha = 30°$; $\beta = 45° \Rightarrow \gamma = 105° \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 75°}}$ a hajlásszög.

d) $\alpha = 90°$; $\beta = 20° \Rightarrow \gamma = 70° \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 70°}}$ a hajlásszög.

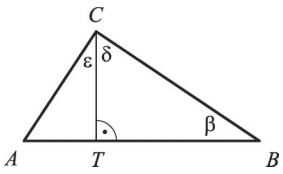
102.



103.



104.



100. *a)* Legyen a két szögfelező metszéspontja P és az $ABP\triangle$ P-nél lévő külső szöge δ!
$\delta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{47°\,42'}{2} + \frac{73°\,10'}{2} = \underline{\underline{60°\,26'}}$;
b) Legyen a magasságok talppontja A_1, illetve B_1, metszéspontjuk M! Az m_a és m_b magasságvonalak szöge a B_1MA_1C húrnégyszög M-nél levő külső szöge: $\delta = \gamma = 180° - 47°\,42' - 73°\,10' = 59°\,8'$.

101. Legyen az α szögfelezőjének a BC oldallal vett metszéspontja P. Az $APB\triangle$-ben δ a P-nél levő külső szög. $\delta = \frac{\alpha}{2} + \beta = 97°\,1'$. A hajlásszög $180° - \delta = 180° - 97°\,1' = \underline{\underline{82°\,59'}}$.

102. Az $ABC\triangle$-ben: $\alpha = \beta = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$. *a)* Az $ATB\triangle$ belső szögeinek összegéből: $\delta = 90° - \beta = \underline{\underline{15°}}$ a szárhoz tartozó magasságvonal és az alap által bezárt szög. *b)* $\varepsilon = \alpha - \delta = \underline{\underline{60°}}$ a szárhoz tartozó magasságvonal és a másik szár által bezárt szög.

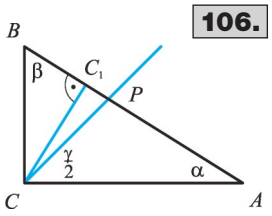
103. **1. eset:** A szárszög hegyesszög. A 102. ábra jelöléseit használva:
A feladat feltételeiből $\alpha = \beta$; $\varepsilon = \alpha - 13°$; és $\varepsilon + \delta = \alpha \Rightarrow \delta = 13°$.
$ATB\triangle$-ből $\beta = 90° - 13° = \underline{\underline{77°}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 77°}} \Rightarrow \gamma = 180° - 2 \cdot 77° = \underline{\underline{26°}}$.
2. eset: A szárszög tompaszög. A feladat feltételeiből $\alpha = \beta$ és $\varepsilon = \alpha - 13°$; $ATB\triangle$-ből $\alpha + \varepsilon + 90° + \beta = 180° \Rightarrow \alpha + \alpha - 13° + 90° + \alpha = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 34°\,20'}}$; $\underline{\underline{\beta = 34°\,20'}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \gamma = 180° - 2 \cdot 34°\,20' = \underline{\underline{111°\,20'}}$.

104. $BTC\triangle$-ből $\delta = 90° - \beta = \underline{\underline{63°}}$; $ACB\sphericalangle = 90° \Rightarrow \varepsilon = 90° - \delta = \underline{\underline{27°}}$.

105. Hegyesszögű, tompaszögű, valamint olyan derékszögű háromszög esetén, aminek a vagy b az átfogója, a vizsgált szögek merőleges szárú hegyesszögek, tehát egyenlők. Abban az esetben, ha a és b a derékszögű háromszög befogói: $\sphericalangle(a; m_b) = \sphericalangle(b; m_a) = 0°$.

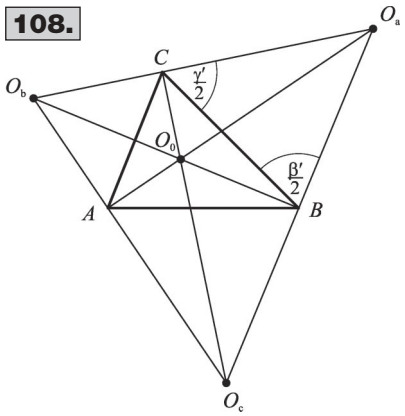
106. **1. eset:** A háromszög befogói különbözők, így feltehető, hogy
$\beta > \alpha \Rightarrow C_1 \in BP$;
$BC_1C\triangle$-ből $BCC_1\sphericalangle = 90° - \beta$. A szögfelezés miatt $BCP\sphericalangle = 45°$.
$C_1CP\sphericalangle = 45° - (90° - \beta) = \underline{\underline{\beta - 45°}}$.
2. eset: A háromszög egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow \alpha = \beta = 45° \Rightarrow$
$\Rightarrow P \equiv C_1 \Rightarrow C_1CP\sphericalangle = 0°$, amire teljesül, hogy 45°-kal kisebb, mint a 45°-os hegyesszögek.

106.

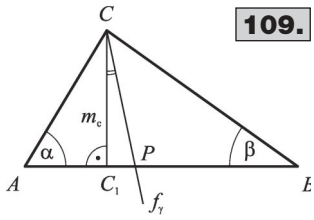


I

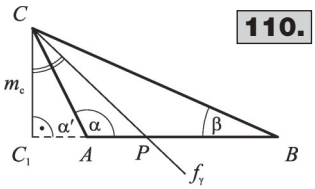
108.



109.



110.



107. Legyen α a külső szögfelezők metszéspontja, ε pedig az $AQB\triangle$ Q-nál lévő belső szöge. $AQB\triangle$-ben $\varepsilon = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\beta}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}}} < 90°$ a külső szögfelezők hajlásszöge.

108. $BCO_a\triangle$-ben $BCO_a\sphericalangle = \frac{\gamma'}{2}$ a 108. ábra jelölései szerint.

$\underline{\underline{CBO_a\sphericalangle}} = \frac{\beta'}{2} \Rightarrow CO_aB\sphericalangle = 180° - \frac{\gamma'}{2} - \frac{\beta'}{2} = 180° - \frac{360° - \alpha'}{2} = \frac{\alpha'}{2} = \underline{\underline{90° - \frac{\alpha}{2}}}$.

Hasonlóan belátható, hogy $\underline{\underline{CO_bA\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}}}$ és $\underline{\underline{AO_cB\sphericalangle = 90° - \frac{\gamma}{2}}}$.

109. Legyen a 109. ábra jelölései szerint $\alpha = 67°$; $\beta = 33° \Rightarrow \gamma = 80°$; $\alpha > \beta$ miatt $C_1 \in AP$.

$C_1CP\sphericalangle = \frac{\gamma}{2} - (90° - \alpha) = \underline{\underline{17°}}$.

110. 1. eset: $0° < \beta < \alpha < 90°$. A 109. ábra jelöléseit használva: $\beta < \alpha \Rightarrow C_1 \in AP \Rightarrow C_1CP\sphericalangle =$

$= \frac{\gamma}{2} - (90° - \alpha) = \frac{180° - \alpha - \beta}{2} - (90° - \alpha) = \underline{\underline{\frac{\alpha - \beta}{2}}}$.

2. eset: $\alpha = 90°$. $A \equiv C_1$; $C_1CP\sphericalangle = \frac{90° - \beta}{2} = \underline{\underline{\frac{\alpha - \beta}{2}}}$.

3. eset: $\alpha > 90°$ (110. ábra). $C_1CP\sphericalangle = \frac{\gamma}{2} + 90° - \alpha' = \frac{180° - \alpha - \beta}{2} + \alpha - 90° = \underline{\underline{\frac{\alpha - \beta}{2}}}$.

111. Legyen az α szögfelezőjének metszéspontja a BC oldallal P! $APB\sphericalangle$ külső szög az $APC\triangle$-ben $\Rightarrow APB\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \gamma$; $APC\sphericalangle$ külső szög az $APB\triangle$-ben $\Rightarrow APC\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \beta$;

$\left|APB\sphericalangle - APC\sphericalangle\right| = \left|\frac{\alpha}{2} + \gamma - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right| = \underline{\underline{|\gamma - \beta|}}$.

112. Az ABC egyenlő szárú háromszög γ szárszögének felezője merőlegesen felezi az AB alapot F-ben. Ez azt jelenti, hogy a szárszög az $AFC\sphericalangle = 90°$-kal egyenlő. $\underline{\underline{\gamma = 90°}}$;

$\alpha = \beta = \frac{180° - 90°}{2} = \underline{\underline{45°}}$.

113. Legyen az α szögfelezőjének metszéspontja a BC szárral P! Az $ABC\triangle$ belső szögeinek összegéből: $\alpha = \frac{180° - 36°}{2} = 72° \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 36° \Rightarrow APB\sphericalangle = ABP\sphericalangle = 72° \Rightarrow ABP\triangle$ egyenlő szárú. $ACP\sphericalangle = \gamma = 36° = \frac{\alpha}{2} = CAP\sphericalangle \Rightarrow APC\triangle$ egyenlő szárú.

114. Legyen az α szögfelezőjének metszéspontja a BC szárral P! $AP = AB \Rightarrow APB\sphericalangle = ABP\sphericalangle = \alpha$. Az $APB\triangle$ belső szögeinek összege: $\alpha + \frac{\alpha}{2} + \alpha = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 72°}} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 36°}}$. A háromszög szögei: 72°; 72°; 36°.

115. A színessel húzott szakaszok és az α szögszárai által határolt egyenlő szárú háromszögekre többször alkalmazva a háromszög külső és belső szögeire vonatkozó összefüggéseket: $\underline{\underline{\beta = 75°}}$.

116. *a)* A töröttvonal egyes szakaszai az adott szög száraival rendre 15°-kal nagyobb szögeket zárnak be. 15°; 30°; 45°; 60°; 75° az egymást követő szögek nagysága. Ezeket követné a 90°, ami lezárja a sort, mert a következő háromszögnek már nem lehet 2 db 90°-os szöge.

b) n szakasz esetén $\beta = (n-1)\cdot\alpha$. 10 egyenlő szakasz fér el, ha $90° > 9\alpha \Rightarrow \underline{\underline{10° > \alpha}}$. 10°-nál kisebbnek kell választani α-t.

c) $(n+1)$ szakasz esetén $\beta = n\cdot\alpha$. $(n+1)$ egyenlő szakasz fér el, ha $90° > n\cdot\alpha \Rightarrow \underline{\underline{\frac{90°}{n} > \alpha}}$.

117. $ADC\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow ACD\sphericalangle = ADC\sphericalangle = 67{,}5°$. $CEB\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow CEB\sphericalangle = ECB\sphericalangle = 67{,}5°$. $ADC\sphericalangle = 67{,}5° = CEB\sphericalangle \Rightarrow EDC\triangle$ egyenlő szárú, alapon fekvő szögei 67,5°-osak. Szárszöge $ECD\sphericalangle = 180° - 2\cdot 67{,}5° = \underline{\underline{45°}}$.

118. $ABD\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow ABC\sphericalangle = ADB\sphericalangle = \underline{\underline{\frac{180° - \alpha}{2}}}$. $CEB\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow CBE\sphericalangle = CEB\sphericalangle = \underline{\underline{\frac{180° - \gamma}{2}}}$. $DEB\triangle$-ben a belső szögek összege: $DBE\sphericalangle + \frac{180° - \alpha}{2} + \frac{180° - \gamma}{2} = 180° \Rightarrow DBE\sphericalangle = \underline{\underline{\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}}}$.

119. *a)* **1. eset:** $AB = AC$. Egyenlő szárú háromszögben a szárszög belső szögfelezője merőleges az alapra, külső szögfelezője pedig párhuzamos vele. Így nem jöhet létre az E pont, és az $AD = AE$ állítás sem teljesülhet.

2. eset: $AB > AC$. $AB > AC \Rightarrow B, D, C, E$ a pontok sorrendje. $AD = AE$ és AD merőleges AE miatt az $ADE\triangle$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow ADE\sphericalangle = 45°$. $ADE\sphericalangle$ külső szöge az $ABD\triangle$-nek $\Rightarrow \underline{\underline{\frac{\alpha}{2} + \beta = 45°}} \Rightarrow \underline{\gamma} = 180° - \alpha - \beta = 180° - (90° - 2\beta) - \beta = \underline{\underline{90° + \beta}}$.

3. eset: $AB < AC$. $AB < AC \Rightarrow E, B, D, C$ a pontok sorrendje. $AD = AE$ és AD merőleges AE miatt az $ADE\triangle$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow ADE\sphericalangle = 45°$. $ADE\sphericalangle$ külső szöge az $ACD\triangle$-nek $\Rightarrow \underline{\underline{\frac{\alpha}{2} + \gamma = 45°}} \Rightarrow \underline{\beta} = 180° - \alpha - \gamma = 180° - (90° - 2\gamma) - \gamma = \underline{\underline{90° + \gamma}}$.

b) $\gamma = 34°$ esetén a $\gamma = 90° + \beta$ egyenlőség nem teljesülhet, így $AB < AC$ összefüggés áll fenn az oldalak között $\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 22°}}$; $\underline{\underline{\beta = 124°}}$.

I

120. $AB = AC \Rightarrow ABC\sphericalangle = ACB\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$. $AD = AC$ és α a $DAC\triangle$ külső szöge $\Rightarrow$ $\Rightarrow ADC\sphericalangle = ACD\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$. $\underline{\underline{BCD\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90°}}$.

121. $AB + AC > BC \Rightarrow B,\ F,\ E,\ C$ a pontok sorrendje. $AB = BE \Rightarrow BEA\sphericalangle = BAE\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}$. $AC = CF \Rightarrow FAC\sphericalangle = AFC\sphericalangle = 90° - \frac{\gamma}{2}$. $ECA\triangle$ E-nél fekvő külső szöge $FEA\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}$. A külső szög tétel miatt $FEA\sphericalangle = ECA\sphericalangle + EAC\sphericalangle \Rightarrow 90° - \frac{\beta}{2} = \gamma + EAC\sphericalangle \Rightarrow$ $\Rightarrow EAC\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2} - \gamma \Rightarrow FAE\sphericalangle = FAC\sphericalangle - EAC\sphericalangle = 90° - \frac{\gamma}{2} - \left(90° - \frac{\beta}{2} - \gamma\right) =$ $= \underline{\underline{\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}}$.

122. Legyen a szögfelező metszéspontja AB-vel P; az A-ból húzott párhuzamos metszéspontja a BC egyenessel pedig Q! $PC \parallel AQ \Rightarrow BCP\sphericalangle = BQA\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$, mert egyállású szögek. $PC \parallel AQ \Rightarrow$ $\Rightarrow PCA\sphericalangle = CAQ\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$, mert váltószögek. Az állításokból $\Rightarrow CAQ\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow CA = CQ$.

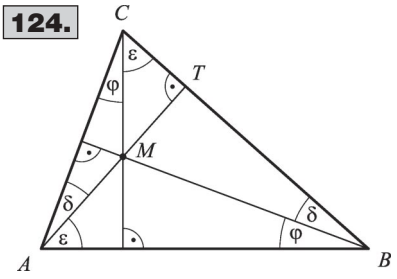
123. Legyen a szögfelező metszéspontja AB-vel Q. A $PAC\triangle$ egyenlő szárú, külső szöge $\gamma \Rightarrow$ $\Rightarrow PAC\sphericalangle = APC\sphericalangle = \delta = \frac{\gamma}{2}$. A szögfelezés miatt $BCQ\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$. Mivel Q és A a PB egyenes által határolt ugyanazon félsíkban találhatók, $APC\sphericalangle = QCB\sphericalangle$ egyállású szögek $\Rightarrow AP \parallel QC$.

124. Az $ABC\triangle$ belső szögeinek összege: $2\delta + 2\varphi + 2\varepsilon = 180° \Rightarrow \delta + \varphi + \varepsilon = 90°$. Az $ABT\triangle$ belső szögeinek összege: $\delta + \varphi + \varepsilon + ATB\sphericalangle = 180° \Rightarrow ATB\sphericalangle = 90° \Rightarrow AT \perp CB \Rightarrow AT$ magasságvonal az $ABC\triangle$-ben. Hasonlóan belátható az állítás a többi szakaszra is.

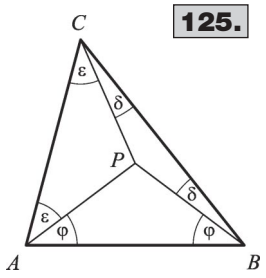
125. $AP = PB \Rightarrow APB\sphericalangle = 180° - 2\varphi$. $BP = PC \Rightarrow BPC\sphericalangle = 180° - 2\delta$. $CP = PA \Rightarrow CPA\sphericalangle = 180° - 2\varepsilon$. Az $ABC\triangle$ belső szögeinek összege: $2\varphi + 2\delta + 2\varepsilon = 180°$. Felhasználva az $\alpha = \varepsilon + \varphi$ egyenlőséget $2\delta = 180° - 2\alpha$ adódik. $BPC\sphericalangle = 180° - (180° - 2\alpha) = \underline{\underline{2\alpha}}$. Hasonlóan belátható, hogy $APB\sphericalangle = \underline{\underline{2\gamma}}$ és $CPA\sphericalangle = \underline{\underline{2\beta}}$.

126. Legyen F az AB oldal felezéspontja és $AB = 2CF$! $BCF\triangle$ és $ACF\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow$ $\Rightarrow CAF\sphericalangle = ACF\sphericalangle = \delta$ és $FCB\sphericalangle = CBF\sphericalangle = \varepsilon$. Az $ABC\triangle$ belső szögeinek összege: $2\delta + 2\varepsilon = 180° \Rightarrow \delta + \varepsilon = 90° \Rightarrow \underline{\underline{ACB\sphericalangle = 90°}}$.

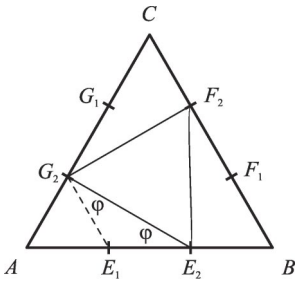
124.



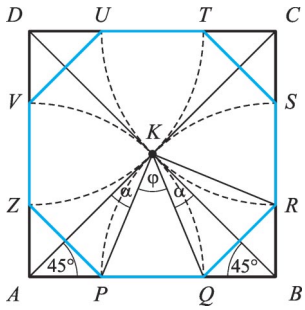
125.



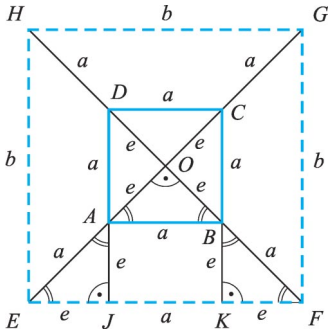
128.



129.



130.



127. Legyen az $ABC\triangle$ alapja AB, a meghosszabbítással nyert pont C^*! A háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = \alpha$; $CB = CC^* \Rightarrow CC^*B\sphericalangle = CBC^*\sphericalangle = \varepsilon$. $ABC^*\triangle$-ben $\alpha + (\alpha + \varepsilon) + \varepsilon = 180° \Rightarrow \alpha + \varepsilon = 90° \Rightarrow ABC^*\sphericalangle = 90°$.

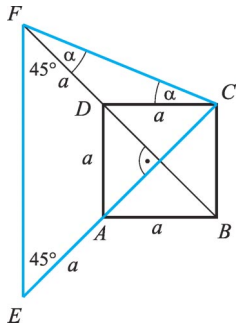
128. A harmadszakaszok egyenlősége miatt $G_2A = AE_1$; $ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow G_2AE_1\sphericalangle = 60°$. A két megállapításból következik, hogy az $AE_1G_2\triangle$ szabályos $\Rightarrow G_2E_1 = E_1A = E_1E_2 \Rightarrow GE_1E_2\triangle$ egyenlő szárú, szárszögének külső szöge $60° \Rightarrow \varphi = 30° \Rightarrow AG_2E_2\sphericalangle = 60° + 30° = 90°$. Az állítás a többi szögre is hasonlóan belátható.

129. KQ a 45°-os középponti szögű $AC : 2$ sugarú AQK körcikk húrja. KP a 45°-os középponti szögű $BD : 2 = AC : 2$ sugarú körcikk húrja. $\Rightarrow KP = KQ$ (1). Hasonlóan: $KP = KR = KS = \ldots = KZ$. $AKQ\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow \alpha + 45° = \alpha + \varphi \Rightarrow \varphi = 45°$ (2); $AKB\sphericalangle = 90° \Rightarrow \alpha = 45° : 2$ és $QKR\sphericalangle = 2 \cdot \alpha = 45°$ (3). Az (1), (2) és (3) állításokból következik, hogy a $PQR\ldots Z$ nyolcszög szabályos, mert K középpontú 45°-os forgásszimmetriája van.

130. A meghosszabbítással egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszögek keletkeznek: $ABO\triangle \cong FBK\triangle \cong EAJ\triangle \Rightarrow$ $\Rightarrow EF = EJ + JK + KF = \underline{\underline{a + 2e}}$ a keletkezett négyzet oldala.

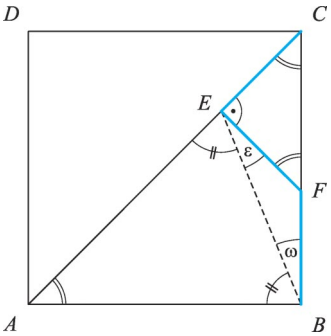
131. $FD = DC = a \Rightarrow FDC\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow DFC\sphericalangle = FCD\sphericalangle = \alpha$; $EFC\triangle$-ben $EFC\sphericalangle = 45° + \alpha$; $FCE\sphericalangle = 45° + \alpha \Rightarrow EFC\sphericalangle = FCE\sphericalangle \Rightarrow ECF\triangle$ egyenlő szárú.

131.



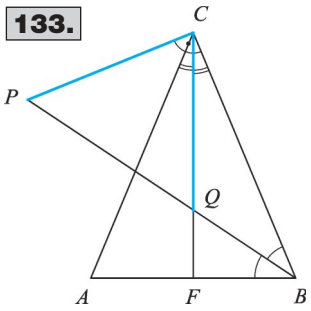
132. Az $ABC\triangle$ egyenlő szárú derékszögű:
$CAB\sphericalangle = ECF\sphericalangle = 45° \Rightarrow EFC\sphericalangle = 45° \Rightarrow \underline{\underline{CE = EF}}$;
$AB = AE \Rightarrow ABE\sphericalangle = AEB\sphericalangle = 67{,}5° \Rightarrow$
$\Rightarrow \varepsilon = \omega = 90° - 67{,}5° = 22{,}5° \Rightarrow \underline{\underline{EF = FB}}$.

132.

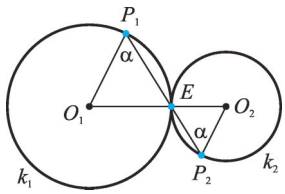


I

133.



134.



133. $PCB\triangle$ derékszögű és $PBC\sphericalangle = \frac{\beta}{2} \Rightarrow CPB\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}$. $ABC\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow CF$ merőlegesen felezi AB-t $\Rightarrow FBQ\triangle$ derékszögű $\Rightarrow FQB\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}$. $PQC\sphericalangle$ és $FQB\sphericalangle$ csúcsszögek $\Rightarrow PQC\sphericalangle = FQB\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}$. Az állításokból $CPQ\sphericalangle = PQC\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2} \Rightarrow CPQ\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow \underline{\underline{CP = CQ}}$.

134. $O_1P_1P_2\sphericalangle = O_2P_2P_1\sphericalangle = \alpha$, mert váltószögek. $O_1P_1E\sphericalangle = O_1EP_1\sphericalangle = \alpha$, mert $O_1P_1E\triangle$ egyenlő szárú. $O_2P_2E\sphericalangle = O_2EP_2\sphericalangle = \alpha$, mert $O_2P_2E\triangle$ egyenlő szárú. $O_1EP_1\sphericalangle = O_2EP_2\sphericalangle = \alpha$.
O_1, E, O_2 egy egyenesen van és P_1, P_2 az O_1O_2 egyenes által határolt más-más félsíkban van $\Rightarrow$ $\Rightarrow O_1EP_1\sphericalangle$ és $O_2EP_2\sphericalangle$ csúcsszögek $\Rightarrow$ másik száruk is egy egyenesen van $\Rightarrow P_1$, E, P_2 egy egyenesen vannak.

135. $XAC\triangle$ egyenlő szárú, külső szöge $CAB\sphericalangle = \alpha \Rightarrow CXA\sphericalangle = XCA\sphericalangle = \underline{\underline{\frac{\alpha}{2}}}$. $YBC\triangle$ egyenlő szárú, külső szöge $ABC\sphericalangle = \beta \Rightarrow BYC\sphericalangle = YCB\sphericalangle = \underline{\underline{\frac{\beta}{2}}}$. $XCY\sphericalangle = XCA\sphericalangle + ACB\sphericalangle + BCY\sphericalangle =$
$= \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{\beta}{2} = \gamma + \frac{180° - \gamma}{2} = \underline{\underline{90° + \frac{\gamma}{2}}}$.

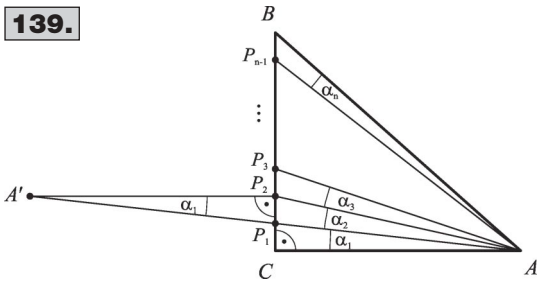
136. $DOA\sphericalangle = OAB\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$, mert váltószögek $\Rightarrow DOA\triangle$ egyenlő szárú, mert két szöge $\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{DA = DO}$. $EOB\sphericalangle = OBA\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$, mert váltószögek $\Rightarrow EBO\triangle$ egyenlő szárú, mert két szöge $\frac{\beta}{2} \Rightarrow \underline{EB = EO}$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow DE = DO + OE = DA + EB$.

Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

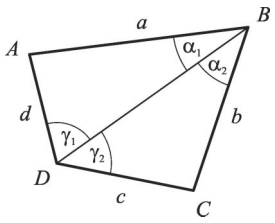
137. Legyen T a P külső pontból az e egyenesre állított merőleges talppontja! Legyen $Q \neq T$ az „e” egyenes tetszőleges pontja! A PQT derékszögű háromszögben PQ átfogó, PT befogó. Mivel a legnagyobb szöggel szemben van a legnagyobb oldal, így $PQ > PT$. Tehát a lehetséges összekötő szakaszok közül PT a legrövidebb.

138. Az $ABC\triangle$ C derékszögű csúcsának vetülete az átfogóra T. ATC derékszögű háromszögben AC átfogó nagyobb, mint AT befogó: $\underline{\underline{AC > AT}}$. BTC derékszögű háromszögben BC átfogó nagyobb, mint BT befogó: $\underline{\underline{BC > BT}}$.

139.



143.



139. Tükrözzük az $ACP_2\triangle$-et a CP_2 oldal P_1 felezéspontjára! A képe A', C képe P_2, P_2 képe C, $CAP_1\sphericalangle$ képe $P_1A'P_2\sphericalangle = \alpha_1$, $CA = b$ képe $P_2A' = b$. P_2A átfogó az $ACP_2\triangle$-ben, ezért $P_2A > b$. Az $A'AP_2\triangle$-ben $A'P_2 = b < P_2A$, ezért a vele szemben levő α_2 szög is kisebb, mint a P_2A-val szemközti α_1 szög $\Rightarrow \alpha_2 < \alpha_1$. Ezt a gondolatmenetet a további szögekre is folytathatjuk, hiszen a kérdéses háromszögben a derékszög helyett tompaszöget találunk a legnagyobb szög helyén.

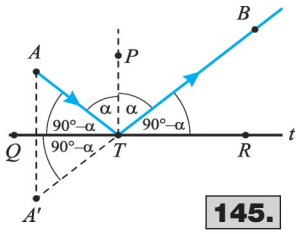
140. Legyen $AP \le PB$, ahol P az AB alap tetszőleges pontja! $\Rightarrow APC\sphericalangle \ge \perp \Rightarrow APC\triangle$-ben az $APC\sphericalangle$ a legnagyobb, így a vele szemben levő AC oldal a háromszög leghosszabb oldala: $\underline{\underline{AC > CP}}$.

141. Legyen P az AB oldal tetszőleges pontja! **1. eset:** CP merőleges AB-re $\Rightarrow CP$ befogó az APC, illetve BPC derékszögű háromszögekben. AC és BC átfogók a fenti háromszögekben $\Rightarrow$ $\Rightarrow AC >$ CP és $BC > CP$. **2. eset:** CP nem merőleges AB-re $\Rightarrow CPA\sphericalangle$ és $CPB\sphericalangle$ közül az egyik tompaszög $\Rightarrow$ a megfelelő részháromszögben vele szemben CP-nél nagyobb oldal lesz.

142. Legyen $\gamma_1 > \gamma_2$! Vegyünk fel $A_2B_2C_2\triangle$-gel egybevágó háromszöget úgy, hogy $A_1C_1 \equiv A_2C_2$ legyen. $\Rightarrow A_1C_1B^*\triangle$; $\gamma_2 < \gamma_1$ miatt C_1B^* a γ_1 szög belső tartományában halad. $C_1B^*B_1\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow C_1B^*B_1\sphericalangle = C_1B_1B^*\sphericalangle = \delta$; $A_1B^*B_1\triangle$-ben $A_1B_1B^*\sphericalangle < \delta$, $A_1B^*B_1\sphericalangle > \delta \Rightarrow A_1B^*B_1\sphericalangle$-gel szemben nagyobb oldal van, mint $A_1B_1B^*\sphericalangle$-gel szemben $\Rightarrow \underline{\underline{c_1 > c_2}}$.

143. $ABD\triangle$-ben $a > d \Rightarrow \gamma_1 > \alpha_1$; $CBD\triangle$-ben $b > c \Rightarrow \gamma_2 > \alpha_2$. $\gamma_1 + \gamma_2 > \alpha_1 + \alpha_2 \Rightarrow ADC\sphericalangle > ABC\sphericalangle$.

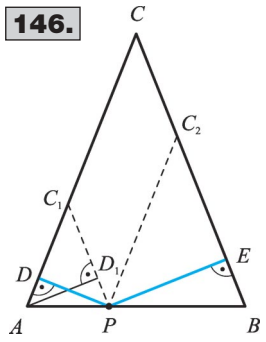
144. Legyen $e(P;\ B) \cap AC = Q$! $APB\sphericalangle$ külső szög az $APQ\triangle$-ben $\Rightarrow APB\sphericalangle = PAQ\sphericalangle + PQA\sphericalangle \Rightarrow APB\sphericalangle > PQA\sphericalangle$. $PQA\sphericalangle$ külső szög a $BQC\triangle$-ben $\Rightarrow PQA\sphericalangle = QCB\sphericalangle + CBQ\sphericalangle \Rightarrow PQA\sphericalangle > QCB\sphericalangle$. Az állításokból $\Rightarrow \underline{\underline{APB\sphericalangle > PQA\sphericalangle > QCB\sphericalangle = ACB\sphericalangle}}$.



145.

145. A tükrözés törvénye szerint a beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel: $ATP\sphericalangle = BTP\sphericalangle = \alpha$. Tükrözzük az A pontot a t egyenesre! $A'B$ egyenese kijelöli a t egyenesnek azt a pontját, ami felé irányítani kell a fénysugarat. $ATQ\sphericalangle = A'TQ\sphericalangle = 90° - \alpha$ a tükrözés miatt. $A'TQ\sphericalangle = BTR\sphericalangle = 90° - \alpha$, mert csúcsszögek $\Rightarrow$ $\Rightarrow BT$ valóban a visszavert fénysugár.

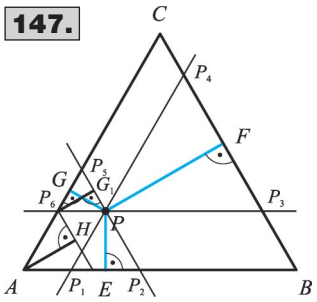
146.



146. Húzzunk párhuzamost az alap P pontjából a háromszög száraival! $\Rightarrow C_1$, C_2. $APC_1\triangle$ és $BPC_2\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow PD$ az $APC_1\triangle$ egyik szárához tartozó magassága, ami egyenlő a másik szárhoz tartozó magassággal $\Rightarrow PD = AD_1$. PE a $PC_2B\triangle$ szárhoz tartozó magassága $\Rightarrow PD + PE = AD_1 + PE$, ami az $ABC\triangle$ BC-hez tartozó magasságával egyenlő, és ez P-től függetlenül állandó.

I

147.



147. Húzzunk párhuzamost a P ponton át a háromszög oldalaival! $\Rightarrow P_1$, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 pontok; $d(P; CB) = PF$. $P_6PP_5\triangle$ szabályos $\Rightarrow d(P_6; P_2P_5) = P_6G_1 = PG$. $P_1P_2P\triangle$ egybevágó az AP_6 oldalú szabályos háromszöggel $\Rightarrow AH = PE$. $d(A; BC) = PE + PG + PF$, ami az egyenlő oldalú háromszög magassága.

148. *a)* $10 + 12 > 13 \Rightarrow$ Teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek $\Rightarrow$ létezik ilyen háromszög. *b)* $1 + 2 = 3$ miatt nem teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek $\Rightarrow$ nem létezik ilyen háromszög. *c)* $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > \frac{3}{4}$; Teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek $\Rightarrow$ létezik ilyen háromszög. *d)* $1911 + 1918 = 3829 > 3826$; Teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek $\Rightarrow$ létezik ilyen háromszög.

149. A háromszög-egyenlőtlenségek: $0{,}7 + 1{,}8 > c \Rightarrow 2{,}5 > c$; $0{,}7 + c > 1{,}8 \Rightarrow c > 1{,}1$;
A két feltételnek csak a 2 tesz eleget az egész számok közül $\Rightarrow \underline{\underline{c = 2\,\text{m}}}$.

150. **1. eset:** A háromszög alapja 3 cm, szárai 6 cm hosszúak. **2. eset:** A háromszög alapja 6 cm, szárai 3 cm hosszúak lennének, de ilyen háromszög nem létezik, mert $3 + 3 = 6$ miatt nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

151. **1. eset:** $a + \frac{b}{2} = 15\,\text{cm}$; $b + \frac{b}{2} = 6\,\text{cm} \Rightarrow b = 4\,\text{cm}$, $a = 13\,\text{cm}$.
Ilyen háromszög nem létezik, mert $4 + 4 < 13$ miatt nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.
2. eset: $a + \frac{b}{2} = 6\,\text{cm}$; $b + \frac{b}{2} = 15\,\text{cm} \Rightarrow b = 10\,\text{cm}$, $a = 1\,\text{cm}$;
$10 + 1 > 10$; $10 + 10 > 1$; $1 + 10 > 10$. Ilyen háromszög létezik, alapja $\underline{\underline{1\,\text{cm}}}$, szárai $\underline{\underline{10\,\text{cm}}}$ hosszúak.

152. A feltételek szerint $b \le a$ és $c \le a \Rightarrow b + c \le 2a \Rightarrow$ nem teljesülhet a háromszög-egyenlőtlenség a b, c, $2a$ oldalú háromszögre, tehát ilyen háromszög nem létezik.

153. A háromszög-egyenlőtlenségből kiindulva: $a + b > c \Rightarrow a + b + c > 2c \Rightarrow \frac{a+b+c}{2} > c \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\underline{s > c}}$. Hasonlóan belátható, hogy $\underline{\underline{s > a}}$ és $\underline{\underline{s > b}}$.

154. Legyen a belső pont P és $AC \cap e(P; B) = Q$! $QCB\triangle$-re alkalmazzuk a 141. feladat állítását $\Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{CP < CB}$. $ABP\triangle$-re a háromszög-egyenlőtlenség: $\underline{AP + PB > AB}$. Az aláhúzott állításokból: $AP + PB > AB = CB > CP \Rightarrow AP + PB > CP$, és ezt akartuk belátni. Hasonlóan belátható, hogy $AP + PC > PB$ és $BP + PC > AP$.

155. Legyen $AB \cap e(C; P) = X$. Háromszög-egyenlőtlenség a $PXB\triangle$-re: $PB < PX + XB$. Háromszög-egyenlőtlenség az $AXC\triangle$-re: $CX = CP + PX < AX + AC$. Adjuk össze a két egyenlőtlenséget: $PB + CP + PX < PX + XB + AX + AC$; $PB + PC < AX + XB + AC$;
$\underline{\underline{PB + PC < AB + AC}}$.

156. Háromszög-egyenlőtlenségek az $ABC\triangle$ csúcsai és a P belső pont által alkotott rész-háromszögekre: $AP + PB > AB$; $PB + PC > BC$; $PC + AP > AC$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket: $2 \cdot (AP + PB + PC) > AB + BC + AC \Rightarrow AP + PB + PC > \underline{\underline{\frac{AB + BC + AC}{2} = s}}$, tehát a belső pont csúcsoktól mért távolságösszege nagyobb a fél kerületnél. Alkalmazzuk a 155. feladat állítását az $ABC\triangle$ P belső pontjára: $PA + PB < CA + CB$; $PB + PC < AB + AC$; $PC + PA < BC + BA$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket: $2 \cdot (PA + PB + PC) < 2 \cdot (AB + BC + AC) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{PA + PB + PC < AB + BC + AC}}$, tehát a belső pont csúcsoktól mért távolságösszege kisebb a kerületnél.

157. **1. eset:** Derékszögű háromszög olyan magassággal, ahol a T magasságtalppont azonos az A derékszögű csúccsal. Az egyik befogóhoz tartozó magasság $m_c = b$. Ebben a háromszögben m_c befogó, a átfogó, ezért $m_c < a$. Adjuk össze az összefüggéseket! $2m_c < a + b \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\underline{m_c < \frac{a+b}{2}}}$.

2. eset: Hegyesszögű háromszög, tompaszögű háromszög és olyan derékszögű háromszög, amelynél a magasságtalppont nem azonos a derékszögű csúccsal. Legyen T a C csúcsból induló magasság talppontja! $BTC\triangle$-ben m_c befogó, a átfogó $\Rightarrow m_c < a$; $ATC\triangle$-ben m_c befogó, b átfogó $\Rightarrow m_c < b$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket! $2m_c < a + b \Rightarrow \underline{\underline{m_c < \frac{a+b}{2}}}$.

158. A 157. feladat állítása szerint: $m_a < \frac{b+c}{2}$; $m_b < \frac{a+c}{2}$; $\underline{\underline{m_c < \frac{a+b}{2}}}$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket: $\underline{\underline{m_a + m_b + m_c < \frac{b+c+a+c+a+b}{2} = a + b + c = K}}$.

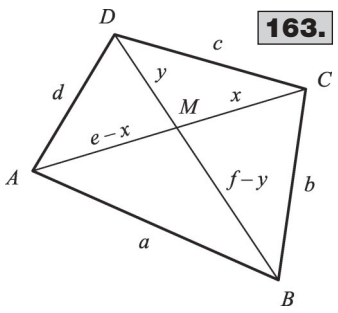
159. Háromszög-egyenlőtlenség az $ABD\triangle$-re: $AB < AD + DB$. Háromszög-egyenlőtlenség a $BDC\triangle$-re: $BC < DC + DB$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket! $AB + BC < AD + DC + 2DB \Rightarrow$
$\Rightarrow AB + BC < AC + 2BD \Rightarrow \underline{\underline{AB + BC - AC < 2BD}}$.

160. Tükrözzük az $ABC\triangle$-et az AB oldal C_1 felezőpontjára! C képe C' lesz. Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget a $CC'B\triangle$-re: $a + b > 2s_c$. Hasonlóan megmutatható, hogy $b + c > 2s_a$ és $a + c > 2s_b$. Adjuk össze a három egyenlőtlenséget: $2a + 2b + 2c > 2s_c + 2s_a + 2s_b \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\underline{a + b + c > s_c + s_a + s_b}}$.

161. Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget a súlypont és a háromszög két-két csúcsa által meghatározott háromszögekre! $ASB\triangle$-re: $\frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b > c$; $BSC\triangle$-re: $\frac{2}{3}s_b + \frac{2}{3}s_c > a$; $CSA\triangle$-re: $\frac{2}{3}s_c + \frac{2}{3}s_a > b$. Adjuk össze a három egyenlőtlenséget: $\frac{4}{3}s_a + \frac{4}{3}s_b + \frac{4}{3}s_c > a + b + c \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\underline{s_a + s_b + s_c > \frac{3}{4}(a + b + c)}}$.

162. Az állítás helyett elég belátni, hogy $CA_1 + A_1B > CA + AB$. Legyen B tükörképe az AA_1 külső szögfelezőre B^*! A tükrözés miatt $B^*A_1 = A_1B$ és $B^*A = AB$; $\underline{CA_1 + A_1B} = CA_1 + A_1B^* > CB^* = CA + AB^* = \underline{CA + AB}$. Az aláhúzott részekből következik az állítás.

163. Jelöljük az átlók metszéspontjától a csúcsokig terjedő szakaszokat a 163. ábra szerint! Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az átlók által létrehozott háromszögekre! $ABM\triangle$-re: $e - x + f - y > a$; $CDM\triangle$-re: $x + y > c$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket!
$e - x + f - y + x + y > a + c \Rightarrow e + f > a + c$. Az állítás a másik szemköztes oldalpárra hasonlóan látható be.



163.

I

164. A 163. ábra jelöléseivel: **1. eset:** Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az átlók metszéspontja és a csúcsok által létrehozott háromszögekre! $ABM\triangle$-re: $e - x + f - y > a$; $BCM\triangle$-re: $f - y + x > b$; $CDM\triangle$-re: $x + y > c$; $DAM\triangle$-re: $y + e - x > d$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket: $2e + 2f > a + b + c + d \Rightarrow \underline{\underline{e + f > \frac{1}{2}(a + b + c + d)}}$.

2. eset: Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenségeket az átlók által létrehozott háromszögekre! $ABC\triangle$-re: $a + b > e$; $BCD\triangle$-re: $b + c > f$; $CDA\triangle$-re: $c + d > e$; $DAB\triangle$-re: $d + a > f$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket: $2a + 2b + 2c + 2d > 2e + 2f \Rightarrow \underline{\underline{a + b + c + d > e + f}}$.

165. Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az $ABC\triangle$-re: $AC + CB > AB$. Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az $ACD\triangle$-re: $AD + DC > AC$. A kettőt együtt tekintve: $AB < AC + CB < AD + DC + CB$. Konvex négyszögeknél ez a gondolatmenet bármelyik oldalra megismételhető. Konkáv négyszög esetében (a konkáv szög δ) $CD < CA + AD$, a befoglaló háromszögre $CA < AB + BC$, a kettőt együtt tekintve: $\underline{\underline{CD < CA + AD < AB + BC + AD}}$.

166. Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az $ABC\triangle$-re: $\underline{\underline{AC < 6\text{ cm} + 3\text{ cm} = 9\text{ cm}}}$. Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az $ABD\triangle$-re: $\underline{\underline{BD < 6\text{ cm} + 2\text{ cm} = 8\text{ cm} < 9\text{ cm}}}$.

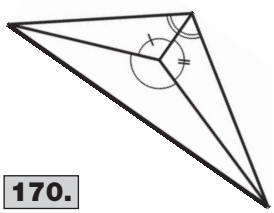
167. Legyen M az átlók metszéspontja és P egy tetszőleges pont az $ABCD$ négyszög síkjában! Háromszög-egyenlőtlenség a $DBP\triangle$-re (egyenlőség $P \in DB$ esetén): $PD + PB \geq DB = DM + MB$. Háromszög-egyenlőtlenség a $ACP\triangle$-re (egyenlőség $P \in AC$ esetén): $PC + PA \geq AC = AM + MC$. Vegyük az egyenlőtlenségek összegét: $PA + PB + PC + PD \geq MD + MB + MA + MC$. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $P \in DB$ és $P \in AC$, azaz $P \equiv AC \cap DB = M$. Tehát az átlók metszéspontjára a legkisebb a csúcsoktól mért távolságok összege.

168. Háromszög-egyenlőtlenség az $A_1A_2 \ldots A_n$ sokszög szomszédos csúcsai és a tetszőleges P pont által meghatározott i-edik háromszögre: $PA_i + PA_{i+1} > A_iA_{i+1}$, ahol $1 \leq i \leq n$ és $A_{n+1} = A_1$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket! $\sum_{i=1}^{n}(PA_i + PA_{i+1}) > \sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1} \Rightarrow 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} PA_i > K \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} PA_i > s$.

169. **1. eset:** A négy pont konvex négyszöget határoz meg. Három pont kiválasztásakor az összekötő szakaszaik között egy átló és két oldal van. Ha bármely kiválasztáskor csak hegyesszögű háromszöget kapnánk, akkor a négyszögben minden szög hegyesszög lenne, így a belső szögek összege kisebb lenne 360°-nál, ami lehetetlen.
2. eset: A négy pont konkáv négyszöget határoz meg. Ha bármely kiválasztásnál csak hegyesszögű háromszöget kapnánk, akkor a konkáv szög csúcsánál levő két szög összege kisebb lenne 180°-nál, ami lehetetlen.

170. A 170. ábrán jelzett szögek mindegyike tompaszög.

171. AF súlyvonal az $APQ\triangle$-ben. Legyen az A pont F-re vonatkozó tükörképe A'! Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az $AA'P\triangle$-re: $AP + AQ = AP + PA' > 2AF \Rightarrow \frac{AP + AQ}{2} > AF$. Hasonlóan megmutatható, hogy $\frac{BP + BQ}{2} > BF$. Adjuk össze az egyenlőtlenségeket! $\underline{\underline{AF + BF < \frac{AP + AQ + BP + BQ}{2} = \frac{(AP + PB) + (AQ + QB)}{2} = \frac{k + k}{2} = k}}$.



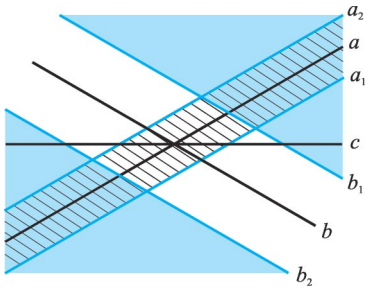
170.

Adott tulajdonságú pontok halmazának meghatározása a síkon

Ponthalmazok

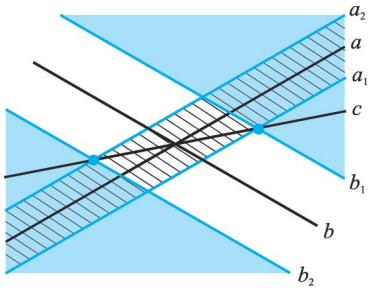
172. A keresett ponthalmazt az e egyenestől 3 cm távolságra húzódó párhuzamos egyenespár pontjai alkotják.
173. Az e egyenestől 3 cm-re levő párhuzamos egyenespár egy „sávot” jelöl ki a síkból. E „sáv” pontjai tartoznak a keresett ponthalmazba, a határpontok kivételével.
174. Az e egyenestől 3 cm-re húzódó párhuzamos egyenespár f és g. Az f és g egyenesek által létrehozott, e-t nem tartalmazó félsíkok pontjai tartoznak a ponthalmazba.
175. Az O középpontú, 3 cm sugarú kör és az egyenes közös pontja a megoldás. Nincs megoldás, ha $d(O; e) > 3$ cm; Egy megoldás van, ha $d(O; e) = 3$ cm; Két megoldás van, ha $d(O; e) < 3$ cm.
176. A P pont mint középpont köré rajzolt 3 cm sugarú k kör és az e egyenestől 2 cm-re húzódó f és g párhuzamos egyenespár közös része adja a keresett ponthalmazt. 4; 3; 2; 1 vagy 0 megoldása lehet a feladatnak.
177. A keresett ponthalmazt a P középpontú, 3 cm sugarú k kör és az e egyenestől 2 cm-re húzódó f és g párhuzamosok által meghatározott sáv közös része alkotja. A megoldások száma függ a P pont és az e egyenes helyzetétől.
178. A keresett ponthalmazt a P középpontú, 3 cm sugarú k kör külső pontjainak és az e egyenestől 2 cm-re húzódó f és g párhuzamosok által meghatározott sáv belső pontjainak közös része alkotja. A megoldások száma függ a P pont és az e egyenes helyzetétől.
179. A keresett ponthalmazt az A középpontú, 4 cm sugarú k_A kör és a B középpontú, 2,5 cm sugarú k_B kör közös része alkotja. $4 \text{ cm} + 2{,}5 \text{ cm} < 8 \text{ cm} \Rightarrow k_A \cap k_B = \emptyset \Rightarrow$ nincs olyan pont, ami mindkét feltételnek megfelel.
180. A keresett pontok az A középpontú, 6 cm sugarú kör és a B középpontú, 6 cm sugarú kör közös pontjai. 2; 1 vagy 0 megoldás lehet A és B távolságától függően.
181. A P középpontú, 2 cm sugarú kör és a Q középpontú, 3 cm sugarú kör közös része adja a keresett ponthalmazt. 2; 1 vagy 0 megoldás lehet a P és Q távolságától függően.
182. A P középpontú, 2 cm sugarú körlap és a Q középpontú, 3 cm sugarú körlap közös belső pontjai adják a keresett ponthalmazt.
183. A P középpontú, 2 cm sugarú körlap és a Q középpontú, 3 cm sugarú kör külső pontjai által alkotott ponthalmaz közös része a keresett ponthalmaz.
184. Az e egyenestől 1 cm távolságra húzódó e_1 és e_2 párhuzamos egyenespárnak az f egyenestől 1 cm-re húzódó f_1 és f_2 párhuzamos egyenespárral vett közös része adja a keresett ponthalmazt. Ha e nem párhuzamos f-fel, akkor 4 pont a megoldás. Ha e párhuzamos f-fel és $d(e; f) = 2$ cm, akkor egy egyenes a megoldás. Ha e párhuzamos f-fel és $d(e; f) \neq 2$ cm, akkor nincs megoldás.
185. A P középpontú, 3 cm belső sugarú, 4 cm külső sugarú körgyűrű belső pontjai és külső határvonala adják a keresett ponthalmazt.
186. A keresett ponthalmazt az ábrák mutatják az egyenesek elhelyezkedésétől függően. Első esetben üres halmazt, második esetben két pontot, harmadik esetben két szakaszt kapunk.
187. Az e egyenestől x távolságra levő e_1 és e_2 párhuzamos egyenespárnak az f egyenestől y távolságra levő f_1 és f_2 párhuzamos egyenespárral vett közös része a keresett ponthalmaz. Ha $e \nparallel f$, akkor 4 pont a megoldás.

186/I.

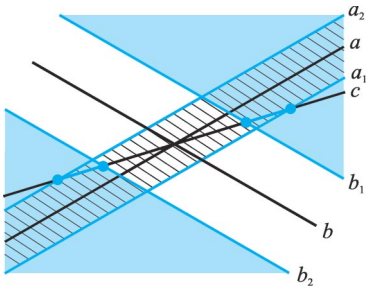


I

186/II.



186/III.



Ha $e \parallel f$ és $d(e; f) = x - y$ vagy $d(e; f) = x + y$, akkor egy egyenes a keresett ponthalmaz. Ha $e \parallel f$ és $d(e; f) \neq x - y$, $d(e; f) \neq x + y$, akkor a keresett ponthalmaz üres.

188. A ponthalmaz egy olyan 6 cm oldalú négyzet belső pontjaiból áll, melynek középpontja a merőlegesek metszéspontja, oldalai pedig párhuhamosak a merőleges egyenesekkel.

189. Egyetlen ilyen pont van, a háromszög oldalfelező merőlegeseinek közös pontja.

190. *a)* Egyetlen ilyen pont van, a négyzet középpontja. *b)* A keresett ponthalmazt a 190. ábra mutatja.

191. A keresett ponthalmaz az e és f egyenesekkel párhuzamos k egyenes, amelyre $d(f; k) = d(e; k)$. A k egyenest az e és f egyenesek középpárhuzamosának nevezzük.

192. Az a és c oldalegyenesektől egyenlő távolságra levő pontok halmaza a k_1 középpárhuzamos, a b és d oldalegyenesektől pedig a k_2 középpárhuzamos. $k_1 \cap k_2 = O$, a négyzet középpontja.

193. $g_1, g_2, g_3, g_4 \parallel e \parallel f$, $2 \cdot d(g_1; e) = d(g_1; f) \wedge 2 \cdot d(g_2; f) = d(g_2; e) \wedge 2 \cdot d(g_3; e) = d(g_3; f) \wedge$
$\wedge 2 \cdot d(g_4; f) = d(g_4; e)$

194. A keresett ponthalmaz az e és f egyenesek által meghatározott szögek szögfelezőinek pontjaiból áll.

195. Négy ilyen pont van, a három belső szögfelező, illetve egy belső és két külső szögfelező metszéspontja.

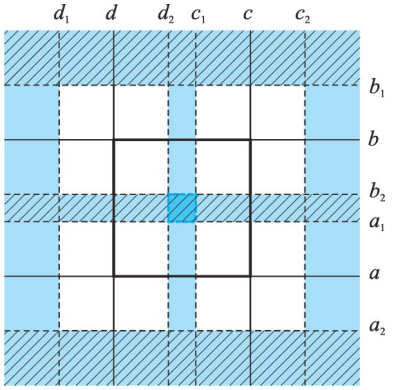
196. **1. eset:** A három egyenesnek három különböző metszéspontja van: A, B és C. Négy ilyen pont van, a megfelelő szögfelezők metszéspontjaként kapjuk meg őket: ① A beírható kör középpontja, O_0; ② A c oldalhoz hozzáírt kör középpontja, O_c; ③ A b oldalhoz hozzáírt kör középpontja, O_b; ④ Az a oldalhoz hozzáírt kör középpontja, O_a.

2. eset: A három egyenesnek egy közös pontja van: M. M az egyetlen pont, ami megfelel a feltételeknek.

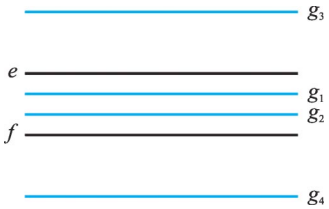
3. eset: Két egyenes párhuzamos, a harmadik metszi őket. Két ilyen pont van: ① Az A-nál keletkezett α szög szögfelezőjének az e és f egyenesek g középpárhuzamosával való metszéspontja, Q; ② Az A-nál keletkező α' szög szögfelezőjének a g egyenessel való metszéspontja, P. Megjegyzés: a B-nél keletkező szögek felezésével is ugyanezekhez a pontokhoz jutottunk volna, mivel a $BQAP$ négyszög téglalap.

4. eset: Mindhárom egyenes párhuzamos. Nincs a feltételnek eleget tevő pont.

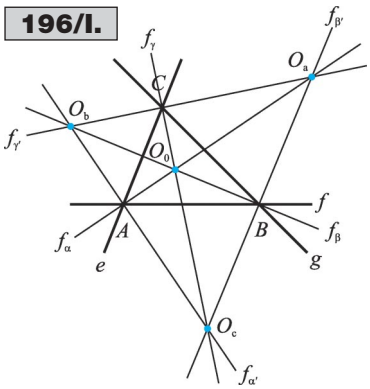
190.



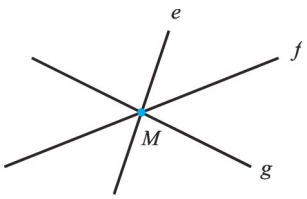
193.



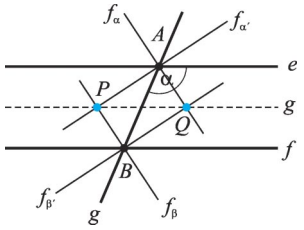
196/I.



196/II.



196/III.



197. A C pontok az AB egyenessel párhuzamosan, tőlük m távolságra levő c_1 és c_2 egyeneseken vannak, és ezen egyenesek minden pontja megfelel a feltételnek.

198. A feltételnek eleget tevő C pontok két olyan r sugarú kört alkotnak, amelyeknek a középpontja A-tól és B-től r távolságra van. A és B pont nem tartozik a keresett ponthalmazhoz, mert ebben az esetben nem jön létre háromszög.

199. f_α és $f_{\alpha'}$ szögfelezők pontjai egyenlő távol vannak AB és AC egyenesétől. f_{AB} szakaszfelező merőleges pontjai egyenlő távol vannak az A és B pontoktól. $f_\alpha \cap f_{AB} = M_1$, $f_{\alpha'} \cap f_{AB} = M_2$. M_1 és M_2 a keresett pontok.

200. A keresett egyenesek a P középpontú, 4 cm sugarú kör e-vel párhuzamos érintői.

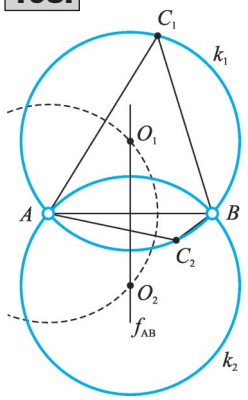
201. Vegyünk fel e tetszőleges pontján át olyan f egyenest, ami e-vel $(+\alpha)$ és olyan g egyenest, ami e-vel $(-\alpha)$ szöget zár be! Szerkesszünk P-n át párhuzamost f-fel és g-vel! $\Rightarrow$ f' és g' a keresett egyenesek.

202. A keresett egyenesek a P középpontú, 4 cm sugarú kör olyan érintői, amelyek az e egyenessel 30°-os szöget zárnak be. Négy ilyen egyenes van.

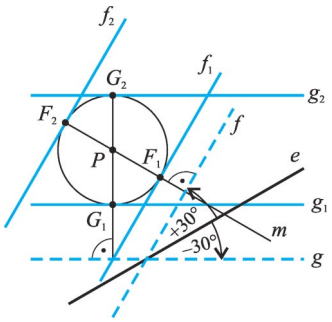
203. A keresett pontok az adott félegyenessel közös kezdőpontú félegyenesen vannak. A két félegyenes 45°-os szöget zár be egymással. Ennek a félegyenesnek minden pontja megfelelő.

204. $OPQ\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow POQ\sphericalangle = PQO\sphericalangle$; $r \parallel q \Rightarrow ROQ\sphericalangle = OQP\sphericalangle$, mert váltószögek. $POQ\sphericalangle = PQO\sphericalangle = ROQ\sphericalangle \Rightarrow OQ$ szögfelező. A szögfelező félegyenes minden pontja rendelkezik a tulajdonsággal.

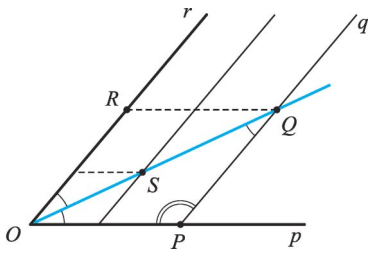
198.



202.

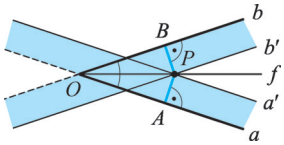


204.

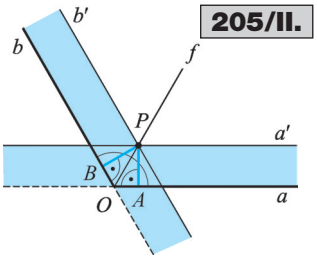


I

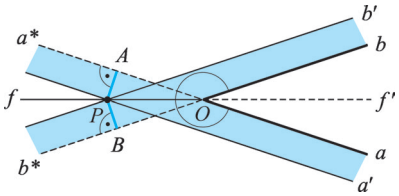
205/I.



205/II.



205/III.



205. **1. eset:** A szög konvex (205/I. és 205/II. ábra). A szögfelező P pontjára $PA = PB = \mathrm{d}(a; a') = \mathrm{d}(b; b')$. **2. eset:** A szög konkáv (205/III. ábra). A szögfelező P pontjára $PA = PB = \mathrm{d}(a'; a^*) = \mathrm{d}(b'; b^*)$.

206. A keresett ponthalmaz egy O középpontú, r sugarú kör, ahol $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$. A k kör tetszőleges P pontjának k_1, illetve k_2 körtől mért távolsága $\mathrm{d}(P; k_1) = r - r_1 = \frac{r_2 - r_1}{2}$, illetve $\mathrm{d}(P; k_2) = r_2 - r = \frac{r_2 - r_1}{2}$. Tehát a két távolság egyenlő. A k kört a k_1 és k_2 körök középkörének nevezzük.

207. $f_{AB} \cap e = M$ lehet a keresett pont. Ha AB nem merőleges e-re, akkor egyetlen pont a megoldás. Ha AB merőleges e-re és $\mathrm{d}(e; A) \neq \mathrm{d}(e; B)$, akkor nincs megoldás. Ha AB merőleges e-re és $\mathrm{d}(e; A) = \mathrm{d}(e; B)$, akkor az e egyenes minden pontja rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

208. **1. eset:** $\beta < 90°$. $P = \mathrm{e}(A; B) \cap f_{BC}$. P az AB belső pontja, ha $AB > AC$. P az AB külső pontja, ha $AB < AC$, tehát az AB szakaszon nincs a feltételnek eleget tevő pont. $P \equiv A$, ha $AB = AC$.
2. eset: $\beta = 90°$. $\mathrm{e}(A; B) \cap f_{BC} = \emptyset$, nincs ilyen pont.
3. eset: $\beta > 90°$. $P = \mathrm{e}(A; B) \cap f_{BC}$. $AC > AB$ miatt P mindig az AB külső pontja, tehát az AB szakaszon nincs a feltételnek eleget tevő pont.

209. A keresett pont az $ACB\sphericalangle$ szögfelezőjének a szemközti AB oldallal való metszéspontja. A külső szögfelező C-től különböző összes pontja a háromszögön kívül van, tehát az AB szakasszal nincs közös pontja.

210. Tekintsük a metszéspontoknál keletkezett szögek szögfelezőit! Ezek páronkénti metszéspontjai lesznek a keresett pontok. Két megoldás van.

211. Bármely körvonal öt különböző pontja rendelkezik a kívánt tulajdonsággal, mert egyenlő távol van a kör középpontjától.

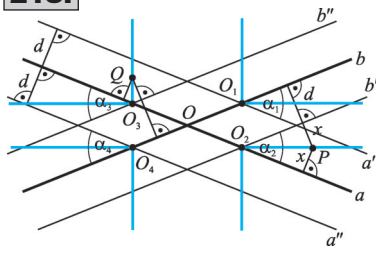
212. $f_{AB} \cap f_{CD} = O \Rightarrow O \in f_{AB}$ és $O \in f_{CD} \Rightarrow AO = BO$ és $CO = DO$. Ezekből viszont nem következik BO és DO egyenlősége, tehát O nem lehet az $ABCD$ négyszög körülírt körének középpontja.

213. Legyen a két szakasz AB és CD. $f_{AB} \cap f_{CD} = E$ lehet az egyenlő szárú háromszögek közös csúcsa. **1. eset:** AB nem párhuzamos CD-vel. $f_{AB} \cap f_{CD} \notin AB \wedge f_{AB} \cap f_{CD} \notin CD. \Rightarrow$ Egy megoldás van.
2. eset: AB nem párhuzamos CD-vel. $f_{AB} \cap f_{CD} \in CD. \Rightarrow$ Nem léteznek ilyen háromszögek.
3. eset: AB párhuzamos CD-vel. $f_{AB} \equiv f_{CD}$. f_{AB} minden pontja megfelelő a szakasz felezőpontjának kivételével.
4. eset: AB párhuzamos CD-vel. f_{AB} párhuzamos f_{CD}-vel. $\Rightarrow$ Nem léteznek ilyen háromszögek.

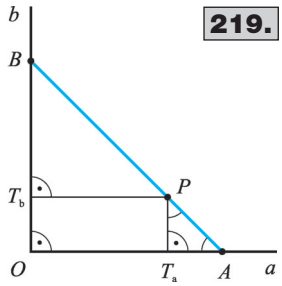
214. Vegyük az α szögfelezőjét! P-ből állítsunk merőlegest f_α-ra! A merőleges A és B pontban metszi a szög szárait. $OAB\triangle$ szögfelezője merőleges a szemközti oldalra, tehát $OA = OB$, vagyis a merőleges egyenlő szakaszokat vág le a szögszárakból.

215. A keresett pontok a szögfelező félegyenesnek és a P középpontú, 3 cm sugarú körnek a közös részét alkotják. 2, 1 vagy 0 megoldás lehet.

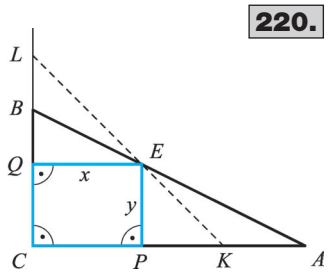
218.



219.



220.



216. **1. eset:** a egyenes nem párhuzamos b-vel. Legyen $b_1, b_2 \parallel b$ és $d(b; b_1) = d(b; b_2) = t$! $b_1 \cap a = M_1$, $b_2 \cap a = M_2$. Metsző egyenesek esetében két megoldás van.
2. eset: $a \parallel b$. Csak akkor van megoldás, ha $d(a; b) = t$. Ekkor a minden pontja megfelel a feladat követelményeinek.

217. Az e egyenestől a távolságra levő pontok halmaza az e_1 és e_2 párhuzamos egyenespár. A P ponttól a távolságra levő pontok halmaza a P középpontú, a sugarú k_P kör. Mindkét feltételnek az $e_1 \cap k_P$, illetve $e_2 \cap k_P$ pontok tesznek eleget. Két megoldás van, ha $0 \le d(e; P) < 2a$. Egy megoldás van, ha $d(e; P) = 2a$. Nincs megoldás, ha $d(e; P) > 2a$.

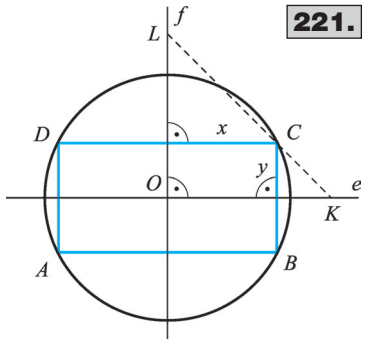
218. a-val és b-vel d távolságban párhuzamosokat húzunk. A keletkezett α_1, α_2, α_3, α_4 szögek belső és külső szögfelezőinek megjelölt része a megoldás.

219. $OA = OB = d \Rightarrow OAB\sphericalangle = 45° \Rightarrow$ ha $P \in AB$, akkor $PT_aA\triangle$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow$ $\Rightarrow PT_a = T_aA$. PT_bOT_a téglalap $\Rightarrow PT_b = OT_a$; $PT_b + PT_a = OT_a + T_aA = OA = d \Rightarrow$ a BA szakasz minden pontja megfelel a feltételeknek.

220. Felhasználjuk a 219. feladat eredményét, miszerint azok az E pontok, melyekre $x + y = \frac{k}{2}$, a $\frac{k}{2}$ befogójú CKL egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóján vannak. A szerkesztés: ① $ACB\sphericalangle$ száraira C-ből $\frac{k}{2}$ távolság felvétele $\Rightarrow K$, L. ② $KL \cap AB = E$. ③ E-ből merőleges CA-ra $\Rightarrow P$. E-ből merőleges CB-re $\Rightarrow Q$.

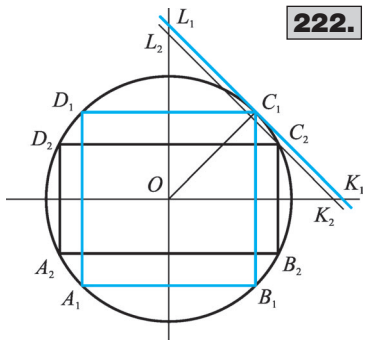
221. Felhasználjuk: A téglalap C csúcsa rajta van a körön és a $\frac{k}{4}$ befogójú OKL egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóján. A szerkesztés: ① Az adott kör két egymásra merőleges átmérője $\Rightarrow e$ és f. ② O-ból e-re és f-re $\frac{k}{4}$ szakasz felvétele $\Rightarrow K$, L. ③ KL és az adott kör közös pontja C. ④ C-t tükrözzük e-re, f-re és O-ra $\Rightarrow B$, D, A. KL és a kör helyzetétől függően két egybevágó téglalapot vagy egy négyzetet kapunk, vagy egyáltalán nincs megoldás.

221.



222. A körbe írt négyzetek és téglalapok elforgathatók úgy, hogy oldalaik párhuzamosak legyenek. A 221. feladatban láttuk, hogy az $A_1B_1C_1D_1$ téglalap kerülete $4OK_1$, az $A_2B_2C_2D_2$ téglalap kerülete pedig $4OK_2$. K_1L_1 a kör érintője, K_2L_2 pedig a szelője $\Rightarrow OK_1 > OK_2 \Rightarrow$ a négyzet kerülete nagyobb bármelyik beírt téglalap kerületénél.

222.



I

Háromszögek szerkesztése (I. rész)

223. A szerkesztés: ① AB-vel párhuzamos m_c távolságra e_1 és e_2. ② $e_1 \cap e = C_1$; $e_2 \cap e = C_2$. Ha $e \parallel$ e $(A; B)$, de d$(e;$ e$(A; B)) \neq m_c$, akkor nincs megoldás. Ha $e \parallel$ e $(A; B)$ és d$(e;$ e$(A; B)) = m_c$, akkor minden $C \in e$ pont megfelelő.

224. A szerkesztés: ① e-vel párhuzamos m_c távolságra $\Rightarrow g_1$ és g_2. ② $g_1 \cap f = C_1$; $g_2 \cap f = C_2$. ③ C_1, (ill. C_2) középpontú, a sugarú kör $\Rightarrow k_a$. $k_a \cap e = B_1; B_2$. ④ C_1, (ill. C_2) középpontú, b sugarú kör $\Rightarrow k_b$. $k_b \cap e = A_1; A_2$. ⑤ A_i, B_i , C_i pontok határozzák meg a szerkesztendő háromszöget. A megoldások száma végtelen sok vagy 4-4 egybevágó vagy 2-2 egybevágó háromszög lehet, de nulla megoldást is kaphatunk.

225. A szerkesztés: ① AB-vel párhuzamos, m_c távolságra lévő egyenes $\Rightarrow e$. ② A csúcsnál AB-re α szög; a másik szára a g egyenes. ③ $e \cap g = C$. Egy megoldás van.

226. A szerkesztés: ① $AB = c$ oldal $\Rightarrow A$, B. ② AB-vel párhuzamos, m_c távolságra lévő egyenes $\Rightarrow g$. ③ A középpontú, b sugarú kör $\Rightarrow k_A$. ④ $k_A \cap g = C$. Két különböző megoldás van, ha $b > m_c$. Egy derékszögű megoldás van, ha $b = m_c$. Nincs megoldás, ha $b < m_c$.

227. A szerkesztés: ① $AB = c$ szakasz $\Rightarrow A$, B. ② A csúcsnál AB-re α szög; a másik szára a g egyenes. ③ AB szakasz felezéspontja F. ④ F középpontú, s_c sugarú kör $\Rightarrow k_F$. ⑤ $k_F \cap g = C$. Egy megoldás van, ha $s_c > \frac{c}{2}$. Kettő, egy vagy nulla megoldás van, ha $s_c < \frac{c}{2}$ (ekkor az $FAC\triangle$-ben két oldal és a kisebbel szemben fekvő szög adott).

228. A szerkesztés: ① $AB = c$ szakasz $\Rightarrow A$, B. ② AB-vel párhuzamos m_c távolságra $\Rightarrow g$ egyenes. ③ AB szakasz felezéspontja F. ④ F középpontú, s_c sugarú kör $\Rightarrow k_F$. ⑤ $k_F \cap g = C$. Két egybevágó megoldás van, ha $s_c > m_c$. Egyetlen egyenlő szárú megoldás van, ha $s_c = m_c$. Nincs megoldás, ha $s_c < m_c$.

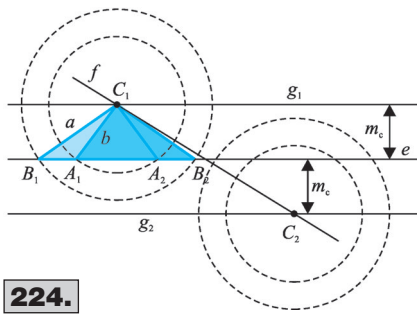
229. Adott: m_c; f_γ és β. A szerkesztés: ① β szög $\Rightarrow e, f$ és B. ② e-vel párhuzamos, m_c távolságra lévő egyenes $\Rightarrow g$. ③ $g \cap f = C$. ④ C középpontú, f_γ sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ⑤ $k_C \cap e = P$. ⑥ $PCB\sphericalangle$ tükrözése CP egyenesére $\Rightarrow h$ félegyenes. ⑦ $h \cap e = A$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.

230. A szerkesztés: ① 60°-os szög $\Rightarrow B, e, f$. ② m távolságra párhuzamos e-vel $\Rightarrow g$. ③ $f \cap g = C$. ④ C középpontú, CB sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ⑤ $k_C \cap e = A$. Egyértelműen megoldható.

231. A szerkesztés: ① A-ból merőleges e-re $\Rightarrow$ metszéspontjuk F. ② A-ban AF-re 30°-os szög az AF által határolt két félsíkban $\Rightarrow f$ és g. ③ $f \cap e = B \Rightarrow g \cap e = C$. Egyértelműen megoldható, ha $A \notin e$.

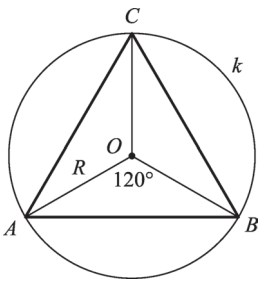
232. Adott: AB oldal egyenese, e és a középpont, M. A szerkesztés: ① M-ből merőleges e-re $\Rightarrow m$ egyenes $\Rightarrow e \cap m = F$. ② MF-re M csúccsal pozitív és negatív irányban 60°-os szög $\Rightarrow f$ és g. ③ $f \cap e = A$; $g \cap e = b$. ④ A középpontú, AB sugarú kör $\Rightarrow k_A$. ⑤ $k_A \cap m = C$. Egyértelműen megoldható, ha $M \notin e$.

233. *a)* Az egyenlő oldalú háromszög 120°-os forgásszimmetriáját felhasználva: ① O középpontú, R sugarú kör $\Rightarrow k$. ② 120°-os középponti szögek $\Rightarrow A$; B; C. Egyértelmű a megoldás. *b)* Az egyenlő oldalú háromszög 120°-os forgásszimmetriáját felhasználva: ① O_0 középpontú,

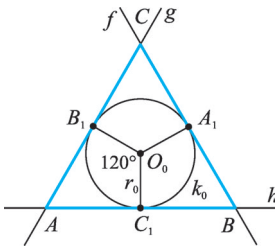


224.

233/I.



233/II.



r_0 sugarú kör $\Rightarrow k_0$. ② 120°-os középponti szögek $\Rightarrow A_1, B_1, C_1$. ③ k_0 körhöz érintő A_1-, B_1-, C_1-ben $\Rightarrow f, g, h$. ④ $f \cap g = C$; $g \cap h = A$; $f \cap h = B$. Egyértelmű a megoldás.

234. Adott: A; B és az AC szár egyenese, e. A szerkesztés: ① AB szakasz felező merőlegese $\Rightarrow f_{AB}$. ② $f_{AB} \cap e = C$. Nincs megoldás, ha e merőleges AB-re.

235. A szerkesztés: ① γ szög $\Rightarrow C$; a; b. ② γ szög felezője $\Rightarrow f_\gamma$. ③ C-től m_c távolságra merőleges egyenest állítunk f_γ -ra $\Rightarrow g$. ④ $g \cap a = A$ és $g \cap b = B$. Egyértelműen megoldható.

236. A szerkesztés: ① γ szög $\Rightarrow C$; a; b. ② γ szögfelezője $\Rightarrow f_\gamma$. ③ $\frac{c}{2}$ távolságra párhuzamos f_γ-val $\Rightarrow e, f$. ④ $e \cap a = B$; $b \cap f = A$. Egyértelműen megoldható.

237. A szerkesztés: ① α szög $\Rightarrow A$; e; f. ② A középpontú, b sugarú kör k_A. ③ $k_A \cap e = C$. ④ C középpontú, b sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ⑤ $k_C \cap f = B$. Egyértelműen megoldható.

238. A szerkesztés: ① $AB = c$ szakasz $\Rightarrow A$, B. ② AB felezőspontja és felező merőlegese $\Rightarrow F, f_{AB}$. ③ F középpontú, m_c sugarú kör $\Rightarrow k_F$. ④ $k_F \cap f_{AB} = C$. Egyértelműen megoldható.

239. A szerkesztés: ① C csúcsú derékszög $\Rightarrow e, f$. ② C középpontú, b sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ③ $k_C \cap e = A$. ④ A középpontú, c sugarú kör $\Rightarrow k_A$. ⑤ $k_A \cap f = B$. Egy megoldás van, ha $c > b$, nincs megoldás, ha $c \le b$.

240. A szerkesztés: ① $m_a = AT$ szakasz $\Rightarrow A, T$. ② T-ben merőleges AT-re $\Rightarrow e$. ③ A középpontú, c sugarú kör $\Rightarrow k_A$. ④ $k_A \cap e = B$. ⑤ AB felező merőlegese $\Rightarrow f_{AB}$. ⑥ $f_{AB} \cap e = C$. Egy megoldás van, ha $c > m_a$, nincs megoldás, ha $c \le m_a$.

241. Felhasználjuk: $SC = 2SG$. A szerkesztés: ① $AB = c$ szakasz $\Rightarrow A$, B. ② AB felező merőlegese f_{AB}. ③ A csúcshoz $BAF\sphericalangle = \delta \Rightarrow f$ félegyenes. ④ $f \cap f_{AB} = S$. ⑤ f_{AB}-re G-vel ellentétes oldalra S-ből $2SG \Rightarrow C$. $\delta < 90°$ esetén egyértelműen megoldható.

242. Legyen az AB alap felezőpontja F, valamint az f_α szögfelező és az m_c magasság metszéspontja P, szöge δ! Felhasználjuk: $PAF\sphericalangle = 90° - \delta$, $CAF\sphericalangle = 2PAF\sphericalangle = 180° - 2\delta$.
A szerkesztés: ① $AB = c$ szakasz $\Rightarrow A$, B. ② A-ban és B-ben AB-re $(180° - 2\delta)$ szög $\Rightarrow$ a szögszárak metszéspontja C. Egy megoldás van, ha $0° < 180° - 2\delta < 90° \Rightarrow 45° < \delta < 90°$.

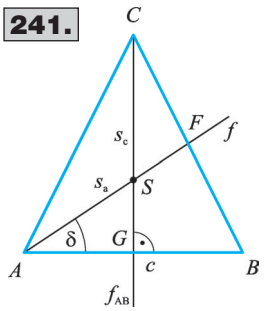
243. A szerkesztés: ① m_a; $\triangleleft$; $a \Rightarrow ATC\triangle$. ② C középpontú, a sugarú kör $\Rightarrow k_C$.
③ $k_C \cap e(T;\ C) = B$. Nincs megoldás, ha $a < m_a$. 1 derékszögű megoldás van, ha $a = m_a$. 1 hegyesszögű és 1 tompaszögű megoldás van, ha $a > m_a$.

244. A szerkesztés: ① s_a; $\frac{a}{2}$; $a \Rightarrow AFC\triangle$. ② C-t tükrözzük F-re $\Rightarrow B$. Nincs megoldás, ha $AFC\triangle$-re nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

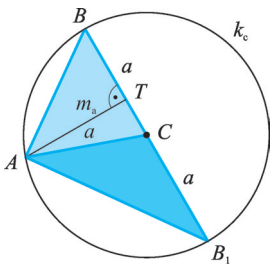
245. Adott a BC szár és a T magasságtalppont. A szerkesztés: ① T-ben merőlegest állítunk BC-re $\Rightarrow m$. ② C középpontú, CB sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ③ $k_C \cap m = A$. Ha T a BC B-n túli meghosszabbításán van vagy $B \equiv T$, akkor nincs megoldás. Ha T a BC belső pontja, akkor hegyesszögű a háromszög. Ha $T \equiv C$, akkor derékszögű a háromszög. Ha T a BC C-n túli meghosszabbításán van, akkor tompaszögű a háromszög.

246. A szerkesztés: ① $a = BC \Rightarrow B$; C. ② F a BC szakasz felezőspontja. ③ F-ben BC-re felmérjük δ-t $\Rightarrow e$. ④ C középpontú, a sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ⑤ $k_C \cap e = A$. Ha $\delta = 90°$, akkor a háromszög szabályos. Ha $\delta \neq 90°$, akkor két különböző megoldás van.

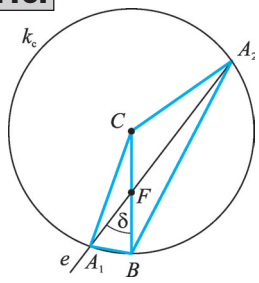
241.



243.

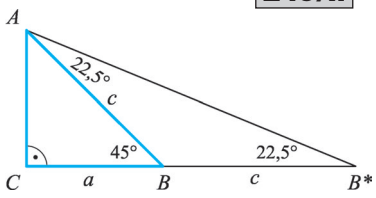


246.

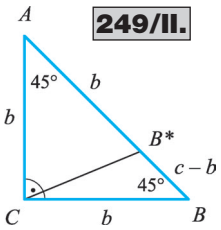


I

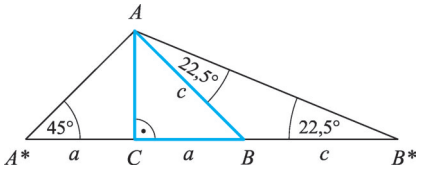
249/I.



249/II.



250.



247. A szerkesztés: ① $AB = c \Rightarrow A$; B. ② AB-re A-ban és B-ben $45° \Rightarrow e$; f. ③ $e \cap f = C$. Egyértelműen megoldható.

248. *a)* Legyen az AB átfogó felezőpontja F, egyenese e! Felhasználjuk: $AF = FB = FC$ és $FC \perp AB$. A szerkesztés: ① C-ből $\perp e$-re $\Rightarrow m$. ② $m \cap e = F$. ③ F középpontú, FC sugarú kör $\Rightarrow$ $\Rightarrow k_F$. ④ $k_F \cap e = \{A; B\}$. Egyértelműen megoldható.

b) A szerkesztés: ① B-ből $\perp f$-re $\Rightarrow m$. ② $m \cap f = C$. ③ C középpontú, CB sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ④ $k_C \cap f = A$. Egyértelműen megoldható.

249. *a)* Felhasználjuk: $AB = BB^*$; $BAB^* \sphericalangle = BB^*A \sphericalangle = \dfrac{45°}{2}$.

A szerkesztés: ① $a + c$; $\triangleleft$; $22{,}5° \Rightarrow ACB^*\triangle$. ② C középpontú, CA sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ③ $k_C \cap CB^* = B$. Egyértelműen megoldható.

b) Felhasználjuk: $AC = AB^*$; $ACB^* \sphericalangle = AB^*C \sphericalangle = 67{,}5°$; $CB^*B \sphericalangle = 112{,}5°$.

A szerkesztés: ① $(c - b)$; $45°$; $112{,}5° \Rightarrow CBB^*\triangle$. ② C középpontú, CB sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ③ $k_C \cap e(B; B^*) = A$. Egyértelműen megoldható.

250. Felhasználjuk: $AC = CB = A^*C$; $AB = BB^*$; $AA^*B^* \sphericalangle = 45°$; $AB^*A^* \sphericalangle = 22{,}5°$.

A szerkesztés: ① $K = a + a + c$; $45°$; $22{,}5° \Rightarrow AA^*B^*\triangle$. ② A-ból $\perp A^*B^*$-ra $\Rightarrow$ C. ③ C-ből B^* felé AC távolság $\Rightarrow B$. Egyértelműen megoldható.

251. **1. eset:** Az adott szög a háromszög alapon fekvő szöge, α. Felhasználjuk: $AC = CB = BB^*$; $BB^*\,C \sphericalangle = BCB^* \sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$.

A szerkesztés: ① $(a + c)$; α; $\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow$ $CAB^*\triangle$. ② CB^* felező merőlegese $\Rightarrow f$. ③ $f \cap AB^* = B$.

2. eset: Az adott szög a háromszög szárszöge, γ. Ebből az alapon fekvő szög: $\alpha = \dfrac{180° - \gamma}{2}$.

Alkalmazzuk a továbbiakban az 1. esetnél vázolt szerkesztést.

Ha az adott szög hegyesszög, akkor két megoldás van (az első és a második esetnél is egy-egy).

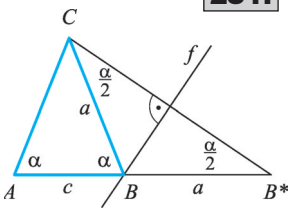
Ha az adott szög derékszög vagy tompaszög, akkor egy megoldás van (csak a második esetnél).

252. *a)* Az adott szög az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szöge, α.

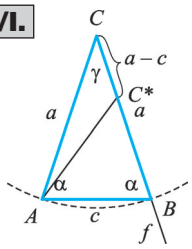
1. eset: $a > c$. Van olyan $C^* \in BC$, amelyre $AB = BC^* \Rightarrow BAC^* \sphericalangle = BC^*A \sphericalangle = 90° - \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC^*C \sphericalangle = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$. Felhasználjuk továbbá, hogy $ACB \sphericalangle = 180° - 2\alpha$.

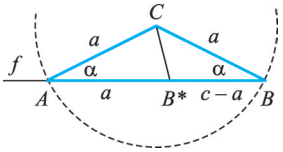
251.

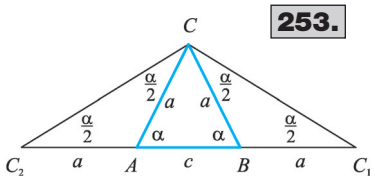


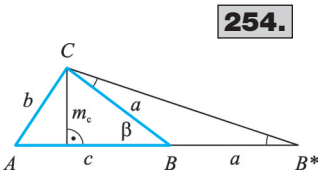
252/I.

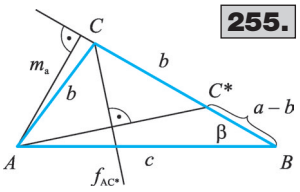


252/II.









A szerkesztés: ① $a-c$; $90°+\frac{\alpha}{2}$; $180°-2\alpha \Rightarrow AC^*C\triangle$. ② C középpontú, CA sugarú kör $\Rightarrow$ $\Rightarrow k_C$. ③ CC^* félegyenes $\Rightarrow f$. ④ $k_C \cap f = B$

2. eset: $a < c$. Van olyan $B^* \in AB$, amelyre $AC = AB^* \Rightarrow AB^*C\sphericalangle = ACB^*\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$. $\Rightarrow CB^*B\sphericalangle = 90° + \frac{\alpha}{2}$. A szerkesztés: ① $c-a$; $90°+\frac{\alpha}{2}$; $\alpha \Rightarrow B^*BC\triangle$. ② C középpontú, CB sugarú kör $\Rightarrow k_C$. ③ BB^* félegyenes $\Rightarrow f$. ④ $f \cap k_C = A$.

Ha $a = c$ és a szög 60°, akkor tetszőleges oldalú szabályos háromszög a megoldás. Ha $a = c$ és a szög nem 60°, akkor nincs megoldás.

b) Az adott szög az egyenlő szárú háromszög szárszöge, γ. Az $\alpha = \frac{180° - \gamma}{2}$ összefüggés segítségével a feladat visszavezethető az *a)* esetre.

253. Felhasználjuk: $AC_2 = AC = BC = BC_1 \Rightarrow AC_2C\sphericalangle = ACC_2\sphericalangle = BC_1C\sphericalangle = BCC_1\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.

A szerkesztés: ① $k = 2a + c$; $\frac{\alpha}{2}$; $\frac{\alpha}{2} \Rightarrow C_1C_2C\triangle$. ② CC_1 felező merőlegese $\Rightarrow f_{CC_1}$; CC_2 felező merőlegese $\Rightarrow f_{CC_2}$. ③ $f_{CC_1} \cap C_1C_2 = B$; $f_{CC_2} \cap C_1C_2 = A$. Egyértelműen megoldható, ha $\alpha < 90°$.

254. Felhasználjuk: $CB = BB^* \Rightarrow BCB^*\sphericalangle = BB^*C\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$.

A szerkesztés: ① $a + c$; $\frac{\beta}{2}$; $m_c \Rightarrow AB^*C\triangle$. ② CB^* felező merőlegese $\Rightarrow f_{CB'}$.

③ $AB^* \cap f_{CB'} = B$. Ha $AB^* \cap f_{CB'} = \emptyset$, akkor nincs megoldás.

255. Felhasználjuk: $CA = CC^*$.

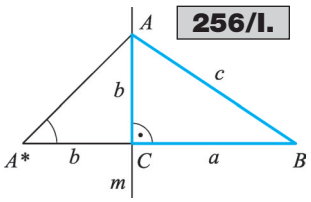
A szerkesztés: ① $a - b$; m_a; $\beta \Rightarrow ABC^*\triangle$. ② AC^* felező merőlegese $\Rightarrow f_{AC^*}$.

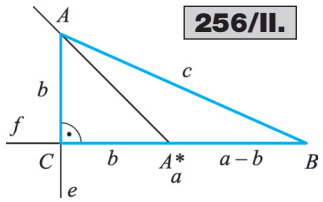
③ $f_{AC^*} \cap e(B; C^*) = C$. Ha $f_{AC^*} \cap e(B; C^*) = \emptyset$ vagy $f_{AC^*} \cap e(B; C^*)$ rajta van C^*B félegyenesen, akkor nincs megoldás.

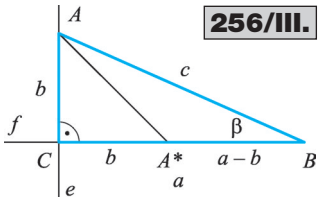
256. *a)* Adatok: $a + b$; c. Felhasználjuk: $A^*C = CA \Rightarrow AA^*C\sphericalangle = 45°$.

A szerkesztés: ① $b + a$; 45°; $c \Rightarrow A^*BA\triangle$. ② A-ból merőleges A^*B-re $\Rightarrow m$. ③ $m \cap A^*B = C$.

Az $A^*BA\triangle$ nem mindig szerkeszthető, mert két oldal és a kisebbel szemben fekvő szög adott. Ha nem szerkeszthető, illetve $a + b < c$, akkor nincs megoldás.

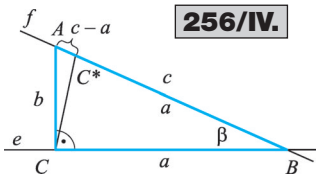




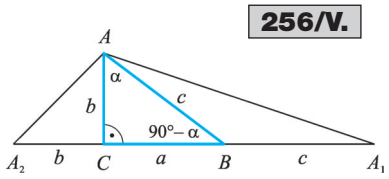


I

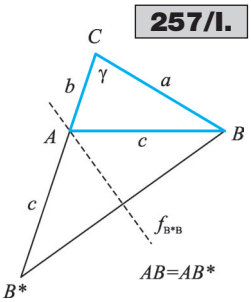
256/IV.



256/V.



257/I.



b) Adatok: $a-b$; c. Felhasználjuk: $A^*C=CA \Rightarrow AA^*C\sphericalangle=45° \Rightarrow$ $\Rightarrow AA^*B\sphericalangle=135°$. A szerkesztés: ① $a-b$; 135°; $c \Rightarrow AA^*B\triangle$. ② A-ból merőleges e(A^*; B) egyenesre $\Rightarrow e$. ③ $e \cap$ e(A^*; B) $= C$. Egyértelműen megoldható, ha $a-b<c$.

c) Adatok: $a-b$; α. Felhasználjuk: $A^*C=CA \Rightarrow AA^*C\sphericalangle=45° \Rightarrow AA^*B\sphericalangle=135°$. $\beta=90°-\alpha$. A szerkesztés: ① $a-b$; 135°; $90°-\alpha \Rightarrow A^*BA\triangle$. ② A-ból merőleges e(A^*; B)-re $\Rightarrow e$. ③ $e \cap$ e(A^*; B) $= C$. $45° < \alpha < 90°$ esetén egyértelműen megoldható. Egyébként nincs megoldás.

d) Adatok: $c-a$; α. Felhasználjuk: $CB=C^*B$ és $\beta=90°-\alpha \Rightarrow BCC^*\sphericalangle=BC^*C\sphericalangle=$ $=45°+\frac{\alpha}{2}\sphericalangle \Rightarrow CC^*A\sphericalangle=135°-\frac{\alpha}{2}$. A szerkesztés: ① $c-a$; α; $135°-\frac{\alpha}{2} \Rightarrow AC^*C\triangle$. ② C-ben merőleges AC-re $\Rightarrow e$. ③ $e \cap$ e(A; C^*) $= B$. $0° < \alpha < 90°$ esetén egyértelműen megoldható.

e) Adatok: $a+b+c$; α. Felhasználjuk: $CA_2=CA \Rightarrow AA_2C\sphericalangle=45°$; $BA_1=BA \Rightarrow BAA_1\sphericalangle=$ $=BA_1A\sphericalangle=45°-\frac{\alpha}{2}$. A szerkesztés: ① $a+b+c$; 45°; $45°-\frac{\alpha}{2} \Rightarrow A_2A_1A\triangle$. ② AA_2 felező merőlegese $\Rightarrow f_{AA_2}$; AA_1 felező merőlegese $\Rightarrow f_{AA_1}$. ③ $f_{AA_2} \cap A_1A_2=C$; $f_{AA_1} \cap A_1A_2=B$. $0° < \alpha < 90°$ esetén egyértelműen megoldható.

257. *a)* Adatok: $b+c$; a; γ. Felhasználjuk: $AB=AB^*$.

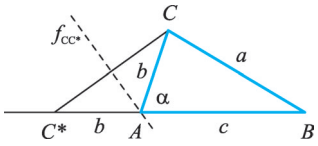
A szerkesztés: ① $b+c$; a; $\gamma \Rightarrow CB^*B\triangle$. ② BB^* felező merőlegese $\Rightarrow f_{BB^*}$. ③ $f_{BB^*} \cap B^*C=A$. Ha $f_{BB^*} \cap B^*C=\emptyset$, akkor nincs megoldás.

b) Adatok: $b+c$; a; α. Felhasználjuk: $CA=C^*A \Rightarrow C^*CA\sphericalangle=CC^*A\sphericalangle=\frac{\alpha}{2}$.

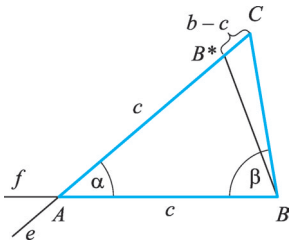
A szerkesztés: ① $b+c$; a; $\frac{\alpha}{2} \Rightarrow BCC^*\triangle$. ② CC^* felező merőlegese $\Rightarrow f_{CC^*}$.

③ $f_{CC^*} \cap C^*B=A$; $b+c>a$ miatt a $BCC^*\triangle$-et két oldalából és a kisebbel szemben fekvő szögéből kell megszerkeszteni, így a megoldás nem egyértelmű. Kaphatunk egy vagy két megoldást, de az is előfordulhat, hogy az adatok nem határoznak meg háromszöget. Ha $f_{CC^*} \cap C^*B=\emptyset$, akkor nincs megoldás.

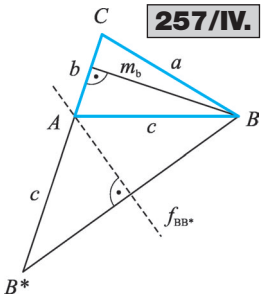
257/II.



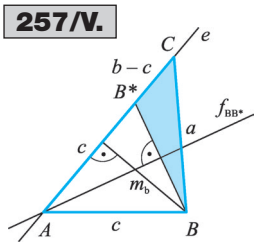
257/III.



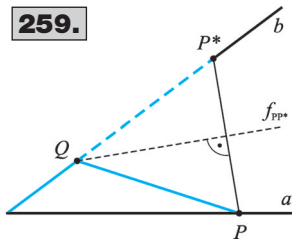
257/IV.



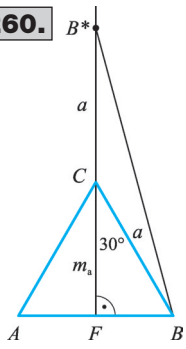
257/V.



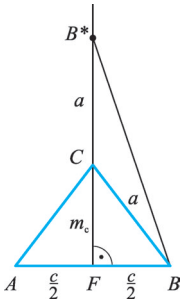
259.



260.



261.



c) Adatok: $b-c$, α; β. Felhasználjuk: $AB = AB^* \Rightarrow$ $\Rightarrow ABB^* \sphericalangle = AB^*B \sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow BB^*C \sphericalangle = 90° + \frac{\alpha}{2}$. $B^*CB \sphericalangle = 180° - (\alpha + \beta)$.

A szerkesztés: ① $b-c$; $90° + \frac{\alpha}{2}$; $180° - (\alpha + \beta) \Rightarrow CB^*B\triangle$. ② B-ben CB-re β szög $\Rightarrow f$. ③ $e(C; B^*) \cap f = A$. Nincs megoldás, ha $\beta + \frac{\alpha}{2} \leq 90°$, mert ekkor $BB^*C \sphericalangle + BCB^* \sphericalangle \geq 180°$ lenne.

d) Adatok: $b+c$; a; m_b. Felhasználjuk: $AB = AB^*$. A szerkesztés: ① $b+c$; a; $m_b \Rightarrow B^*BC\triangle$. ② BB^* felező merőlegese $\Rightarrow f_{BB^*}$. ③ $f_{BB^*} \cap B^*C = A$. Ha $a < m_b$, akkor nincs megoldás. Ha $a = m_b$, akkor derékszögű háromszöget kapunk. Ha $a > m_b$, akkor két megoldás is lehet, amennyiben $f_{BB^*} \cap B^*C \neq \emptyset$.

e) Adatok: $b-c$; a; m_b. Felhasználjuk: $AB = AB^*$. A szerkesztés: ① $b-c$; a; $m_b \Rightarrow BB^*C\triangle$. ② BB^* felező merőlegese $\Rightarrow f_{BB'}$. ③ $f_{BB'} \cap e(C; B^*) = A$. Ha $b-c \geq a$ vagy $a \leq m_b$, akkor nincs megoldás. Ha $b-c < a$ és $a > m_b$, akkor a kapott két $CB^*B\triangle$ közül csak az felel meg, amelyikben $CB^*B \sphericalangle > 90°$.

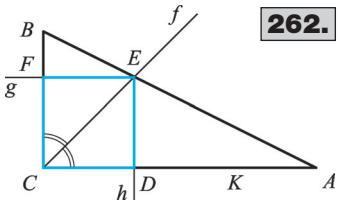
258. Felhasználjuk: Az összeg- és a különbségszakasz összegének fele az a oldal; az összeg- és a különbségszakasz különbségének fele a b oldal. A szerkesztés: ① a és b oldal megszerkesztése a fenti utasítás szerint. ② a; b; $\gamma \Rightarrow ABC\triangle$. $a+b > a-b$ esetén egyértelműen megoldható.

259. Felhasználjuk: $QP = QP^*$ és $OP^* = t$. A szerkesztés: ① O-ból b-re t felvétele $\Rightarrow P^*$. ② PP^* felező merőlegese $\Rightarrow f_{PP^*}$. ③ $f_{PP^*} \cap b = Q$. Ha $OQ + QP = t \leq OP$, akkor nincs megoldás, mert az $OPQ\triangle$-re nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. Ha $OQ + QP = t > OP$, akkor egy megoldás van.

260. Felhasználjuk: $CB = CB^* \Rightarrow CB^*B \sphericalangle = CBB^* \sphericalangle = 15°$. A szerkesztés: ① $\triangle$; $m_a + a$; $15° \Rightarrow FBB^*\triangle$. ② BB^* szakaszfelező merőlegese $\Rightarrow f_{BB^*}$. ③ $f_{BB^*} \cap FB^* = C$. ④ B tükörképe F-re $\Rightarrow A$. Egyértelműen megoldható.

261. Felhasználjuk: $CB^* = CB$. A szerkesztés: ① $\frac{c}{2}$; $m_c + a$; $\triangle \Rightarrow FBB^*\triangle$. ② BB^* szakaszfelező merőlegese $\Rightarrow f_{BB^*}$. ③ $f_{BB^*} \cap FB^* = C$. ④ B tükörképe F-re $\Rightarrow A$. Ha $m_c + a \leq \frac{c}{2}$, akkor nincs megoldás.

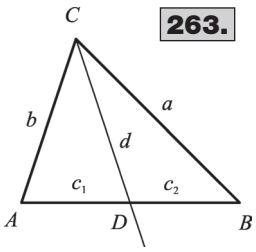
262.



262. Felhasználjuk: Az EC átló felezi az $ACB \sphericalangle$-et.
A szerkesztés: ① $ACB \sphericalangle$ felezője $\Rightarrow f$.
② $f \cap AB = E$. ③ E-ből merőleges BC-re $\Rightarrow g$. E-ből merőleges AC-re $\Rightarrow h$. ④ $g \cap BC = F$ és $h \cap AC = D$. A négyzet egyértelműen szerkeszthető.

I Egybevágóság

Háromszögek, sokszögek egybevágósága



263. Két egybevágó részre csak csúcson átmenő egyenessel vágható szét a háromszög, különben egy háromszög és egy négyszög keletkezne. $ADC \cong BDC\triangle$ lehetséges csak, vagyis az a, d, c_2 és a b, d, c_1 oldalak páronként egyenlők. **1. eset:** Ha $a = b$, akkor $ABC\triangle$ egyenlő szárú. **2. eset:** Ha $a = d$, $d = b$, $c_2 = c_1 \Rightarrow a = d = b \Rightarrow CAD\sphericalangle = CDA\sphericalangle = CDB\sphericalangle = CBD\sphericalangle = 90°$, ami lehetetlen. Ha $a = d, d = c_1, c_2 = b \Rightarrow c = c_1 + c_2 = d + b = a + b$, ami lehetetlen. **3. eset:** Ha $a = c_1$, $d = d$, $c_2 = b \Rightarrow c = c_1 + c_2 = a + b$, ami lehetetlen. **4. eset:** Ha $a = c_1$, $d = b$, $c_2 = d \Rightarrow c = c_1 + c_2 = a + d = a + b$, ami lehetetlen.

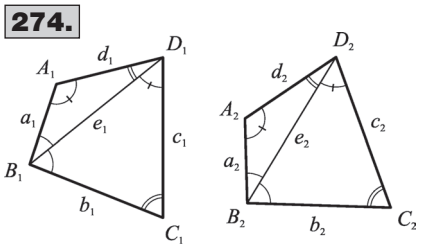
A **264–269.** feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.

270. $b_1 = b_2 = 2$ cm, $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$, $\gamma_1 = \beta_2 = 90°$, mégsem egybevágó a két háromszög.

271. $c_1 = b_2 = 2$ cm, $\alpha_1 = \alpha_2 = 80°$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 20°$, mégsem egybevágó a két háromszög.

272. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $m_1 = m_2$, mégsem egybevágó a két háromszög, ha $\alpha_1 < 90°$ és $\alpha_2 > 90°$.

273. C_1T_1 és C_2T_2 magasság. **1. eset:** Ha $\alpha, \beta \neq 90°$; $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $\beta_1 = \beta_2 \Rightarrow 180° - \beta_1 = 180° - \beta_2$; egy oldal és két megfelelő szög egyenlőségéből $\Rightarrow C_1B_1T_1\triangle \cong C_2B_2T_2\triangle \Rightarrow m_1 = m_2$; két oldal és a hosszabbal szemközti szög egyenlőségéből $\Rightarrow A_1T_1C_1\triangle \cong A_2T_2C_2\triangle \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ közvetlenül, illetve $180° - \alpha_1 = 180° - \alpha_2$ miatt $\Rightarrow A_1B_1C_1\triangle \cong A_2B_2C_2\triangle$.
2. eset: Ha $\alpha = 90°$ vagy $\beta = 90°$, akkor két megfelelő oldal és a hosszabbikkal szemközti szög egyenlősége miatt az állítás nyilvánvaló.

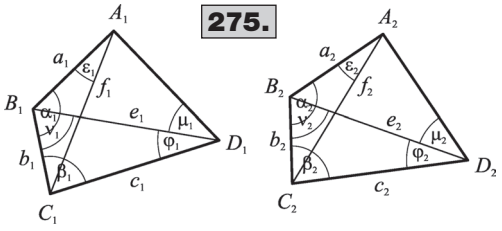


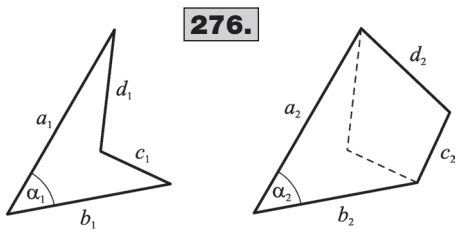
274. $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2, e_1 = e_2$ a 274. ábra szerint. $a_1 = a_2$, $d_1 = d_2$, $e_1 = e_2 \Rightarrow A_1B_1D_1\triangle \cong A_2B_2D_2\triangle$ és $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $e_1 = e_2 \Rightarrow B_1C_1D_1\triangle \cong B_2C_2D_2\triangle \Rightarrow$ a két-két háromszög megfelelő szögei egyenlők $\Rightarrow$ a két négyszög szögei páronként egyenlők, megfelelő oldalaik is egyenlők, tehát egybevágók.

275. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ a 275. ábra szerint. $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $\beta_1 = \beta_2 \Rightarrow B_1C_1D_1\triangle \cong B_2C_2D_2\triangle \Rightarrow$ megfelelő szögeik egyenlők $\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$, $\nu_1 = \nu_2$. Hasonlóan $A_1B_1C_1\triangle \cong A_2B_2C_2\triangle \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$; $e_1 = e_2$, $a_1 = a_2$, $\alpha_1 - \nu_1 = \alpha_2 - \nu_2 \Rightarrow B_1D_1A_1\triangle \cong B_2D_2A_2\triangle \Rightarrow d_1 = d_2$, $\mu_1 = \mu_2$. $A_1B_1C_1D_1 \cong A_2B_2C_2D_2$, mert megfelelő szögeik és oldalaik páronként egyenlők.

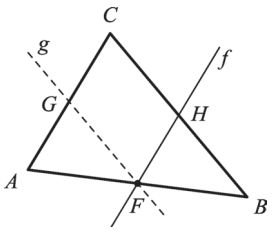
276. $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2, \alpha_1 = \alpha_2$, de a két négyszög közül az egyik konvex, a másik konkáv, tehát nem egybevágók.

277. *a)* G, F felező pontok a szárak belső pontjai; $BCF\triangle \cong BCG\triangle$, mert két oldaluk és azok közrezárt szöge egyenlő $\Rightarrow BF = CG$.

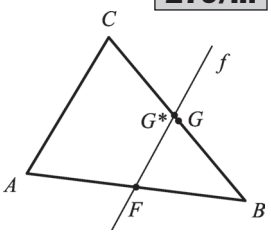




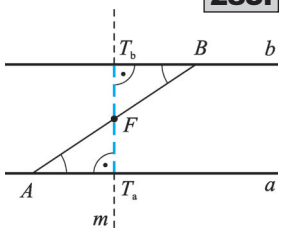
279/I.



279/II.



285.



b) T_1 és T_2 magasságtalppont. Ha $\alpha \neq 90°$, akkor $BCT_1\triangle \cong BCT_2\triangle$ (egy oldaluk és megfelelő szögeik egyenlők) $\Rightarrow BT_1 = CT_2$. Ha $\alpha = 90°$, akkor a szárakhoz tartozó magasságok egyenlők e befogókkal, tehát egymással is.
c) BP és CQ szögfelezők. $BCP\triangle \cong BCQ\triangle$, mert egy oldaluk és megfelelő szögeik egyenlők $\Rightarrow$ $\Rightarrow BP = CQ$.

278. CF súlyvonal $\Rightarrow F$ felezi AB-t; CF magasság $\Rightarrow CF \perp AB$; $AF = FB$, CF közös, $CFA\sphericalangle = CFB\sphericalangle \Rightarrow AFC\triangle \cong BFC\triangle \Rightarrow AC = BC \Rightarrow$ Az $ABC\triangle$ egyenlő szárú.

279. *a)* $AF = FB$, $f \parallel AC$, $f \cap BC = H$; Az F ponton át BC-vel húzott párhuzamos az AC oldalt a G pontban metszi. $GAF\sphericalangle = HFB\sphericalangle$ egyállású szögek, $GFA\sphericalangle = HBF\sphericalangle$ egyállású szögek, $AF = FB \Rightarrow GAF\triangle \cong HFB\triangle \Rightarrow GA = HF$ és $GF = HB$. $CGFH$ négyszög paralelogramma, mert szemközti oldalai párhuzamosak $\Rightarrow CG = HF$ és $GF = CH$; $HF = GA = CG$, $AC = AG + GC = 2HF$, $HB = GF = CH \Rightarrow$ a H pont felezi a BC oldalt.
b) Az F felező ponton át CA-val húzott FG^* párhuzamos felezi BC-t (az *a)* részben bizonyítottuk) $\Rightarrow CG^* = G^*B$ és $CG = GB \Rightarrow G \equiv G^*$. Tehát $FG \parallel AC$ és $FG = \frac{1}{2}AC$. FG a háromszög egyik középvonala.

280. F_1F_2 középvonal az $ABC\triangle$-ben, S_1S_2 pedig az $ABS\triangle$-ben $\Rightarrow F_1F_2$ és S_1S_2 párhuzamos AB-vel és hosszuk feleakkora, mint AB. $\Rightarrow F_1F_2S_1S_2$ paralelogramma $\Rightarrow SF_1F_2\triangle \cong SS_1S_2\triangle$.

281. A 280. feladat jelöléseit használjuk. $S_1A = S_1S$, mert S_1 felezi AS-t; $S_1S = SF_1$, mert $SF_1F_2\triangle \cong SS_1S_2\triangle \Rightarrow SA : SF_1 = 2 : 1$; hasonlóan látható, hogy $SB : SF_2 = 2 : 1$.

282. Legyen BC felezőpontja F_1, AC felezőpontja F_2! F_1F_2 középvonal az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow$ $\Rightarrow F_1F_2 \parallel AB$ és $AF_1 = BF_2$ a feltétel szerint, ezért ABF_1F_2 húrtrapéz $\Rightarrow AF_2 = BF_1 \Rightarrow AC = BC$.

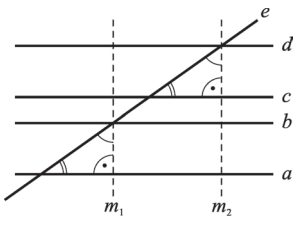
283. T_a és T_b a magasságok talppontjai. $AT_a = BT_b$ a feltétel szerint, $ACT_a\sphericalangle = BCT_b\sphericalangle$ és $AT_aC\sphericalangle = BT_bC\sphericalangle = 90° \Rightarrow AT_aC\triangle \cong BT_bC\triangle \Rightarrow AC = BC$.

284. Az O csúcsú szög felezőjének F pontjában emelt merőleges A-ban, illetve B-ben metszi a szárakat. $BFO\sphericalangle = AFO\sphericalangle = 90°$, OF közös, $BOF\sphericalangle = FOA\sphericalangle$ a szögfelezés miatt $\Rightarrow OAF\triangle \cong OFB\triangle \Rightarrow$ $\Rightarrow OA = OB$.

285. Legyen $m \perp a$ és $F \in m$! $FA = FB$, $BT_bF\sphericalangle = AT_aF\sphericalangle = 90°$, $T_bBF\sphericalangle = FAT_a\sphericalangle$ váltószögek $\Rightarrow AT_aF\triangle \cong BT_bF\triangle \Rightarrow FT_a = FT_b$. Az F pont egyenlő távolságra van a-tól és b-től, rajta van a középpárhuzamoson.

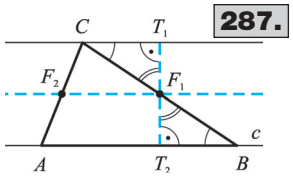
286. $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\mathrm{d}(a; b) = \mathrm{d}(c; d)$. A jelölt háromszögek egybevágók, mert egyik oldaluk a sáv szélessége, szögeik pedig egyállású szögek. Az átfogójuk – ami az e egyenesből a sávok által kimetszett két szakasz – is egyenlő. A gondolatmenet független a párhuzamos sávok távolságától.

286.



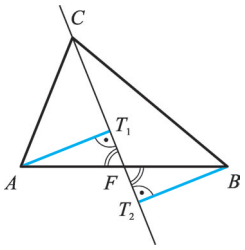
287. $CF_1T_1\sphericalangle = BF_1T_2\sphericalangle$ csúcsszögek, $T_1CF_1\sphericalangle = T_2BF_1\sphericalangle$ váltószögek, $CF_1 = F_1B \Rightarrow CF_1T_1\triangle \cong BF_1T_2\triangle \Rightarrow F_1T_1 = F_1T_2$, $\mathrm{d}(F_1; c) = \mathrm{d}(F_1; c')$. Hasonlóan $\mathrm{d}(F_2; c) = \mathrm{d}(F_2; c') \Rightarrow$ Az F_1F_2 egyenes egyenlő távolságra van a c és c' egyenestől és az azokra illeszkedő A, B, C pontoktól.

287.

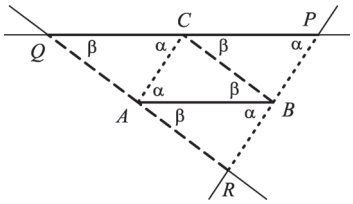


I

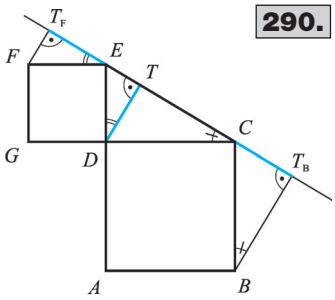
288.



289.



290.



288. $AF = FB$, $AT_1F\sphericalangle = BT_2F\sphericalangle = 90°$, $AFT_1\sphericalangle = BFT_2\sphericalangle$ csúcsszögek $\Rightarrow AFT_1\triangle \cong BFT_2\triangle \Rightarrow$ $\Rightarrow AT_1 = BT_2$.

289. Szemközti oldalaik párhuzamossága miatt az $ARBC$, a $CABP$, az $ABCQ$ négyszögek paralelogrammák $\Rightarrow AR = CB$ és $AC = BR$, $CA = PB$ és $AB = CP$, $AB = CQ$ és $BC = QA$. $\Rightarrow$ $\Rightarrow ARB\triangle \cong CBP\triangle \cong QAC\triangle \cong BCA\triangle$.

290. $DE = FE$ négyzetoldalak, $FT_FE\sphericalangle = DTE\sphericalangle = 90°$, $FET_F\sphericalangle = EDT\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek $\Rightarrow EDT\triangle \cong ET_FF\triangle \Rightarrow ET_F = DT$. Hasonlóan $DTC\triangle \cong CT_BB\triangle \Rightarrow CT_B = DT$. A fentiekből következik, hogy $CT_B = ET_F$.

291. $OA = OC \Rightarrow OAC\triangle$ egyenlő szárú és $OB = OD \Rightarrow OBD\triangle$ egyenlő szárú. Szárszögük közös, alapon fekvő szögeik egyenlők, ezért $AC \parallel BD$ (1). $AB = OB–OA = OD–OC = CD$ (2). (1) és (2) $\Rightarrow ABDC$ húrtrapéz. Az $AOC\triangle$ és $BOD\triangle$ szárszögének szögfelezője szimmetriatengelye mindkét háromszögnek $\Rightarrow$ szimmetriatengelye az $ABDC$ trapéznak $\Rightarrow$ átmegy az AD és BC átlók M metszéspontján.

292. $CR = AP = BQ = a + x$, $CQ = AR = BP = x$, $QCR\sphericalangle = RAP\sphericalangle = PBQ\sphericalangle = 120° \Rightarrow RAP\triangle \cong$ $\cong BRQ\triangle \cong CQR\triangle \Rightarrow PQ = QR = RP$.

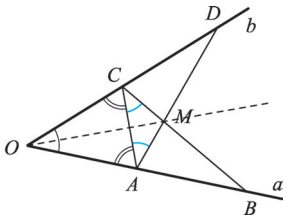
293. $ARQ\triangle \cong BPR\triangle \cong CQP\triangle$, mert két oldaluk ($x$ és y) és azok közrezárt szöge (60°) egyenlő. ($ARQ\triangle$-nek O körüli $+120°$-os elforgatottja $BPR\triangle$, $-120°$-os elforgatottja $CQP\triangle$.) Harmadik oldaluk is egyenlő, $QR = RP = PQ$.

294. $ABC\triangle$ és $PQR\triangle$ szögei 60°-osak, $\varepsilon + \varphi + 60° = 180° \Rightarrow RBP\triangle$ szögei ε, φ és 60°.
$QR = PR$, $RQA\sphericalangle = PRB\sphericalangle$, $QAR\sphericalangle = RBP\sphericalangle \Rightarrow QAR\triangle \cong RBP\triangle \Rightarrow QA = RB$ és $AR = BP$.
PRB és QPC háromszöget tekintve $CQ = BP$ és $QA = CP \Rightarrow AR : RB = BP : PC = CQ : QA$.

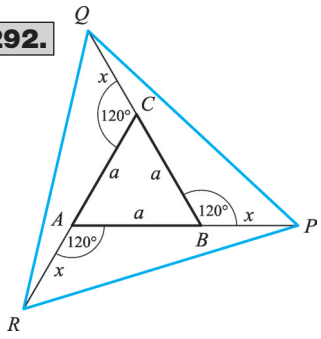
295. *a)* $DQR\triangle$ szabályos $\Rightarrow DR = DQ$; $ABCD$ négyszög négyzet $\Rightarrow DA = DC$ és $DAR\sphericalangle =$ $= DCQ\sphericalangle = 90° \Rightarrow DAR\triangle \cong DCQ\triangle$, mert két oldaluk és a hosszabbal szemközti szögük egyenlő.
b) $DCQ\triangle \cong DAR\triangle \Rightarrow ADR\sphericalangle = QDC\sphericalangle \Rightarrow DB$ felezi az RDQ szöget. D pontban DB átlóra mindkét irányban 30°-os szöget szerkesztünk, szárai kimetszik a szabályos háromszög másik két csúcsát.

296. $e \parallel f, g \perp f$ és $h \perp e \Rightarrow g \parallel h \Rightarrow PQRS$ négyszög téglalap. $AQB\triangle \cong BRC\triangle \cong CSD\triangle \cong DPA\triangle$, mert szögeik 90°, φ és átfogójuk a négyzet oldala $\Rightarrow AP = BQ = CR = DS$ és $AQ = BR = CS =$ $= DP$.

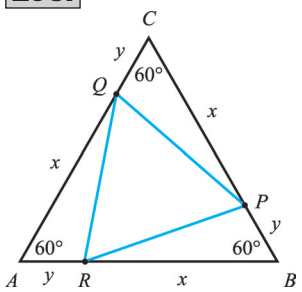
291.



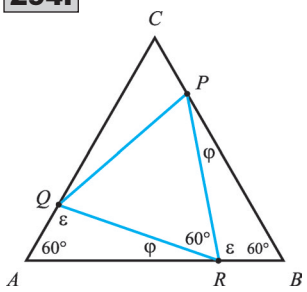
292.



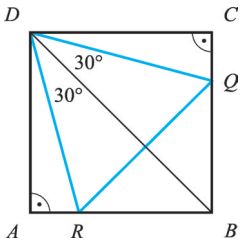
293.



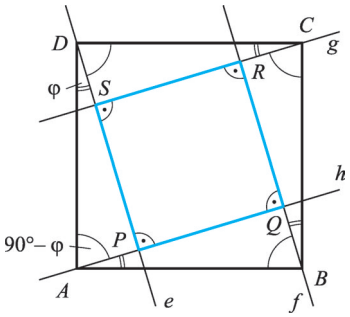
294.



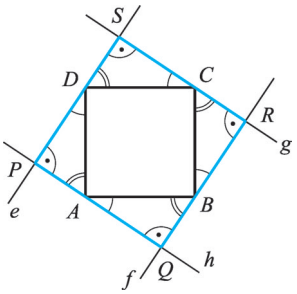
295.



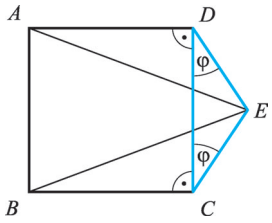
296/I.



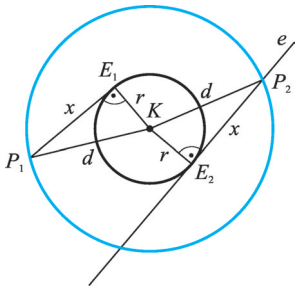
296/II.



297.



301.



1. eset: $PQ = AQ - AP = DP - DS = SP$ (lásd 296/I. ábra)
2. eset: $PQ = AQ + AP = DP + DS = SP$ (lásd 296/II. ábra).
A $PQRS$ téglalap szomszédos oldalai egyenlők $\Rightarrow$ a $PQRS$ négyszög négyzet.

297. $ABCD$ négyzet $\Rightarrow AD = BC$, $DCE\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow DE = CE$, $ADE\sphericalangle = 90° + \varphi = BCE\sphericalangle \Rightarrow ADE\triangle \cong BCE\triangle \Rightarrow BE = AE$.

298. $ABFG$ négyzet $\Rightarrow AB = AG$, $ACDE$ négyzet $\Rightarrow AE = AC$, $GAC\sphericalangle = 90° + \alpha = EAB\sphericalangle \Rightarrow$
$\Rightarrow GAC\triangle \cong BAE\triangle$ ($BAE\triangle$ a $GAC\triangle$ A pont körüli $-90°$-os elforgatottja) $\Rightarrow GC = EB$.

299. $PQ \parallel AC \Rightarrow PACS$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow PA = SC$, $RACQ$ négyszög paralelogramma $AR = CQ$, $PAR\sphericalangle = SCQ\sphericalangle$ egyállású szögek $\Rightarrow PAR\triangle \cong SCQ\triangle \Rightarrow PR = SQ$.

300. $AD = BC$ és $DAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \alpha$. $DB \parallel PQ$, $DP \parallel BQ \Rightarrow DBQP$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow DP = BQ$, $ADP\sphericalangle = CBQ\sphericalangle = 180° - \alpha$, $AD = BC \Rightarrow ADP\triangle \cong CBQ\triangle \Rightarrow AP = CQ$.

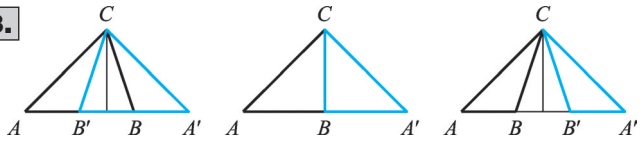
301. $KE_i = r$, $E_iP_i = x$, $KE_iP_i\sphericalangle = 90° \Rightarrow KE_iP_i$ háromszögek egybevágók $\Rightarrow KP_i = d$ állandó.
A keresett ponthalmaz a K középpontú, d sugarú kör.

Tengelyes tükrözés

302. Ha a pont az egyenesen van, akkor tükörképe önmaga. Ha a pont nincs az egyenesen, tükörképét egy olyan rombusz átellenes csúcsaként szerkeszthetjük, amelynek egyik átlóegyenese az adott egyenes.

I

303.



303. *a)*

Az alakzat és a képe együtt:	Ha a tükrözött háromszög:	És a tükörtengely tartalmazza:
négyzet	egyenlő szárú derékszögű	az átfogót
rombusz	egyenlő szárú	az alapot
egyenlő szárú háromszög	derékszögű	az egyik befogót
szabályos háromszög	30°, 60°-os szögű derékszögű	a 30°-os szöggel szomszédos befogót
konvex deltoid	tetszőleges	azt az oldalt, amelyen két hegyesszög van
konkáv deltoid	tompaszögű	azt az oldalt, amelyen a tompaszög van

b) A háromszög és tükörképe együtt konkáv deltoidot vagy egyenlő szárú háromszöget alkot.
c) A 303. ábra mutatja a megoldást.

304. Szerkesztés: ① K középpont tükörképe e egyenesre $\Rightarrow K'$. ② K' középpontú, r sugarú kör $\Rightarrow k'$.

305. Mivel tengelyes tükrözés esetén $(P')' = P$, ezért P pont tükörképe a egyenesre P_1; P_1 pont tükörképe b egyenesre P_2; P_2 pont tükörképe c egyenesre P_3; P_3 pont tükörképe c egyenesre P_2; P_2 pont tükörképe b egyenesre P_1; P_1 pont tükörképe a egyenesre ismét P pont. (Transzformációk szorzatával: Jelöljük a tükrözéseket t_a, t_b, t_c-vel. $t_a \cdot t_b \cdot t_c \cdot t_c \cdot t_b \cdot t_a = t_a \cdot t_b \cdot (t_c \cdot t_c) \cdot t_b \cdot t_a = t_a \cdot t_b \cdot I \cdot t_b \cdot t_a = t_a(t_b \cdot t_b) \cdot t_a = t_a \cdot I \cdot t_a = t_a \cdot t_a = I$, ahol I az identitás.)

306. Ha $P \in t \Rightarrow P' = P$, ha $P \notin t \Rightarrow PP' \perp t$. Ezért a tengely és a tengelyre merőleges egyenesek egyeznek meg a tükörképükkel.

307. Legyen az e egyenes tükörképe a t tengelyre e'. Ha $e \equiv t$, akkor $e' \equiv e \equiv t$ és $\sphericalangle(e; t) = \sphericalangle(e'; t) = 0°$. Ha $e \neq t$, akkor legyen $e \cap t = M$ és $AA' \cap t = T$, ahol $A \in e \Rightarrow A' \in e'$. Ekkor $M' = M$ és $T' = T$. A tengelyes tükrözés távolságtartó $\Rightarrow MA = M'A'$ és $AT = A'T'$; $ATM\sphericalangle = A'T'M'\sphericalangle = 90° \Rightarrow ATM\triangle \cong A'T'M\triangle \Rightarrow AMT\sphericalangle = A'MT\sphericalangle$, azaz $\sphericalangle(e; t) = \sphericalangle(e'; t)$.

308. Legyen a P_i tükörképe a t tengelyre P_i'! Legyen $R \in t$! Ha $P_1 \in t$, akkor $P_1R = P_1'R$. Ha $P_2 \notin t$, akkor $P_2T = P_2'T$, ahol $P_2P_2' \cap t = T$ és $T = T'$. $P_2T = P_2'T$, $TR = T'R$, $P_2TR\sphericalangle = P_2'T'R\sphericalangle = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow P_2TR\triangle \cong P_2'TR\triangle \Rightarrow P_2R = P_2'R$.

309. Ha $a \equiv t_1$ vagy $a \equiv t_2$, akkor $a' \equiv a$ és $a'' \equiv a$ miatt igaz az állítás. Ha $a \neq t_1$, $a \neq t_2 \Rightarrow a$ egyenes t_1 tengelyre vonatkozó tükörképe a', t_2-re vonatkozó képe a''. $\Rightarrow \sphericalangle(a; t_1) = \sphericalangle(a'; t_1) = \alpha$ és $\sphericalangle(a; t_2) = \sphericalangle(a''; t_2) = \beta$. $t_1 \perp t_2 \Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow a' \equiv a''$.

310. A két kör középpontját összekötő szakasz felező merőlegese a tengely.

311. Az alap felező merőlegese szimmetriatengely $\Rightarrow$ nem szabályos egyenlő szárú háromszögnek egy, szabályos háromszögnek három szimmetriatengelye van.

312. t_1 szimmetriatengely $\Rightarrow AC = BC$, t_2 szimmetriatengely $\Rightarrow AB = AC \Rightarrow AB = BC = AC \Rightarrow$ $\Rightarrow ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow$ három szimmetriatengelye van.

313. Legyen az $ABC\triangle$ derékszöge C-ben, a 30°-os szög B-ben. Tükrözzük a háromszöget a CB befogóra! Az eredeti háromszög és a tükörkép együtt egy szabályos háromszöget alkot.

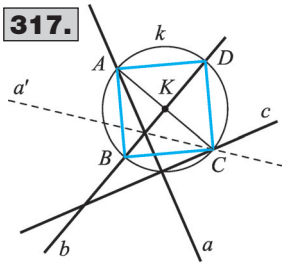
$$AB = A'B = AA' = 2AC \Rightarrow \underline{\underline{AC = \frac{1}{2} AB}}.$$

314. $\alpha + 2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 30°$; $2\alpha = 60°$. CA befogóra való tengelyes tükrözéssel az eredeti háromszög és a tükörképe szabályos háromszöget alkotnak, így $2BC = AB$ teljesül.

315. Például a körvonal, a körlap, a körgyűrű minden átmérőjének egyenesére; a sík annak bármely egyenesére; egy egyenes önmagára és a rá merőleges egyenesekre szimmetrikus.

316. A szerkesztés: ① c egyenes tükörképe b egyenesre c'. ② $c' \cap a = A$. ③ A pont tükörképe b egyenesre C. ④ A szerkesztendő egyenes az AC egyenes. Nincs megoldás, ha $c' \parallel a$. Végtelen sok megoldás van, ha $c' \equiv a$.

317.



BD a négyzet átlója és szimmetriatengelye $\Rightarrow$ az A pont b egyenesre vonatkozó tükörképe C, ami rajta van az a egyenes b-re vonatkozó a' tükörképén. A szerkesztés: ① a egyenes tükrözése b egyenesre $\Rightarrow a'$. ② $a' \cap c = C$. ③ C pont tükrözése b egyenesre $\Rightarrow A$. ④ $AC \cap b = K$. ⑤ K középpontú, KA sugarú kör $\Rightarrow k$. ⑥ $k \cap b = \{B, D\} \Rightarrow$ $\Rightarrow ABCD$ négyzet. Ha $a' \parallel c \Rightarrow$ nincs megoldás, ha $a' \equiv c \Rightarrow$ végtelen sok, egyébként egy megoldás van.

318. **1. eset:** Ha A és B pontot elválasztja a t egyenes, akkor $AB \cap t = T$ a megoldás.
2. eset: Ha A és B pont a t egyenesnek ugyanazon félsíkjában van, akkor egyiket t egyenesre tükrözve, a feladat visszavezethető az 1. esetre.

319. Jelölje az utat t; a községeket A és B! Legyen az A pont t egyenesre vonatkozó tükörképe A' pont! Ha $P \in t$, akkor $AP = A'P$ és APB töröttvonal hossza egyenlő $A'PB$ töröttvonal hosszával. $A'PB$ akkor a legrövidebb, ha szakasz. A szerkesztés: ① A pont tükrözése t egyenesre $\Rightarrow A'$. ② $A'B \cap t = T$. ③ ATB töröttvonal a megoldás.

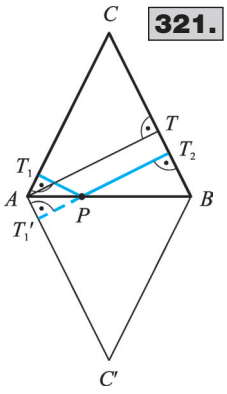
320. Legyen a tükör t, a beesési merőleges m és $m \cap t = T$! A tükrözés optikai törvénye szerint a beesési és a visszaverődési szög egyenlő $\Rightarrow \sphericalangle (AT; m) = \sphericalangle (BT; m) \Leftrightarrow \sphericalangle (AT; t) = \sphericalangle (BT; t) =$ $= \sphericalangle (A'T; t) \Rightarrow A'$, T, B pontok egy egyenesen vannak $\Rightarrow A'TB$ a legrövidebb az A'-t és B-t összekötő, t-t érintő töröttvonalak közül $\Rightarrow A'T + TB = AT + TB$.

321. Tükrözzük az AB egyenesre az ABC háromszöget! $PT_1 + PT_2 = PT_1' + PT_2 = \mathrm{d}(AC'; BC)$. Ez a távolság az $ABC\triangle$ szárhoz tartozó magassága, ami állandó.

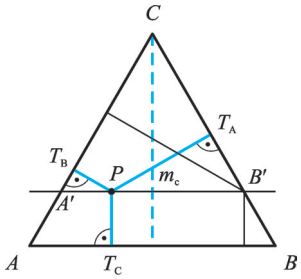
322. Húzzunk AB oldallal párhuzamos egyenest a P ponton át! A 321. feladatban láttuk, hogy $PT_B + PT_A =$ állandó $= m_c'$, ami az $A'B'C$ háromszög magassága. $PT_C + PT_B + PT_A = PT_C + m_c' =$ $= m_c =$ állandó.

323. A hegyesszögű háromszöghöz szerkesztünk egy olyan egyenlő szárú háromszöget, amelynek szárhoz tartozó magassága egyenlő az adott szakasszal. Felhasználjuk, hogy az egyenlő szárú háromszög alapján felvett bármely pont száraktól mért távolságösszege egyenlő a szárhoz tartozó magassággal (321. feladat). A szerkesztés: ① BC oldallal párhuzamos egyenes d távol-

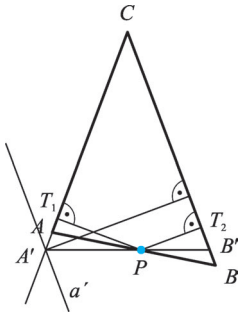
321.



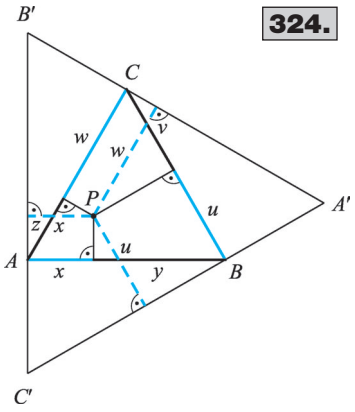
322.



323.



I



324.

ságban $\Rightarrow a'$ egyenes. ② $a' \cap AC = A'$. ③ C középpontú, CA' sugarú kör $\Rightarrow k$. ④ $k \cap BC = B'$. ⑤ $A'B' \cap AB = P$ a szerkesztendő pont. A megoldhatóság feltétele $a \leq b$ esetén $m_b \leq d \leq m_a$. Végtelen sok megoldás van, ha $m_a = m_b = d$.

324. Állítsunk merőlegest A pontban AB egyenesre, B-ben BC-re, C-ben AC-re! Ezek az egyenesek újabb szabályos háromszöget fognak közre, amelynek P pontjából az oldalaira állított merőleges szakaszok hossza éppen x, u, w (322. feladat). Ezek összege a szabályos háromszög magasságával egyenlő, tehát független a belső pont választásától.

325. A P pontból indulva a szögszárakat T-ben, illetve U-ban érintjük. $PT + TU + UP = P'T + TU + UP''$ akkor a legrövidebb, ha a $P'TUP''$ töröttvonal egy szakasz. A szerkesztés: ① P pont tükrözése a egyenesre $\Rightarrow P'$, P pont tükrözése b egyenesre $\Rightarrow P''$. ② $P'P'' \cap a = T$, $P'P'' \cap b = U$. ③ $PTUP$ a legrövidebb útvonal. Egyértelmű a megoldás.

326. *a)* $P'R = PR$, $P''Q = PQ$, $P'RQP''$ töröttvonal hossza a beírt PQR háromszög kerülete, ami akkor minimális, ha P', R, Q, P'' egy egyenesen van. A szerkesztés: ① P pont tükrözése AC egyenesre $\Rightarrow P'$, P pont tükrözése BC egyenesre $\Rightarrow P''$. ② $P'P'' \cap AC = R$, $P'P'' \cap BC = U$. ③ $PTUP$ a legrövidebb útvonal. Hegyesszögű háromszög esetén mindig létrejön az R és Q metszéspont, mert $PP' \perp AC \Rightarrow PP'$ belső pontban metszi AC-t, és $PP'' \perp BC \Rightarrow PP''$ belső pontban metszi BC-t.

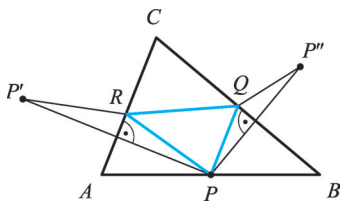
b) Adott $P \in AB$ esetén $PQ + QR + RP$ akkor a legrövidebb, ha $P'P''$ metszi ki. A tükrözés miatt $CP' = CP = CP'' \Rightarrow CP'P''\triangle$ egyenlő szárú, alapja a $PQR\triangle$ kerülete. $P'CA\sphericalangle = ACP\sphericalangle$ és $PCB\sphericalangle = P''CB\sphericalangle \Rightarrow P'CP''\sphericalangle = 2 \cdot ACB\sphericalangle \Rightarrow P'CP''\triangle$ alapja csak akkor csökkenhet, ha a CP szár hossza csökken. CP szakasz hossza akkor a legkisebb, ha CP az $ABC\triangle$ AB oldalhoz tartozó magassága $\Rightarrow P$ a magasság talppontja.

327. Felhasználjuk, hogy egy adott oldal pontjai közül a magasság talppontjából szerkesztett beírt háromszög kerülete a legkisebb (326. feladatban láttuk) $\Rightarrow$ a másik két csúcs is magasságtalppont. A beírt háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a legkisebb.

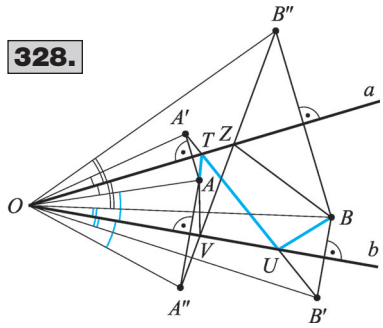
328. A pontot az a, B pontot a b szögszárra tükrözve $\Rightarrow AT + TU + UB = A'T + TU + UB'$ akkor a legrövidebb, ha az $A'TUB'$ vonal egy szakasz. A pontot a b, B pontot az a szárra tükrözve $\Rightarrow AV + VZ + ZB = A''V + VZ + ZB''$ akkor a legrövidebb, ha az $A''VZB''$ vonal egy szakasz. A tükrözés tulajdonságai miatt $OA' = OA''$, $OB' = OB''$, $A''OB''\sphericalangle > A'OB'\sphericalangle \Rightarrow A''B'' > A'B'$. A szerkesztés: ① Az A pontot tükrözzük arra a szögszárra, amelyik az OA egyenes B-t nem tartalmazó félsíkjában van $\Rightarrow A'$, a B pontot tükrözzük a másik szögszárra $\Rightarrow B'$. ② $A'B'$ egyenes metszéspontja a szögszárakkal $\Rightarrow T$, U. ③ $ATUB$ töröttvonal a legrövidebb út. Ha O, A és B egy egyenesre esik, akkor az A pontot bármelyik szögszárra tükrözhetjük az első lépésben.

329. Adott sorrendben érintett oldalak esetén a visszaverődések során megtett út a lehető legrövidebb. Négy lehetőség van. A szerkesztés: a keresett töröttvonalat az oldalakra vonatkozó

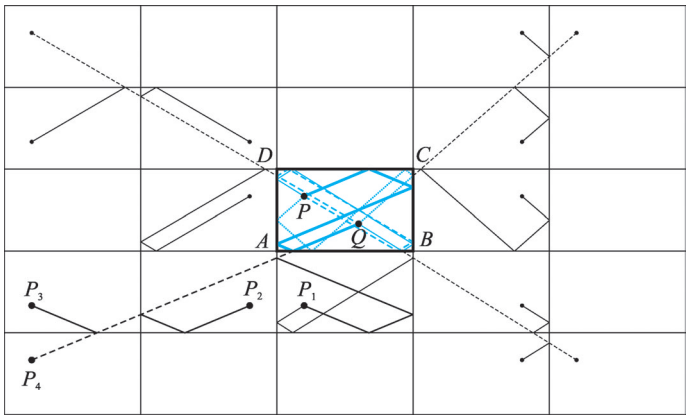
326.



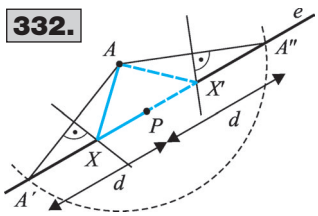
328.



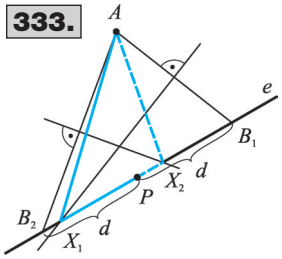
329.



332.



333.



tükrözésekkel „kiegyenesítjük”. Áttekinthetőbb az ábra, ha a téglalapot is tükrözzük az adott oldalra. P_4Q szakasznak az oldalakkal adott metszéspontjait sorban visszafelé tükrözve adódik egy megoldás a négy közül.

330. Ha az e egyenes nem választja el az A és B pontot, akkor az egyenes bármely Q pontjára fennáll az $|QA - QB| \leq AB$ egyenlőtlenség. $|QA - QB| = AB \Rightarrow Q$, A és B egy egyenesen van. AB és e egyenes metszéspontja a megoldás. Ha az e egyenes elválasztja az A és B pontot, akkor az A pont e egyenesre vonatkozó A' tükörképére és az egyenes bármely P pontjára $|PA–PB| = |PA' - PB|$. A' és B pontra alkalmazzuk az előbbieket.

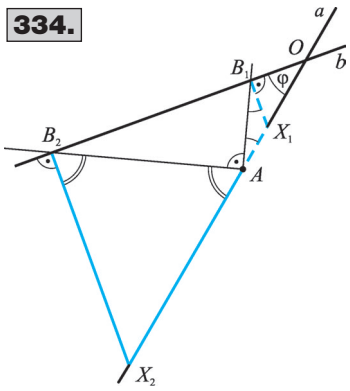
331. Legyen a P pont BC egyenesre vonatkozó tükörképe P' pont és $R \in BC$! A legrövidebb PRQ útra $PR + RQ = P'R + RQ = P'Q$. $P'Q \parallel BD \Rightarrow P'Q = BD$.

332. Legyen az adott szakasz hossza d, és legyenek az e egyenesnek P ponttól d távolságra levő pontjai A', A''. A szerkesztendő pontra $PX + XA = PX + XA' = PA' = d$. $\Rightarrow AA'$, illetve AA'' egyenesek felező merőlegese metszi ki az e egyenesből az X pontot. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 a felező merőlegesek helyzetétől függően.

333. $AX - XP = d \Rightarrow AX = XP + d = XP + PB$. Legyenek az e egyenesnek P ponttól d távolságra levő pontjai B_1, B_2! Az AB_1, illetve AB_2 szakaszok felező merőlegese metszi ki az e egyenesből az X pontot. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 a felező merőlegesek helyzetétől függően.

334. **1. eset:** Ha $a \parallel b \Rightarrow \mathrm{d}(X; b) = \mathrm{d}(a; b) = \mathrm{d}(A; X)$, két pont felel meg a feltételeknek. Az A középpontú, $\mathrm{d}(a; b)$ sugarú kör metszi ki az a egyenesből az X_1, X_2 pontot.

334.

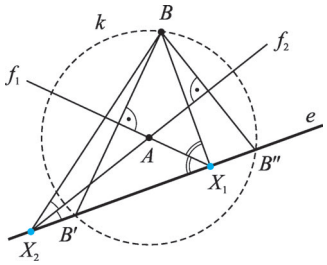


2. eset: Ha $0° < \varphi = \sphericalangle(a; b) \leq 90°$, $a \cap b = O$ és $\mathrm{d}(A; X_i) = \mathrm{d}(X_i; b) \Rightarrow AX_1 = X_1B_1$ és $OX_1B_1\sphericalangle = 90° - \varphi \Rightarrow X_1AB_1\sphericalangle = AB_1X_1\sphericalangle = 45° - \varphi/2$, $AX_2 = X_2B_2$ és $OX_2B_2\sphericalangle = 90° - \varphi \Rightarrow \Rightarrow X_2AB_2\sphericalangle = AB_2X_2\sphericalangle = 45° + \varphi/2 \Rightarrow OAB_2\sphericalangle = 135° - \varphi/2$. A szerkesztés: ① B_1, B_2 szerkesztése úgy, hogy $B_1 \in b$, $B_2 \in b$ és $OAB_1\sphericalangle = 45° - \varphi/2$, $OAB_2\sphericalangle = 135° - \varphi/2$. ② B_i pontban b egyenesre állított merőleges kimetszi az a egyenesből az X_i pontot. Két megoldás van, ha $A \neq O$ és $0° < \varphi < 90°$; egy megoldás van, ha $A \neq O$ és $\varphi = 90°$ vagy $A \equiv O$ és $0° < \varphi < 90°$; végtelen sok megoldás van, ha $A \equiv O$ és $\varphi = 90°$.

335. AX felezi az $\sphericalangle(e; X_iB)$ szöget, B pont AX egyenesre vonatkozó tükörképe $B' \Rightarrow B' \in e \Rightarrow AB = AB'$.
A szerkesztés: ① A középpontú, AB sugarú kör $\Rightarrow k$.

I

335.



② $k \cap e = \{B'; B''\}$. ③ BB' felező merőlegese f_1, BB'' felező merőlegese f_2. ④ $f_1 \cap e = X_1$, $f_2 \cap e = X_2$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.

336. A szerkesztés: ① a egyenes tükrözése t egyenesre $\Rightarrow a'$. ② $a' \cap b = B$. ③ B pont tükrözése t egyenesre $\Rightarrow A$. Végtelen sok megoldás van, ha $a' \equiv b$; nincs megoldás, ha $a' \parallel b$ vagy $BC \perp t$ vagy $a \cap b \in t$ és $a' \neq b$; egy megoldás van egyébként.

337. A szerkesztés: ① a egyenes tükrözése f egyenesre $\Rightarrow a'$. ② $a' \cap b = B$. ③ B pont tükrözése f egyenesre $\Rightarrow A$. ④ A középpontú, AB sugarú kör $\Rightarrow k$. ⑤ $k \cap f = \{C_1; C_2\}$. Végtelen sok megoldás van, ha $a' \equiv b$; nincs megoldás, ha $a' \parallel b$ vagy $a \cap b \in f$ és $a' \neq b$; két egybevágó megoldás van egyébként.

338. Legyen adott k és l kör, valamint m egyenes! A szerkesztés: ① k kör tükrözése m egyenesre $\Rightarrow k'$. ② $k' \cap l = \{B_1; B_2\}$. ③ B_i tükrözése m egyenesre $\Rightarrow A_i$. ④ A_1 középpontú, A_1B_1 sugarú kör $\Rightarrow k_1$, A_2 középpontú, A_2B_2 sugarú kör $\Rightarrow k_2$. ⑤ $k_1 \cap m = \{C_1; C_2\}$, $k_2 \cap m = \{C_3; C_4\}$. Két-két egybevágó vagy két egybevágó háromszög a megoldás, vagy nincs megoldás.

339. Q pont e egyenesre vonatkozó tükörképe Q' pont $\Rightarrow PQ = PQ' \Rightarrow Q'$ pontok a P középpontú, PQ sugarú k körön vannak. Ennek a körnek minden pontja létrejön valamely e egyenesre vonatkozó tükrözéssel, mert tetszőleges $R \in k$ esetén RQ felező merőlegese átmegy P ponton. A keresett ponthalmaz a k kör.

340. A 340. ábra jelöléseit használjuk: RP egyenesre tükrözve $A' = Q$, $R' = R$, $M' = M \Rightarrow$ $\Rightarrow (RAM\sphericalangle)' = RQM\sphericalangle \Rightarrow RAM\sphericalangle = RQM\sphericalangle$.

341. Az A pontot az f, g, h, i szögfelezőkre tükrözve az A_f, A_g, A_h, A_i tükörképek rajta vannak a BC egyenesen.

342. A 341. feladatban láttuk, hogy A-t szögfelezőkre tükrözve, a négy tükörkép a BC egyenesre kerül. A merőlegesek talppontjai az AA_x szakaszok felezőpontjai $\Rightarrow$ az $ABC\triangle$ BC-vel párhuzamos középvonalára illeszkednek.

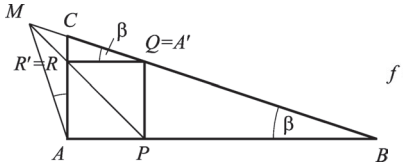
343. Legyen egy tetszőleges $P \in BC$ f_γ egyenesre vonatkozó tükörképe P'; P' f_α-ra vonatkozó tükörképe P''; P'' f_β-ra vonatkozó tükörképe P'''. Mivel a háromszög két oldalegyenese szimmetrikus a metszéspontjukon átmenő szögfelező egyenesre, $P' \in CA$, $P'' \in AB$, $P''' \in BC$.

344. Az f, g, h egyenesek között ne legyenek merőlegesek, különben nincs megoldás!

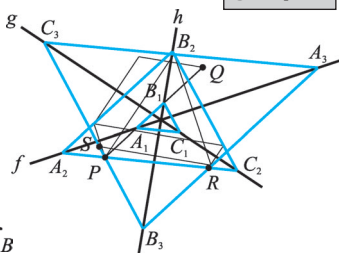
Az adott P pontot f, g, h (vagy h, g, f) egyenesre tükrözve ugyanazon oldalegyenes még egy Q pontját kapjuk (343. feladat állítása) $\Rightarrow PQ \cap f = A_1$, $PQ \cap h = B_1$. A kapott A_1B_1 oldal egyenesét f-re vagy h-ra tükrözve adódik C_1. Hasonlóan f, h, g (vagy g, h, f) szögfelezőkre tükrözve is ugyanazon oldal még egy R pontját kapjuk. $\Rightarrow PR \cap f = A_2$, $PR \cap g = C_2$. A kapott A_2C_2 egyenest f-re vagy g-re tükrözve adódik B_2. Harmadik megoldás adódik, ha g, f, h (vagy h, f, g) sorrendben tükrözünk. Ha valamely tükrözéssorozat végén az adott pontba jutunk vissza, akkor is meghatározható az A_i, B_i, C_i pont, mert a megszerkesztett három háromszög oldalai páronként párhuzamosak.

Előfordulhat, hogy a háromszögnek az adott egyenesek egy belső és két külső szögfelezőjét alkotják.

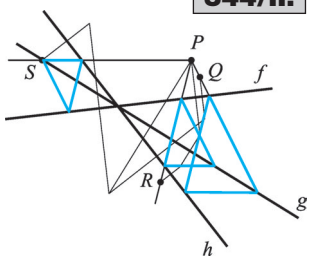
340.



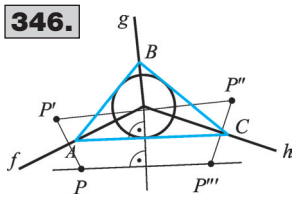
344/I.



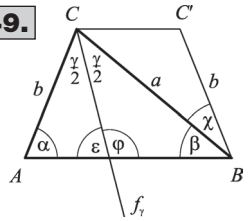
344/II.



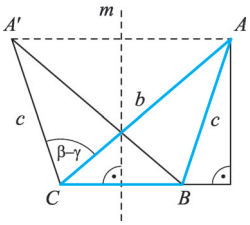
346.



349.



350.



345. Az adott A vagy B csúcsot tükrözzük az f_c szögfelezőre. A tükörképpontot a másik csúccsal összekötő e egyenes metszi ki a szögfelező egyeneséből a harmadik csúcsot. Végtelen sok megoldás van, ha A és B tengelyesen szimmetrikus a szögfelezőre. Nincs megoldás, ha a szögfelező nem választja el a két adott pontot, vagy $e \parallel f_c$, vagy $e \perp f_c$ és A, B különböző távolságra van f_c-től. Egyébként egy megoldás van.

346. Legyen P pont az f és h félegyenes g-t nem tartalmazó szögtartományában!

A szerkesztés: ① Tükrözzük az adott P pontot f, g, h egyenesére $\Rightarrow P'''$. (A 343. feladat állítását alkalmazva belátható, hogy $PP''' \parallel AC$.) ② PP'''-vel párhuzamos érintő a körhöz $\Rightarrow b$ egyenes. ③ $b \cap f = A$, $b \cap h = C$. ④ Az A pontból érintő a körhöz $\Rightarrow c$ egyenes. ⑤ $c \cap g = B$. Nincs megoldás, ha valamelyik két félegyenes szöge nem tompaszög.

347. Tükrözzük az $ABC\triangle$-et az AB oldal felező merőlegesére! A tengelyes tükrözés tulajdonságai miatt $ABC' \sphericalangle = CAB \sphericalangle = \alpha \Rightarrow \varphi = CBC' \sphericalangle = \alpha - \beta$.

348. A 347. feladatban láttuk, hogy ha a C pontot tükrözzük az AB felező merőlegesére, akkor $CBC' \sphericalangle = \alpha - \beta$, és a tükrözés miatt $C'B = CA$.

A szerkesztés: ① $CB = a$, $C'B = b$, $CBC' \sphericalangle = \alpha - \beta \Rightarrow CBC'\triangle$. ② CC' felező merőlegese $\Rightarrow f$. ③ B tükrözése f egyenesre $\Rightarrow A$. Egy megoldás van.

349. A 347. feladat alapján: $\alpha + \varepsilon = 180° - \gamma/2 = \varphi + \beta$ és $\varphi - \varepsilon = \alpha - \beta$.

A szerkesztés: ① $\varphi - \varepsilon$, a, $b \Rightarrow CBC'\triangle$. ② CC' felező merőlegese $\Rightarrow m$ egyenes. ③ B pont tükrözése m egyenesre $\Rightarrow A$.

350. A feladat adataiból következik, hogy $b > c$. Ha BC felező merőlegese m, és A pont m egyenesre vonatkozó tükörképe $A' \Rightarrow ACA' \sphericalangle = \beta - \gamma$ és m_a az $ACA'\triangle$ AA'-höz tartozó magassága is.

A szerkesztés: ① b; m_a; $\beta - \gamma \Rightarrow ACA'\triangle$. ② AA' felező merőlegese $\Rightarrow m$. ③ C pont tükrözése m egyenesre $\Rightarrow B$. Egy megoldás van, ha $b > m_a$, egyébként nincs megoldás.

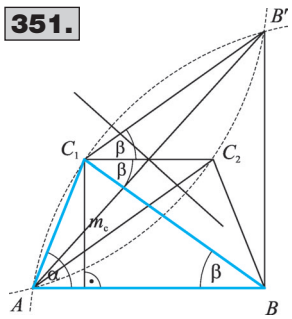
351. Ha $\alpha \neq \beta \Rightarrow ACB' \sphericalangle = \gamma + 2\beta = 180° - (\alpha + \beta) + 2\beta = 180° - \alpha + \beta = 180° - (\alpha - \beta)$.

A szerkesztés: ① $AB = c$. ② AB-vel párhuzamos egyenes m_c távolságban $\Rightarrow c'$. ③ B tükrözése c' egyenesre $\Rightarrow B'$. ④ AB' szakasz $180° - (\alpha - \beta)$ szögű látószögköríve $\Rightarrow k_1, k_2$. ⑤ $k_i \cap c' = C_i \Rightarrow$ $\Rightarrow ABC_1\triangle \cong ABC_2\triangle$ a megoldás.

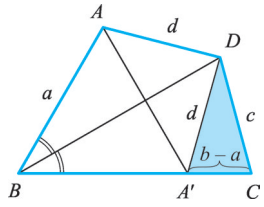
Ha $\alpha = \beta$, akkor $AC = BC \Rightarrow$ egyenlő szárú háromszög szerkesztése a feladat, adott alap és ahhoz tartozó magasság esetén.

352. BD felezi ABC szöget és A pont BD-re vonatkozó tükörképe $A' \Rightarrow A' \in e(B; C) \Rightarrow CA' = |b - a|$, $AD = A'D = d$.

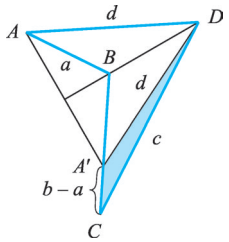
351.



352/I.

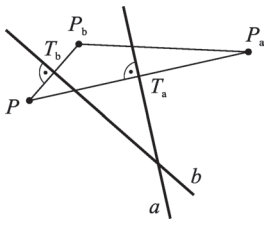


352/II.

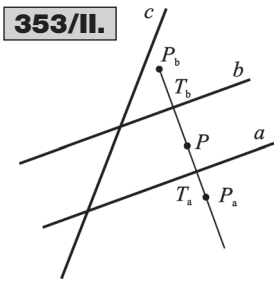


I

353/I.



353/II.



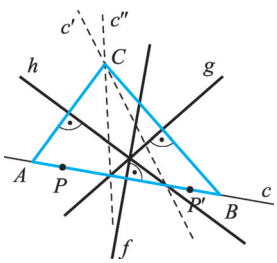
A szerkesztés: ha $a \neq b$ és $c \neq d$. ① $c, d, |b-a| \Rightarrow A'CD\triangle$. ② CA'-re C pontból b hosszúságú szakasz $\Rightarrow B$. ③ A' tükrözése BD egyenesre $\Rightarrow A$. Nincs megoldás, ha $|b-a|, c, d$ szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. Ha $a = b$ és $c = d \Rightarrow$ deltoid szerkesztése a feladat.

353. **1. eset:** Ha a, b, c páronként metszők $\Rightarrow PP_aP_b\triangle$ középvonala $T_aT_b \Rightarrow T_aT_b \parallel P_aP_b$, hasonlóan $T_bT_c \parallel P_bP_c \Rightarrow P_a, P_b, P_c$ akkor és csak akkor van egy egyenesen, ha T_a, T_b, T_c is.
2. eset: Ha a, b, c egy pontban metszi egymást $\Rightarrow$ sem a talppontok, sem a tükörképpontok nincsenek egy egyenesen $\Rightarrow$ igaz az állítás.
3. eset: Ha $a \parallel b \parallel c \Rightarrow T_c, T_a, T_b, P_a, P_b, P_c$ egy egyenesre illeszkedik $\Rightarrow$ igaz az állítás.
4. eset: Ha a párhuzamos b-vel, de nem párhuzamos c-vel $\Rightarrow P, T_a, T_b, P_a, P_b$ egy egyenesen vannak $\Rightarrow m$ egyenes $\Rightarrow$ ha $P \in c \Rightarrow P_c = T_c = P \Rightarrow P_c \in m$ és $T_c \in m$; vagy ha $P \notin c \Rightarrow P_c \notin m$ és $T_c \notin m \Rightarrow T_a, T_b, T_c$ egy egyenesen van $\Leftrightarrow P_a, P_b, P_c$ egy egyenesen van.

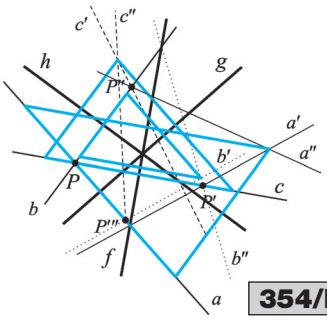
354. Adottak $f; g; h$ oldalfelező merőlegesek és P pont. A szerkesztés: ① P pont tükörképe az f egyenesre $\Rightarrow P'$, $e(P; P') \equiv e(A; B)$. ② PP' egyenes tükörképe h egyenesre $\Rightarrow c'$, PP' egyenes tükörképe g egyenesre $\Rightarrow c''$. ③ $c' \cap c'' = C$. ④ C tükörképe h, illetve g egyenesre $\Rightarrow A$, illetve B. Még két megoldás adódik, ha az első lépésben a P pontot a h egyenesre tükrözzük $\Rightarrow e(P; P'') \equiv e(A; C)$, illetve a g egyenesre tükrözve $\Rightarrow e(P; P''') \equiv e(B; C)$. A három háromszög oldalai párhuzamosak. Nincs megoldás, ha az adott egyenesek nem illeszkednek egy pontra vagy a P pont a közös pontjuk.

355. Legyen a k kör e egyenesre vonatkozó tükörképe k'. $\Rightarrow \sphericalangle(E_kP; e) = \sphericalangle(E_kP; e) = \sphericalangle(E_lP; e) \Rightarrow E_{k'}, P, E_l$ egy egyenesen van, $E_{k'}E_l$ egyenes a k' és l körök közös érintője. Az érintőnek az e egyenessel való metszéspontja megoldás. k' és l kört elválasztja az e egyenes $\Rightarrow$ a két körnek négy közös érintője van. Ha a közös belső érintők az e egyenesen metszik egymást, három megoldás adódik, egyébként négy megoldás van.

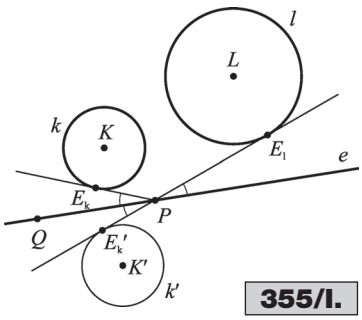
356. Legyen a P pont b egyenesre vonatkozó tükörképe P'. $\Rightarrow \varepsilon + \varphi = \alpha = \beta$ és $P'CQ\sphericalangle = 2\varepsilon + \gamma = 2(\alpha - \varphi) + \gamma = 2\alpha + \gamma - 2\varphi = 180° - 2\varphi > 0$.
A szerkesztés: ① P tükörképe b egyenesre $\Rightarrow P'$. ② $P'Q$ szakasz $180° - \varphi$ szögű látószögköríve $\Rightarrow k_1, k_2$. ③ $k_i \cap b = C_i$. ④ $C_iP \cap a = A_i$ és $C_iQ \cap a = B_i$. P pont a egyenesre vonatkozó tükrözésével újabb megoldás adódhat.



354/I.

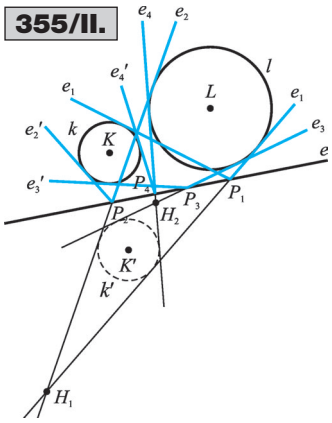


354/II.

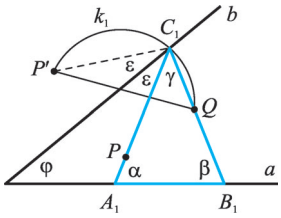


355/I.

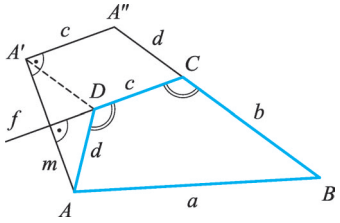
355/II.



356.

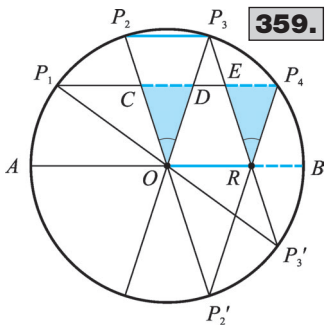


357.



357. Adott az a, c, m, $b+d$ szakasz és az $ADC\sphericalangle = DCB\sphericalangle$ egyenlőség. Legyen A tükörképe DC egyenesre A', valamint BC meghosszabbítása C-n túl d-vel A''. $AD = DA'$, $ADC\sphericalangle = A'DC\sphericalangle = DCB\sphericalangle \Rightarrow AD \parallel A''B \Rightarrow A'DCA''$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow A'A'' = DC$ és $A'A'' \parallel DC \Rightarrow A'A'' \perp AA'$.
A szerkesztés: ① $2m$, c befogók, $90° \Rightarrow A'A''A\triangle$. ② AA' felező merőlegese $\Rightarrow f$. ③ A középpontú, a sugarú kör és A'' középpontú, $d+b$ sugarú kör közös pontja $\Rightarrow B$. ④ $A''B \cap f = C \Rightarrow CA'' = d$. ⑤ C középpontú, c sugarú kör és A középpontú, d sugarú kör közös pontja $\Rightarrow D$.
358. Ha t és u két párhuzamos szimmetriatengely, akkor t-re tükrözve $A' = B$, u-ra tükrözve $A' = C$ lenne $\Rightarrow A, B, C$ egy egyenesen lenne. $\Rightarrow$ Ha van két különböző szimmetriatengely, azok metszik egymást.
A szimmetriatengely felezi a sokszög területét $\Rightarrow$ a sokszögön belül metszi egymást a két különböző szimmetriatengely.
Ha három különböző szimmetriatengely metszéspontjai háromszöget alkotnának, akkor annak csúcspontjai a fentiek miatt belső pontok lennének. $\Rightarrow$ A háromszögnek van a sokszöghöz tartozó belső pontja. Ez a belső pont legyen P.
A sokszög P-től legtávolabbi csúcsa legyen a D pont. A tengelyek közt van olyan, amelynek P és D ugyanazon félsíkjában van.
Legyen a D' csúcs a D pontnak erre a tengelyre vonatkozó tükörképe $\Rightarrow PD < PD' \Rightarrow$ ez ellentmond annak, hogy D pont a P-től legtávolabbi csúcs. Ezzel beláttuk, hogy ha több szimmetriatengelye van egy sokszögnek, akkor azok egy ponton mennek át.
359. Bontsuk az $AB = 2r$ átmérőjű félkört öt egyenlő ívre! $\Rightarrow P_1P_4 \parallel AB$ és $P_2P_3 \parallel AB$. A P_2P_2' átmérőjű félkörben P_3, P_4, B, P_3' osztópontok $\Rightarrow P_3P_3' \parallel P_2P_2'$ és $P_4B \parallel P_2P_2' \Rightarrow CORE$ és ORP_4D négyszögek paralelogrammák $\Rightarrow CDO\triangle \cong EP_4R\triangle \Rightarrow CD = P_4E$; $P_4E \parallel RB$ és $P_4B \parallel ER \Rightarrow RBP_4E$ paralelogramma $\Rightarrow RB = P_4E$; $P_4E = RB$ és $P_2P_3 = OR \Rightarrow CD + P_2P_3 = BR + RO = BO = r$. Hasonlóan látható be az állítás, ha 3, 7, 9, … részre osztjuk a félkört.

359.

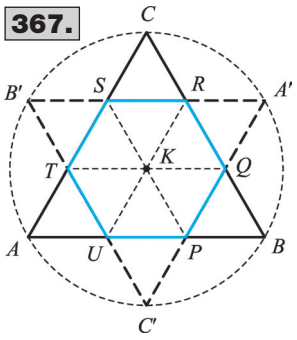


Középpontos tükrözés

A **360–364.** feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.
365. AB párhuzamos és egyenlő DE-vel, ezért AB középpontos tükörképe G-re DE, ahol $AG = GD$. FA párhuzamos és egyenlő CD-vel, ezért FA középpontos tükörképe G-re CD. $\Rightarrow G$ az $ABCDEF$ hatszög tükörközéppontja. $\Rightarrow G$ felezőpontja FC és BE átlónak is. $\Rightarrow$ Az átlók egy ponton (G-n) mennek át.

I

367.



366. Ha egy háromszög középpontosan szimmetrikus lenne, akkor egyik csúcsának tükörképe egy másik csúcsa lenne, így az egyik oldal felezőpontja lenne a szimmetriaközéppont. Ettől különböző pont a harmadik csúcs, aminek tükörképe nem lehetne semelyik már említett csúcs sem, mert e tükörkép paralelogrammát alkotna a háromszög csúcsaival.

A háromszög nem lehet középpontosan szimmetrikus.

367. Felhasználjuk, hogy a háromszög K középpontja súlypont, ami $2:1$ arányban osztja a súlyvonalat. K pontra vonatkozó tükrözés $\Rightarrow AB \parallel A'B' \Rightarrow UC'P\triangle$ szabályos, mert szögei 60°-osak. $CK = KC'$ és K súlypont $\Rightarrow UC'P\triangle$ magassága $\frac{1}{2}\,CK$. Hasonlóan adódik, hogy $UC'P\triangle$, $PBQ\triangle$,…$TAU\triangle$ mindegyike szabályos háromszög és magasságuk $\frac{1}{2}\,CK \Rightarrow$ egybevágók $\Rightarrow UP = PQ = QR = RS = ST = TU$ és az $UPQRST$ hatszög minden szöge $120° \Rightarrow$ a közös rész szabályos hatszög, oldala $\frac{1}{3}\,AB$.

368. Tükrözzük az $ABC\triangle$-et az AB átfogó F felezéspontjára! Az eredeti háromszög és a tükörképe együtt az $AC'BC$ téglalapot adja. A téglalap átlói egyenlők: $CC' = AB \Rightarrow 2CF = 2AF \Rightarrow$ $\Rightarrow CF = AF \Rightarrow ACF\triangle$ egyenlő szárú.
$CC' = AB \Rightarrow 2CF = 2BF \Rightarrow CF = BF \Rightarrow BFC\triangle$ egyenlő szárú.

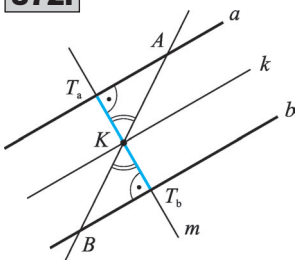
369. Húzzuk meg a háromszög átfogóhoz tartozó CF súlyvonalát! A 368. feladat állítását felhasználva $CF = FB = FA = \frac{1}{2}\,AB$. A $CFB\sphericalangle$ külső szög a CFA egyenlő szárú háromszögben, ezért $CFB\sphericalangle = 2 \cdot 15° = 30°$. A CFT derékszögű háromszögben $FCT\sphericalangle = 90° - 30° = 60°$. A 30°-os szöggel szembeni befogó fele az átfogónak: $\underline{\underline{CT}} = \frac{1}{2}\,CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\,AB = \underline{\underline{\frac{1}{4}\,AB}}$.

370. Tetszőleges $A \in e \Rightarrow A' \in e'$ és AA' felezőpontja a tükrözés középpontja. Ha $e \equiv e' \Rightarrow$ $\Rightarrow A' \in e \Rightarrow AA'$ szakasz része az e egyenesnek és a szakasz felezőpontja is az egyenesen van.

371. Jelöljük a tükörképeket rendre P^{I}; P^{II}; P^{III}; P^{IV}-gyel. Legyen $PP' \cap e = T_1$ és $P^{\mathrm{II}}\,P^{\mathrm{III}} \cap e = T_2$. Ha $P \notin e \Rightarrow$ a tengelyes tükrözés miatt $PT_1O\triangle \cong P'T_1O\triangle$; a középpontos tükrözés miatt $P'T_1O\triangle \cong OT_2P''\triangle$; a tengelyes tükrözés miatt $OT_2P''\triangle \cong OT_2P'''\triangle \Rightarrow PT_1O\triangle \cong P'''T_2O\triangle \Rightarrow$ $\Rightarrow P'''O = PO$ és $T_2O\,P'''\sphericalangle = T_1O\,P\sphericalangle \Rightarrow P'''\,O$ pontra vonatkozó tükörképe P. Ha $P \in e \Rightarrow P' =$ $= P$, $P'O = P''O$ és $P'' \in e \Rightarrow P''' = P'' \Rightarrow P^{\mathrm{IV}} = P$.

(A megoldás transzformációk szorzatával: Jelöljük az e egyenesre vonatkozó tükrözést t_e-vel, az O középpontú tükrözést O körüli 180°-os forgatásként értelmezve $f_{O;\,180°}$-kal, az identitást I-vel. $f_{O;\,180°}t_e = (t_1 \cdot t_e)t_e = t_1(t_e \cdot t_e) = t_1 \cdot I = t_1$, ahol t_1 a t_e-hez megválasztható tengelyes tükrözés. $(f_{O;\,180°}t_e)(f_{O;\,180°}t_e) = t_1 \cdot t_1 = I$, tehát a tükrözéssorozattal visszajutunk az eredeti pontba.)

372.

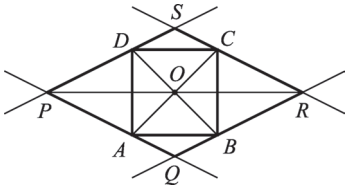


372. Legyen $a \parallel b$ középpárhuzamosa k és $m \perp k$. k definíciója szerint $K \in k$ és $KT_a = KT_b$. Ha a középvonalra nem merőleges, K ponton átmenő e egyenes az a egyenest A pontban, a b egyenest B pontban metszi, akkor $KT_aA\triangle \cong KT_bB\triangle \Rightarrow AK = BK$. Mindkét esetben K felezi az egyenesnek a párhuzamosak közé eső szakaszát.

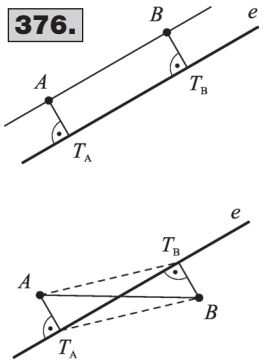
373. Legyen $a \parallel b$, középpárhuzamosuk k; $P, Q \in a$, $O \in k$, a PQ szakasz O pontra vonatkozó tükörképe a $P'Q'$ szakasz $\Rightarrow$ $\Rightarrow PQP'Q'$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow PQ \parallel P'Q'$ és PQ egyenes ugyanolyan messze van O-tól, mint $P'Q'$ egyenes $\Rightarrow P', Q' \in b$.

374. Az $ABCD$ paralelogramma és az e egyenes szimmetrikus az átlók metszéspontjára, K-ra, ezért $P' = Q$, $A' = C$, $B' = D$, ahol

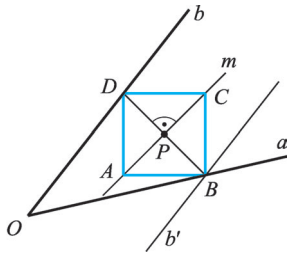
375.



376.



379.



P és Q az e egyenes és az $ABCD$ paralelogramma közös pontjai. $APQD$ négyszög K pontra vonatkozó tükörképe $CQPB$ négyszög. Ha az e egyenes a paralelogramma átlója, akkor két középpontosan szimmetrikus háromszög adódik.

375. Az $ABCD$ négyzet középpontja $O \Rightarrow AO = OC \Rightarrow O$ pont egyenlő távolságra van a PQ és RS párhuzamos egyenesektől. Az O pont felezi a rajta átmenő egyeneseknek PQ és RS párhuzamosok közé eső szakaszát. $\Rightarrow SO = OQ$ és $PO = OR \Rightarrow O$ pont a $PQRS$ paralelogramma átlóinak felezőpontja, vagyis a paralelogramma középpontja.

376. Ha A és B azonos félsíkban van és $AT_A = BT_B$, $AT_A \parallel BT_B \perp e \Rightarrow AT_AT_BB$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow AB \parallel T_AT_B \Rightarrow AB \parallel e$. Ha A és B különböző félsíkban van és $AT_A = BT_B$, $AT_A \parallel BT_B \perp e \Rightarrow AT_ABT_B$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow$ átlói felezik egymást, T_AT_B felezi AB-t $\Rightarrow e$ felezi az AB szakaszt.

377. A háromszög három középvonalának egyenese a megoldás, mert két ponttól egyenlő távolságra levő egyenes vagy párhuzamos a két pontot összekötő szakasszal, vagy átmegy a szakasz felezőpontján.

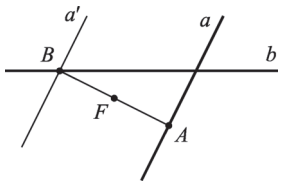
378. Az adott P pont felezi a szerkesztendő egyenes szögszárak közé eső AB szakaszát, ezért P a tükörközéppontja AB-nek. A szerkesztés: ① b szögszár P pontra vonatkozó tükörképe $\Rightarrow b'$. ② $b' \cap a = A$, ahol a a másik szögszár. Mindig egy megoldás van, az AP egyenes.

379. A szerkesztendő négyzet BD átlóját felezi a P pont.
A szerkesztés: ① b szögszár tükrözése P pontra $\Rightarrow b'$. ② $b' \cap a = B$. ③ $e(B; P) \cap b = D$. ④ P pontban BD-re merőleges egyenes $\Rightarrow m$; P középpontú, PD sugarú kör $\Rightarrow k$. ⑤ $k \cap m = \{A; C\}$. Mindig egy megoldás van, az $ABCD$ négyzet.

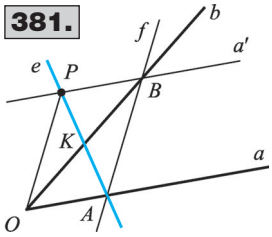
380. A keresett helyeket jelölje A és B pont. Ezek a pontok tükörképei egymásnak a fát jelölő F pontra. A szerkesztés: ① a egyenes tükörképe F pontra $\Rightarrow a'$. ② $a' \cap b = B$. ③ $e(B; F) \cap a = A$. Egy megoldás van, ha a és b nem párhuzamos. Ha $a \parallel b$, akkor vagy végtelen sok megoldás van, ha F a középvonalon van, vagy nincs megoldás, ha F nincs a középvonalon.

381. Az $OABP$ négyszög paralelogramma, a PA és OB átlók felezik egymást. A szerkesztés: ① P ponton át a-val párhuzamos egyenes $\Rightarrow a'$. ② $a' \cap b = B$. ③ B ponton át OP-vel párhuzamos $\Rightarrow f$. ④ $f \cap a = A \Rightarrow e(A; P)$. Nincs megoldás, ha P pont abban a szögtartományban van, ami az adott szögtartomány O pontra vonatkozó tükörképe. Egyébként egy megoldás van.

380.

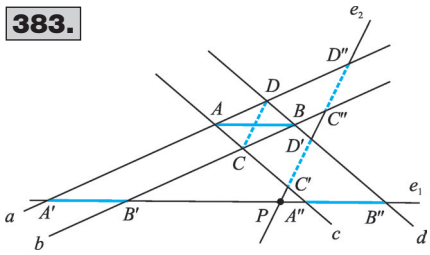


381.

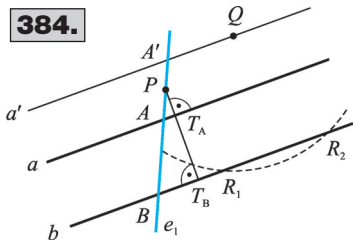


I

383.



384.



382. Adott az $ABCD$ négyszög és a K pont. A szerkesztés: ① AB egyenes tükrözése K pontra $\Rightarrow$ $\Rightarrow x$, AD egyenes tükrözése K pontra $\Rightarrow y$. ② $e(C; D) \cap x = P$, $e(B; C) \cap y = Q$. ③ P tükörképe K pontra $\Rightarrow R$, Q tükörképe K pontra $\Rightarrow S \Rightarrow PQRS$ paralelogramma. Ha az $ABCD$ négyszög trapéz, akkor vagy végtelen sok megoldás van (P a középpárhuzamos pontja), vagy nincs megoldás (P nincs a középpárhuzamoson). Egyébként egy megoldás van.

383. Tekintsük a 383. ábrát! $ABB'A'$ paralelogramma $\Rightarrow AB = A'B'$ és $ABB''A''$ paralelogramma $AB = A''B''$, ezért $A''B'' = A'B'$. Hasonlóan belátható, hogy $C'D' = C''D'' = CD$.
A szerkesztés: ① $a \cap c = A$, $b \cap c = C$, $a \cap d = D$, $b \cap d = B$. ② P ponton át AB-vel párhuzamos $\Rightarrow$ $\Rightarrow e_1$, P ponton át CD-vel párhuzamos $\Rightarrow e_2$. Ha a négy egyenes párhuzamos, akkor vagy minden P-re illeszkedő egyenes megoldás ($d(a; b) = d(c; d)$ esetén), vagy nincs megoldás ($d(a; b) \neq$ $\neq d(c; d)$ esetén). Egyébként két megoldás van.

384. Legyen az A pont P pontra vonatkozó tükörképe $A' \Rightarrow PA + PB = PB + PA' = BA'$. A szerkesztés: ① a egyenes P pontra vonatkozó tükörképe $\Rightarrow a'$. ② a' egyenes tetszőleges pontja Q; Q középpontú, d sugarú kör $\Rightarrow k$. ③ $k \cap b = \{R_1; R_2\}$. ④ P ponton át QR_1 egyenessel párhuzamos $\Rightarrow e_1$, P-n át QR_2 egyenessel párhuzamos $\Rightarrow e_2$. Ugyanezek a szelők adódnak, ha az 1. lépésben b egyenest tükrözzük. Nincs megoldás, ha $d < PT_A + PT_B$; egy megoldás van, ha $PT_A +$ $+ PT_B = d$; két megoldás van, ha $PT_A + PT_B > d$.

385. Legyen a k kör P ponthoz húzott érintője az e egyenes $\Rightarrow k'$ P-beli érintője e'. Mivel P pontra tükrözve $e' \equiv e$, ezért k' kör P-beli érintője az e egyenes $\Rightarrow k$ és k' a P pontban érinti egymást.

386. Legyen a két kör középpontja K és L, a közös húr MN. $KM = ML = LN = NK = r \Rightarrow$ $\Rightarrow KMLN$ négyszög rombusz $\Rightarrow$ átlói felezik egymást $\Rightarrow MN \cap KL = O \Rightarrow OL = OK \Rightarrow k$ kör O pontra vonatkozó tükörképe l kör.

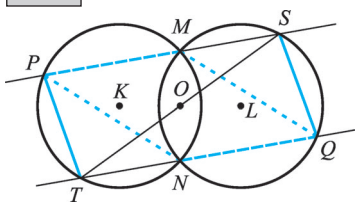
387. $MN \cap KL = O$ és $PS \parallel QT \Rightarrow O$ pontra tükrözve $M' = N$, $P' = Q$, $T' = S \Rightarrow MPNQ$ és $SPTQ$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow MQ \parallel PN$ és $SQ \parallel PT$, $MQ = PN$ és $SQ = PT$.

388. Jelölje k és l körök egyik közös pontját M.
Legyen a k kör M pontra vonatkozó tükörképe k' és $k' \cap l = \{M, P\} \Rightarrow PM = P'M$.

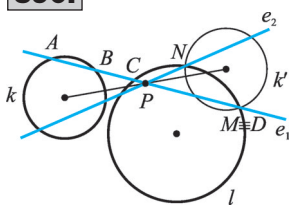
389. Legyen k és l a két kör. A szerkesztés: ① $k \cap l = \{M, N\}$. ② k kör M pontra vonatkozó tükörképe $\Rightarrow k'$. ③ $k' \cap l = \{M, P\}$. ④ MP egyenes a keresett szelő.

390. A szerkesztés: ① k kör P pontra vonatkozó tükörképe $\Rightarrow k'$. ② $k' \cap l = \{M, N\}$. ③ MP egyenes $\Rightarrow e_1$, NP egyenes $\Rightarrow e_2$ a keresett szelők. Nincs megoldás, ha $k' \cap l = \emptyset$; egy megoldás van, ha k' érinti l kört; két megoldás van, ha metszi. Végtelen sok megoldás van, ha $k' \equiv l$.

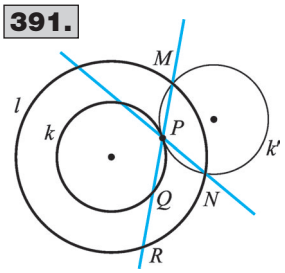
387.



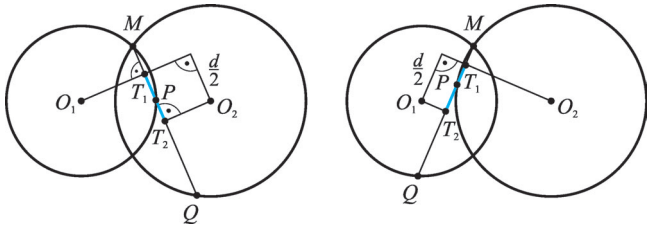
390.



391.



392/I.



391. A koncentrikus körök közös tengelyes szimmetriája miatt $MP = QR$. A szerkesztés: ① a k kört tükrözzük egy tetszőleges P pontjára $\Rightarrow k'$. ② $k' \cap l = \{M, N\}$. ③ MP egyenes és NP egyenes a megoldás. Egy adott P pont esetén két megoldás van, ha k' metszi az l kört; egy megoldás van, ha érinti; nincs megoldás, ha a k' körnek nincs közös pontja az l körrel.

392. Tekintsük át a megoldásokat! $\left|MP - MQ\right| = d$, $MT_1 = \frac{1}{2} MP, MT_2 = \frac{1}{2} MQ \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|MT_1 - MT_2\right| = \frac{1}{2} d$.

Ha M pont nem választja el P és Q pontot $\Rightarrow$ a keresett szelő átmegy az M ponton, és merőleges az O_2-től $\frac{d}{2}$ távolságra haladó, O_1-n átmenő egyenesre.

Ha M pont elválasztja P és Q pontot, és O_1 pont M-re vonatkozó tükörképe $O_1' \Rightarrow$ a keresett szelő átmegy az M ponton, és merőleges az O_2-től $\frac{d}{2}$ távolságra haladó, O_1'-n átmenő egyenesre.

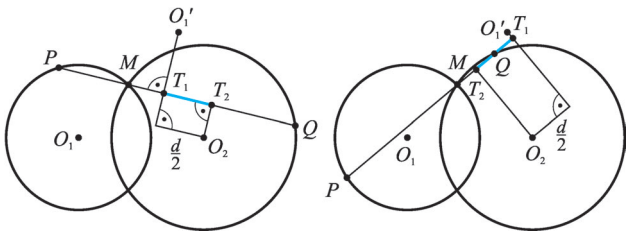
A szerkesztés: ① O_2 középpontú, $\frac{d}{2}$ sugarú kör $\Rightarrow l$, O_1 M-re vonatkozó tükörképe $\Rightarrow O_1'$. ② O_1-ből érintő l-hez $\Rightarrow e_1, e_2$, O_1'-ből érintő l-hez $\Rightarrow e_3, e_4$. ③ M ponton át e_i-re merőleges egyenesek $\Rightarrow$ $\Rightarrow f_1, f_2, f_3, f_4$. A megoldások száma r_1-, r_2-, d-től függően az egyik metszésponton átmenő szelők esetén nulla és négy között lehet.

393. A szerkesztés: ① c egyenes tükörképe P pontra $\Rightarrow c'$; k_1 kör tükörképe P pontra $\Rightarrow k_1'$. ② $c' \cap a = A$, és $k_1' \cap k_2 = \{B_1; B_2\}$. ③ A tükörképe P-re $\Rightarrow C$; B_i tükörképe P-re $\Rightarrow D_i$. ④ AB_iCD_i paralelogramma a megoldás. A megoldások száma 2, 1, 0 vagy végtelen sok lehet.

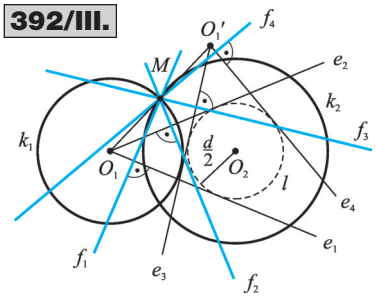
394. A szerkesztés: ① e egyenes P pontra vonatkozó tükörképe $\Rightarrow e'$. ② $e' \cap k = \{A'; B'\}$. ③ $A'P$ és $B'P$ egyenes a megoldás. A megoldások száma 2, 1, 0 lehet.

395. Az $ABCD$ paralelogramma középpontosan szimmetrikus az O pontra $\Rightarrow ABO\triangle \cong$ $\cong CDO\triangle \Rightarrow ABO\triangle$ és $CDO\triangle$ köré írt köre egyenlő sugarú, sőt egymás tükörképei O-ra nézve $\Rightarrow$ az O pont a két kör közös érintési pontja $\Rightarrow$ a két kör érinti egymást.

392/II.

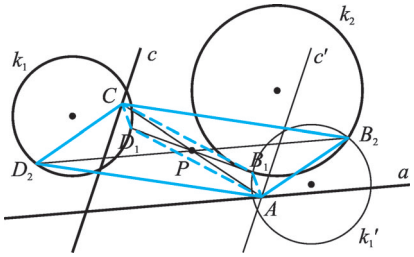


392/III.

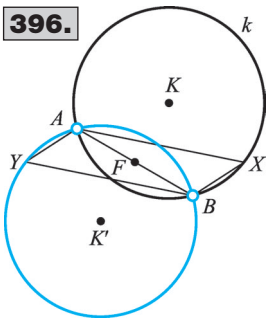


I

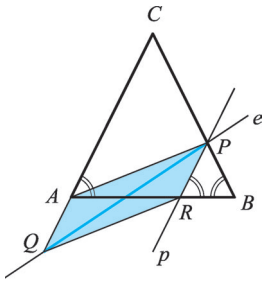
393.



396.



397.



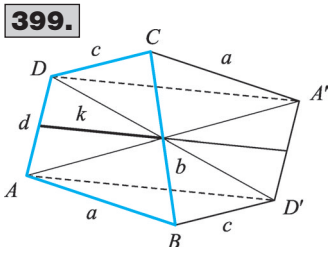
396. Mivel $AXBY$ paralelogrammában az A és a B szemközti csúcsok, ezért X ponttól függetlenül az AB szakasz F felezőpontja a paralelogramma középpontja. X és Y is szemközti csúcsok, ezért X-nek F pontra vonatkozó tükörképe lesz Y. Mivel X a k kör A- és B-től különböző pontja ($X = A$ vagy $X = B$ esetén nem lenne paralelogramma), az Y pontok a k kör F pontra vonatkozó tükörképének A-tól és B-től különböző pontjai.

397. Legyen $AC = BC$ és $BP = AQ$. Húzzunk a P ponton át párhuzamos egyenest az AC szárral $\Rightarrow p$; $p \cap AB = R \Rightarrow PR \parallel CA \Rightarrow PRB\sphericalangle = CAB\sphericalangle = PBA\sphericalangle \Rightarrow PRB$ háromszögben $PR = PB$. A feltételek miatt $PR = AQ$, a szerkesztés szerint $PR \parallel AQ \Rightarrow AQRP$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow QP$ és AR átlók felezik egymást $\Rightarrow$ az AR szakaszt tartalmazó alap felezi a PQ szakaszt.

398. *a)* Tükrözzük a háromszöget az AB felezőpontjára $\Rightarrow AC'BC$ paralelogramma.
A szerkesztés: ① $a, b, 2s_c \Rightarrow BCC'\triangle$. ② CC' felezőpontja $\Rightarrow F$. ③ B pont tükörképe az F pontra $\Rightarrow A$. Egy megoldás van, ha $a, b, 2s_c$-re teljesül a háromszög egyenlőtlenség, egyébként nincs megoldás.
b) Tükrözzük a háromszöget az AB felezőpontjára $\Rightarrow BC'AC$ paralelogramma.
A szerkesztés: ① $2s_c, a, 180° - \gamma \Rightarrow CC'A\triangle$. ② CC' felezőpontja $\Rightarrow F$. ③ A pont tükörképe F pontra $\Rightarrow B$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.
c) A pont tükörképe BC felezőpontjára $A' \Rightarrow ABA'C$ paralelogramma.
A szerkesztés: ① $2s_a, c, m_c \Rightarrow ABA'\triangle$. ② AA' felezőpontja $\Rightarrow F$. ③ B pont tükörképe F pontra $\Rightarrow C$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.
d) A pont tükörképe BC felezőpontjára $A' \Rightarrow ABA'C$ paralelogramma.
A szerkesztés: ① tetszőleges A pontból b félegyenes. ② b-vel párhuzamos egyenes m_b távolságban $\Rightarrow b'$, A középpontú, $2s_a$ sugarú kör $\Rightarrow k$. ③ $k \cap b' = \{A'; A''\}$. ④ AA_i felezőpontja $\Rightarrow F_i$, A középpontú, c sugarú kör $\Rightarrow l$. ⑤ $l \cap b' = \{B_1; B_2\}$. ⑥ B_i pont F_i pontra vonatkozó tükörképe $\Rightarrow C_i$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.
e) Tükrözzük az $ABC\triangle$-et a BC szakasz F felezéspontjára $\Rightarrow A'$. Az $ABA'C$ paralelogramma, melynek ABA' részháromszöge $AB = c$; $ABA'\sphericalangle = 180° - \alpha$ és $AA' = 2s_a$ adatokból szerkeszthető. Egyértelmű a megoldás, ha $2s_a > c$. 0; 1 vagy 2 megoldást kaphatunk, ha $2s_a < c$. Nincs megoldás, ha $2s_a = c$.

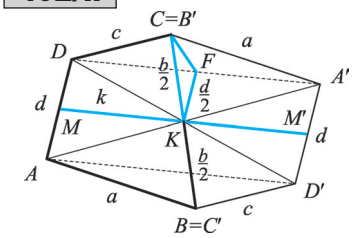
399. Tükrözzük a négyszöget a BC oldal felezőpontjára! Ha a négyszög trapéz, akkor a BC szár felezőpontjára tükrözve $AD'A'D$ paralelogramma középvonala a trapéz középvonalának kétszerese, és párhuzamos az alapokkal. $\Rightarrow 2k = a + c$, $k = \dfrac{a+c}{2}$.

399.

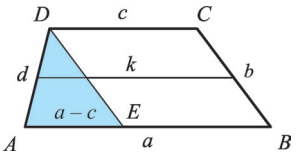


Ha $k = \dfrac{a+c}{2}$, akkor D, C, A' egy egyenesre esik és A, B, D' is egy egyenesre illeszkedik $\Rightarrow DC$ párhuzamos a középvonallal, AB párhuzamos a középvonallal $\Rightarrow DC \parallel AB \Rightarrow$ az $ABCD$ négyszög trapéz.

402/I.



402/II.



400. Tükrözzük a trapézt a BC szár felezőpontjára $\Rightarrow AD'A'D$ paralelogramma.
a) A szerkesztés: ① $a+c, m, d \Rightarrow AD'A'\triangle$. ② AA' felezőpontja $\Rightarrow F$; F középpontú, $b/2$ sugarú kör $\Rightarrow k$. ③ $k \cap AD' = \{B_1; B_2\}$. ④ B_i tükörképe F pontra $\Rightarrow C_i$; D' tükörképe F pontra $\Rightarrow D$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.
b) A szerkesztés: ① $a+c, m, \alpha \Rightarrow AD'A'D$ paralelogramma. ② AA' felezőpontján, F ponton át AD'-vel párhuzamos egyenes $\Rightarrow p$. ③ F pontból a p középpárhuzamosra β szöget mérünk $\Rightarrow g$ egyenes. ④ $g \cap AD' = B$; $g \cap DA' = C$. Egy megoldás van.
c) A szerkesztés: ① $a+c, e, f \Rightarrow AD'C\triangle$. ② C ponton át AD'-vel párhuzamos $\Rightarrow g$ egyenes; C középpontú b sugarú kör $\Rightarrow k$. ③ $k \cap AD' = \{B_1; B_2\}$. ④ C pontból g egyenesen $D'B_i$ távolság $\Rightarrow \{D_1; D_2\}$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.

401. D pontot tükrözzük a BC szár felezőpontjára $\Rightarrow BD'CD$ paralelogramma. Kétféle trapézt szerkeszthetünk aszerint, hogy a φ szögű szögtartomány az alapot vagy a szárat tartalmazza-e.
a) Két egymástól független szerkesztést végzünk. ① $e, f, \varphi \Rightarrow AD'C\triangle$ és $e, f, 180° - \varphi \Rightarrow$ $\Rightarrow AD'C\triangle$. ② A középpontú a sugarú kör $\Rightarrow k$, B középpontú f sugarú kör $\Rightarrow l$. ③ AB-vel párhuzamos C-n át $\Rightarrow t$. ④ $k \cap AD' = B$, $l \cap t = D$. 2, 1 vagy 0 megoldás van.
b) Két egymástól független szerkesztést végzünk. ① $e, f, \varphi \Rightarrow AD'C\triangle$ és $e, f, 180° - \varphi \Rightarrow$ $\Rightarrow AD'C\triangle$, az alapok összege $AD' = a + c$. ② $[(a+c)+(a-c)] : 2 = a$ és $[(a+c)-(a-c)] : 2 =$ $= c$. ③ A középpontú a sugarú kör $\Rightarrow k$, C középpontú c sugarú kör $\Rightarrow l$. ④ AD'-vel párhuzamos C-n át $\Rightarrow t$. ⑤ $k \cap AD' = B$, $l \cap t = D$. 2, 1 vagy 0 megoldás van.

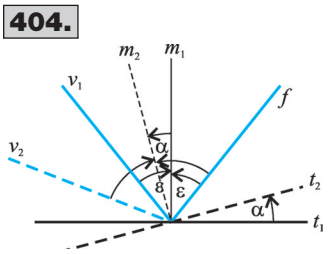
402. Tükrözzük az $ABCD$ négyszöget a BC oldal K felezőpontjára $\Rightarrow AD'A'D$ négyszög paralelogramma, aminek az MM' szakasz a középvonala $\Rightarrow DA' = 2k$.
1. eset: $2k, a, c$ szakaszokra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.
A szerkesztés: ① $2k, a, c \Rightarrow DA'C$. ② DA' felezőpontja F. ③ $CF, b/2, d/2 \Rightarrow FCK_1\triangle$ és $FCK_2\triangle$. ④ C pont tükörképe K_i pontra $\Rightarrow B_i, A'$ pont tükörképe K pontra A_i. 2, 1 vagy 0 megoldás lehet.
2. eset: $a + c = 2k$. A szerkesztés: ① $a - c, b, d \Rightarrow AED\triangle$. ② D ponton át AE-vel párhuzamos egyenes $\Rightarrow e$, D középpontú c sugarú kör $\Rightarrow l$. ③ $l \cap e = C$, C középpontú b sugarú kör $\Rightarrow t$. ④ $t \cap AE = B$. A megoldások száma 0 vagy 1.
3. eset: $a + c \neq 2k$ és $a, c, 2k$ szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség $\Rightarrow$ nincs megoldás.

Pont körüli forgatás

403. $AC \parallel BC'$ miatt $CAB\sphericalangle$ és $C'BA\sphericalangle$ társszögek: $39° + 98° + \varphi = 180° \Rightarrow \varphi = 43°$. 43°-kal negatív irányban kell elforgatni B körül a BC oldalt.

404. Az ábra jelöléseit használjuk. A visszaverődés törvénye szerint: $\sphericalangle(f; m_1) = \sphericalangle(m_1; v_1) = \varepsilon$ és $\sphericalangle(f; m_2) = \sphericalangle(m_2; v_2) =$ $= \varepsilon + \alpha$. Az ábráról leolvasható: $\sphericalangle(v_1; m_2) = \varepsilon - \alpha$; $\sphericalangle(v_2; v_1) =$ $= \sphericalangle(v_2; m_2) - \sphericalangle(v_1; m_2) = \varepsilon + \alpha - (\varepsilon - \alpha) = 2\alpha$.

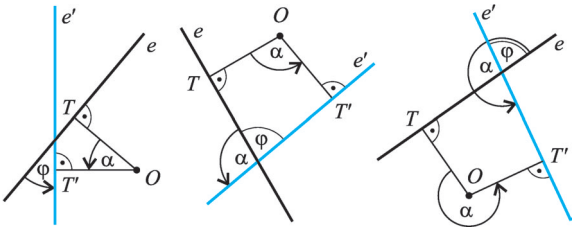
404.



A **405.** és **406.** feladat megoldását az olvasóra bízzuk.

I

409.



407. *a)* A szerkesztés: ① tetszőleges $P \in e$, P pont O körül α szöggel elforgatott képe $\rightarrow P'$ pont.
② $P'O$ egyenes $\rightarrow e'$.
b) Szerkesztés: ① tetszőleges $P, Q \in e$; P és Q pont O körül α szöggel elforgatott képe $\rightarrow P'$ és Q' pont. ② $P'Q'$ egyenes $\rightarrow e'$.

408. Adott az e egyenes, az O középpont és a P pont. Szerkesztés: *a)* ① O középpontú OP sugarú kör $\rightarrow k$. ② $k \cap e = P'$ a megoldás. *b)* ① O középpontú OP sugarú kör $\rightarrow k$. ② $k \cap e = P'$, $P'OP\sphericalangle = \alpha$. ③ Q pontot O körül α szöggel elforgatva $\rightarrow Q'$ pont. ④ $P'Q'$ egyenes $\rightarrow e'$ a megoldás. Az *a)* és *b)* részben a megoldások száma kettő, ha $d(O; e) < d(O; P)$; egy, ha $d(O; e) = d(O; P)$; nulla, ha $d(O; e) > d(O; P)$.

409. Legyen a T pont az O középpont merőleges vetülete az adott e egyenesen; az e egyenes O pont körül α szöggel elforgatott képe e'; e és e' egyenes hajlásszöge φ! Ekkor $T' \in e'$; és $OT \perp e$ miatt $OT' \perp e' \Rightarrow TOT'\sphericalangle = \alpha$; és e, e' irányított szöge α.
1. eset: $0° \leq \alpha \leq 90° \Rightarrow \varphi = \alpha$.
2. eset: $90° < \alpha \leq 180° \Rightarrow \varphi = 180° - \alpha$.
3. eset: $180° < \alpha \leq 270°$ esetén $\varphi = \alpha - 180°$ és $270° < \alpha < 360°$ esetén $\varphi = 360° - \alpha$.

410. *a)* Legyenek az e és f egyenesek által bezárt szögek α és $180° - \alpha$. Szerkesztés: ① P pontból e-re állított merőleges egyenes talppontja $\rightarrow T$. ② T pontot elforgatjuk P körül α, illetve $180° - \alpha$ szöggel $\rightarrow T_1'$ és T_2'. ③ P-ben merőlegest állítunk PT_1'-re, illetve PT_2'-re $\rightarrow e'$ és e'' egyenes a megoldás. Egy megoldás van, ha P rajta van az e egyenesen vagy az e és f egyenes szögfelezőjén, két megoldás van egyébként.
b) Szerkesztés: ① tetszőleges f-re merőleges egyenes $\rightarrow g$. ② Az e egyenest az *a)* részben leírtak szerint P pont körül elforgatjuk úgy, hogy g-vel párhuzamos legyen. Egy megoldás van, ha P rajta van az e egyenesen, két megoldás van egyébként.

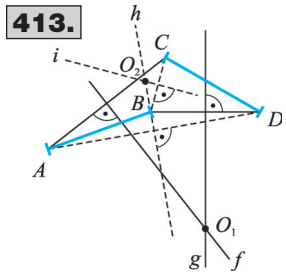
411. Az AB szakasz felező merőlegesének bármely pontja megoldás.

412. Legyen a középpont O, egy megfelelő pontpár P és P'. A pont körüli forgatás definíciója szerint $OP = OP' \Rightarrow PP'$ szakasz felezőmerőlegese átmegy az O ponton. Hasonlóan igazolható az állítás a két alakzat bármely megfelelő pontpárjára.

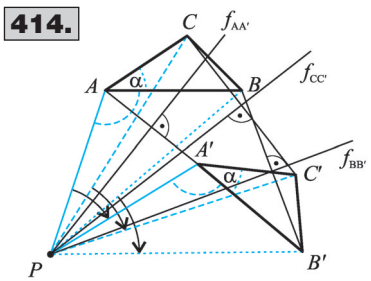
413. Szerkesztés: ① AC szakasz felezőmerőlegese $\rightarrow f$, BD szakasz felezőmerőlegese $\rightarrow g \Rightarrow f \cap g = O_1$ ② AD szakasz felezőmerőlegese $\rightarrow h$, BC szakasz felezőmerőlegese $\rightarrow i \Rightarrow h \cap i = O_2$. ③ Az O_i pont akkor megoldás, ha az egymásnak megfeleltetett pontokat egyező irányú és nagyságú elforgatás viszi egymásba. A megoldások száma 2 vagy 1.

414. Legyen a P pont az AA' és BB' felezőmerőlegeseinek metszéspontja! $PA = PA'$, $PB = PB'$, $AB = A'B' \Rightarrow PAB\triangle \cong PA'B'\triangle \Rightarrow PAB\sphericalangle = PA'B'\sphericalangle$. $PA = PA'$, $PAC\sphericalangle = PA'C'\sphericalangle$, $AC = A'C' \Rightarrow PAC\triangle \cong PA'C'\triangle \Rightarrow PC = PC' \Rightarrow P$ pont rajta van a CC' szakasz felezőmerőlegesén is $\Rightarrow$ a három felezőmerőleges egy ponton megy át.

413.



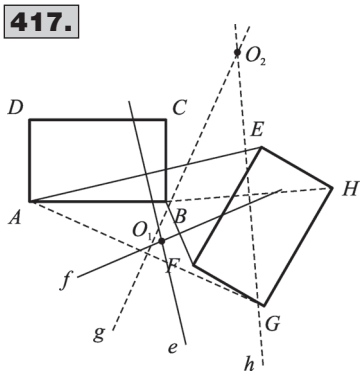
414.



415. A 414. feladatban láttuk, hogy AA', BB', CC' felező merőlegese egy ponton megy át. Ez a pont a forgatás középpontja, mert $APA' \sphericalangle = BPB' \sphericalangle = CPC' \sphericalangle$, és azonos irányú az elforgatás szöge. Egyértelmű a megoldás, mivel a feltételek miatt $f_{AA'}$, $f_{BB'}$, $f_{CC'}$ nem párhuzamosak.

416. A forgatás során a körüljárási irány nem változik $\Rightarrow$ $\Rightarrow ABC$ háromszög elforgatottjának megfelelő csúcsai DEF, EFD, FDE lehetnek.
Szerkesztés: ① AD, BE, CF szakaszok felezőmerőlegesei $\rightarrow$ $\rightarrow f, g, h \Rightarrow f \cap g \cap h = O_1$. ② AE, BF, CD szakaszok felezőmerőlegesei $\rightarrow i, j, k \Rightarrow i \cap j \cap k = O_2$. ③ AF, BD, CE szakaszok felezőmerőlegesei $\rightarrow l, m, n \Rightarrow l \cap m \cap n = O_3$. ④ Az O_i pont akkor megoldás, ha az egymásnak megfeleltetett pontokat egyező irányú és nagyságú elforgatás viszi egymásba. 3, 2 vagy 1 megoldás lehet.

417.



417. Az adott téglalapok $ABCD \cong EFGH$. $ABCD$ elforgatottjának megfelelő csúcsai $EFGH$ vagy $GHEF$ lehetnek a körüljárási irány szerint. Szerkesztés: ① AE szakasz felezőmerőlegese: e, BF szakasz felezőmerőlegese: f. ② $e \cap f = O_1$. ③ AG szakasz felezőmerőlegese: g, BH szakasz felezőmerőlegese: h. ④ $g \cap h = O_2$. ⑤ Az O_i pont akkor megoldás, ha az egymásnak megfeleltetett pontokat egyező irányú és nagyságú elforgatás viszi egymásba. A megoldások száma 2 vagy 1.

418. Szerkesztés: ① AA' szakasz felezőmerőlegese: e. ② BB' szakasz felezőmerőlegese: f. ③ $e \cap f = T$. Mivel T az $ABCD$ téglalap belső pontja, megfelel a forgatás középpontjának. Egy megoldás van.

419. A forgatás középpontja az átlók metszéspontja, szögének nagysága 90°, 180°, 270°, 360°-os lehet, iránya tetszőleges.

420. A forgatás középpontja a háromszög köré írt körének középpontja, szögének nagysága 120°, 240°, 360°-os lehet, iránya tetszőleges.

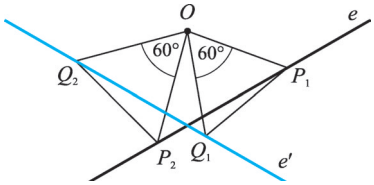
421. *a)* ① $C' \equiv B$. ② tetszőleges D pont: $D \in e$, $D \neq C$. D pontot A körül elforgatjuk $CAB \sphericalangle$-gel $\rightarrow D'$. ③ $D'B$ egyenes $\rightarrow e'$.
b) ① $C'' \equiv A$. ② tetszőleges D pont: $D \in e$, $D \neq C$. D pontot O körül elforgatjuk $COA \sphericalangle$-gel $\rightarrow$ $\rightarrow D''$. ③ $D''A$ egyenes $\rightarrow e''$.

422. Az e egyenes tetszőleges P pontjára $PO = OQ$ és $POQ \sphericalangle = 60°$, ezért Q pont a P-nek O pont körül 60°-kal elforgatott képe. A Q pontok halmaza az e egyenes O pont körüli 60°-os elforgatottja.

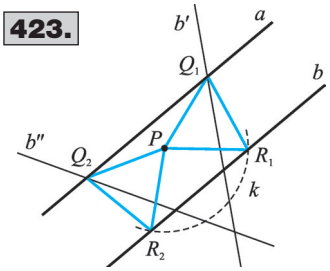
423. Szerkesztés: ① b egyenes elforgatása P pont körül $+60°$-kal és $-60°$-kal: b', b''. ② $b' \cap a = Q_1$, $b'' \cap a = Q_2$. ③ P középpontú Q_iP sugarú kör: k. ④ $k \cap b = \{R_1; R_2\}$. Két egybevágó megoldás van.

424. Szerkesztés: ① c egyenes elforgatása a b egyenes tetszőleges P pontja körül $+60°$-kal és $-60°$-kal: c', c''. ② $c' \cap a = Q_1$, $c'' \cap a = Q_2$. ③ P középpontú Q_iP sugarú kör: k. ④ $k \cap b = \{R_1; R_2\}$. A szerkesztés független attól, hogy a b egyenes az a és c között van-e vagy sem. Végtelen sok egybevágó háromszög a megoldás.

422.

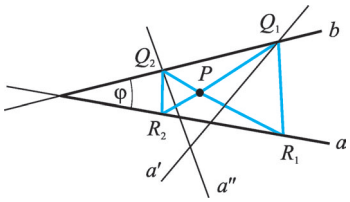


423.

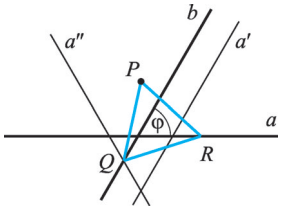


I

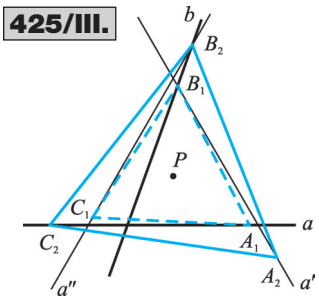
425/I.



425/II.



425/III.



425. *a)* Legyen az adott a és b egyenes hajlásszöge φ, a szerkesztendő háromszög PQR.
Szerkesztés: ① az a egyenest az adott P pont körül $+60°$-kal és $-60°$-kal elforgatjuk: a', a''. ② $a' \cap b = Q_1$, $a'' \cap b = Q_2$. ③ Q_1 pontot P körül $-60°$-kal elforgatjuk: R_1; Q_2 pontot P körül $+60°$-kal elforgatjuk: R_2. Egy megoldás van, ha $\varphi = 60°$, két megoldás van egyébként.
b) Legyen az adott a és b egyenes hajlásszöge φ, a szerkesztendő háromszög ABC.
Szerkesztés: ① az a egyenest az adott P pont körül elforgatjuk $+120°$-kal és $-120°$-kal: a', a''. ② $a' \cap b = B_1$, $a'' \cap b = B_2$. ③ B_1 pontot P körül $-120°$-kal és $+120°$-kal elforgatjuk: A_1, C_1. ④ B_2 pontot P körül $-120°$-kal és $+120°$-kal elforgatjuk: A_2, C_2. Egy megoldás van, ha $\varphi = 60°$, két megoldás van egyébként.

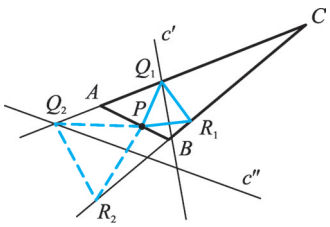
426. Szerkesztés: ① a BC egyenest az adott P pont körül $+60°$-kal és $-60°$-kal elforgatjuk: c', c''. ② $c' \cap \mathrm{e}(A; C) = Q_1$, $c'' \cap \mathrm{e}(A; C) = Q_2$. ③ Q_1 pontot P körül $-60°$-kal elforgatjuk: R_1, Q_2 pontot P körül $+60°$-kal elforgatjuk: R_2. A megoldások száma 1 vagy 0 aszerint, hogy létrejön-e a Q_1 és Q_2 metszéspont, illetve a Q_i és R_i belső pontja-e az $ABC\triangle$ oldalainak.

427. Szerkesztés: ① az a egyenest az adott P pont körül $+90°$-kal és $-90°$-kal elforgatjuk $\rightarrow$ $\rightarrow a', a''$. ② $a' \cap b = Q_1$, $a'' \cap b = Q_2$. ③ Q_1 pontot P körül $-90°$-kal elforgatjuk $\Rightarrow R_1$, Q_2 pontot P körül $+90°$-kal elforgatjuk $\rightarrow R_2$. Ha a P pont az a és b egyenes metszéspontja, akkor vagy végtelen sok megoldás van (a két egyenes merőleges egymásra), vagy nincs megoldás (a két egyenes nem merőleges egymásra). Két egybevágó megoldás van, ha $a \parallel b$. Egyébként két nem egybevágó megoldás van.

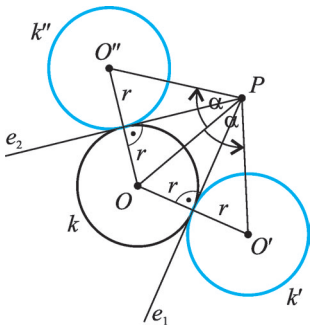
428. Legyen $a \parallel b$, $PQRS$ a szerkesztendő négyzet.
Szerkesztés: ① a egyenest P pont körül $+90°$-kal és $-90°$-kal elforgatjuk $\rightarrow a'$, a''. ② $a' \cap b = Q_1$, $a'' \cap b = Q_2$. ③ Q_1 pontot $-90°$-kal, Q_2 pontot $+90°$-kal elforgatjuk P pont körül $\rightarrow S_1$, S_2. ④ P tükrözése Q_iS_i egyenesre $\rightarrow R_i$. Mindig két egybevágó megoldás van.

429. *a)* Szerkesztés: ① a k kör O középpontját az adott P pont körül $+90°$-kal és $-90°$-kal elforgatjuk $\rightarrow O'$, O''. ② O' középpontú OP sugarú kör $\rightarrow k'$, O'' középpontú OP sugarú kör $\rightarrow$ $\rightarrow k''$. Két megoldás van.
b) Szerkesztés: ① PO szárú, $2r$ alapú egyenlő szárú háromszög $\rightarrow$ szárszöge α. ② a k kört az adott P pont körül $+\alpha$ és $-\alpha$ szöggel elforgatjuk $\rightarrow k'$, k''. Két megoldás van.

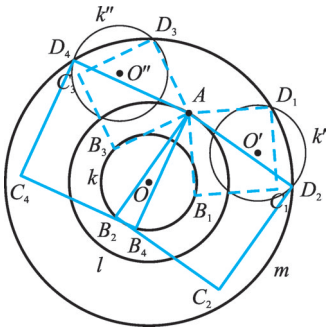
426.



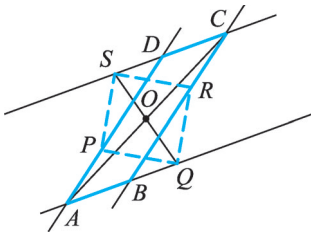
429.



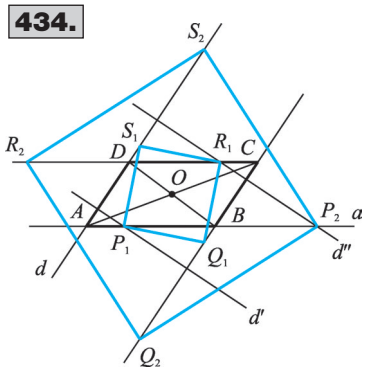
432.



433.



434.



430. Szerkesztés: ① az e egyenest az adott A pont körül elforgatjuk $+60°$-kal és $-60°$-kal $\rightarrow$ $\rightarrow e', e''$. ② $e' \cap k = \{C_1; C_2\}$, $e'' \cap k = \{C_3; C_4\}$. ③ C_1, C_2 $-60°$-os A körüli elforgatottja: B_1, B_2. ④ C_3, C_4 $+60°$-os A körüli elforgatottja: B_3, B_4. A megoldások száma 0, 1, 2, 3, 4 lehet.

431. Szerkesztés: ① a k kört az adott A pont körül elforgatjuk $+60°$-kal és $-60°$-kal $\rightarrow k', k''$. ② $k' \cap l = \{B_1; B_2\}$, $k'' \cap l = \{B_3; B_4\}$. ③ B_1, B_2 $-60°$-os A körüli elforgatottja: C_1, C_2. ④ B_3, B_4 $+60°$-os A körüli elforgatottja: C_3, C_4. A megoldások száma 0, 1, 2, 3, 4, vagy végtelen sok lehet.

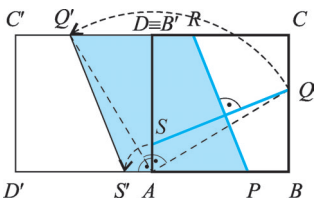
432. Szerkesztés: ① a k kört az l kör tetszőleges A pontja körül elforgatjuk $+90°$-kal és $-90°$-kal $\rightarrow k', k''$. ② $k' \cap m = \{D_1; D_2\}$, $k'' \cap m = \{D_3; D_4\}$. ③ D_1, D_2 $-90°$-os A körüli elforgatottja: B_1, B_2. ④ D_3, D_4 $+90°$-os A körüli elforgatottja: B_3, B_4. ⑤ D_i középpontú AD_i sugarú kör $\rightarrow p_i$; B_i középpontú AD_i sugarú kör $\rightarrow q_i$. ⑥ $p_i \cap q_i = C_i$. Adott A pont esetén a megoldások száma 0, 2, 4 lehet, két-két négyzet mindig egybevágó a szimmetria miatt. Mivel A tetszőleges, 0 vagy végtelen sok egybevágó megoldás lehet.

433. $PQRS$ négyzet középpontja $O \Rightarrow PO = OR \Rightarrow O$ pont egyenlő távolságra van az AD és BC párhuzamos egyenesektől. $\Rightarrow O$ rajta van az AD és BC középpárhuzamosán. Hasonlóan O rajta van az AB és CD középpárhuzamosán. $\Rightarrow O$ a két középpárhuzamos metszéspontja $\Rightarrow$ O az $ABCD$ paralelogramma középpontja.

434. Legyen $AB \parallel CD, AB = CD$. $PQRS$ a szerkesztendő négyzet. Szerkesztés: ① $e(A; C) \cap e(B; D) = O$, $e(A; D) = d$, $e(A; B) = a$. ② d egyenest O pont körül $+90°$-kal és $-90°$-kal elforgatjuk $\rightarrow d', d''$. ③ $d' \cap a = P_1$, $d'' \cap a = P_2$. ④ P_1 pontot $-90°$-kal, P_2 pontot $+90°$-kal elforgatjuk O pont körül $\rightarrow S_1, S_2$. ⑤ P_i tükrözése O pontra $\rightarrow R_i$; S_i tükrözése O pontra $\rightarrow Q_i$. Nincs megoldás, ha $ABCD$ téglalap és $AB \neq AD$. Végtelen sok megoldás van, ha $ABCD$ négyzet. Egyébként két megoldás van.

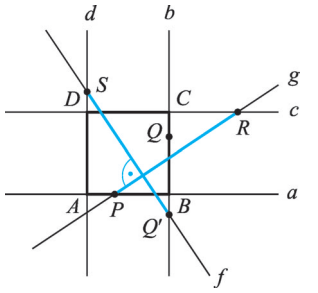
435. Adott az $ABCD$ négyzet, $SQ \perp RP$. Forgassuk el $ABCD$-t A körül $+90°$-kal: $ADC'D'$ négyzet. QS elforgatottja $Q'S' \Rightarrow$ $\Rightarrow Q'S' \parallel RP$, valamint $Q'R \parallel S'P \Rightarrow RPS'Q'$ paralelogramma $\Rightarrow$ $\Rightarrow QS = Q'S' = RP$.

435.



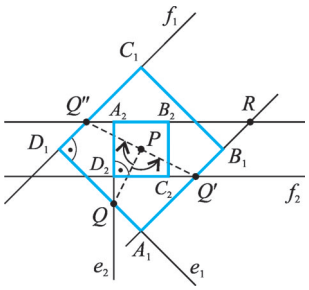
436. A 435. feladatban láttuk, hogy ha $f \perp g$, akkor $PR = SQ'$. Szerkesztés: ① S pontból merőlegest állítunk PR egyenesre $\rightarrow f$. ② S középpontú PR sugarú kör $\rightarrow k$. ③ $k \cap f = Q'$. ④ QQ' a négyzet egyik oldalegyenese $\rightarrow b$. ⑤ P pontból merőlegest állítunk QQ'-re $\rightarrow a$; R pontból merőlegest állítunk QQ'-re $\rightarrow c$; S pontból merőlegest állítunk a-ra $\rightarrow d$. ⑥ $a \cap d = A$, $a \cap b = B$, $b \cap c = C$, $c \cap d = D$. Egyértelmű a megoldás, ha az adott P, Q, R, S pontok sorban az a, b, c, d, egyenesek pontjai.

436.

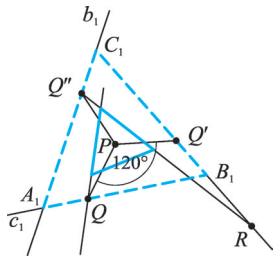


I

437.



438.



437. Szerkesztés: ① Q pontot elforgatjuk P pont körül $+90°$-kal és $-90°$-kal $\rightarrow Q'$, Q''. ② $Q'R$ és $Q''R$ egyenest tükrözzük P pontra $\rightarrow f_1$, f_2. ③ Q pontból merőlegest állítunk $Q'R$ és $Q''R$ egyenesre $\rightarrow e_1$, e_2. ④ $e_1 \cap f_1 = D_1$, $e_2 \cap f_2 = D_2$, $e_1 \cap Q'R = A_1$, $e_2 \cap Q''R = A_2$. ⑤ A_i tükrözése P pontra $\rightarrow C_i$; D_i tükrözése P pontra $\rightarrow B_i$. A megoldások száma 2 vagy végtelen sok.

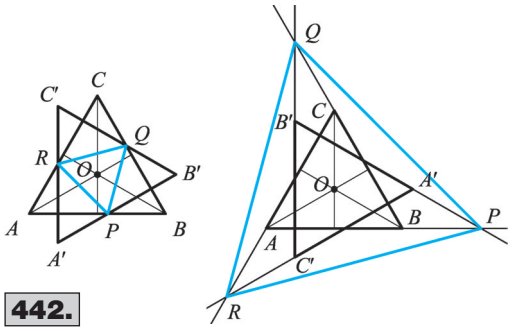
438. Szerkesztés: ① Q pontot elforgatjuk P pont körül $+120°$-kal és $-120°$-kal $\rightarrow Q'$, Q''. ② $Q'R$ egyenest elforgatjuk P pont körül $-120°$-kal és $+120°$-kal $\rightarrow c_1$, b_1. ③ $Q''R$ egyenest elforgatjuk P pont körül $+120°$-kal és $-120°$-kal $\rightarrow c_2$, b_2. ④ $c_1 \cap b_1 = A_1$, $c_2 \cap b_2 = A_2$, $c_1 \cap Q'R = B_1$, $c_2 \cap Q''R = B_2$, $b_1 \cap Q'R = C_1$, $b_2 \cap Q''R = C_2$. Két megoldás van, ha $Q_i \neq R$, végtelen sok megoldás van, ha $Q_i = R$.

439. Szerkesztés: ① e egyenest elforgatjuk C pont körül $+\alpha$ és $-\alpha$ szöggel $\rightarrow e'$, e''. ② $e' \cap f = B_1$, $e'' \cap f = B_2$,. ③ C középpontú CB_i sugarú kör $\rightarrow k_i$. ④ $k_1 \cap e = A_1$, $k_2 \cap e = A_2$. A megoldások száma lehet 1, 2, végtelen sok.

440. $ABC\triangle$ szabályos, középpontja O; $PQR\triangle$ szabályos és $P \in BC$, $Q \in AC$; $R \in AB$. $PQR\triangle$ szabályos $\Rightarrow AQR\sphericalangle = 180° - (60° + ARQ\sphericalangle)$ és $PRB\sphericalangle = 180° - (ARQ\sphericalangle + 60°)$. $AQR\sphericalangle = PRB\sphericalangle$, $QR = PR$, $QAR\sphericalangle = PBR\sphericalangle = 60° \Rightarrow ARQ\triangle \cong BPR\triangle \Rightarrow AR = BP$ és $QA = RB$. $ABC\triangle$-et O pont körül $+120°$-kal elforgatva $A' \equiv B$, $(AR)' = BP$, $(QA)' = RB \Rightarrow R' \equiv B$, $Q' \equiv R \Rightarrow O$ pont rajta van a QR és az RP szakasz felező merőlegesén, vagyis $PQR\triangle$-nek is középpontja.

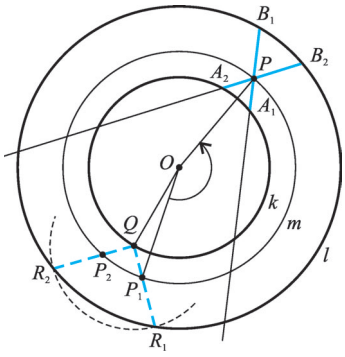
441. ABC szabályos háromszögbe írunk b oldalú $A'B'C'$ szabályos háromszöget. A 439. feladatban láttuk, hogy $ABC\triangle$ és $A'B'C'\triangle$ középpontja egybeesik. Szerkesztés: ① b oldalú szabályos háromszög szerkesztése $\rightarrow PQR\triangle$. ② $PQR\triangle$ középpontja K; $ABC\triangle$ középpontja O. ③ O középpontú PK sugarú kör $\rightarrow k$. ④ $k \cap BC = \{A'; A''\}$, $k \cap AC = \{B'; B''\}$, $k \cap AB = \{C'; C''\} \Rightarrow$ $\Rightarrow A'B'C'\triangle$ és $A''B''C''\triangle$. Két egybevágó háromszög a megoldás, ha $\frac{a}{2} < b < a$. Egy megoldás van, ha $b = \frac{a}{2}$. Nincs megoldás, ha $b < \frac{a}{2}$ vagy $b \geq a$.

442. Legyen az $ABC\triangle$ O pont körüli φ szögű elforgatottja $A'B'C'\triangle$. Forgassuk el O pont körül $+120°$-kal az $ABC\triangle$-et: A képe B; B képe C; C képe A. Forgassuk el O pont körül $+120°$-kal az $A'B'C'\triangle$-et: A' képe B'; B' képe C'; C' képe A'. Mivel két egyenes metszéspontjának elforgatottja megegyezik az elforgatott egyenesek metszéspontjával: $AB \cap A'B' = P \Rightarrow BC \cap B'C' = P'$ és $BC \cap B'C' = Q \Rightarrow$ $\Rightarrow CA \cap C'A' = Q'$ és $CA \cap C'A' = R \Rightarrow AB \cap A'B' = R'$. Ezek szerint $P' \equiv Q$; $Q' \equiv R$; $R' \equiv P$. $\Rightarrow$ $\Rightarrow PQR$-et az O pont körüli $+120°$-os elforgatás önmagába viszi $\Rightarrow PQR\triangle$ szabályos. Ha $\varphi = 120°$, vagy $\varphi = 180°$, vagy $\varphi = 240°$, akkor nem jön létre a $PQR\triangle$.

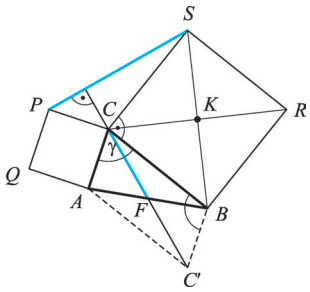


442.

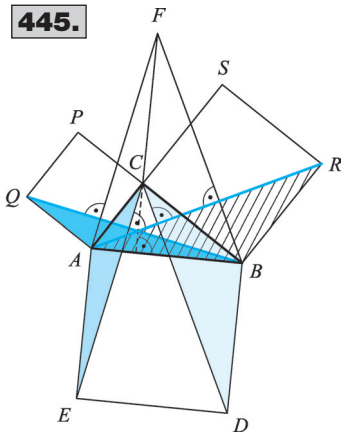
443.



444.



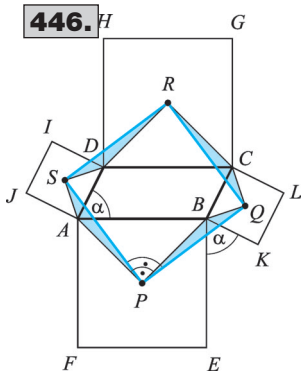
445.



443. Legyen Q pont a k kör tetszőleges pontja, d az adott hosszúság. Szerkesztés: ① Q középpontú d sugarú kör és k kör közös pontjai: R_1, R_2. ② O középpontú OP sugarú kör $\rightarrow m$. ③ $m \cap QR_1 = P_1$, $m \cap QR_2 = P_2$. ④ QR_1 szakaszt elforgatjuk O pont körül $P_1OP\sphericalangle$-gel $\rightarrow A_1B_1$. ⑤ QR_2 szakaszt elforgatjuk O pont körül $P_2OP\sphericalangle$-gel $\rightarrow A_2B_2$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0.

444. A C csúcshoz tartozó súlyvonal felezi az AB szakaszt $\rightarrow F$. C pont F pontra vonatkozó tükörképe C'. $AF = FB$ és $CF = C'F \Rightarrow$ $\Rightarrow AC'BC$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow AC \parallel BC'$, $AC = BC'$ és $C'BC\sphericalangle = 180° - \gamma$. $BC' = AC = CP$ ($ACPQ$ négyzet oldalai), $CB = CS$ ($CBRS$ négyzet oldalai), $180° - \gamma = PCS\sphericalangle = C'BC\sphericalangle \Rightarrow$ $\Rightarrow PCS\triangle \cong C'BC\triangle$. $CB \perp CS \Rightarrow PCS\triangle$ a $C'BC\triangle$ K pont körüli $-90°$-os elforgatottja $\Rightarrow PS = CC'$ és $PS \perp CC' \Rightarrow PS = 2CF$ és $PS \perp CC'$.

446.



445. $BRSC$, $ACPQ$, $ABDE$ négyzetek, $CF = AB$ és $CF \perp AB$. $BCD\triangle$ B pont körüli $-90°$-os elforgatása $\Rightarrow B' \equiv B$, $C' \equiv R$, $D' \equiv A \rightarrow BRA\triangle \Rightarrow CD \perp AR$. $ACE\triangle$ A pont körüli $+90°$-os elforgatása $\Rightarrow A' \equiv A$, $C' \equiv Q$, $E' \equiv B \rightarrow AQB\triangle \Rightarrow CE \perp BQ$. $CF = AB$ és $CF \perp AB \Rightarrow CF = BD$. $CF = AE$, $CF \parallel BD \parallel AE \Rightarrow CDBF$ és $CEAF$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow CD \parallel BF$, $CE \parallel AF \Rightarrow BF \perp AR$, $AF \perp BQ$. $ABF\triangle$-ben CF, AR és BQ magasságvonalak, azaz egy pontban metszik egymást. CF egyenes az $ABC\triangle$-nek is magasságvonala $\Rightarrow$ $\Rightarrow AR \cap BQ \in CF$.

446. $ABEF$, $BCLK$, $CDHG$, $ADIJ$ négyzetek, $AB \parallel CD$ és $AB = CD$. $AP = PB$ ($ABEF$ négyzet félátlói), $AS = BQ$ ($ADIJ$, illetve $BCLK$ négyzet félátlói), $SAP\sphericalangle = QBP\sphericalangle = 45° + \alpha + 45° \Rightarrow$ $\Rightarrow SAP\triangle \cong QBP\triangle$. $APB\sphericalangle = 90° \Rightarrow SAP\triangle$ P pont körüli 90°-os elforgatottja a $QBP\triangle \Rightarrow SP = PQ$ és $SPQ\sphericalangle = 90°$. Hasonlóan belátható, hogy $PQ = QR$ és $PQR\sphericalangle = 90° \Rightarrow PQRS$ négyszög négyzet.

Eltolás

447. Megoldását az olvasóra bízzuk.

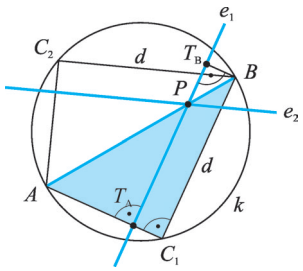
448. $ABCD$ négyzet $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{DP}$ vektorral való eltolása lehet a megoldás.

449. $\overrightarrow{OK}$ vektorral toljuk el a négyzetet, ahol a négyzet középpontja O, a köré pedig K.

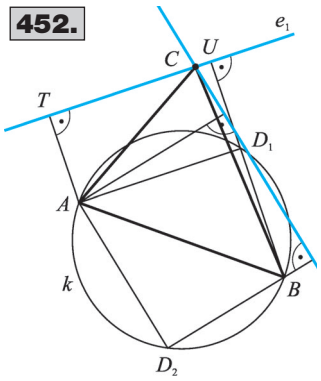
450. Legyen a b egyenesen lévő szakasz merőleges vetülete az a egyenesen d hosszúságú. Szerkesztés: ① Tetszőleges $TU = d$ szakasz felvétele az a egyenesen. ② T-ben és U-ban merőlegest állítunk a-ra $\rightarrow m$, n. ③ $m \cap b = P$, $n \cap b = Q$. Végtelen sok megoldás van.

I

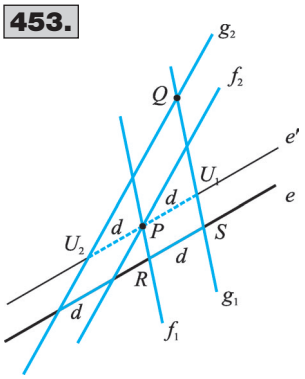
451.



452.



453.



451. $T_BT_A \xrightarrow{\overrightarrow{T_BB}} BC_1 \Rightarrow ABC_1\triangle$ derékszögű. Szerkesztés: ① AB Thalész köre $\rightarrow k$. ② B középpontú d sugarú kör $\rightarrow l$. ③ $l \cap k = \{C_1; C_2\}$. ④ BC_i-vel P ponton át párhuzamost húzunk $\rightarrow$ $\rightarrow e_i$ egyenes. Két megoldás van, ha $d < AB$. Egy megoldás van, ha $d = AB$. Nincs megoldás, ha $d > AB$.

452. A 451. feladat módszerével szerkesztünk: ① AB Thalész köre $\rightarrow k$. ② A középpontú d sugarú kör $\rightarrow l$. ③ $l \cap k = \{D_1; D_2\}$. ④ AD_i-vel C ponton át párhuzamost húzunk $\rightarrow e_i$ egyenes. Két megoldás van, ha $d < AB$. Egy megoldás van, ha $d = AB$. Nincs megoldás, ha $d > AB$. Hasonló a szerkesztés A, illetve B csúcson átmenő egyenesek esetén is.

453. Adott az e egyenes, valamint P és Q pontok.

1. eset: PQ nem párhuzamos az e egyenessel. Szerkesztés: ① P ponton át párhuzamost húzunk e egyenessel $\rightarrow e'$. ② P középpontú d sugarú kör $\rightarrow l$. ③ $l \cap e' = \{U_1; U_2\}$. ④ U_iQ egyenes $\rightarrow g_i$. ⑤ g_i-vel P ponton át párhuzamost húzunk $\rightarrow f_i$ egyenes. Két megoldás van.

2. eset: Ha $PQ \parallel e$ és $d(P; Q) = d$, akkor végtelen sok megoldás van, mert bármely P-n, ill. Q-n áthaladó párhuzamos egyenespár megfelelő.

3. eset: Ha $PQ \parallel e$ és $d(P; Q) \neq d$, akkor nincs megoldás.

454. Toljuk el az $ABC\triangle$-et az e egyenessel párhuzamosan úgy, hogy B csúcsa az f egyenesre kerüljön. Szerkesztés: ① B ponton át párhuzamost húzunk e egyenessel $\rightarrow e'$. ② $f \cap e' = B'$. ③ $\overrightarrow{BB'}$ vektorral eltoljuk A és C pontot $\rightarrow A'$ és C'. Nincs megoldás, ha $e' \parallel f$, végtelen sok megoldás van, ha $e' \equiv f$, egyébként egy megoldás van.

455. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow ABB'A'$ paralelogramma $\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Hasonlóan $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

456. O_1 és O_2 a k_1, ill. k_2 kör középpontja. A k_1 kört $\overrightarrow{O_1O_2}$ vektorral eltolva k_2 kör adódik. $A_i \in k_1$ és $A_iB_i \parallel O_1O_2$ és $B_i \in k_2 \Rightarrow B_i$ pont az A_i-nek $\overrightarrow{O_1O_2}$ vektorral való eltoltja $\Rightarrow A_iB_i = O_1O_2$.

457. Adott a és b egyenes, AB szakasz. Szerkesztés: ① a eltoltja $\overrightarrow{AB}$-ral: a''. ② a eltoltja $\overrightarrow{BA}$-ral: a'. ③ $a' \cap b = C_2$ és $a'' \cap b = C_1$. ④ C_1 eltoltja $\overrightarrow{BA}$-ral: D_1 és C_2 eltoltja $\overrightarrow{AB}$-ral: D_2. Két megoldás van.

458. Szerkesztés: ① $e \xrightarrow{\overrightarrow{AB}} e'$ és $e \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} e''$ ② $e' \cap f = C_1$ és $e'' \cap f = C_2$. ③ $C_1 \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} D_1$ és $C_2 \xrightarrow{\overrightarrow{AB}} D_2$. A megoldások száma 0, 1, 2 vagy végtelen sok lehet.

459. Adott az $ABC\triangle$ és a PQ szakasz. A, B, C pontokon át párhuzamosokat húzunk PQ-val $\rightarrow f, g, h$. Közülük valamelyik metszi az egyik oldalt, például f egyenes metszi a BC szakaszt. $\Rightarrow BC$ oldalon lesz két csúcs, ezért az a oldalegyenesből indul ki a szerkesztés.

Szerkesztés: ① $a \xrightarrow{\overrightarrow{QP}} a'$. ② $a' \cap AC = G$ és $a' \cap AB = J$. ③ $G \xrightarrow{\overrightarrow{PQ}} H$ és $J \xrightarrow{\overrightarrow{PQ}} I \Rightarrow$ $\Rightarrow GHIJ$ paralelogramma. A megoldások száma 1 vagy 0.

460. Adott a k kör és az AB szakasz. Szerkesztés: ① $k \xrightarrow{\overrightarrow{AB}} k'$. ② $k \cap k' = \{M_1; M_2\}$. ③ $M_1 \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} N_1$ és $M_2 \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} N_2$. Két megoldás van, ha $d(A; B) < 2r$; egy megoldás van, ha $d(A; B) = 2r$; nincs megoldás, ha $d(A; B) > 2r$.

461. Szerkesztés: ① $k \xrightarrow{\overrightarrow{AB}} k'$. ② $k \cap k' = \{C_1; C_2\}$. ③ $C_1 \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} D_1$ és $C_2 \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} D_2$. Két megoldás van, ha $d(A; B) < 2r$; egy megoldás van, ha $d(A; B) = 2r$; nincs megoldás, ha $d(A; B) > 2r$ vagy C_i, D_i, A, B egy egyenesen vannak.

462. Adott a k kör és az AB szakasz. Szerkesztés: ① $k \xrightarrow{\overrightarrow{AB}} k'$. ② $k \cap k' = \{C_1; C_2\}$. ③ C_iA szakasz felezőpontja O_i. Két megoldás van, ha $d(A; B) < 2r$; egy megoldás van, ha $d(A; B) = 2r$; nincs megoldás, ha $d(A; B) > 2r$.

463. Adott a k és l kör, valamint a PQ szakasz. Szerkesztés: ① $k \xrightarrow{\overrightarrow{PQ}} k'$ és $k \xrightarrow{\overrightarrow{QP}} k''$. ② $l \cap k' = \{M_1; M_2\}$ és $l \cap k'' = \{M_3; M_4\}$. ③ $M_1 \xrightarrow{\overrightarrow{QP}} N_1$ és $M_2 \xrightarrow{\overrightarrow{QP}} N_2$, $M_3 \xrightarrow{\overrightarrow{PQ}} N_3$ és $M_4 \xrightarrow{\overrightarrow{PQ}} N_4$. 0; 1; 2; 3; 4 vagy végtelen sok megoldás lehet.

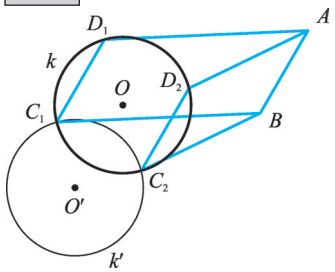
464. Adott az e egyenes, a k kör és az AB szakasz. Szerkesztés: ① $e \xrightarrow{\overrightarrow{AB}} e'$ és $e \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} e''$. ② $k \cap e' = \{E_1; E_2\}$ és $k \cap e'' = \{E_3; E_4\}$. ③ $E_1 \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} F_1$, $E_2 \xrightarrow{\overrightarrow{BA}} F_2$, $E_3 \xrightarrow{\overrightarrow{AB}} F_3$ és $E_4 \xrightarrow{\overrightarrow{AB}} F_4$. ④ E_iF_i egyenesek a megoldások. Négy, három, kettő, egy vagy nulla megoldás lehet.

465. Szerkesztés: ① O pontból az OY sugárra d távolságot mérünk $\rightarrow R$. ② R ponton át OX sugárral párhuzamost húzunk $\rightarrow e$. ③ Az e egyenes és XY ív metszéspontja $\rightarrow Q$. ④ Q pontot $\overrightarrow{RO}$ vektorral eltoljuk $\rightarrow P$. ⑤ PQ szakasz. ⑥ Hasonlóan adódik ST szakasz. A megoldások száma 2 vagy 0.

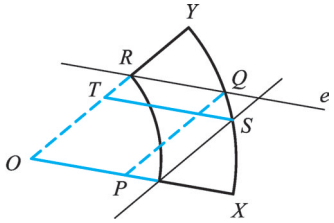
466. Legyen az $ABC\triangle$-ben $AC = BC$; valamint $P \in AB$; $Q \in AC$; $R \in BC$ úgy, hogy $PQ \parallel BC$ és $PR \parallel AC$. $PQ \parallel CR$, $PR \parallel QC \Rightarrow$ a $PRCQ$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow \underline{PR = QC}$. $APQ\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \alpha$, mert egyállású szögek $\Rightarrow APQ\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow \underline{AQ = QP}$. $PQ + PR = AQ + QC = AC$, ami állandó.

467. Adott az $ABC\triangle$ és egy d hosszúságú szakasz. A 466. feladatban láttuk, hogy CPQ egyenlő szárú háromszögben PQ szakasz pontjaira fennáll az $RR' + RR'' = CP$ egyenlőség.
Szerkesztés: ① $CP = CQ = d$, ahol P a CA félegyenes, Q pedig a CB félegyenes pontja. ② $PQ \cap AB = R$. Egy adott oldalhoz nulla vagy egy vagy végtelen sok megoldás lehet.

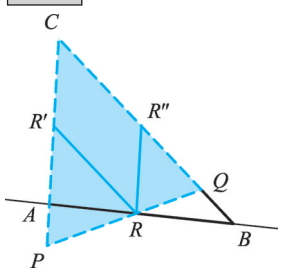
461.



465.

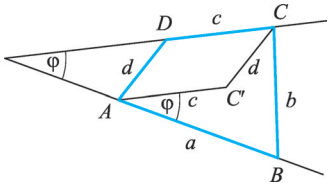


467.

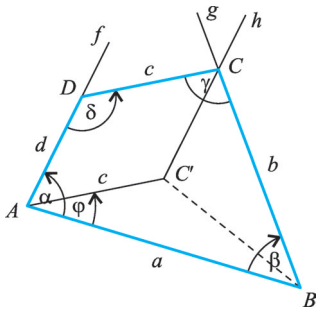


I

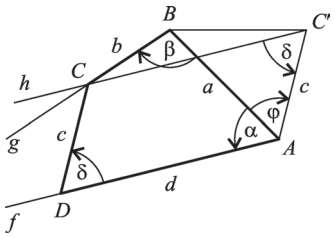
469.



470/I.



470/II.



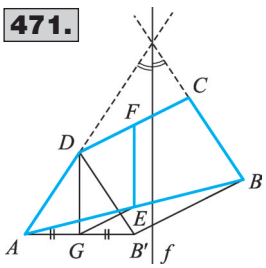
468. Az $ABCD$ trapéz alapjai: $AB \geq CD$. Toljuk el a B csúcsot $\overrightarrow{CD}$ vektorral: E.
Szerkesztés: ① $a - c, b, d \rightarrow AED\triangle$. ② AE szakasszal párhuzamos egyenest húzunk D ponton át $\rightarrow e$. ③ e egyenesre D pontból c szakasz felmérése $\rightarrow C$ (AD-nek E-vel azonos oldalán). ④ C pontot $\overrightarrow{DE}$-ral eltoljuk $\rightarrow B$ pont. Nincs megoldás, ha $a - c, b, d$ szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, egyébként egy megoldás van.

469. Ha C pont $\overrightarrow{DA}$ vektorral eltolt képe C' pont, akkor $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DA}$ és $C'AB\sphericalangle = \varphi$.
Szerkesztés: ① $a, c, \varphi \rightarrow ABC'\triangle$. ② C' középpontú d sugarú kör és B középpontú b sugarú kör metszéspontja C_1, C_2. ③ $C_1 \xrightarrow{\overrightarrow{C'A}} D_1$ és $C_2 \xrightarrow{\overrightarrow{C'A}} D_2$. Ha $\varphi \neq 0$, akkor 2, 1 vagy 0 lehet a megoldások száma. Ha $\varphi = 0$, akkor $AB \parallel CD \Rightarrow$ az $ABCD$ trapéz négy oldal ismeretében megszerkeszthető (lásd 468. feladat megoldását).

470. Toljuk el a C csúcsot $\overrightarrow{DA}$ vektorral $\rightarrow C'$ pont és $AC'CD$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow$
$\Rightarrow |BAC'\sphericalangle| = |\alpha - (180° - \delta)| = |\alpha + \delta - 180°|$.
1. eset: $\alpha + \delta \neq 180°$. Szerkesztés: ① $a, c, \alpha + \delta - 180°$ vagy $a, c, 180° - (\alpha + \delta) \rightarrow ABC'\triangle$. ② A pontban AB egyenesre α szöget mérünk $\rightarrow f$ félegyenes; B pontban BA egyenesre β szöget mérünk φ-vel ellentétes irányban $\rightarrow g$ félegyenes. ③ f félegyenessel párhuzamost húzunk C' ponton át $\rightarrow h$. ④ $h \cap g = C$. ⑤ $C \xrightarrow{\overrightarrow{C'A}} D$.
2. eset: $\alpha + \delta = 180°$. Ekkor trapéz szerkesztése a feladat.

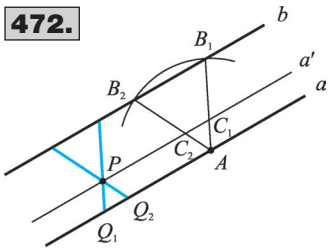
471. Legyen $AD = BC$ és EF az $ABCD$ négyszög középvonala $\Rightarrow DF = FC$ és $AE = EB$. Az AD és BC szögfelezője legyen f. BC szakaszt $\overrightarrow{CD}$ vektorral eltolva $B'D$ szakasz adódik $\Rightarrow$

471.

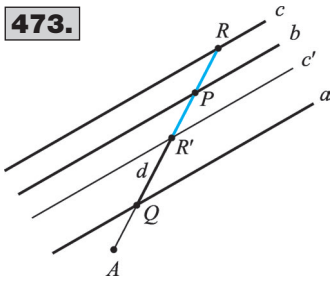


$\Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BB'}$ és $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'D} \Rightarrow \overrightarrow{FD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$. $AB'B\triangle$ GE középvonalára $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$. Tehát $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{FD}$, ezért $GEFD$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow \underline{EF \parallel GD}$. $AD = BC = B'D \Rightarrow AB'D\triangle$ egyenlő szárú és DG az $ADB'\sphericalangle$ szögfelezője. $B'D \parallel BC \Rightarrow \underline{DG \parallel f}$. Az aláhúzottakból $\Rightarrow$
$\Rightarrow EF \parallel f$. Húrtrapéz esetén EF középvonal egyben az f szögfelező $\Rightarrow$
$\Rightarrow EF \parallel f$ elfajulóan teljesül.

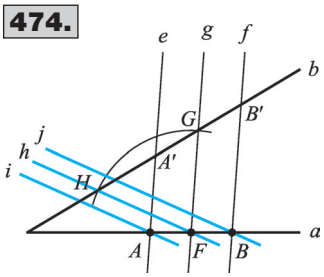
472.



473.



474.



472. Szerkesztés: ① Az a egyenes tetszőleges A pontja köré d sugarú kört rajzolunk $\rightarrow k$. ② $k \cap b = \{B_1; B_2\}$. ③ P ponton át párhuzamost húzunk a egyenessel $\rightarrow a'$. ④ $a' \cap AB_i = C_i$. ⑤ $A \xrightarrow{\overrightarrow{C_iP}} Q_i$. ⑥ Q_iP egyenes a keresett szelő. A megoldások száma 2, 1 vagy 0 a d szakasz hosszától és az a, b egyenesek távolságától függően.

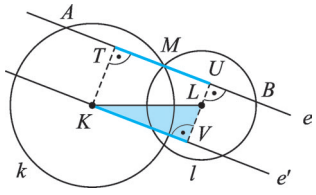
473. c-t tükrözzük b-re $\rightarrow c'$, ami egyúttal c középpontos tükörképe is b bármely pontjára. $\Rightarrow PR = PR'$ és $|PQ - PR| = |PQ - PR'| = R'Q$. Az A ponton át olyan szelőt szerkesztünk, amelyből az a és a vele párhuzamos c' egyenes d hosszúságú szakaszt metsz ki (lásd a 472. feladatot).

474. $AA' \parallel BB'$, $AA' + BB' = d$, $ABB'A'$ négyszög trapéz, melynek középvonala $FG = d/2$. Szerkesztés: ① AB szakasz felezőpontja F, F középpontú $d/2$ sugarú kör $\rightarrow k$. ② $k \cap b = \{G; H\}$. ③ GF-fel párhuzamos egyenest húzunk A ponton át $\rightarrow e$. GF-fel párhuzamos egyenest húzunk B ponton át $\rightarrow f$. HF-fel párhuzamos egyenest húzunk A ponton át $\rightarrow i$. HF-fel párhuzamos egyenest húzunk B ponton át $\rightarrow j$. A megoldások száma 2, 1 vagy 0.

475. KT az AM húr, LU az MB húr felező merőlegese $\Rightarrow \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{TM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$ és $\overrightarrow{MU} = \overrightarrow{UB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$. $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{TM} + \overrightarrow{MU} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{UB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Általában $TU = \frac{1}{2}AB$.

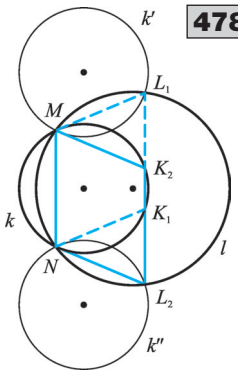
476. A 475. feladatban láttuk, hogy két kör metszéspontján átmenő szelők esetén $TU = \frac{1}{2}AB$. AB maximális, ha TU is az. TU egy derékszögű trapéz alapra merőleges szára, KL a másik szár. TU maximális, ha TU szakasz párhuzamos és egyenlő KL szakasszal.

476.



477. A 476. ábra jelöléseit használjuk. A 475. feladatban láttuk, hogy $\overrightarrow{TU} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow TU = d/2$. Toljuk el az e egyenest $\overrightarrow{TK}$ vektorral $\rightarrow e'$ egyenes. Legyen e' és UL egyenes metszéspontja V. Ekkor $KVL\triangle$ derékszögű és $KV = d/2$. Szerkesztés: ① KL, $d/2$, $90° \Rightarrow KLV_i\triangle$. ② M ponton át párhuzamost húzunk KV_i egyenessel $\rightarrow e_i$. ③ $e_i \cap k = A_i$, $e_i \cap l = B_i$. ④ e_i egyenes megoldás, ha M elválasztja az A_i és B_i pontokat. Adott metszésponthoz 2, 1 vagy 0 megoldás lehet.

I



478. Szerkesztés: ① $k \xrightarrow{\overrightarrow{NM}} k'$ és $k \xrightarrow{\overrightarrow{MN}} k''$. ② $l \cap k' = \{M; L_1\}$ és $l \cap k'' = \{N; L_2\}$. ③ $N \xrightarrow{\overrightarrow{ML_1}} K_1$; $M \xrightarrow{\overrightarrow{NL_2}} K_2$. Két egybevágó megoldás van (ha $r_1 = r_2$, akkor nincs paralelogramma).

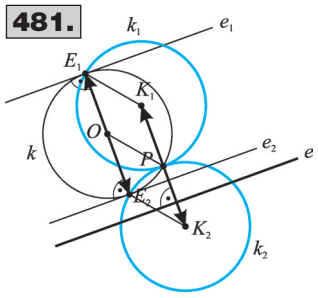
479. $ABXY$ paralelogramma $\Rightarrow \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow Y$ pontok rajta vannak a k kör $\overrightarrow{BA}$ vektorral eltolt képén: $Y \in k'$. Ha $X \equiv B$ vagy $X \equiv A$, akkor nem szerkeszthető paralelogramma $\Rightarrow A'$ és B' pontok nem lehetnek paralelogramma csúcsai. A keresett ponthalmaz a k' kör, kivéve az A' és B' pontokat.

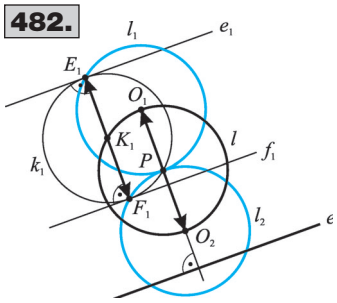
480. A PQR $\triangle$-ben $A \in PQ$; $B \in RQ$ és $X \in e$ ($P_i R$). PR egyenes $\rightarrow$ $\rightarrow e$, $AB \cap e = M$, $ABXY$ paralelogramma $\Rightarrow \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow Y$ pontok rajta vannak az e egyenes $\overrightarrow{BA}$ vektorral eltolt képén: $Y \in e'$. Ha $X \equiv M$, akkor nem szerkeszthető paralelogramma $\Rightarrow M'$ pont nem lehet paralelogramma csúcsa. A keresett ponthalmaz az e' egyenes, kivéve az M' pontot.

481. Jelölje a P ponton átmenő körök sugarát r. $PK_1 = PK_2 = r$, $K_1K_2 \perp e$. Legyenek a tetszőleges P-n áthaladó k kör e egyenessel párhuzamos érintőinek érintési pontjai E_1, $E_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow OE_1 = OE_2 = r$, $E_1E_2 \perp e. \Rightarrow \overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{PK_1}$ és $\overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{PK_2} \Rightarrow \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{K_1E_1} = \overrightarrow{K_2E_2} \Rightarrow K_1E_1 = K_2E = r$. Az érintési pontok rajta vannak a K_1, illetve a K_2 középpontú r sugarú körökön $\rightarrow$ $\rightarrow k_1, k_2$. E két kör minden pontja lehet érintési pont. A keresett ponthalmaz a k_1, k_2 kör.

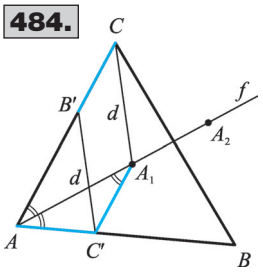
482. Legyen az adott irány e egyenessel párhuzamos, és jelölje az adott P középpontú kört l. A k_i körök sugara r, középpontjukra $K_i \in l$. $O_1P = O_2P = r$ és $O_1O_2 \perp e$. Legyenek a k_i körök e egyenessel párhuzamos érintői e_i, f_i és az érintési pontok E_i és F_i. Ekkor $K_iE_i = K_iF_i = r$ és $E_iF_i \perp m \Rightarrow \overrightarrow{K_iE_i} = \overrightarrow{PO_1}$ és $\overrightarrow{K_iF_i} = \overrightarrow{PO_2} \Rightarrow \overrightarrow{PK_i} = \overrightarrow{O_1E_i} = \overrightarrow{O_2F_i} \Rightarrow O_1E_i = O_2F_i = PK_i$. A keresett pontok rajta vannak az O_1, illetve az O_2 középpontú l körrel egyenlő sugarú körökön $\rightarrow l_1, l_2$. E két kör minden pontja lehet érintési pont. A keresett ponthalmaz az l kör $\overrightarrow{PO_1}$ és $\overrightarrow{PO_2}$ vektorral való eltoltja: l_1, l_2 kör.

483. Legyen $B'C = AC'$ és $B'C' \parallel BC$, valamint $B'C$ szakasz $\overrightarrow{B'C'}$ vektorral való eltoltja a $C'A'$ szakasz. Ekkor $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{C'A'}$, vagyis $B'C$ szakasz párhuzamos és egyenlő a $C'A'$ szakasszal. $AC'A'\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow A'AC' \sphericalangle = AA'C' \sphericalangle$ és $CAA' \sphericalangle = AA'C' \sphericalangle$, mert váltószögek $\Rightarrow AA'$ a $CAB \sphericalangle$ szögfelezője. Szerkesztés: ① $CAB \sphericalangle$ szögfelezője $\rightarrow f$. ② Az f egyenes és BC szakasz metszéspontja $\rightarrow A'$. ③ A' ponton át AC-vel párhuzamost húzunk $\rightarrow AB$-ből kimetszi C' pontot. ④ C' ponton át BC-vel párhuzamost húzunk $\rightarrow AC$-ből kimetszi B' pontot. ⑤ $B'C'$ a keresett szelő. Egyértelmű a megoldás.

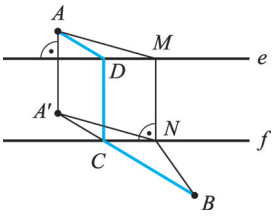




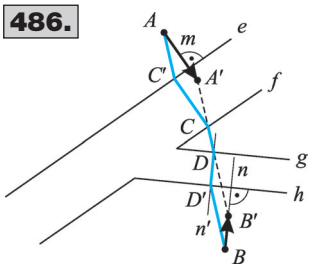
484.



485.



486.



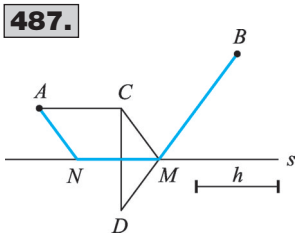
484. Legyen $B'C = AC'$ és $B'C' = d$, valamint $B'C$ szakasz $\overrightarrow{B'C'}$ vektorral való eltoltja a $C'A_1$ szakasz. Ekkor $CB'C'A_1$ négyszög paralelogramma. $AC'A_1\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow A_1AC' \sphericalangle = AA_1C' \sphericalangle$ és $CAA_1 \sphericalangle = AA_1C' \sphericalangle$, mert váltószögek $\Rightarrow AA_1$ a $CAB \sphericalangle$ szögfelezője.
Szerkesztés: ① $CAB \sphericalangle$ szögfelezője $\Rightarrow f$. ② C középpontú d sugarú kör $\Rightarrow k$. ③ Az f egyenes és k kör közös pontjai $\Rightarrow A_1, A_2$. ④ A_i pontokon át CA-val párhuzamost húzunk $\Rightarrow AB$-ből kimetszik a C_i' pontokat. ⑤ C_i' pontokon át CA_i-vel párhuzamosokat húzunk $\Rightarrow AC$-ből kimetszik a B_i' pontokat. ⑥ B_i', C_i' a keresett pontok. 2, 1 vagy 0 megoldás lehet.

485. MN szakasz legyen merőleges az e egyenesre, és $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$. Az út hossza ($AM + MN + NB = AA' + A'N + NB$) akkor a legrövidebb, ha az A', N és B pontok egy egyenesen vannak.
Szerkesztés: ① Az A pontot e egyenesre merőlegesen eltoljuk d(e; f) távolsággal $\rightarrow A'$ pont. ② $A'B \cap f = C$. ③ C pontot eltoljuk $\overrightarrow{A'A}$ vektorral $\rightarrow D$ pont. ④ $ADCB$ a keresett útvonal.

486. Szerkesztés: ① Az A pontot e egyenesre merőlegesen eltoljuk d(e; f) távolsággal $\rightarrow A'$ pont. ② A B pontot h egyenesre merőlegesen eltoljuk d(g; h) távolsággal $\rightarrow B'$ pont. ③ $A'B' \cap f = C$ és $A'B' \cap g = D$. ④ C pontot eltoljuk $\overrightarrow{A'A}$ vektorral $\rightarrow C'$ pont. ⑤ D pontot eltoljuk $\overrightarrow{B'B}$ vektorral $\rightarrow D'$ pont. ⑥ $AC'CDD'B$ a keresett útvonal.

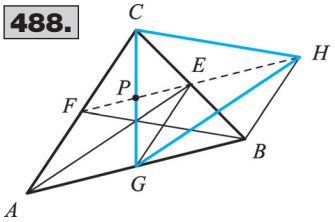
487. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{NM}$, d($N$; M) $= h \Rightarrow AN = CM$. Legyen a C pont tükörképe az s egyenesre a D pont és $DB \cap s = M \Rightarrow CM = MD$. Legrövidebb idő alatt a legrövidebb utat megtéve halad a gép egyenletes sebességgel. Az út hossza ($AN + h + MB = CM + AC + MB = AC + CM + MB = AC + DM + MB$) akkor a legrövidebb, ha a D, M, és B pontok egy egyenesen vannak.
Szerkesztés: ① Az A pontot s egyenessel párhuzamosan eltoljuk h távolsággal $\rightarrow C$ pont. ② C pontot tükrözzük s egyenesre $\rightarrow D$ pont. ③ $DB \cap s = M$. ④ Az M pontot eltoljuk $\overrightarrow{CA}$ vektorral $\rightarrow N$ pont. ⑤ $ANMB$ a keresett útvonal.

487.



488. *a)* $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{FB} \Rightarrow$ az $FBHC$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Az $ABC\triangle$ középvonala $EG \Rightarrow \overrightarrow{GE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ $AGEF \cong GBHE$ paralelogrammák $\Rightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{GH}$. Tehát CG, AE, BF szakaszokból eltolással háromszög szerkeszthető.
b) A HP szakasz a $GHC\triangle$ egyik súlyvonala $\Rightarrow HP = 3PE = \frac{3}{2}GB = \frac{3}{4}AB$.

488.



I

Egybevágósági transzformációk egymásutánja

489. $TU = \mathrm{d}(a; b)$. A tengelyes tükrözés tulajdonságai miatt $\underline{AB = A'B' = A''B''}$ és $\sphericalangle(AB; a) = -\sphericalangle(A'B'; a)$ és $\sphericalangle(A'B'; b) = -\sphericalangle(A''B''; b)$. Váltószögek miatt $\sphericalangle(A'B'; a) = \sphericalangle(A'B'; b) \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle(AB; a) = \sphericalangle(A''B''; b) \Rightarrow \underline{AB \parallel A''B''}$. Ha AB nem merőleges az a egyenesre, akkor az aláhúzottak szerint $AA''B''B$ négyszög paralelogramma, ezért $AA'' \parallel BB''$ és $AA'' = BB''$. Ha $AB \perp a$, akkor A, A'', B'', B egy egyenesre esik és $AA'' = 2\mathrm{d}(a; b) = BB''$. Hasonlóan belátható, hogy $BB'' \parallel CC''$ és $BB'' = CC''$. Tehát $ABC\triangle$-t $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{TU}$ vektorral eltolva $A''B''C''\triangle$ adódik.

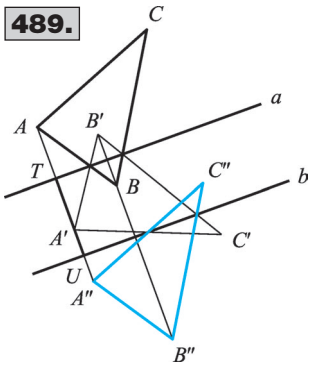
490. Legyen a P pont merőleges vetülete a-n T_a; b-n T_b. P tükörképe a-ra $P' \Rightarrow \overrightarrow{PT_a} = \overrightarrow{T_aP'}$. P' tükörképe b-re $P'' \Rightarrow \overrightarrow{P'T_b} = \overrightarrow{T_bP''}$. $\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PT_a} + \overrightarrow{T_aP'} + \overrightarrow{P'T_b} + \overrightarrow{T_bP''} = 2\overrightarrow{T_aP'} + 2\overrightarrow{P'T_b} = 2\overrightarrow{T_aT_b}$.

491. **1. eset:** $P \notin t_1$ és $P \notin t_2$. P-t t_1 egyenesre tükrözve $\Rightarrow POT_1\triangle \cong P'OT_1\triangle$. P'-t t_2 egyenesre tükrözve $\Rightarrow P'OT_2\triangle \cong P''OT_2\triangle$. A fentiekből következik, hogy $PO = P'O = P''O$ és $\alpha + \beta = 90°$ $\Rightarrow POP'' \sphericalangle = 180° \Rightarrow P''$ pont a P pont O-ra vonatkozó tükörképe.
2. eset: $P \in t_1$ vagy $P \in t_2$. $P \equiv P'$, $PO = OP''$, $POP'' \sphericalangle = 180°$ vagy $P' \equiv P''$, $PO = OP''$, $POP'' \sphericalangle = 180° \Rightarrow P''$ pont a P pont O-ra vonatkozó tükörképe. Az O pont helyzete független a tengelyes tükrözések sorrendjétől.

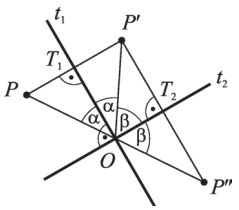
492. Legyen P tükörképe A-ra P_A; P tükörképe B-re P_B. $PA = AP_A$ és $P_AB = BP' \Rightarrow AB \parallel PP'$ és $AB = \frac{1}{2}PP'$, mert AB vagy középvonala a PP_AP' háromszögnek, vagy egy egyenesbe eső szakaszokról van szó $\Rightarrow \overrightarrow{PP'} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$. A fentiekhez hasonlóan $PB = BP_B$ és $P_BA = AP'' \Rightarrow AB \parallel PP''$ és $AB = \frac{1}{2}PP'' \Rightarrow \overrightarrow{PP''} = 2 \cdot \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = -\overrightarrow{PP''} \Rightarrow P'', P, P'$ egy egyenesre illeszkedik és P felezi a $P'P''$ szakaszt.

493. Ha P, A és B pont háromszöget alkot, akkor $PA = AP'$ és $P'B = BP'' \Rightarrow AB$ középvonala a $PP''P'$ háromszögnek $\Rightarrow \overrightarrow{PP''} = 2\overrightarrow{AB}$. Ha P, A és B pont egy egyenesen van, akkor $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP'}$ és $\overrightarrow{P'B} = \overrightarrow{BP''} \Rightarrow \overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP''} = (\overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{P'B}) + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.
(Transzformációk szorzatával a megoldás: Jelöljük t_2-vel az AB egyenesre vonatkozó tükrözést, t_1-gyel és t_3-mal az A pontban és B pontban AB-re állított merőleges egyenesekre vonatkozó tükrözést, I-vel az identitást, $f_{O;\varphi}$-vel az O pont körüli φ szögű elforgatást és $\tau_{\overrightarrow{2AB}}$-vel a $\overrightarrow{2AB}$-ral való eltolást. $f_{B;\,180°} \cdot f_{A;\,180°} = (t_3 \cdot t_2) \cdot (t_2 \cdot t_1) = t_3 \cdot (t_2 \cdot t_2) \cdot t_1 = t_3 \cdot I \cdot t_1 = t_3 \cdot t_1 = \tau_{\overrightarrow{2AB}}$).

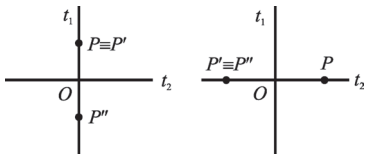
489.



491/I.



491/II.



494. Jelöljük a tükrözéseket t_a, t_b, t_c-vel, az identitást I-vel és az O pont körüli φ szögű elforgatást $f_{O;\varphi}$-vel, ahol $O = a \cap c \cap b$ és $\varphi = 2 \cdot \sphericalangle(a; b)$. $t_c \cdot (t_b \cdot t_a) = t_c \cdot f_{O;\varphi} = t_c \cdot (t_c \cdot t) = (t_c \cdot t_c)t = It = t$, ahol t a t_c-hez megválasztható tengelyes tükrözés. $t_c \cdot t_b \cdot t_a \cdot t_c \cdot t_b \cdot t_a = t \cdot t = I$, tehát a tükrözéssorozattal visszajutunk az eredeti pontba.

495. Jelöljük a tükrözéseket t_a, t_b, t_c-vel, az identitást I-vel és a $\underline{v}$-ral való eltolást $\tau_{\underline{v}}$-vel, ahol $\underline{v} \perp a$; a-tól b felé mutat és $|\underline{v}| = 2 \cdot \mathrm{d}(a; b)$. $t_c \cdot (t_b \cdot t_a) = t_c \cdot \tau_{\underline{v}} = t_c(t_c \cdot t) = (t_c \cdot t_c)t = It = t$, ahol t a t_c-hez megválasztható tengelyes tükrözés. $t_c \cdot t_b \cdot t_a \cdot t_c \cdot t_b \cdot t_a = t \cdot t = I$, tehát a tükrözéssorozattal visszajutunk az eredeti pontba.

496. A $\underline{d}$ vektorral való eltolás egyenlő bármely olyan K és L pontra vonatkozó középpontos tükrözések egymásutánjával, ahol $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\underline{d}$.

497. Az $ABC\triangle$ BC és AC oldalának felezőpontja rendre P és Q. Ha A-t Q-ra tükrözzük, akkor C-t kapjuk, ha C-t P-re tükrözzük, akkor B-t kapjuk. Az A pont tehát a B pontba két középpontos tükrözés egymásutánjával kerül, ami helyettesíthető egy eltolással. Az eltolás vektora: $2 \cdot \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AB}$.

498. Adott $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. A tükrözések során és $P \xrightarrow{A} P_A \xrightarrow{B} P'$ és $P \xrightarrow{C} P_C \xrightarrow{D} P''$ $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{PP''} = 2\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PP''} \Rightarrow$ P' és P'' pont azonos.

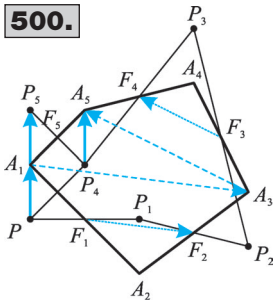
499. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. $P \xrightarrow{B} P_B \xrightarrow{D} P_D \Rightarrow \overrightarrow{PP_D} = 2\overrightarrow{BD}$ és $P \xrightarrow{A} P_A \xrightarrow{C} P_C$ $\Rightarrow \overrightarrow{PP_C} = 2\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{PP_D} = \overrightarrow{PP_C} \Rightarrow P_D \equiv P_C$.

500. $\overrightarrow{PP_2} = 2\overrightarrow{F_1F_2} = \overrightarrow{A_1A_3}$ és $\overrightarrow{P_2P_4} = 2\overrightarrow{F_3F_4} = \overrightarrow{A_3A_5} \Rightarrow \overrightarrow{PP_4} = \overrightarrow{A_1A_5} \Rightarrow \overrightarrow{P_4A_5} = \overrightarrow{PA_1}$. F_5 pontra tükrözve $\Rightarrow \overrightarrow{P_4A_5} = -\overrightarrow{P_5A_1} \Rightarrow \overrightarrow{PA_1} = -\overrightarrow{P_5A_1} = \overrightarrow{A_1P_5} \Rightarrow A_1$ pont felezi a PP_5 szakaszt.

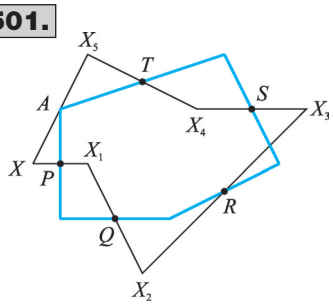
501. Tetszőleges X pontot sorban a P, Q, R, S, T felezőpontokra tükrözve, az utolsó tükörképet a kiindulási ponttal összekötő szakasz felezőpontja az ötszög P-vel és T-vel szomszédos csúcsa (ábránkon az A csúcs). Ennek a csúcsnak a P, Q, R, S, T pontokra vonatkozó tükörképei az ötszög többi csúcsai (B, C, D, E). Nincs megoldás, ha az öt felezőpont egy egyenesen van.

502. Legyenek a középpontok rendre A, B, C. $f_{C;\,180°} \cdot (f_{B;\,180°} \cdot f_{A;\,180°}) = f_{C;\,180°} \cdot \tau_{2\overrightarrow{AB}} =$ $= f_{C;180°} \cdot (t_2 \cdot t_1) = (t_3 \cdot t_2) \cdot (t_2 \cdot t_1) = t_3 \cdot (t_2 \cdot t_2) \cdot t_1 = t_3 \cdot I \cdot t_1 = t_3 \cdot t_1 = f_{D;180°}$. A fenti gondolatsorban az első két tükrözés egymásutánját egy eltolással helyettesítettük, majd azt két párhuzamos tengelyre vonatkozó tükrözés szorzatával. A harmadik középpontos tükrözés két egymásra merőleges tengelyre való tükrözés szorzata. A tükörtengelyeket úgy választjuk meg, hogy t_2 átmegy C-n és merőleges AB-re, t_1 a t_2-vel párhuzamos és tőle AB távolságra van. t_3 a két párhuzamos tengelyre merőleges és a C ponton megy keresztül. $D = t_1 \cap t_3$. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ miatt $ABCD$ négyszög valóban paralelogramma.

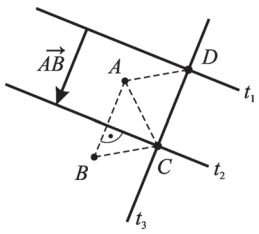
500.



501.

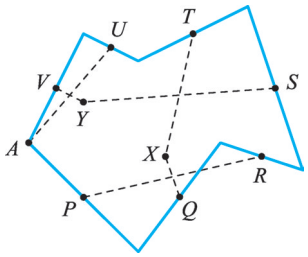


502.

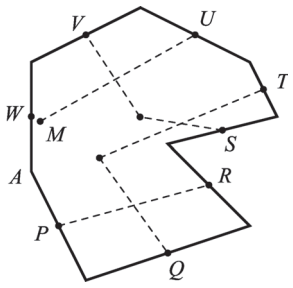


I

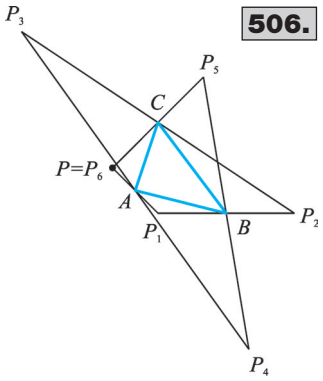
504.



505.



506.



503. Legyenek a középpontok rendre A, B, C, P. Az előző feladat állítását felhasználva: $f_{P;180^\circ} \cdot (f_{C;180^\circ} \cdot f_{B;180^\circ} \cdot f_{A;180^\circ}) = f_{P;180^\circ} \cdot f_{D;180^\circ} = \tau_{2\overrightarrow{DP}}$, $\tau_{2\overrightarrow{DP}} = I \Leftrightarrow D \equiv P$.

504. Jelölje P, Q, R, S, T, U, V az oldalfelező pontokat, A a hétszög egyik csúcsát az ábra szerint. A-t tükrözzük P-re, a tükörképet Q-ra, és így tovább V-ig, visszajutunk A-ba.

$f_{V;\,180^\circ} \cdot f_{U;\,180^\circ} \cdot f_{T;\,180^\circ} \cdot f_{S;\,180^\circ} \cdot (f_{R;\,180^\circ} \cdot f_{Q;\,180^\circ} \cdot f_{P;\,180^\circ}) = f_{V;\,180^\circ} \cdot f_{U;\,180^\circ} \cdot (f_{T;\,180^\circ} \cdot f_{S;\,180^\circ} \cdot f_{X;\,180^\circ}) =$
$= f_{V;\,180^\circ} \cdot f_{U;\,180^\circ} \cdot f_{Y;\,180^\circ} = f_{A;\,180^\circ}$, ahol X a Q pont tükörképe RP felezőpontjára, Y az S pont tükörképe TX felezőpontjára, A az U pont tükörképe VY felezőpontjára. A transzformációk egymásutánjának fixpontja tehát A, ami a fentiek alapján megszerkeszthető, ha az oldalfelező pontok közül legfeljebb hat van egy egyenesen. Az A pont ismeretében a többi csúcspont középpontos tükrözéssel megkapható.

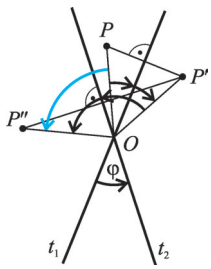
505. Az ábra jelöléseit használva az $f_{W;\,180^\circ} \cdot f_{V;\,180^\circ} \cdot f_{U;\,180^\circ} \cdot f_{T;\,180^\circ} \cdot f_{S;\,180^\circ} \cdot f_{R;\,180^\circ} \cdot f_{Q;\,180^\circ} \cdot f_{P;\,180^\circ}$ transzformációsorozat A-t saját magába viszi. Az 504. feladatban láttuk, hogy a hét felezéspontra vonatkozó tükrözés egymásutánja egyetlen középpontos tükrözéssel helyettesíthető, így a transzformációsorozat $f_{W;\,180^\circ} \cdot f_{M;\,180^\circ}$ lesz. Két középpontos tükrözés egymásutánja vagy nullvektortól különböző vektorral való eltolás vagy identitás. Az eltolásnak nincs fixpontja, ezért $f_{W;\,180^\circ} \cdot f_{M;\,180^\circ} = I$ kell legyen, ami akkor és csak akkor teljesül, ha $W \equiv M$, azaz W egyértelműen megadható P, Q, …., U ismeretében.

506. $\overrightarrow{PP_2} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{P_2P_4} = 2\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{P_4P_6} = 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{PP_6} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \underline{0} \Rightarrow P \equiv P_6$.

507. Legyen a t_1, t_2 tengely metszéspontja O. Tetszőleges P pontra irányított szögekkel: $\sphericalangle(PO; t_1) = \sphericalangle(t_1; P'O)$ és $\sphericalangle(P'O; t_2) = \sphericalangle(t_2; P''O)$. $\sphericalangle(PO; P''O) = \sphericalangle(PO; t_1) + \sphericalangle(t_1; P'O) +$
$+ \sphericalangle(P'O; t_2) + \sphericalangle(t_2; P''O) = 2 \cdot \sphericalangle(t_1; P'O) + 2 \cdot \sphericalangle(P'O; t_2) = 2 \cdot \sphericalangle(t_1; t_2)$.

508. Az O pont körüli α szögű forgatás során $O' \equiv O$, ezért a két tengely metszéspontja az O pont. Ha t_1 tetszőleges O pontra illeszkedő egyenes és t_2 olyan O ponton átmenő egyenes, amelynek t_1 egyenessel bezárt irányított szöge $\alpha/2$, akkor az O pont körüli α szögű forgatás helyettesíthető a t_1 és t_2 tengelyre vonatkozó tükrözések egymásutánjával.

507.



Szerkesztés: ① Tetszőleges O-tól különböző P pontot elforgatunk α szöggel → P'. ② PO egyenes: t_1 és PP' felező merőlegese: t_2. Végtelen sok megoldás van.

509. *a)* Az O pontra vonatkozó tükrözés esetén $O' \equiv O$, O-tól különböző P pontra $P'O = PO$ és $POP' \sphericalangle = 180^\circ$. Ez az O pont körüli 180°-os forgatás definíciója.

b) Az O pont körüli 180°-os forgatás esetén $O' \equiv O$, O-tól különböző P pontra $P'O = PO$ és $POP' \sphericalangle = 180^\circ \Rightarrow O$ pont felezi a PP' szakaszt. Ez az O pontra vonatkozó tükrözés definíciója.

A háromszög nevezetes vonalai és körei

I

Középvonal

510. A háromszög középvonala feleakkora, mint a nem felezett oldal. *a)* 3,5 cm; 4,5 cm; 6 cm. *b)* $\frac{1}{3}$ cm; $\frac{2}{5}$ cm; $\frac{7}{12}$ cm. *c)* m; $\frac{3}{2}n$; $\frac{l}{4}$. *d)* $\frac{2m+3n}{2}$; $\frac{2m-3n}{2}$; $\frac{3}{4}m$.

511. A háromszög középvonala feleakkora, mint a nem felezett oldal. A háromszög megfelelő oldalai: *a)* 4 cm; 8 cm; 10 cm. *b)* 1 cm; $\frac{4}{3}$ cm; $\frac{5}{2}$ cm. *c)* m; $\frac{4n}{3}$; $m+n$.

512. Az $ABC\triangle$ oldalfelező pontjai rendre E; F; D. $S_4 = k_{AED} + k_{EBF} + k_{DFC} + k_{DEF}$;

$$S_4 = \left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)+\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)+\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)+\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) = 2c+2a+2b = 2k_{ABC};$$

$k_{ABC} = \frac{S_4}{2}$. *a)* 10 cm. *b)* $\frac{15}{4}$ cm. *c)* $\frac{d}{2}$ cm.

513. A az $OBC\triangle$ OB oldalának felezéspontja $\rightarrow$ az A-n át húzott párhuzamos a háromszög középvonala $\rightarrow$ P felezi BC-t.

514. Legyenek a szög szárai a és b, csúcsa O. A szerkesztés: ① P-n át párhuzamos b-vel $\rightarrow e$. ② $e \cap a = A$. ③ $O \xrightarrow{A\text{-ra tükr.}} B$. ④ $e(B;P) \cap b = C$. $AP \parallel OC$ és $AO = AB$ miatt AP az $OCB\triangle$ középvonala $\Rightarrow$ P felezi BC-t.

515. A háromszög 12 cm hosszú befogójával párhuzamos középvonala az átfogó felezéspontjának távolsága a másik befogótól. A keresett távolság 6 cm.

516. A tető metszetháromszögének a 4,8 m hosszú oldalával párhuzamos középvonala az összekötő gerenda. Hossza 2,4 m.

517. Az R repülőtérről A_1, B_1 pontokba jutnak fél óra alatt: $A_1B_1 = 180$ km. A_2, B_2 pontokba jutnak 1 óra múlva. A_1 felezi az A_2R szakaszt, B_1 felezi a B_2R szakaszt $\Rightarrow$ A_1B_1 az $A_2B_2R\triangle$ középvonala $\Rightarrow$ $A_2B_2 = 360$ km.

518. Az $A_iB_iC_i\triangle$ oldalfelező pontjai rendre E_i; F_i; D_i.

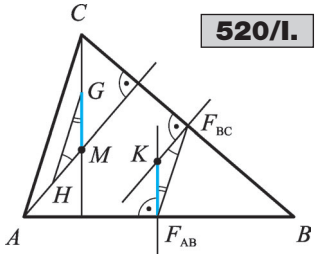
$$\left.\begin{aligned} A_1B_1 &= 2D_1F_1 = 2D_2F_2 = A_2B_2 \\ B_1C_1 &= 2D_1E_1 = 2D_2E_2 = B_2C_2 \\ A_1C_1 &= 2E_1F_1 = 2E_2F_2 = A_2C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1B_1C_1\triangle \cong A_2B_2C_2\triangle.$$

519. Az $ABC\triangle$ csúcsait P-vel összekötő AP, BP, CP szakaszok felezőpontjai rendre E, F, D. EF középvonal az $ABP\triangle$-ben $\Rightarrow$ $EF = \frac{c}{2}$. FD középvonal a $BPC\triangle$-ben $\Rightarrow$ $FD = \frac{a}{2}$. ED középvonal az $APC\triangle$-ben $\Rightarrow$ $ED = \frac{b}{2}$. Az $EFD\triangle$ oldalai: $\frac{c}{2}$; $\frac{a}{2}$; $\frac{b}{2}$, tehát függetlenek P helyzetétől.

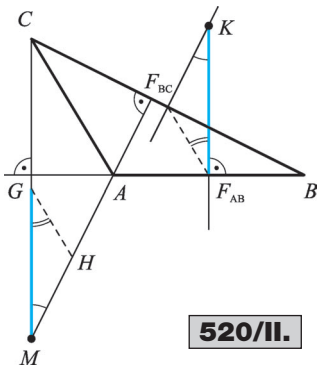
Megjegyzés: Ha P az A, B vagy C csúcsok valamelyikével megegyezik, akkor is igaz, hogy a felezéspontok által alkotott háromszög oldalai feleakkorák, mint az ABC háromszög oldalai. Ebben az esetben P maga lesz a felezéspont is.

520. **1. eset:** A háromszög hegyesszögű vagy tompaszögű. Legyen G az MC szakasz, H az MA szakasz felezéspontja! $F_{AB}F_{BC}$ középvonal az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow$ $F_{AB}F_{BC} = \frac{AC}{2}$ és $F_{AB}F_{BC} \parallel AC$.

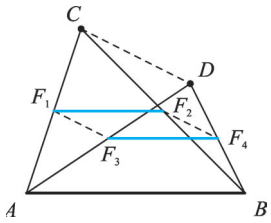
520/I.



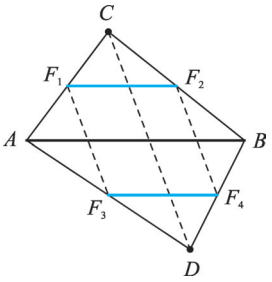
I



520/II.



522/I.



522/II.

GH középvonal az $AMC\triangle$-ben $\Rightarrow GH = \frac{AC}{2}$ és $GH \parallel AC$. $\Rightarrow GH = F_{AB}F_{BC}$ és $GH \parallel F_{AB}F_{BC} \Rightarrow$ az ábrán egyformán jelölt szögek váltószögek, tehát egyenlők $\Rightarrow GHM\triangle \cong F_{AB}F_{BC}K\triangle \Rightarrow MG = KF_{AB} \Rightarrow \underline{\underline{MC = 2KF_{AB}}}$.

2. eset: A háromszög derékszögű. $KF_{AB} \parallel AC = MC$ és $KF_{AB} = \frac{AC}{2} = \frac{MC}{2}$.

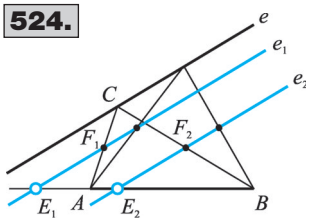
521. P-t összekötjük az e egyenes Q_1, Q_2, Q_3 pontjával. $PQ_1 = Q_1R_1$ és $PQ_2 = Q_2R_2$ miatt Q_1Q_2 középvonal az $R_1R_2P\triangle$-ben $\Rightarrow R_1R_2 \parallel Q_1Q_2 \Rightarrow R_1R_2 \parallel e$.
Hasonlóan megmutatható, hogy $R_2R_3 \parallel e$. Mivel R_2-n át e-vel csak egy párhuzamos húzható, R_1 és R_3 is ezen az egyetlen párhuzamoson kell legyenek. A keresett ponthalmaz egy az e-vel párhuzamos olyan egyenes, amely kétszer olyan távol van P-től, mint e.

522. F_1 felezi AC-t, F_2 felezi BC-t $\Rightarrow F_1F_2$ középvonal az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow F_1F_2 = \frac{AB}{2}$. F_3 felezi AD-t, F_4 felezi BD-t $\Rightarrow F_3F_4$ középvonal az $ABD\triangle$-ben $\Rightarrow F_3F_4 = \frac{AB}{2}$. A két következményt összevetve: $F_1F_2 = F_3F_4$. F_1 felezi AC-t, F_3 felezi AD-t $\Rightarrow F_1F_3$ középvonal az $ADC\triangle$-ben $\Rightarrow F_1F_3 = \frac{CD}{2}$. F_2 felezi BC-t, F_4 felezi BD-t $\Rightarrow F_2F_4$ középvonal az $BCD\triangle$-ben $\Rightarrow F_2F_4 = \frac{CD}{2}$. A két következményt összevetve: $F_1F_3 = F_2F_4$. Ezzel megmutattuk a két egyenlő szakaszpárt.

523. **1. eset:** AB nem merőleges e-re és A és B közül legfeljebb az egyik van e-n. AB merőleges vetülete e-re A_1B_1. AB-t eltoljuk $\overrightarrow{AA_1}$-ral: A_1B_2 $(F \to F_2)$. F_2F_1 középvonala az $A_1B_1B_2\triangle$-nek. $\Rightarrow$ $\Rightarrow F_1$ felezi A_1B_1-et.
2. eset: $A \in e$ és $B \in e$. A; F; B fixpontok $\Rightarrow$ az állítás igaz.
3. eset: $AB \perp e$. A; F; B képe T.

524. $C \in e$, F_1 felezi AC-t $\Rightarrow$ az F_1 pontok az e-vel párhuzamos e_1 egyenesen vannak, amelyre $d(A; e) = 2d(e_1; e)$. F_2 felezi BC-t $\Rightarrow$ az F_2 pontok az e-vel párhuzamos e_2 egyenesen vannak, amelyre $d(B; e) = 2d(e_2; e)$. e_1, illetve e_2 egyenesnek AB egyenesével való E_1, illetve E_2 metszéspontja nem tartozik a ponthalmazhoz, mivel ebben az esetben $C \in e(A; B)$ miatt nem létezik a háromszög.

524.



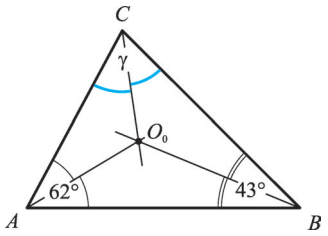
525. CF_c az $ABC\triangle$ súlyvonala. FF_c az $F_bF_cF_a\triangle$ súlyvonala. $F_bF_c \parallel CF_a$ és $F_cF_a \parallel F_bC$ miatt az $F_bF_cF_aC$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow F_bF_a$ átló felezi a CF_c átlót $\Rightarrow F_cF$ része a CF_c átlónak $\Rightarrow$ $\Rightarrow F_bF_cF_a\triangle$ súlyvonala része az $ABC\triangle$ súlyvonalának.
A másik két súlyvonalra az állítás hasonlóan belátható.

Magasságvonal

526. Az $ABC\triangle$ oldalfelező pontjai F_a; F_b; F_c. Az $F_aF_bF_c\triangle$ F_c-ből induló m_c magasságvonala merőleges F_bF_a-ra. $F_bF_a \parallel AB$ miatt $m_c \perp AB$. F_c felezi AB-t és $F_c \in m_c$, így m_c az AB szakasz felező merőlegese. Hasonlóan belátható, hogy az $F_aF_bF_c\triangle$ másik két magasságvonala is oldalfelező merőleges az ABC háromszögben. Tehát az $F_aF_bF_c\triangle$ magasságpontja az ABC háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja, azaz körülírt körének középpontja.

527. *a)* $\gamma = 180° - 62° - 43° = 75°$. A beírt kör középpontja a belső szögfelezők O_0 metszéspontja. $AO_0B\sphericalangle = 180° - (62° : 2) - (43° : 2) = \underline{\underline{127,5°}}$. $BO_0C\sphericalangle = 180° - (43° : 2) - (75° : 2) = \underline{\underline{121°}}$. $AO_0C\sphericalangle = 360° - 127,5° - 121° = \underline{\underline{111,5°}}$.

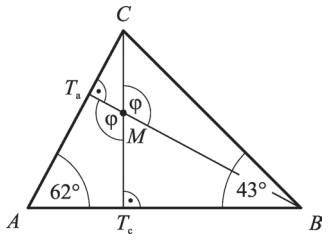
527/I.



b) A háromszög hegyesszögű, ezért a magasságpont belső pont. $\Rightarrow$ Az AT_aMT_c négyszögben $\varphi = 360° - (90° + 62° + 90°) = 118°$. Az M-nél levő csúcsszögek miatt BC oldal 118°-os szögben látszik a magasságpontból. Ennek mintájára belátható, hogy $AMC\sphericalangle = \underline{\underline{137°}}$ és $AMB\sphericalangle = \underline{\underline{105°}}$

528. Legyen D magasságpont az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow$ I. $CD \perp AB$, II. $AD \perp BC$, III. $BD \perp AC$. Megmutatjuk, hogy A magasságpont a $BCD\triangle$-ben: $AB \perp CD$ az I. feltétel miatt, $AC \perp BD$ a III. feltétel miatt, $AD \perp BC$ a II. feltétel miatt. AB, AC és AD magasságvonalak a $BCD\triangle$-ben, tehát A a magasságpont ebben a háromszögben. A másik két állítás hasonlóan belátható. Megjegyzés: A gondolatmenet nem függ a D pont helyzetétől.

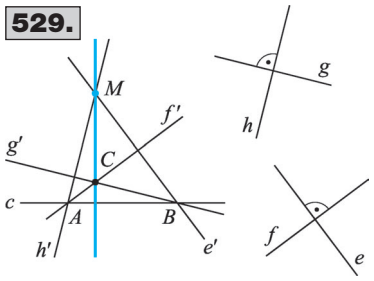
527/II.



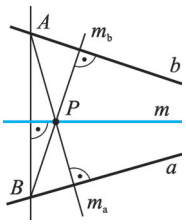
529. A szerkesztés: ① Húzzunk párhuzamost M-en át h-val: h'. $\Rightarrow h' \cap c = A$. ② Húzzunk párhuzamost M-en át e-vel: e'. $\Rightarrow$ $\Rightarrow e' \cap c = B$. ③ Húzzunk párhuzamost A-n át f-fel: f'. $\Rightarrow$ $\Rightarrow f' \perp e'$. ④ Húzzunk párhuzamost B-n át g-vel: g'. $\Rightarrow g' \perp h'$. Legyen $f' \cap g' = C \Rightarrow h'$ az $ABC\triangle$ A-ból induló magasságvonala, e' az $ABC\triangle$ B-ből induló magasságvonala $\Rightarrow h' \cap e' = M$ az $ABC\triangle$ magasságpontja $\Rightarrow MC$ az $ABC\triangle$ C-ből induló magasságvonala $\Rightarrow MC \perp c$.

530. $\left.\begin{matrix} m_b \perp b \\ m_a \perp a \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_a \cap m_b = P$ az $ABM\triangle$ magasságpontja $\left.\begin{matrix} m \perp AB \\ P \in m \end{matrix}\right\} \Rightarrow m$ az $ABM\triangle$ harmadik magasságvonala, tehát átmegy a háromszög harmadik csúcsán, M-en.

529.

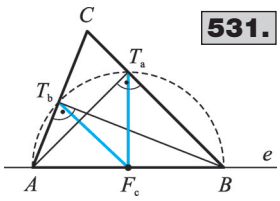


530.



I

Thalész-kör



531.

531. T_b és T_a pontokból az AB szakasz derékszög alatt látszik $\Rightarrow$ $\Rightarrow T_b$ és T_a rajta vannak az AB szakasz Thalész körén, melynek középpontja F_c. $\Rightarrow F_cT_b = F_cT_a$, hiszen a fenti Thalész-kör két sugaráról van szó.

532. A 531. ábra jelöléseit használhatjuk. Felhasználjuk: I. T_a és T_b pontok rajta vannak az AB szakasz Thalész körén. II. A húrfelező merőleges átmegy a kör középpontján.

A szerkesztés: ① T_bT_a szakaszfelező merőlegese $\rightarrow f$. ② $f \cap e = F_c$. ③ F_c középpontú F_cT_a sugarú kör $\rightarrow k_T$. ④ $k_T \cap e = \{A; B\}$. ⑤ $e(A; T_b) \cap e(B; T_a) = C$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

533. Az AB szakasz A_1 és B_1 pontból is derékszög alatt látszik $\Rightarrow$ bármely $ABC\triangle$ ($C \notin AB$) esetén az A_1 és B_1 magasságtalppontok rajta vannak AB Thalész körén. A Thalész-körnek bármely, A-tól és B-től különböző alkalmas pontpárjához egyértelműen tartozik háromszög. $AB_1 \cap BA_1 = C$ mindig létezik (bármely $A_1 \in k$-hoz létezik $B_1 \in k$, hogy AB_1 és A_1B ne legyenek párhuzamosak). Tehát AB mint átmérő fölé rajzolt kör pontjai tartoznak a ponthalmazba, A és B kivételével.

534. A szerkesztés: ① AB szakasz felezőpontja F_c. ② F_c középpontú F_cB sugarú Thalész-kör $\rightarrow k_T$. ③ $k_T \cap e = C$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

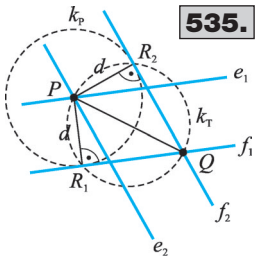
535. A szerkesztés: ① PQ szakasz Thalész köre $\rightarrow k_T$. ② P középpontú d sugarú kör $\rightarrow k_P$. ③ $k_T \cap k_P = R$. ④ $e(R; Q) = f$ egyenes. ⑤ P-n át párhuzamos f-fel $\rightarrow e$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás van.

536. Az $ABC\triangle$ körülírt körének középpontja az AB átfogó F_c felezőpontja. AF_c, BF_c és CF_c ennek a Thalész-körnek a sugarai $\Rightarrow AF_c = BF_c = CF_c$. Mivel F_c felezi AB-t, $AF_c = BF_c = \frac{1}{2}AB \Rightarrow$ $\Rightarrow CF_c = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \underline{\underline{AB = 2CF_c}}$.

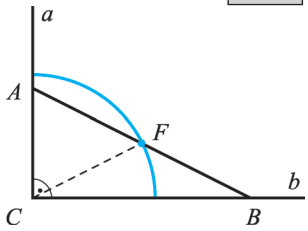
537. F_aF_c középvonal az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow F_aF_c = \frac{1}{2}AC$ (1). T_a pontból az AC szakasz derékszög alatt látszik $\Rightarrow T_a$ rajta van az AC szakasz Thalész körén $\Rightarrow F_bT_a = \frac{1}{2}AC$ (2). (1) és (2) összehasonlításából $F_aF_c = F_bT_a$. **1. eset:** Ha $T_a \equiv F_a$, akkor $F_bF_cF_a\triangle$ egyenlő szárú.

2. eset: Ha $T_a \neq F_a$, akkor F_bF_c középvonal az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow F_bF_c \parallel BC \Rightarrow F_bF_c \parallel T_aF_a$. $\Rightarrow F_bF_cF_aT_a$ trapéz. $F_bT_a = F_cF_a$ és F_bT_a nem párhuzamos F_cF_a ($T_a \notin AC$) $\Rightarrow F_bF_cF_aT_a$ húrtrapéz.

538. A Thalész-tétel miatt $FC = \frac{1}{2}d$ bármely F felezéspont esetén $\Rightarrow$ az F pont rajta van a C középpontú $\frac{1}{2}d$ sugarú körön. A derékszög tartományába eső negyedkörvonal minden pont-



535.



538.

ja előáll felezőpontként. Az a és b szárakra eső körpontok is megfelelnek, mert ilyenkor AB az a vagy a b száron van. A szakaszfelező pontok tehát a derékszög szárai között elhelyezkedő negyedkörvonalat írják le.

539. A feltétel szerint $AC = CD$. A Thalész-tétel miatt $ACB\sphericalangle =$ $\Rightarrow CB$ az AD szakasz felező merőlegese $\Rightarrow CB$ az $ABD\triangle$ szimmetriatengelye $\Rightarrow$ $\underline{\underline{AB = BD}}$.

540. Legyen Q a PN szakasz és a kör közös pontja. A Thalész-tétel miatt $MQN\sphericalangle =$. MQ az NPM egyenlő szárú háromszög NP alaphoz tartozó magassága $\Rightarrow$ $\underline{\underline{Q \text{ felezi } NP\text{-t}}}$.

541. Az AC szár, mint átmérő fölé írt kör Q-ban metszi az AB alapot. A Thalész-tétel miatt $AQC\sphericalangle =$. CQ az ABC egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága $\Rightarrow$ $\underline{\underline{Q \text{ felezi } AB\text{-t}}}$.

542. A CF_c átmérőjű kör AC-t Q-ban, BC-t pedig P-ben metszi. A Thalész-tétel miatt $F_cQC\sphericalangle =$ $\Rightarrow AQF_c\sphericalangle =$. Az $AQF_c\triangle$-ben 60° és 30° a hegyesszögek $\Rightarrow AQ = \frac{1}{2}AF_c =$ $= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AB = \underline{\underline{\frac{1}{4}AB}}$. Hasonlóan belátható, hogy $BP = \underline{\underline{\frac{1}{4}BC}}$.

543. AB átmérőjű kör $\rightarrow k_c$. AC átmérőjű kör $\rightarrow k_b$. $k_c \cap k_b = A_1$. A_1-ből az AB és az AC szakasz is derékszög alatt látszik, (ill. *c)* esetben $A_1 \equiv C$) $\Rightarrow A_1 \in e(C; B) \Rightarrow k_c$ és k_b közös húregyenese az $ABC\triangle$ A-ból induló magasságvonala. Hasonlóan belátható, hogy k_a és k_b közös húregyenese a C-ből induló, k_a és k_c közös húregyenese a B-ből induló magasságvonal. A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást $\Rightarrow$ a fenti körök húregyenesei is egy ponton mennek át.

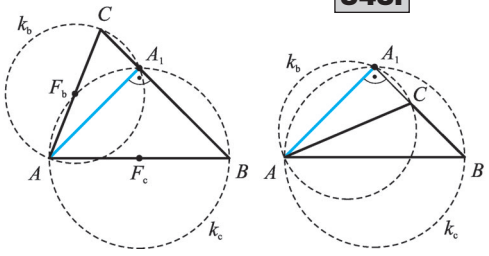
544. A C csúcs és az M magasságpont által meghatározott szakasz Thalész körét vizsgáljuk.
1. eset: Az $ABC\triangle$-ben az $ACB\sphericalangle =$ $\Rightarrow C \equiv M \Rightarrow MC$ fölé nem rajzolható Thalész-kör.
2. eset: Az $ABC\triangle$-ben $ACB\sphericalangle \neq$. k az MC szakasz Thalész köre; $k \cap e(C; B) = A_1$; $k \cap e(A; C) =$ $= B_1$. A_1 rajta van CM Thalész körén $\Rightarrow CA_1M\sphericalangle =$ $\Rightarrow MA_1$ része az A-ból induló magasságvonalnak $\Rightarrow A_1$ az A-ból induló magasságvonal talppontja. Hasonlóan belátható, hogy B_1 a B-ből induló magasságvonal talppontja.

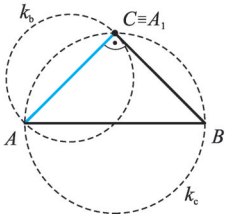
545. Felhasználjuk, hogy $BB_2 \perp AC$, ezért B_2 rajta van CM, illetve CB Thalész körén. Szerkesztés: ① C_3 középpontú, C_3B_2 sugarú kör: k_1. ② A_1 középpontú, A_1B_2 sugarú kör: k_2. ③ $k_1 \cap k_2 = C$. ④ C tükörképe A_1-re: B. ⑤ $e(C; C_3) \cap k_2 = C_2$. ⑥ $e(B; C_2) \cap e(C; B_2) = A$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

546. Az O_1 középpontú k_1 körnek és az O_2 középpontú k_2 körnek az érintési pontja E. A_1B_1 átmérő k_1-ben, A_1E a k_2-ből A_2-t, B_1E pedig B_2-t metszi ki. **1. eset:** Kívülről érintkező körökre: Thalész-tétel miatt $A_1EB_1\sphericalangle = 90°$. $A_1EB_1\sphericalangle$ és $A_2EB_2\sphericalangle$ csúcsszögek, ezért $A_2EB_2\sphericalangle = 90°$. Thalész-tétel megfordítása miatt $O_2 \in A_2B_2$.
2. eset: Belülről érintő körre: Thalész-tétel miatt $A_1EB_1\sphericalangle = 90°$. $A_1EB_1\sphericalangle$ megegyezik $A_2EB_2\sphericalangle$ szöggel. Thalész-tétel megfordítása miatt $O_2 \in A_2B_2$.

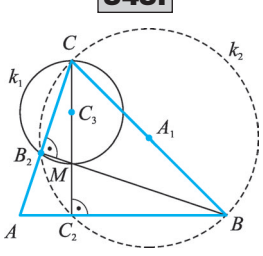
547. Legyen az $ABC\triangle$ köré írható kör középpontja O; az OA Thalész köre pedig k_T. Legyen $k_T \cap AB = E$ és $k_T \cap AC = F$! Thalész-tétel miatt $AEO\sphericalangle = 90°$. $OE \perp AB$ miatt OE az AB szakasz felezőmerőlegese, hiszen a körülírt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.

543.



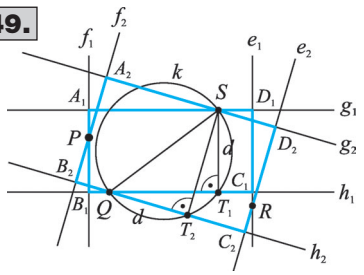


545.

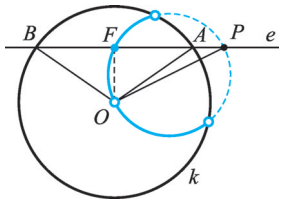


I

549.



553.



O-ból AB-re csak egy merőleges állítható, tehát annak a felezésponton kell átmennie. $\Rightarrow E$ felezi AB-t. Hasonlóan belátható, hogy F felezi AC-t.

548. AB a két kör közös húrja; AC átmérő a k_1 körben; AD átmérő a k_2 körben. **1. eset:** $B \neq D$. A Thalész-tétel miatt $CBA \sphericalangle =$; $DBA \sphericalangle =$ $\Rightarrow C$, B és D egy egyenesen vannak.
2. eset: $B \equiv D$. Az állítás ebben az esetben nyilvánvaló.

549. A szerkesztés: ① SQ Thalész köre $\rightarrow k$. ② Az S középpontú d sugarú körnek k-val való metszéspontja T_1; a Q középpontú d sugarú kör k-val való metszéspontja T_2. Elegendő PS egyik félsíkjában rajzolni. ③ ST_i-vel párhuzamos R-en át $\rightarrow e_i$. ST_i-vel párhuzamos P-n át $\rightarrow f_i$. Q-ban merőleges f_i-re $\rightarrow h_i$. S-ben merőleges f_i-re $\rightarrow g_i$. ④ $e_i \cap g_i = D_i$; $e_i \cap h_i = C_i$; $f_i \cap g_i = A_i$; $f_i \cap h_i = B_i$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehetséges.

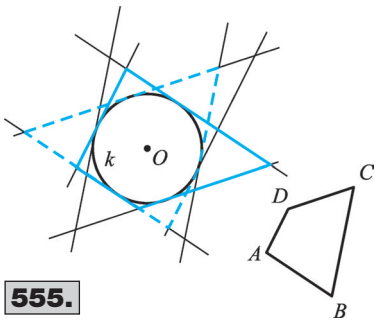
550. Egy tetszőleges, P-n áthaladó e egyenesen a Q talppont rajta van a TP szakasz Thalész körén. E Thalész-körnek bármely T-től és P-től különböző pontja egyértelműen meghatározza a hozzá tartozó egyenest. A keresett ponthalmaz a PT szakasz mint átmérő fölé rajzolt kör a P és T pontok kivételével.

551. A rombusz átlói merőlegesek egymásra, ezért az átlók M metszéspontja mindig rajta lesz a rögzített AB szakasz Thalész körén. A Thalész-kör minden pontjához megadható egy rombusz az A, ill. B pontok M-re való tükrözésével. A keresett ponthalmaz az AB átmérőjű kör, az A és B pontok kivételével.

552. Legyen az AB húr és az OB sugár Thalész körének metszéspontja Q. Q rajta van OB szakasz Thalész körén, ezért $OQB \sphericalangle =$. OQ az AOB egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága $\Rightarrow Q$ felezi AB-t.

553. $AOB\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow OF \perp AB \Rightarrow OF \perp FP$. F rajta van OP Thalész körén. A Thalész-kör k-n belüli bármely F pontja egyértelműen meghatároz egy P-n átmenő húrt, aminek F a felezőpontja. Kivétel ez alól a P és O pont. A keresett ponthalmaz az OP átmérőjű kör k-n belüli része, az O és P pontokat kivéve.

A háromszög beírt és hozzáírt körei

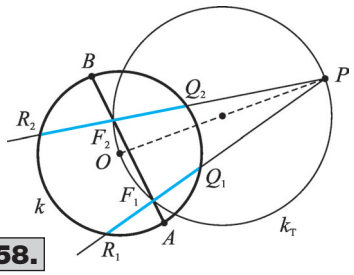


555.

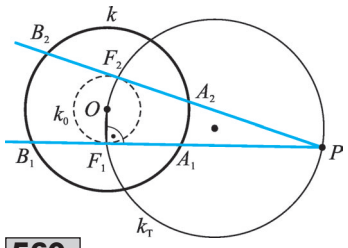
554. Felhasználjuk: az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre. A szerkesztés: ① O-ból merőleges e-re $\rightarrow m$. ② $m \cap k = \{E_1; E_2\}$. ③ E_1-en át párhuzamos e-vel $\rightarrow f_1$. ④ E_2-n át párhuzamos e-vel $\rightarrow f_2$. Két megoldás van.

555. A szerkesztés: ① A megadott négyszög különböző oldalegyeneseit kiválasztva megszerkesztjük a k körhöz a kiválasztott oldalegyenesekkel párhuzamos érintőket (l. 554. feladat). ② Az érintők közül úgy választunk oldalegyeneseket, hogy azok körülfogják a kört.

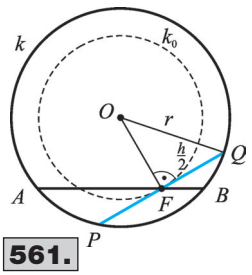
556. $OP = 3$ cm. P-n áthaladó egyenest szerkesztünk, ami O-tól 2 cm távolságra halad. A szerkesztés: ① O kö-



558.



560.



561.

zéppontú 2 cm sugarú kör → k. ② OP Thalész köre → k_T. ③ $k_T \cap k = \{E_1; E_2\}$. ④ e$(P; E_1) =$ $= e_1$; e$(P; E_2) = e_2$.

557. Adott: O; P és az e távolság. Felhasználjuk: Az érintési pont rajta van a középpont és a külső pont fölé rajzolt Thalész-körön. A szerkesztés: ① OP Thalész köre → k_T. ② P középpontú e sugarú kör → k_P. ③ $k_T \cap k_P = \{E_1; E_2\}$. ④ O középpontú, OE_1 sugarú kör → k. Nincs megoldás, ha $e \geq OP$, 1 megoldás van egyébként.

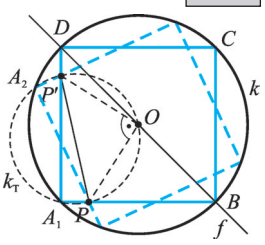
558. Olyan PR egyenest keresünk, amelyre $RF = FQ$. F felezi RQ-t ⇒ $OFQ\sphericalangle =$ ⇒ F rajta van OP Thalész körén. A szerkesztés: ① OP Thalész köre → k_T. ② $k_T \cap AB = F$. ③ e$(P; F)$ a megoldás. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

559. Az O középpontú kör h hosszúságú AB húrjának felezőpontja legyen F. FOB derékszögű háromszög átfogója r, egyik befogója $FB = \frac{h}{2}$. A másik befogó Pitagorasz-tétellel $FO =$ $= \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ = állandó. Az egyenlő húrok F felezéspontjai az O középpontú $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ sugarú körön vannak. E kör minden pontjához egyértelműen egy h hosszúságú húr tartozik. A keresett ponthalmaz egy k-val koncentrikus $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ sugarú kör.

560. Felhasználjuk: $OF \perp BA \Rightarrow OFP\sphericalangle =$. Az AB húr F felezéspontja $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ távolságra van O-tól (559. feladat). A szerkesztés: ① OP Thalész köre → k_T. ② O középpontú OF sugarú kör → k_0. ③ $k_0 \cap k_T = F$. ④ e$(P; F) \cap k = \{A; B\}$. Két megoldás van.

561. Felhasználjuk: F felezi PQ-t ⇒ $OFQ\sphericalangle =$. Az OFQ derékszögű háromszög OQ átfogója r, FQ befogója $\frac{h}{2}$ ⇒ OF befogó hossza megszerkeszthető. A szerkesztés: ① Az előzetesen megszerkesztett OF távolsággal mint sugárral O középpontú kör → k_0. ② $k_0 \cap AB = F$. ③ F-ben merőleges OF-re → a keresett húr egyenese. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

562.

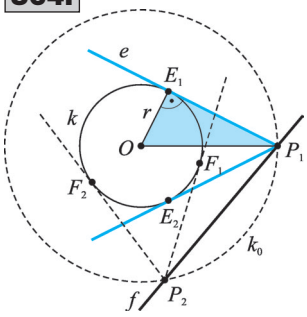


562. Felhasználjuk: a négyzet forgásszimmetrikus az O körüli 90°-os elforgatásra. A szerkesztés: ① P-t elforgatjuk O körül 90°-kal → → P'. ② PP' Thalész köre → k_T. ③ $k_T \cap k = A$. ④ A-t középpontosan tükrözzük O-ra → C. ⑤ AC felező merőlegese → f. ⑥ $f \cap k =$ $= \{B; D\}$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

563. Az AB átmérő meghosszabbításán helyezkedik el P, amelyből a körhöz húzott érintők érintési pontjai E_1 és E_2. Az OE_1P derékszögű háromszögben ismerjük az $OE_1 = r$ befogót. Egy segédábrán

I

564.



az OP átfogó hossza megszerkeszthető. O-ból mindkét irányba felmérjük AB egyenesére a megszerkesztett OP távolságot. Két megoldás van.

564. Az OPE derékszögű háromszög két ismert befogójából az OP távolság megszerkeszthető. A P pont rajta van az O középpontú OP sugarú körön $\rightarrow k_0$. $k_0 \cap f = P$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás van.

565. Az O középpontú körhöz P-ből húzott érintők érintési pontjai E_1 és E_2. $E_1PE_2\sphericalangle = 60° \Rightarrow E_1PO\sphericalangle = 30° \Rightarrow E_1OP$ derékszögű háromszögben $OP = 2OE_1 = 2r$. A keresett P pontok egy O középpontú $2r$ sugarú körön vannak. E kör minden pontja megfelel a feltételeknek. A keresett ponthalmaz a k-val koncentrikus $2r$ sugarú kör.

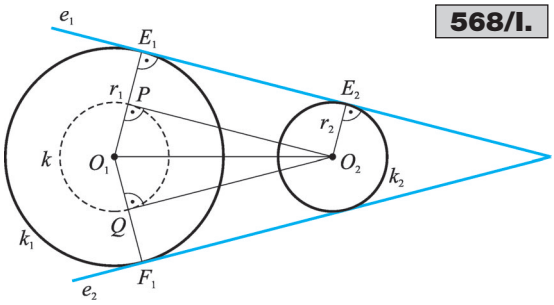
566. Az O középpontú körhöz P-ből húzott érintők érintési pontjai E_1 és E_2. $E_1PE_2\sphericalangle = \Rightarrow$ $\Rightarrow OE_1PE_2$ négyszög egy r oldalú négyzet $\Rightarrow$ a P pontok egy O középpontú $r\sqrt{2}$ sugarú körön vannak. A szerkesztés: ① r oldalú négyzet átlója $\rightarrow r\sqrt{2}$ hosszúságú szakasz. ② O középpontú $r\sqrt{2}$ sugarú kör $\rightarrow k_0$. ③ $k_0 \cap f = P$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

567. Legyen a két kör közös húrja AB, ami átmérő k-ban. A keresett körök K középpontjaira az AOK derékszögű háromszögben $OK = \sqrt{R^2 - r^2}$. A K középpontok egy O középpontú $\sqrt{R^2 - r^2}$ sugarú körön vannak. E kör minden pontja megfelel. A ponthalmaz egy k-val koncentrikus $\sqrt{R^2 - r^2}$ sugarú kör, ha $R > r$; nincs ilyen pont, ha $R \leq r$.

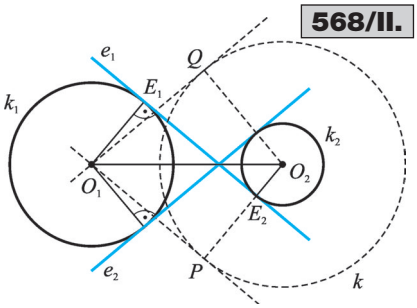
568. *a)* Két kör közös külső érintőinek meghatározása: **1. eset:** A két kör sugara egyenlő. O_1-ben és O_2-ben merőlegest állítunk a körök centrálisára. Ezeknek a körökkel való E_1, F_1, ill. E_2, F_2 metszéspontjai lesznek az érintési pontok. E_1E_2 egyenese az egyik, F_1F_2 egyenese a másik érintő. **2. eset:** A két kör sugara különböző: Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, ezért az $O_1E_1E_2O_2$ négyszög derékszögű trapéz. Húzzunk párhuzamost O_2-n át E_1E_2-vel $\rightarrow O_1O_2P$ derékszögű háromszög, melynek O_1P befogója $(r_1 - r_2)$ hosszú, O_2P befogója pedig párhuzamos a szerkesztendő érintővel. Az O_2 pontból érintőt szerkesztünk az O_1 középpontú $(r_1 - r_2)$ sugarú körhöz $\rightarrow P$, Q. O_1P félegyenesnek k_1-gyel való metszéspontja E_1. O_1Q félegyenesnek k_1-gyel való metszéspontja F_1. E_1-ben merőleges O_1E_1-re $\rightarrow e_1$ érintő. F_1-ben merőleges O_1F_1-re $\rightarrow e_2$ érintő.

b) Két kör közös belső érintőjének megszerkesztése: Toljuk el az e_1 érintőt az $\overrightarrow{E_1O_1}$ eltolásvektorral $(E_1O_1 \perp e_1, E_1O_1 = r_1) \Rightarrow E_1$ képe O_1, E_2 képe P. Szerkesszünk érintőt O_1-ből az O_2 középpontú $(r_1 + r_2)$ sugarú k körhöz $\rightarrow P$, Q. Toljuk el az O_1P érintőt O_1P-re merőlegesen a k_2 kör felé r_1 távolsággal. Ez az eltolás az O_1P egyenest a k_1 és k_2 körök egyik közös belső érintőjébe viszi. Hasonlóan járunk el az O_1Q egyenessel. Így a másik közös belső érintőhöz jutunk.

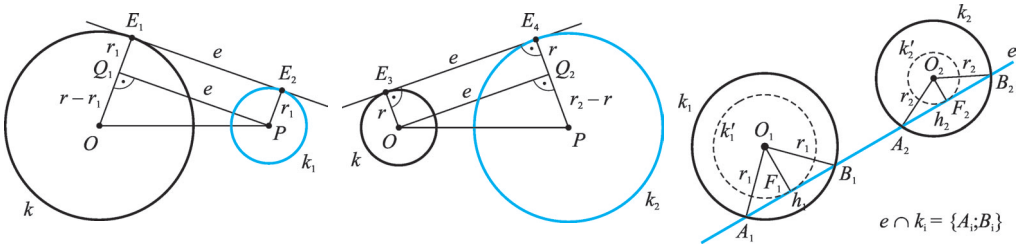
568/I.



568/II.



570/I. **570/II.** **571.**



Megjegyzések: I. A belső érintő megszerkesztésénél nincs szükség az $r_1 = r_2$ eset különválasztására. II. Két körnek akkor létezik közös belső érintője, ha $r_1 + r_2 \geq O_1O_2$. Egyenlőség esetén egy közös belső érintő van. III. Két körnek akkor létezik közös külső érintője, ha egyik sem tartalmazza a másikat.

569. A szerkesztés: ① O_1 középpontú 2 cm sugarú kör $\rightarrow k_1$. ② O_2 középpontú 1 cm sugarú kör $\rightarrow k_2$. ③ k_1-hez és k_2-höz a közös belső és külső érintők megszerkesztése.

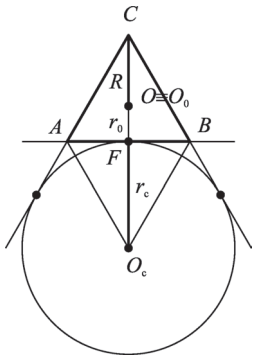
570. **1. eset:** Ha $e < OP$, akkor a szerkesztendő kör sugara kisebb is és nagyobb is lehet az adott kör sugaránál. *a)* A szerkesztendő kör sugara kisebb az adott kör sugaránál. Felhasználjuk: Az E_1E_2 közös külső érintő a Q_1P szakasz $\overrightarrow{PE_2}$ vektorral való eltolt képe.
A szerkesztés: ① e, OP, $\rightarrow OPQ_1\triangle$. ② $r - OQ_1 = r_1$. ③ P középpontú r_1 sugarú kör $\rightarrow k_1$.
b) A szerkesztendő kör sugara nagyobb az adott kör sugaránál. Felhasználjuk: Az E_3E_4 közös külső érintő a OQ_2 szakasz $\overrightarrow{OE_3}$ vektorral való eltolt képe. A szerkesztés: ① e, OP, $\rightarrow OPQ_2\triangle$. ② $r + PQ_2 = r_2$. ③ P középpontú r_2 sugarú kör $\rightarrow k_2$.
2. eset: Ha $e = OP$, akkor P középpontú r sugarú kör a megoldás.
3. eset: Ha $e > OP$, akkor nincs megoldás.

571. Felhasználjuk: A k_1 kör h_1 hosszúságú húrjainak F_1 felezőpontjai az O_1 középpontú $\sqrt{r_1^2 - \frac{h_1^2}{4}}$ sugarú k_1' körön vannak (559. feladat). Hasonló igaz a k_2 kör h_2 hosszú húrjaira is $\rightarrow$ $\rightarrow k_2'$. $O_1F_1 \perp A_1B_1 \Rightarrow O_1F_1 \perp e$. $O_2F_2 \perp A_2B_2 \Rightarrow O_2F_2 \perp e$. A keresett e szelő a k_1' és k_2' körök közös érintője. A szerkesztés: ① O_1 középpontú $\sqrt{r_1^2 - \frac{h_1^2}{4}}$ sugarú kör $\rightarrow k_1'$. ② O_2 középpontú $\sqrt{r_2^2 - \frac{h_2^2}{4}}$ sugarú kör $\rightarrow k_2'$. ③ k_1' és k_2' körök közös külső és belső érintőinek megszerkesztése. 0; 1; 2; 3 vagy 4 egyenes lehetséges.

572. Egyenlő oldalú háromszögben a beírt kör középpontja és a körülírt kör középpontja megegyezik a súlyponttal. A CF súlyvonalon $CS = 2SF$. CS a körülírt kör sugara: R. SF a beírt kör sugara: r_0. Az aláhúzott állításba beírva: $\underline{\underline{R = 2r_0}}$.

573. Szabályos háromszögben a beírt kör középpontja azonos a súlyponttal $\Rightarrow O_0C = 2r_0$. $ABO_c\triangle \cong ABC\triangle$, mivel O_c az A-nál és B-nél levő 120°-os külső szögek felezőinek metszéspontja $\Rightarrow FO_c = FC \Rightarrow$ $\underline{\underline{r_c = 3r_0}}$.

573.



I

574. Az 573. ábra jelöléseit használjuk. $ABO_c\triangle \cong ABC\triangle$, mivel O_c az A-nál és B-nél levő 120°-os külső szögek felezőinek metszéspontja $\Rightarrow FO_c = FC$. A szabályos háromszög körülírt körének középpontja egybeesik a súlyponttal: $R = \frac{2}{3} FC = \frac{2}{3} FO_c = \frac{2}{3} r_c$.

575. Legyen az $ABC\triangle$ c oldalához írt kör középpontja O_c. Felhasználjuk: $ABO_c\triangle \cong ABC\triangle$, mivel O_c az A-nál és B-nél levő 120°-os külső szögek felezőinek metszéspontja. A szerkesztés: ① k_c egy átmérője $\rightarrow f$ egyenes, F pont. ② O_c-t tükrözzük F-re $\rightarrow C$. ③ C-ben $+30°$-os és $(-30°)$-os szög felvétele az f egyenesre $\rightarrow b$ és a. ④ F-ben merőleges f-re $\rightarrow c$. ⑤ $b \cap c = A$; $a \cap c = B$. A feladat egyértelműen megoldható.

576. Legyenek az $ABC\triangle$ a, b, c oldalaihoz írt körök középpontjai rendre O_a, O_b, O_c. Felhasználjuk: adott csúcsnál levő belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra. Az $O_aO_bO_c\triangle$ oldalai az ABC háromszög külső szögfelezői. Az O_cC szakasz rajta van a γ szög felezőjén, tehát merőleges a γ' külső szög szögfelezőjére $\Rightarrow f_\gamma$ belső szögfelező az $O_aO_bO_c\triangle$ O_c-ből induló magasságvonala. Hasonlóan megmutatható, hogy f_α az O_a-ból induló, f_β az O_b-ből induló magasságvonal az $O_aO_bO_c\triangle$-ben.

577. Felhasználjuk: külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő.
$AE = AG = x \Rightarrow EB = c - x \Rightarrow FB = c - x$. $GC = b - x \Rightarrow CF = b - x$. $a = CF + FB = b - x + c - x = b + c - 2x \Rightarrow x = \frac{b+c-a}{2} = \frac{b+c+a}{2} - a = s - a$, ahol s a félkerület $\Rightarrow \underline{\underline{AE = AG = s - a}}$; $\underline{\underline{FB = EB}} = c - x = \underline{\underline{s - b}}$; $\underline{\underline{CF = CG}} = b - x = \underline{\underline{s - c}}$.

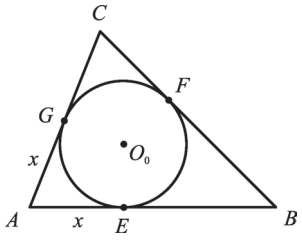
578. Felhasználjuk: külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő. $CE = CG$, $AE = AF$, $BG = BF$, $CE + CG = (CA + AE) + (CB + BG) = CA + AF + CB + BF = CA + CB + (AF + BF) = CA + CB + AB = k_{ABC}$, $CE = CG \Rightarrow 2CE = k_{ABC} \Rightarrow \underline{\underline{CE}} = \frac{k_{ABC}}{2} = \underline{\underline{s}} \Rightarrow \underline{\underline{CG = s}}$.

579. Legyenek az a oldalt érintő hozzáírt kör érintési pontjai az AC, BC és AB oldalegyeneseken rendre D, E és F. Az 578. feladat állítása szerint $AF = s$. $BF = AF - AB = s - c$, $BF = BE$ miatt $\underline{\underline{BE = s - c}}$, $\underline{\underline{CE}} = BC - BE = a - (s - c) = \underline{\underline{s - b}}$.

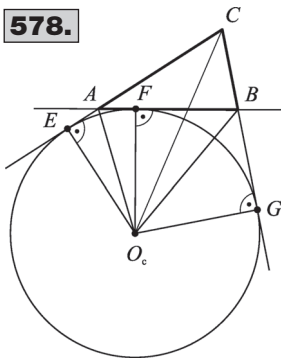
580. Az 577. feladat megoldásából $BE = s - b$. Az 579. feladat megoldásából $CF = s - b$. Tehát a két távolság valóban egyenlő.

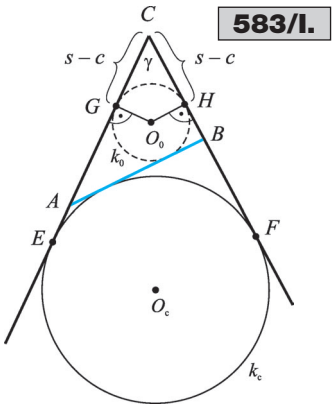
581. Legyen a c oldalon a beírt kör érintési pontja E, a hozzáírt kör érintési pontja F. **1. eset:** Ha $a = b$, akkor $E \equiv F \Rightarrow EF = 0 = a - b$. **2. eset:** Ha $a \neq b$, akkor $a > b$ feltehető. Az 577. feladat megoldásából $AE = s - a$. Az 579. feladat megoldásából $AF = s - b$. $a > b \Rightarrow AE = s - a < s - b = AF$. $\underline{\underline{EF}} = AF - AE = s - b - (s - a) = \underline{\underline{a - b}}$.

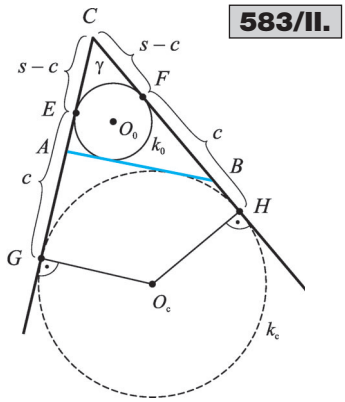
577.



578.







582. Legyen a háromszög a oldalát érintő hozzáírt kör középpontja O_a, érintési pontja az AB oldalegyenesen pedig E. Az 578. feladat megoldásából $AE = s \Rightarrow$ az AEO_a derékszögű háromszög befogói $AE = s$ és $O_aE = r_a \Rightarrow$ a háromszög megszerkeszthető, $AEO_a\triangle$ hegyesszöge az AO_a szögfelező miatt $\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha$.

583. Az elhelyezendő szakasz egyenese el is választhatja a szögcsúcsot és a kört, de a kör és a szögcsúcs lehet az egyenes által határolt ugyanazon félsíkban is. **1. eset:** Az elhelyezendő szakasz a k_c kör és a C szögcsúcs között van. Olyan $ABC\triangle$-et kell szerkesztenünk, melynek adott a γ szöge, a c oldalához hozzáírt köre és a c oldal hossza. Az 578. feladat szerint $CE = CF = s$. Az 577. feladat szerint a háromszög beírt köre C-től $(s - c)$ távolságra érinti az AC és BC oldalakat. Az s és c ismeretében ezeket az érintési pontokat kijelöljük, majd ezekben a pontokban merőlegest állítunk a szög száraira → a merőlegesek metszéspontja a beírt kör középpontja → k_0 a beírt kör. A k_0 és k_c közös belső érintőjének megszerkesztése → AB. Nincs megoldás, ha $c \geq s$ vagy k_0 metszi k_c-t. Egy megoldás van, ha k_0 érinti k_c-t. Két megoldás van, ha k_0 kívül van k_c-n.
2. eset: Az elhelyezendő szakasz a k_0 körnek a C szögcsúccsal ellentétes oldalán van. Olyan $ABC\triangle$-et kell szerkesztenünk, aminek adott a γ szöge, a beírt köre és a c oldal hossza. Az 577. feladat szerint $CE = CF = s - c$. Az 578. feladat szerint a háromszög c oldalhoz hozzáírt köre C-től s távolságra érinti az AC és BC oldalegyeneseket. E-ből és F-ből C-vel ellentétes oldalra felmérjük a szögszárakra a c távolságot → a c oldalhoz hozzáírt kör G és H érintési pontjai. G-ben merőlegest állítunk GC-re, H-ban HC-re → a merőlegesek metszéspontja O_0, a c oldalhoz hozzáírt kör középpontja. O_c középpontú O_cG sugarú kör k_c. k_0 és k_c közös belső érintőjének a szögszárak közé eső darabja AB. Nincs megoldás, ha k_0 metszi k_c-t. Egy megoldás van, ha k_0 érinti k_c-t. Két megoldás van, ha k_0 kívül van k_c-n. A két esetben adódó megoldások számát összesítve 0 vagy 1; 2; 3; 4 megoldás lehetséges.
584. Adott: r_0, r_c, $a - b$. Legyen az AB oldalon a beírt kör érintési pontja E, a k_c hozzáírt köré F. Felhasználjuk: az EF szakasz az $(a - b)$ szakasszal egyenlő (581. feladat). A szerkesztés: ① $EF = a - b$ szakasz felvétele. ② E-ben merőleges EF-re, F-ben merőleges EF-re. ③ a merőlegesekre r_0, ill. r_c szakaszok felmérése ellentétes félsíkban → O_0, O_c. ④ O_0 középpontú r_0 sugarú kör → k_0. O_c középpontú r_c sugarú kör → k_c. ⑤ k_0 és k_c körök közös külső érintőinek megszerkesztése. ⑥ Az érintők metszéspontja C, az érintőknek EF egyenessel való metszéspontjai A és B. $r_0 \geq r_c$ esetében nincs megoldás, minden más esetben van.
585. Az 577. feladat megoldásából $AE_1 = s - a$. Az 578. feladat megoldásából $AE_2 = s$. $\underline{\underline{E_1E_2}} = AE_2 - AE_1 = s - (s - a) = \underline{\underline{a}}$.
586. Legyen az AB átfogójú derékszögű háromszög BC oldalának egyenesén a beírt kör érin-

I

tési pontja E_1, az átfogót érintő hozzáírt kör érintési pontja E_2. Az $O_0E_1C\triangle$ egyenlő szárú derékszögű, hiszen $O_0CE_1\sphericalangle = 45° \Rightarrow CE_1 = r_0 = s - c$ (l. 577. feladat). $O_cE_2C\triangle$-ben $CE_2 = r_c = s$ (l. 578. feladat). $r_c - r_0 = s - (s - c) = c$.

587. $CE_1O_0E_2$ négyszög minden szöge derékszög és $CE_1 = CE_2 \Rightarrow CE_1O_0E_2$ négyzet $\Rightarrow CE_1 = r_0$. Az 577. feladat megoldásából $CE_1 = s - c. \Rightarrow r_0 = s - c = \frac{a+b+c}{2} - c \Rightarrow 2r_0 + c = a + b$.

588. Az 587. feladat megoldásából: $a + b = 2r_0 + c \Rightarrow c = a + b - 2r_0 \Rightarrow$ Olyan derékszögű háromszöget kell szerkeszteni, amelyben ismert a befogók összege és az átfogó. Forgassuk el az A csúcsot C körül $(-90°)$-kal $\rightarrow A'. \Rightarrow AA'C\triangle$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow CA'A\sphericalangle = 45°$. A szerkesztés: ① $A'B = a + b$ hosszúságú szakasz felvétele. ② A'-ben $A'B$-re 45°-os szög $\rightarrow f$. ③ B középpontú c sugarú kör $\rightarrow k_B$. ④ $k_B \cap f = A$. ⑤ A-ból merőleges $A'B$-re $\Rightarrow C$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

589. A háromszög derékszögű csúcsa C-ben van. *a)* Legyen a beírt kör érintési pontja AC-n E. $CE = r_0$, másrészt az 577. feladat megoldásából $CE = s - c \Rightarrow r_0 = s - c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}$. *b)* Legyen a k_c hozzáírt kör érintési pontja a CA egyenesen F. O_c rajta van a derékszög felezőjén, ezért $O_cFC\triangle$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow CF = r_c$. Az 578. feladat megoldásából $CF = s$, $r_c = s = \frac{a+b+c}{2}$.

590. Legyen a k_c hozzáírt kör érintési pontja a CB, ill. CA befogók egyenesén E_1, ill. E_2. Derékszögű háromszögben az $O_cE_1CE_2$ négyszög négyzet, mert minden szöge derékszög és $E_2O_c = O_cE_1 = r_c$. A szerkesztés: ① r_c oldalú négyzet $\rightarrow O_cE_1CE_2$ négyzet. ② O_c középpontú r_c sugarú kör $\rightarrow k_c$. ③ E_2C-vel α szöget bezáró tetszőleges e egyenes szerkesztése. ④ e-vel párhuzamos, C-hez közelebbi érintő szerkesztése a k_c körhöz. ⑤ Az érintőnek a C csúcsú derékszög száraival való metszéspontjai A és B. Egy megoldás van.

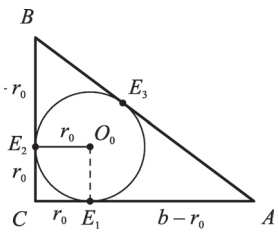
591. Legyen C a derékszögű csúcs, és a k_c hozzáírt kör érintési pontjai a befogók egyenesén E_1 és E_2. Az 578. feladat megoldásából tudjuk, hogy $CE_2 = s$. $E_1O_cE_2C$ négyszög r_c oldalú négyzet. $CE_2 = r_c = s = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow c = 2r_c - (a + b)$. Az adatokat behelyettesítve: $c = 7$ cm.

592. Egy körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők. $\Rightarrow A_2B_1 = A_2E_2 + B_1E_3$ és $B_2C_1 = B_2E_3 + C_1E_1$ és $C_2A_1 = C_2E_1 + A_1E_2 \Rightarrow k_{AC_1B_2} + k_{CB_1A_2} + k_{BA_1C_2} =$

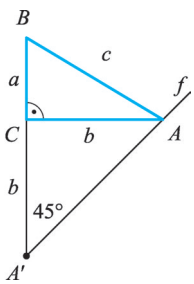
$= (AC_1 + B_2E_3 + C_1E_1 + B_2A) + (CB_1 + A_2E_2 + B_1E_3 + CA_2) + (BA_1 + C_2E_1 + A_1E_2 + C_2B) =$

$= AB + BC + CA = k_{ABC}$.

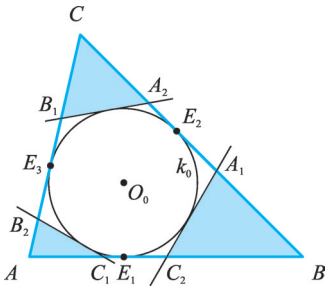
587.



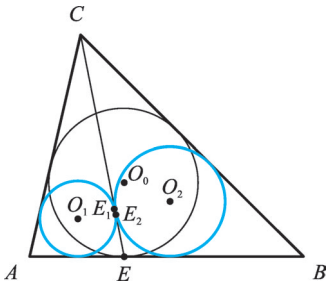
588.



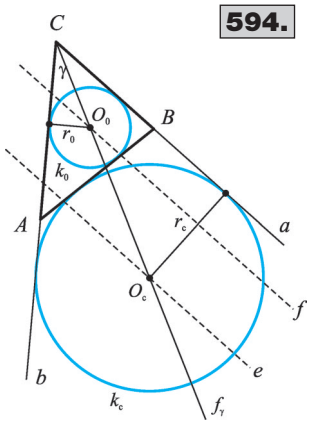
592.



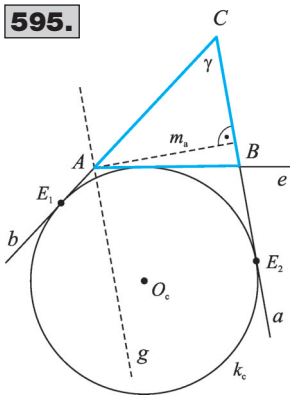
593.



594.



595.



593. Az $AEC\triangle$ oldalai: $AC = b$; $AE = s - a$; $CE = x$. Ebben a háromszögben a félkerület: $s_1 = \dfrac{b + s - a + x}{2}$. Az 577. feladat eredményét felhasználva $EE_1 = s_1 - b = \dfrac{b + s - a + x}{2} - b =$ $= \dfrac{s + x - a - b}{2}$. A $BEC\triangle$ oldalai: $BC = a$; $BE = s - b$; $CE = x$. Ebben a háromszögben a félkerület: $s_2 = \dfrac{a + s - b + x}{2}$. Az 577. feladat eredményét felhasználva $EE_2 = s_2 - a =$ $= \dfrac{a + s - b + x}{2} - a = \dfrac{s + x - a - b}{2}$. Az aláhúzottak egyenlősége miatt $E_1 \equiv E_2$.

594. A szerkesztés: ① γ szög felvétele $\rightarrow a$ és b félegyenes. ② γ szögfelezője f_γ. ③ párhuzamos a-tól r_c távolságra $\rightarrow e$. ④ $e \cap f_\gamma = O_c$, O_c középpontú r_c sugarú kör $\rightarrow k_c$. ⑤ párhuzamos a-tól r_0 távolságra $\rightarrow f$. ⑥ $f \cap f_\gamma = O_0$, O_0 középpontú r_0 sugarú kör $\rightarrow k_0$. ⑦ k_c és k_0 közös belső érintőinek b-vel való metszéspontja A, a-val való metszéspontja B. 0 vagy 1 egyenlő szárú vagy 2 egybevágó háromszög lehet.

595. Felhasználjuk az 578. feladat megoldását: $CE_1 = CE_2 = s$. A szerkesztés: ① γ szög felvétele $\rightarrow a$ és b félegyenes; C csúcs. ② a-ra és b-re C-ből $s = \dfrac{k_{ABC}}{2} \rightarrow E_1$; E_2. ③ E_1-ben merőleges b-re, E_2-ben merőleges a-ra; a merőlegesek metszéspontja $O_c \rightarrow$ a c oldalhoz hozzáírt kör k_c. ④ a-val párhuzamos m_a távolságra a szögtartományban $\rightarrow g$. ⑤ $g \cap b = A$. ⑥ A-ból érintő k_c-hez $\rightarrow e$. ⑦ $e \cap a = B$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

596. Az 578. feladat megoldásából $CE_1 = CE_2 = s$, ahol E_1 és E_2 a k_c hozzáírt kör érintési pontjai a CA és CB egyeneseken. A szerkesztés: ① γ szög felvétele $\rightarrow a$ és b félegyenes; C csúcs. ② r_0 távolságra párhuzamos a-val és b-vel a szögtartományban; metszéspontjuk $O_0 \rightarrow a$ beírt kör k_0. ③ γ száraira $s = \dfrac{k_{ABC}}{2}$ hosszú szakaszok felvétele $\rightarrow E_1$; E_2. ④ E_1-ben merőleges b-re, E_2-ben merőleges a-ra; a merőlegesek metszéspontja $O_c \rightarrow$ a c oldalhoz hozzáírt kör k_c. ⑤ k_c és k_0 közös belső érintőjének megszerkesztése $\rightarrow c$. ⑥ $c \cap a = B$; $c \cap b = A$. 0 vagy 1 egyenlő szárú vagy 2 egybevágó háromszög lehet.

597. Felhasználjuk az 578. feladat megoldását: $CE_1 = CE_2 = s$, ahol E_1 és E_2 a k_c hozzáírt kör érintési pontjai a CA és CB egyeneseken. A szerkesztés: ① γ szög felvétele $\rightarrow a$ és b félegyenes;

I

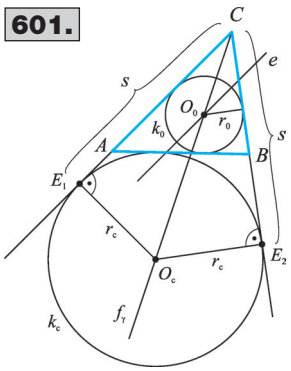
C csúcs. ② a-ra és b-re C-ből $s = \frac{k_{ABC}}{2} \to E_1$; E_2. ③ E_1-ben merőleges b-re, E_2-ben merőleges a-ra; a merőlegesek metszéspontja $O_c \to$ a c oldalhoz hozzáírt kör k_c. ④ C középpontú m_c sugarú kör $\to k$. ⑤ k és k_c közös belső érintőjének a-val való metszéspontja B, b-vel való metszéspontja A. 0 vagy 1 egyenlő szárú vagy 2 egybevágó háromszög lehet.

598. A szerkesztés: ① E-ben merőleges AB-re, majd a merőlegesen r_0 távolság kijelölése $\to$ $\to O_0$. ② O_0 középpontú r_0 sugarú kör $\to k_0$. ③ A-ból érintő k_0-hoz $\to b$. B-ből érintő k_0-hoz $\to a$. ④ $a \cap b = C$. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

599. Felhasználjuk az 577. feladat megoldásából $AE = s - a$, ahol E a beírt kör érintési pontja AB-n. $c - (a - b) = c + b - a = c + b + a - 2a = 2(s - a)$. A szerkesztés: ① $\frac{c-(a-b)}{2} = s - a$ szakasz megszerkesztése. ② $AB = c$ szakasz felvétele. ③ $AE = s - a$ szakasz kijelölése AB-n. ④ E-ben merőleges AB-re; a merőlegesen E-től r_0 távolságra O_0 középpont kijelölése. ⑤ O_0 középpontú r_0 sugarú kör $\to k_0$. ⑥ A-ból, B-ből érintő k_0-hoz; az érintők metszéspontja C. 0 vagy 1 megoldás lehet.

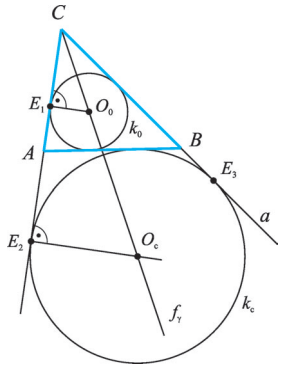
600. Felhasználjuk az 578. feladat megoldását: $CE_1 = CE_2 = s$, ahol E_1 és E_2 a k_c hozzáírt kör érintési pontjai CA és CB egyeneseken. ① a-ra és b-re C-ből $s = \frac{k_{ABC}}{2} \to E_1$; E_2. ② E_1-ben merőleges b-re, E_2-ben merőleges a-ra; a merőlegesek metszéspontja $O_c \to$ a c oldalhoz hozzáírt kör k_c. ③ P-ből érintő szerkesztése k_c-hez. Az érintőnek a-val való metszéspontja B, b-vel való metszéspontja A. 0 vagy 1 vagy 2 megoldás lehet.

601.



601. Felhasználjuk az 578. feladat megoldását: $CE_1 = CE_2 = s$. A szerkesztés: ① $s = \frac{k_{ABC}}{2}$ és r_c oldalú derékszögű deltoid $\to$ $\to CE_1O_cE_2$ négyszög; $E_1CE_2\sphericalangle = \gamma$. ② $E_1CE_2\sphericalangle$ szögfelezője f_γ. ③ r_0 távolságra párhuzamos a CE_1 szögszárral $\to e$. ④ $f_\gamma \cap e = O_0$. ⑤ O_0 középpontú r_0 sugarú kör $\to \to k_0$. O_c középpontú r_c sugarú kör $\to k_c$. ⑥ k_c és k_0 körök közös belső érintőjének a szög száraival való metszéspontjai A és B. 0 vagy 1 egyenlő szárú vagy 2 egybevágó megoldás lehet.

603.



602. Adott: k_{ABC}; r_c; α. Felhasználjuk az 578. feladat megoldását: $CE_1 = CE_2 = s = \frac{k_{ABC}}{2}$, ahol E_1 *és* E_2 a k_c hozzáírt kör érintési pontjai a CA és CB egyeneseken. A szerkesztés: ① O_c középpontú, r_c sugarú kör: k_c. ② $E_1 \in k_c$. ③ E_1-et O_c körül $(-\alpha)$ szöggel elforgatjuk: C_c. ④ C_c-ben merőleges O_cC_c-re: c. ⑤ E_1-ben merőleges E_1O_c-re: b. ⑥ $c \cap b = A$. ⑦ E_1 kezdőpontú, A-t tartalmazó félegyenesen C úgy, hogy $E_1C = s$ legyen. ⑧ C középpontú, s sugarú kör: k. ⑨ $k \cap k_c = E_2$. ⑩ $CE_2 \cap c = B$. Minden $\alpha < 180°$ szög esetén van megoldás.

603. Felhasználjuk: I. Az 577. feladat megoldásából $CE_1 = s - c$. II. Az 578. feladat megoldásából $CE_2 = s$. III. $\frac{(a+b)-c}{2} = s - c$.

A szerkesztés: ① $(s - c)$; r_0; $\measuredangle \rightarrow CE_1O_0\triangle$. ② C-ből CE_1 félegyenesre s távolság $\rightarrow E_2$. ③ E_2-ben CE_2-re állított merőleges és CO_0 egyenes metszéspontja O_c. ④ O_0 középpontú O_0E_1 sugarú kör $\rightarrow k_0$; O_c középpontú O_cE_2 sugarú kör $\rightarrow k_c$. ⑤ E_2-t tükrözzük a CO_c egyenesre $\rightarrow E_3$. ⑥ k_0 és k_c közös belső érintője $\rightarrow c$. ⑦ $c \cap e(C; E_1) = A$; $c \cap e(C; E_3) = B$. 0 vagy 1 egyenlő szárú vagy 2 egybevágó háromszög lehet.

I

Háromszögek szerkesztése (II. rész)

604. Felhasználjuk: az m_a, m_b, m_c metsző egyenesek magasságvonalak, tehát merőlegesek a háromszög egy-egy oldalára. A szerkesztés: ① P-ből merőleges m_b-re $\rightarrow b$. ② $b \cap m_a = A$, $b \cap m_c = C$. ③ C-ből merőleges m_a-ra $\rightarrow a$. ④ $a \cap m_b = B$. Nincs megoldás, ha $b \parallel m_a$ vagy $b \parallel m_c$. Végtelen sok megoldás van, ha $m_a \perp m_b$ és $P \in m_a$. Minden más esetben egy megoldás van.

605. *a)* A szerkesztés: ① γ szög felvétele $\rightarrow C$; a; b. ② a-val párhuzamos m_a távolságra $\rightarrow e$. ③ $e \cap b = A$. ④ C középpontú CA sugarú kör $\rightarrow k_C$. ⑤ $k_C \cap a = B$. Bármely $0° < \gamma < 180°$ esetén egyértelműen megoldható. *b)* A szerkesztés: ① m_a szakasz felvétele $\rightarrow A$; T pontok. ② T-ben merőleges AT-re $\rightarrow a$. ③ A középpontú, c sugarú kör $\rightarrow k_A$. ④ $k_A \cap a = B$. ⑤ AB felező merőlegese f_{AB}. ⑥ $f_{AB} \cap a = C$. Nincs megoldás, ha $c \leq m_a$. Minden más esetben két tengelyesen szimmetrikus megoldás van (a tengely az AT egyenes).

606. A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú k kör, benne c hosszúságú húr $\rightarrow A$; B. ② m_c távolságra AB-vel párhuzamos egyenespár $\rightarrow e_1$; e_2. ③ $k \cap e_i = C_i$. Nincs megoldás, ha $c > 2R$ vagy $k \cap e_i = \emptyset$. Más esetekben 0; vagy egyetlen egyenlő szárú háromszög; vagy két egybevágó háromszög; két egybevágó és egy harmadik egyenlő szárú háromszög vagy két-két egybevágó háromszög lehet a megoldás.

607. A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú k kör, benne c hosszú húr $\rightarrow A$; B. ② A-ban AB szárra α szög felvétele $\rightarrow b$ félegyenes. ③ $b \cap k = C$. Nincs megoldás, ha $c > 2r$ vagy b félegyenes A-ban érinti vagy elkerüli a kört. Minden más esetben egy megoldás van.

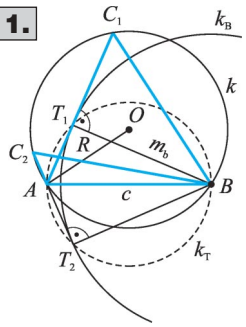
608. A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú k kör, benne c hosszúságú húr $\rightarrow A$; B. ② AB felezéspontja F. ③ F középpontú s_c sugarú kör $\rightarrow k_F$. ④ $k_F \cap k = C$. Nincs megoldás, ha $c > 2R$ vagy $k_F \cap k = \emptyset$. Minden más esetben vagy két egybevágó háromszög vagy egy egyenlő szárú háromszög lesz a megoldás.

609. Felhasználjuk: a Thalész-tétel miatt a szerkesztendő háromszög átfogója a köré írt kör átmérője. *a)* A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú kör, benne AB átmérő. ② A-ban AB szárra α szög felvétele $\rightarrow b$ félegyenes. ③ $b \cap k = C$. A feladat mindig egyértelműen megoldható. *b)* A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú kör, benne AB átmérő. ② m_c távolságra párhuzamos AB-vel $\Rightarrow e_1$, e_2. ③ $e_i \cap k = C_i$. 4 darab egybevágó megoldás van, ha $m_c < R$, 2 darab egybevágó egyenlő szárú megoldás van, ha $m_c = R$, nincs megoldás, ha $m_c > R$.

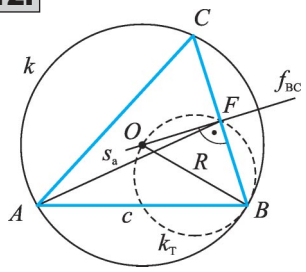
610. *a)* A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú k kör, benne c hosszúságú húr $\rightarrow A$; B. ② AB felező merőlegese f_{AB}. ③ $f_{AB} \cap k = C_i$. 0; 1 vagy két megoldás lehetséges. *b)* A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú kör $\rightarrow k$. ② $C \in k$ a kör tetszőleges pontja. ③ C középpontú a sugarú kör $\rightarrow k_C$. ④ $k_C \cap k = \{A; B\}$. Nincs megoldás, ha $a \geq 2R$, egy megoldás van, ha $a < 2R$. *c)* A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú kör $\rightarrow k$. ② $C \in k$ a kör tetszőleges pontja. ③ CO egyenesre m_c szakasz felvétele $\rightarrow F$. ④ F-ben merőleges CF-re $\rightarrow c$. ⑤ $c \cap k = \{A; B\}$. Nincs megoldás, ha $m_c \geq 2R$, egy megoldás van, ha $m_c < 2R$. *d)* A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú kör $\rightarrow k$. ② $C \in k$ a kör tetszőleges pontja. ③ CO átmérő egyenese. ④ C-ben CO-ra $\frac{\gamma}{2}$ és $\left(-\frac{\gamma}{2}\right)$ szög felvétele $\rightarrow a$ és b félegyenesek. ⑤ $b \cap k = A$, $a \cap k = B$. $\gamma < 180°$ esetén egyértelműen megoldható.

I

611.



612.



611. A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú k kör, benne c hosszúságú húr $\rightarrow A$; B. ② AB Thalész köre k_T. ③ B középpontú m_b sugarú kör $\rightarrow k_B$. ④ $k_B \cap k_T = T_i$. ⑤ $A\,T_i \cap k = C_i$. Nincs megoldás, ha $c > 2R$ vagy $m_b > c$; egy megoldás van, ha $m_b = c$; két megoldás, ha $m_b < c$.

612. A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú k kör, benne c hosszúságú húr $\rightarrow A$; B. ② $O \in f_{BC}$ miatt F rajta van OB Thalész körén $\rightarrow k_T$. ③ A középpontú s_a sugarú kör $\rightarrow k_A$. ④ $k_A \cap k_T = F$. ⑤ $BF \cap k = C$. Nincs megoldás, ha $c > 2R$ vagy $k_A \cap k_T = \emptyset$. Minden más esetben vagy 1 vagy 2 megoldás van.

613. Felhasználjuk: a súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja. A szerkesztés: ① c; $\frac{2}{3}s_a$; $\frac{2}{3}s_b \rightarrow ABS\triangle$. ② AS-re A-ból s_a távolság $\rightarrow F_1$. ③ BS-re B-ből s_b távolság $\rightarrow F_2$. ④ $e(A;F_1) \cap e(B;F_2) = C$. Nincs megoldás, ha az $ABS\triangle$-re nem teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek.

614. A szerkesztés: ① c hosszúságú szakasz felvétele $\rightarrow A$; B. ② m_c távolságra párhuzamos AB-vel $\rightarrow g$ egyenes. ③ AB felezéspontja F. ④ F középpontú s_c sugarú kör $\rightarrow k_F$. ⑤ $k_F \cap g = C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehetséges.

615. A szerkesztés: ① $\frac{c}{2}$; s_c; $b \rightarrow AFC\triangle$. ② $A \xrightarrow{F\text{-re tükrözés}} B$. Nincs megoldás, ha az $AFC\triangle$-re nem teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek.

616. A szerkesztés: ① $\frac{c}{2}$; α; $s_c \rightarrow AFC\triangle$. ② $A \xrightarrow{F\text{-re tükrözés}} B$. Egyértelműen megoldható, ha $s_c > \frac{c}{2}$ (két oldal és a hosszabbikkal szemben fekvő szög adott az $AFC\triangle$-ben). 0; 1 vagy 2 megoldást kaphatunk, ha $s_c \leq \frac{c}{2}$.

617. A szerkesztés: ① c hosszúságú szakasz $\rightarrow A$, B. ② AB-re A-ban α szög felvétele $\rightarrow b$. ③ α szög felezése, majd a szögfelezőre f_α távolság $\rightarrow P$. ④ $e(B;P) \cap b = C$. Nincs megoldás, ha BP párhuzamos b-vel.

618. A szerkesztés: ① m_a hosszúságú szakasz felvétele $\rightarrow A$; T. ② T-ben merőleges AT-re $\rightarrow f$. ③ A középpontú s_a sugarú kör $\rightarrow k_1$. ④ $k_1 \cap f = F$. ⑤ A középpontú c sugarú kör $\rightarrow k_2$. ⑥ $k_2 \cap f = B$. ⑦ $B \xrightarrow{F\text{-re tükrözés}} C$. Nincs megoldás, ha $m_a > s_a$ vagy $m_a > c$. 1 egyenlő szárú háromszöget kapunk, ha $m_a = s_a$ és $c > m_a$. 2–2 egybevágó megoldást kapunk, ha $m_a < s_a < c$ vagy $m_a < c < s_a$.

619. A szerkesztés: ① m_a hosszúságú szakasz $\to A$; T. ② T-ben merőleges AT-re $\to f$. ③ A középpontú f_α sugarú kör $\to k_A$. ④ $k_A \cap f = P$. ⑤ AP-re A-ban $\frac{\alpha}{2}$ és $\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$ szög felvétele $\to b$ és c félegyenesek. ⑥ $b \cap f = C$ és $c \cap f = B$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

620. A szerkesztés: ① m_a hosszúságú szakasz $\to A$; T. ② T-ben merőleges AT-re $\to f$. ③ A középpontú f_α sugarú kör $\to k_1$. ④ $k_1 \cap f = P$. ⑤ A középpontú b sugarú kör $\to k_2$. ⑥ $k_2 \cap f = C$. ⑦ $PAC\sphericalangle$ ellentettjét A-ban AP-re felmérni $\to c$ félegyenes. ⑧ $c \cap f = B$. 0 vagy 1 egyenlő szárú háromszög vagy 2 egybevágó háromszög vagy 2-2 egybevágó háromszög lehet a megoldás.

621. A szerkesztés: ① m_a hosszúságú szakasz $\to A$; T. ② T-ben merőleges AT-ra $\to a$. ③ A középpontú c sugarú kör $\to k_A$. ④ $k_A \cap a = B$. ⑤ $ABT\sphericalangle = \beta$ szögfelező félegyenese f. ⑥ f-re B-ből f_β felvétele $\to P$. ⑦ $e(P; A) \cap e(B; T) = C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehetséges.

622. A szerkesztés: ① γ szög felvétele $\to C$; a; b. ② a-val párhuzamos m_a távolságra $\to f$. ③ $f \cap b = A$. ④ γ szögfelező félegyenesére C-ből f_γ hosszú szakasz $\to P$. ⑤ $e(A; P) \cap a = B$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

623. Felhasználjuk: a súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja. A szerkesztés: ① $\frac{c}{2}$; $\frac{s_c}{3}$; $\frac{2s_a}{3} \to AF_1S\triangle$. ② F_1S-re S-ből F_1-gyel ellentétes oldalra $\frac{2s_c}{3}$ szakasz $\to C$. ③ A tükörképe F_1-re B. Nincs megoldás, ha az $AF_1S\triangle$-re nem teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek.

624. Tükrözzük az $SBC\triangle$-et az F_a felezéspontra $\to S'CB\triangle$; $SS' = 2SF_a = \frac{2}{3}s_a$; $S'B = SC = \frac{2}{3}s_c$; $SB = \frac{2}{3}s_b$. A szerkesztés: ① $\frac{2}{3}s_a$; $\frac{2}{3}s_b$; $\frac{2}{3}s_c \Rightarrow SS'B\triangle$. ② Tükrözzük S'-t S-re $\to A$. ③ AB szakasz felezőpontja $\to F_c$. ④ SF_c-re S-ből indulva F_c-vel ellentétes oldalon $\frac{2}{3}s_c$ felvétele $\to C$. Nincs megoldás, ha $SS'B\triangle$-re nem teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek.

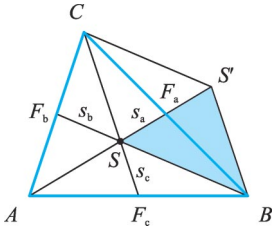
625. A szerkesztés: ① m_a hosszúságú szakasz $\to A$, T_a. ② T_a-ban merőleges AT_a-ra $\to a$. ③ A középpontú c sugarú kör $\to k_A$. ④ $k_A \cap a = B$. ⑤ m_c távolságra párhuzamos AB-vel $\to f$. ⑥ $f \cap a = C$. Nincs megoldás, ha $c < m_a$, két egybevágó háromszög lehet, ha $c = m_a$ és két-két egybevágó háromszög akkor, ha $c > m_a$.

626. A szerkesztés: ① AB szakasz Thalész köre $\to k_T$. ② $e(A; P) \cap k_T = C_2$; $e(B; P) \cap k_T = C_1$. 0; 1 vagy 2 megoldás van.

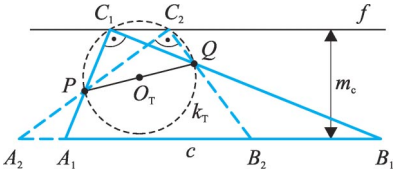
627. A szerkesztés: ① PQ Thalész köre $\to k_T$. ② m_c távolságra párhuzamos c-vel $\to f$. ③ $f \cap k_T = C$. ④ $e(C; P) \cap c = A$; $e(C; Q) \cap c = B$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

628. A szerkesztés: ① PQ Thalész köre $\to k_T$. ② $k_T \cap k = M_i$. ③ $e(M_i; P) \cap k = N_i$; $e(M_i; Q) \cap k = R_i$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

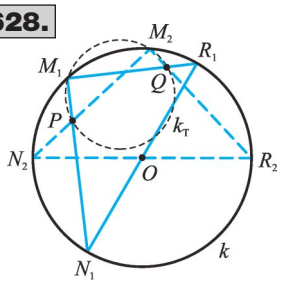
624.



627.



628.



I

629. *a)* A szerkesztés: ① O_0 középpontú r_0 sugarú kör $\rightarrow k$. ② k átmérő egyenese $\rightarrow g$; $g \cap k = F$. ③ F-ben merőleges g-re $\rightarrow e$. ④ F-ből mindkét irányba $\frac{c}{2}$ hosszú szakasz felvétele az e egyenesen $\rightarrow A$; B. ⑤ A-ból érintő k-hoz $\rightarrow f$. ⑥ $g \cap f = C$. Nincs megoldás, ha $c \leq 2r_0$. *b)* A szerkesztés: ① γ-szög felvétele $\rightarrow C$; f; g. ② γ szögfelezője $\rightarrow f_\gamma$. ③ r_0 távolságra párhuzamos g-vel $\rightarrow e$. ④ $e \cap f_\gamma = O_o$. ⑤ O_o középpontú r_0 sugarú kör $\rightarrow k$. ⑥ k-nak f_γ-val való C-től távolabbi metszéspontja $\rightarrow F$. ⑦ F-ben merőleges f_γ-ra $\rightarrow h$. ⑧ $h \cap f = A$; $h \cap g = B$. Minden $\gamma < 180°$ esetén egyértelműen megoldható.

630. A szerkesztés: ① Az O_c középpontú r_c sugarú kör és az O_0 középpontú r_0 sugarú kör egymást kívülről érintő körök $\rightarrow k_0$ és k_c. ② k_0 és k_c közös érintői $\rightarrow f; g; h$. ③ $f \cap g = C$; $h \cap f = A$; $h \cap g = B$. Nincs megoldás, ha $r_0 \geq r_c$. Egyébként 1 megoldás van.

631. C-t középpontosan tükrözzük AB felezőpontjára, F-re $\rightarrow C' \Rightarrow ACBC'$ paralelogramma. A szerkesztés: ① a; b; $2s_c \rightarrow ACC'\triangle$. ② CC' felezőpontja: F. ③ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\rightarrow B$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

632. A-t középpontosan tükrözzük CB felezőpontjára, F-re $\rightarrow A' \Rightarrow ABA'C$ paralelogramma $\Rightarrow ABA' \sphericalangle = 180° - \alpha$. *a)* A szerkesztés: ① c; $2s_a$; $180° - \alpha \rightarrow ABA'\triangle$. ② AA' felezőpontja: F. ③ B-t középpontosan tükrözzük F-re $\rightarrow C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

b) A szerkesztés: ① c; $2s_a$; $m_c \rightarrow ABA'\triangle$. ② AA' felezőpontja: F. ③ B-t középpontosan tükrözzük F-re $\rightarrow C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

633. A szerkesztés: ① s_a; m_a; $90° \rightarrow AFT\triangle$. ② A középpontú, c sugarú kör: k_A. ③ $k_A \cap e(T; F) =$ $= B$. ④ B-t középpontosan tükrözzük F-re $\rightarrow C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

634. A-t középpontosan tükrözzük CB felezőpontjára, F-re $\rightarrow A' \Rightarrow ABA'C$ paralelogramma. A szerkesztés: ① m_b hosszúságú szakasz: BT. ② B-ben és T-ben merőleges BT-re: e és f. ③ B középpontú, c sugarú kör: k_C. ④ $k_C \cap f = A$. ⑤ A középpontú, $2s_a$ sugarú kör: k_A. ⑥ $k_A \cap e = A'$. ⑦ AA' felezőpontja: F. ⑧ B-t középpontosan tükrözzük F-re $\rightarrow C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

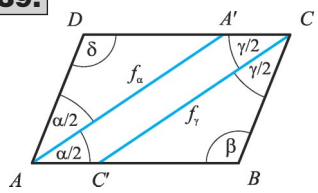
Négyszögek

Paralelogrammák

635. $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$, vagyis $2\alpha + 2\beta = 360°$, azaz $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \beta' = \alpha \Rightarrow AD \parallel BC$ és $AB \parallel DC \Rightarrow ABCD$ paralelogramma.

636. $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \beta' = \alpha \Rightarrow AD \parallel BC$ és $\alpha + \delta = 180° \Rightarrow \delta' = \alpha \Rightarrow AB \parallel CD$. A fentiekből következik, hogy $ABCD$ paralelogramma.

639.

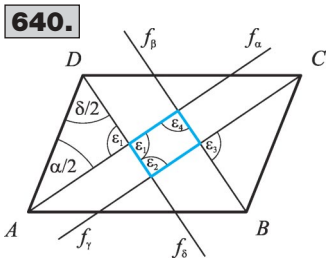


637. $\gamma = \alpha \Rightarrow \gamma = 72°$ és $\delta = \beta \Rightarrow \delta = 108°$. Lehet rombusz, ha oldalai egyenlő hosszúak.

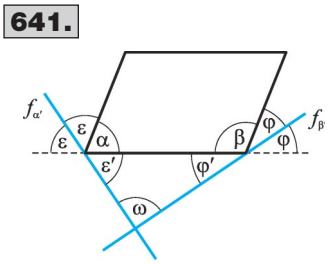
638. $\alpha + \beta = 180°$ és $\alpha + 12{,}8° = \beta \Rightarrow 2\alpha + 12{,}8° = 180° \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha = 83{,}6° = \gamma$ és $\beta = 96{,}4° = \delta$.

639. $AA'D \sphericalangle = 180° - \delta - \alpha/2 = \alpha - \alpha/2 = \alpha/2$ és $\alpha/2 =$ $= \gamma/2 \Rightarrow f_\alpha$ és f_γ egyenlő szöget zár be DC-vel, irányításuk is azonos. $\Rightarrow$ Ha $A' \neq C$, akkor $f_\alpha \parallel f_\gamma$, ha $A' \equiv C$, akkor $f_\alpha \equiv f_\gamma$.

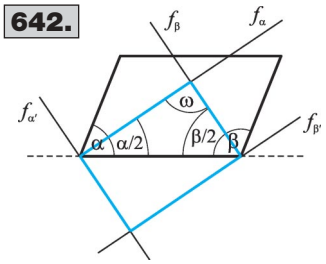
640.



641.



642.



640. **1. eset:** A belső szögfelezők négyszöget határolnak. $\varepsilon_1 = 180° - \alpha : 2 - \delta : 2 = 180° - (\alpha + \beta) : 2 = 180° - 180° : 2 = 90°$. $\varepsilon_2 = 180° - \delta : 2 - \gamma : 2 = 90°$ és $\varepsilon_3 = 180° - \beta : 2 - \gamma : 2 = 90° \Rightarrow \varepsilon_4 = 90° \Rightarrow$ A négyszög téglalap.
2. eset: f_α és f_γ egybeesik, ezért AC szimmetriatengely $\Rightarrow ABCD$ rombusz $\Rightarrow f_\beta$ és f_δ is átló lesz $\Rightarrow$ A szögfelezők egy ponton haladnak át.

641. A külső szögfelezők mindig meghatároznak egy négyszöget. $2\varepsilon + \alpha = 180° \Rightarrow \varepsilon = (180° - \alpha) : 2$ és $\varepsilon' = \varepsilon$, mert csúcsszögek. $2\varphi + \beta = 180° \Rightarrow \varphi = (180° - \beta) : 2$ és $\varphi' = \varphi$, mert csúcsszögek. $\varepsilon' + \varphi' = (180° - \alpha) : 2 + (180° - \beta) : 2 = (360° - (\alpha + \beta)) : 2 = (360° - 180°) : 2 = 90° \Rightarrow \omega = 90°$. Hasonlóan belátható, hogy bármely két szomszédos külső szögfelező szöge 90°.

642. **1. eset:** Szomszédos csúcsok szögfelezői $\Rightarrow$ mindig létrejön négyszög. $\alpha : 2 + \beta : 2 = (\alpha + \beta) : 2 = 90° \Rightarrow \omega = 180° - 90° = 90°$. $f_\alpha \perp f_\alpha'$ és $f_\beta \perp f_\beta' \Rightarrow$ A négyszög minden szöge 90°. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Téglalap.

2. eset: Átellenes csúcsok szögfelezői. ① Ha a paralelogramma rombusz, akkor $f_\alpha \equiv f_\gamma \Rightarrow$ nincs négyszög. ② Ha a paralelogramma nem rombusz, akkor $f_\alpha \neq f_\gamma \Rightarrow f_\alpha \parallel f_\gamma$ és $f_\alpha \perp f_{\alpha'} \Rightarrow f_\gamma \perp f_{\alpha'}$ és $f_\gamma \perp f_{\gamma'} \Rightarrow f_\alpha \perp f_{\gamma'} \Rightarrow$ a négyszög minden szöge derékszög, ezért téglalap.

643. *a)* A paralelogramma szemközti oldalai egyenlők. $\Rightarrow$ A két paralelogramma oldalai megegyeznek, $\beta_1 = 180° - \alpha = \beta_2 \Rightarrow$ A két paralelogramma szögei megegyeznek. $\Rightarrow$ Egybevágók.
b) Két oldal és egy átló egy háromszöget alkot, amelyek a két paralelogrammában egybevágók. A paralelogrammát átlója két középpontosan szimmetrikus háromszögre bontja. Az egybevágó háromszögekből azonos eljárással egybevágó paralelogrammákat kapunk.
c) a; $e/2$; $f/2$ egyértelműen meghatároz egy háromszöget. Ennek a háromszögnek a tükörképe az átlók metszéspontjára egyértelműen meghatározza a paralelogrammát.
d) $e/2$; $f/2$; ε egyértelműen meghatároz egy háromszöget. Ennek a háromszögnek a tükörképe az átlók metszéspontjára egyértelműen meghatározza a paralelogrammát.

644. *a)* Igen. *b)* Igen. Egyenlő szárú háromszöget tükrözünk valamelyik szár felezőpontjára. *c)* Igen. Egyenlő oldalú háromszöget tükrözünk valamelyik oldal felezőpontjára. *d)* Ha $a = e$ vagy $b = e$, akkor az a; b; e oldalú háromszögben két 90°-os szög lenne, ami nem lehet. Nincs ilyen téglalap.

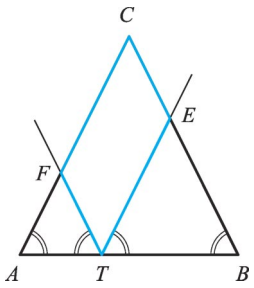
645. M az $ABCD$ paralelogramma tükörközéppontja, az M-en áthaladó egyenes AB-t E-ben, CD-t F-ben metszi. E és F, A és C, illetve B és D egymás tükörképei, ezért $AEFD$ négyszög tükörképe $CFEB$ négyszög és a középpontos tükrözés egybevágósági transzformáció.

646. *a)* Tengelyesen szimmetrikus paralelogrammák: rombuszok, téglalapok, négyzetek.
b) Minden paralelogramma középpontosan szimmetrikus.

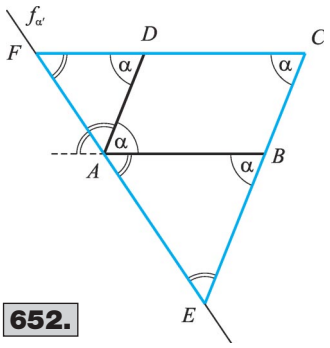
647. Az átlók M metszéspontján áthaladó egyenes AB-t E-ben, CD-t F-ben metszi. M-re vonatkozó középpontos szimmetria miatt: $AE = 7$ cm $\Rightarrow FC = 7$ cm $\Rightarrow DF = 4{,}5$ cm $\Rightarrow EB = 4{,}5$ cm $\Rightarrow AB = AE + EB = 7$ cm $+ 4{,}5$ cm $\Rightarrow$ $\underline{\underline{AB = 11{,}5 \text{ cm}}}$.

648. Legyen AB felezőpontja E; CD felezőpontja F és az FE középvonal és az AC átló metszéspontja M. $AME\sphericalangle = FMC\sphericalangle$, mert csúcsszögek, valamint $MAE\sphericalangle = MCF\sphericalangle$, mert váltószögek, így $AEM\triangle$ és $MCF\triangle$ szögei egyenlők. $AE = AB/2 = DC/2 = FC \Rightarrow AEM\triangle \cong FCM\triangle \Rightarrow$

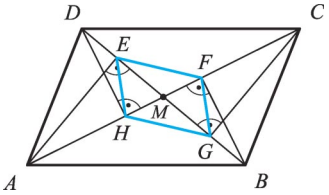
I



651.



652.



654.

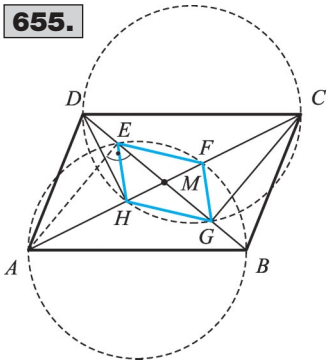
$\Rightarrow AM = MC \Rightarrow M$ az átló felezőpontja, ami az átlók metszéspontja. Hasonlóan megmutatható, hogy GH is átmegy M-en.

649. $AC \cap DB = M$; $AE \cap DB = G$; $AF \cap DB = H$. $ABCD$ paralelogramma $\Rightarrow MD = MB$ és $AM = MC$. $ACD\triangle$-ben AF és DM súlyvonalak $\Rightarrow H$ az $ACD\triangle$ súlypontja, ezért az alábbiak érvényesek: $DH = \frac{2}{3} DM = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} DB = \frac{1}{3} DB$; $HM = \frac{1}{3} DM = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} DB = \frac{1}{6} DB$. Az $ABC\triangle$-ről hasonlóan belátható, hogy $GB = \frac{1}{3} DB$ és $MG = \frac{1}{6} DB \Rightarrow \underline{\underline{DH = HG = GB}}$.

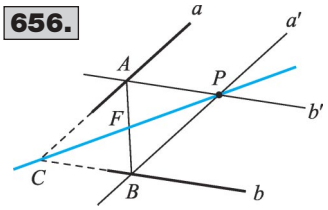
650. Legyen $AC \cap BD = M$ és $AE \cap BD = S$. $AM = MC$ és $BE = EC \Rightarrow BCA\triangle$-ben AE és BM súlyvonalak, ezért harmadolják egymást, vagyis $2ES = AS$ és $2MS = BS$. $\underline{DS} = DM + MS = BM + MS = BS + 2MS = \underline{\underline{2BS}}$.

651. $TECF$ paralelogramma, ezért $TE = FC$ és $TF = EC$. $TF \parallel BC \Rightarrow FTA\sphericalangle$ és $CBA\sphericalangle$ egyállásúak, ezért egyenlők. $\Rightarrow AF = FT \Rightarrow K_{TECF} = 2 \cdot (TF + TE) = 2 \cdot (AF + FC) = 2AC$, ami független T helyzetétől.

655.



656.



652. Az ábrán egyformán jelölt szögek egyenlők (egyállásúak, váltószögek, csúcsszögek). Az $ECF\triangle$ szögeiből tudjuk, hogy egyenlő szárú: $EC = FC$. $AEB\triangle$ is egyenlő szárú: $EB = AB$. $\Rightarrow EC = EB + BC = AB + BC$, vagyis a keresett szár hossza a paralelogramma kerületének fele.

653. Legyen a magasság talppontja T. $AT = TB \Rightarrow AD = BD \Rightarrow \underline{\underline{BD = 5\,\text{cm}}}$.

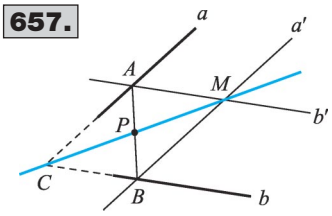
654. **1. eset:** $ABCD$ nem rombusz. M az $ABCD$ paralelogramma szimmetria-középpontja. $\Rightarrow AMD\triangle \cong CMB\triangle$. E, H, illetve F, G a háromszögek magasságainak talppontjai $\Rightarrow E$ tükörképe M-re G, H tükörképe M-re $F \Rightarrow EFGH$ középpontosan szimmetrikus négyszög, azaz paralelogramma. **2. eset:** Ha $ABCD$ rombusz, akkor E; F; G; H mind azonos M-mel.

655. **1. eset:** $ABCD$ nem rombusz. Szerkesszünk köröket AB és CD, mint átmérő fölé. Ezek Thalész-körök, amik szimmetrikusak M-re. E tükörképe M-re G, H tükörképe M-re $F \Rightarrow$ $\Rightarrow EFGH$ középpontosan szimmetrikus négyszög, azaz paralelogramma. **2. eset:** Ha $ABCD$ rombusz, akkor a Thalész-körök M-ben metszik az átlókat.

656. $a \parallel a'$ és $b \parallel b' \Rightarrow a$, a', b, b' egy paralelogrammát fog közre, amelynek AB és CP átlói felezik egymást. Az eljárás kivitelezhető, ha A és B a papírra esik, különben nem.

657. a középpontos tükörképe P-re $a' \Rightarrow a \parallel a'$ és b középpontos tükörképe P-re $b' \Rightarrow b \parallel b'$ és $a' \cap b' = M \Rightarrow a,\ a',\ b,\ b'$ egy paralelogrammát fog közre, amelynek C-be futó átlója PM. Az eljárás kivitelezhető, ha M a papírra esik, különben nem.

657.



658. $ABCD$ paralelogrammát szerkesztjük. *a)* A szerkesztés: ① a; b; $\alpha \to ABD\triangle$. ② DB felezőpontja: F. ③ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. Egyértelmű a megoldás.
b) A szerkesztés: ① b; m_a; $90° \to ADT\triangle$. ② A-ból AT-re a hosszúságú szakasz $\to B$. ③ BD felezőpontja: F. ④ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. 0 vagy 1 megoldás lehet.
c) A szerkesztés: ① a; b; $e \to ADB\triangle$. ② BD felezőpontja: F. ③ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

659. $ABCD$ paralelogrammát szerkesztjük. *a)* A szerkesztés: ① a; m_a; $\alpha \to ABD\triangle$. ② BD felezőpontja: F. ③ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. Egyértelmű a megoldás. *b)* A szerkesztés: ① a; m_b; $90° \to DCT\triangle$. ② DC-vel párhuzamos m_a távolságra $\to e$. ③ $e \cap e(C; T) = B$. ④ BD felezőpontja: F. ⑤ C-t középpontosan tükrözzük F-re $\to A$. 0 vagy 1 megoldás lehet.
c) A szerkesztés: ① a; $e/2$; $f/2 \to ABF\triangle$. ② AB-t középpontosan tükrözzük F-re $\to CD$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

660. *a)* A szerkesztés: ① $e/2$; $f/2$; $\varepsilon \to MBC\triangle$. ② BC-t középpontosan tükrözzük M-re $\to$ $\to DA$. Egyértelmű a megoldás.
b) A szerkesztés: ① e; m; $90° \to BDT\triangle$. ② BD felezőpontja M. ③ M középpontú, $f/2$ sugarú kör: k. ④ $k \cap e(B; T) = A$. ⑤ A-t középpontosan tükrözzük M-re $\to C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

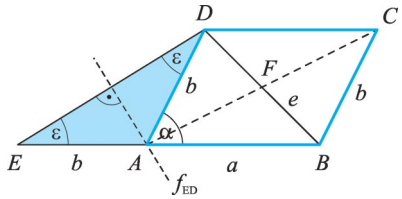
661. *a)* A szerkesztés: ① a; e; $\varphi \to ABD\triangle$. ② BD felezőpontja: F. ③ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. Egyértelmű a megoldás.
b) A szerkesztés: ① a; e; $m_a \to ABD\triangle$. ② BD felezőpontja: F. ③ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.
c) A szerkesztés: ① m_a; m_b; $\varepsilon \to DT_aT_b\triangle$. ② D-ben és T_a-ban merőleges DT_a-ra, D-ben és T_b-ben merőleges DT_b-re. ③ A merőlegesek metszéspontjai adják a paralelogramma csúcsait. Egyértelmű a megoldás.
d) A szerkesztés: ① m_a; e; $90° \to DT_aB\triangle$. ② BD felezőpontja: F. ③ FB szárú, F csúcsú φ szög $\to$ $\to g$. ④ $g \cap e(T_a; B) = A$. ⑤ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

662. A szerkesztés: ① HF. ② HF felezőpontja: M. ③ HF-et eltoljuk $\overrightarrow{ME}$-ral: DA. ④ HF-et eltoljuk $\overrightarrow{EM}$-ral: CB. 0 vagy 3 megoldás lehet.

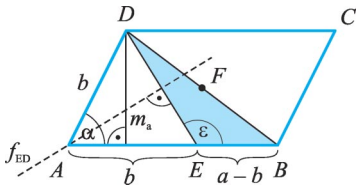
663. Hosszabbítsuk meg AB-t az A-n túl b-vel, E-t kapjuk. α külső szög, ezért $\alpha = 2\varepsilon$. A szerkesztés: ① $\alpha/2$; $a + b$; $e \to EBD\triangle$. ② ED felezőmerőlegese: f_{ED}. ③ $f_{ED} \cap e(E; B) = A$. ④ BD felezőpontja: F. ⑤ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

664. $E \in AB$ úgy, hogy $AE = b$ legyen. $\varepsilon = 90° + \alpha/2$. A szerkesztés: ① ε; $a - b$; $m_a \to DEB\triangle$. ② ED felezőmerőlegese: f_{ED}. ③ $f_{ED} \cap e(E; B) = A$. ④ BD felezőpontja: F. ⑤ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. Egyértelmű a megoldás.

663.

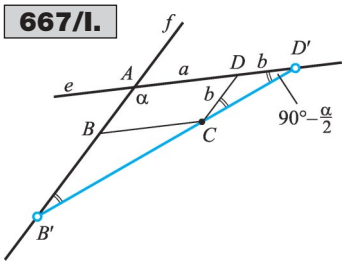


664.

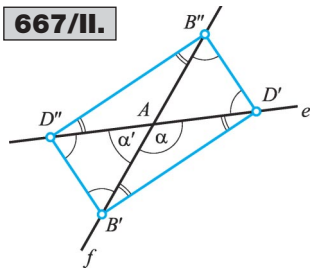


I

667/I.



667/II.



665. Legyen a paralelogrammák közös oldala AB. K középpont az átlók felezéspontja, ezért K az AB egyenestől $m/2$ távolságra van. $\Rightarrow$ K az AB-vel párhuzamos, $m/2$ távolságra lévő egyenesek valamelyikén van. Ezen egyenesek minden pontjához tartozik paralelogramma. $\Rightarrow$ A keresett ponthalmaz az AB-vel párhuzamos, $m/2$ távolságra lévő két egyenes.

666. Legyen a paralelogrammák közös oldala AB, közös oldalegyenese d (AD egyenes). D csúcs a d egyenes minden A-tól különböző pontja lehet. $\Rightarrow$ C csúcs a B-n áthaladó d-vel párhuzamos c egyenesen van. $\Rightarrow$ K rajta van c és d középpárhuzamosán, e-n. $e \cap AB = F$. e-nek minden F-től különböző pontja egyértelműen meghatároz egy paralelogrammát. $\Rightarrow$ A keresett ponthalmaz az e egyenes az F pont kivételével.

667. Legyen a paralelogrammák közös oldalegyenese e és f; $k = 2(a + b) =$ állandó $\Rightarrow k : 2 = a + b$. $D' \in e(A; D)$ és $AD' = a + b \Rightarrow DD' = DC \Rightarrow DD'C\sphericalangle = DCD'\sphericalangle = 90° - \alpha : 2$. $\Rightarrow$ C egy olyan egyenlő szárú háromszög alapján mozog, amelynek alappal szemközti csúcsa az egyenesek metszéspontja, szára $k : 2$. (Az alap két végpontja nem jó.) Hasonlóan járhatunk el az e és f által határolt többi szögtartományban is. $\alpha + \alpha' = 180° \Rightarrow AB'D'\sphericalangle + AB'D''\sphericalangle = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow B'D'B''D''$ téglalap. A keresett ponthalmaz egy olyan téglalap határvonala (kivéve a téglalap csúcsait), melynek k hosszúságú átlói az adott egyeneseken helyezkednek el és az egyenesek metszéspontjában találkoznak.

Deltoidok, rombuszok

668. Az átlók felezik a rombusz szögeit. $2\varepsilon = \alpha \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon = 19°}}$ és $\underline{\varphi} = (180° - \alpha) : 2 = \underline{\underline{71°}}$.

669. $\varepsilon = 42°$. $\varepsilon + \varphi = 90° \Rightarrow \varphi = 48°$. A rombusz szögei 2ε és 2φ nagyságúak, azaz $\underline{\underline{84°}}$ és $96°$.

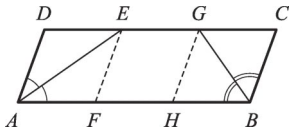
670. Az $ABCD$ rombusz B csúcsából induló m magassága felezi AD-t. $\Rightarrow$ m szimmetriatengely $DAB\triangle$-ben $\Rightarrow AB = BD = a \Rightarrow DAB\triangle$ szabályos $\Rightarrow$ a rombusz szögei: $60°$ és $120°$.

671. Legyen az $ABCD$ rombusz A-nál lévő szöge $60°$. $ABD\triangle$ egyenlő oldalú $\Rightarrow \underline{\underline{e = 12\text{ cm}}}$.

672. Legyen az $ABCD$ rombusz D-ből induló magasságának talppontja az AB oldalon T.
$12\text{ cm} = k = 4a \Rightarrow a = 3\text{ cm}$ és $m_a = 1{,}5\text{ cm} \Rightarrow ATD$ derékszögű háromszögben $\alpha = 30° \Rightarrow$ a rombusz szögei: $30°$ és $150°$.

673. *a)* Az átlók merőlegesen felezik egymást. $\Rightarrow$ Mindkét átló szimmetriatengely. $\Rightarrow$ A paralelogramma oldalai egyenlők. $\Rightarrow$ A paralelogramma rombusz. *b)* A szöget felező átló szimmetriatengely. $\Rightarrow a = b \Rightarrow$ A paralelogramma rombusz.

674.



674. Legyen $EF \parallel BC$. $\Rightarrow AFED$ paralelogramma, átlója szögfelező. $\Rightarrow AFED$ rombusz. $\Rightarrow DE = AD = \underline{\underline{3\text{ cm}}}$. Hasonlóan: $GC = BC = \underline{\underline{3\text{ cm}}}$. $EG = DC - DE - GC = \underline{\underline{3\text{ cm}}}$.

675. Legyen $AB = 2AD$ és $f_\alpha \cap CD = E$. Az E-n át húzott AD-vel párhuzamos egyenes F-ben metszi AB-t. $EF \parallel AD \Rightarrow AFED$ olyan paralelogramma, aminek az átlója szögfelező. $\Rightarrow AFED$ rombusz.

$\Rightarrow AD = DE = a \Rightarrow E$ felezőpontja DC-nek. Hasonlóan megmutatható, hogy a B-ből induló szögfelező is felezi a DC oldalt.

676. Legyen $f_\alpha \cap f_\beta = M \in DC$. Az M-en át húzott AD-vel párhuzamos egyenes N-ben metszi AB-t. Legyen $MN \parallel AD \parallel BC$. AM szimmetriatengelye $ANMD$-nek. $\Rightarrow ANMD$ rombusz. $\Rightarrow$ $\Rightarrow AD = DM$. BM szimmetriatengelye $NBCM$-nek. $\Rightarrow NBCM$ rombusz. $\Rightarrow MC = CB$; $DM = AD =$ $= BC = MC \Rightarrow DC = DM + MC = 2AD$.

677. Legyen az $ABCD$ rombusz átlóinak metszéspontja M. *a)* $a_1 = a_2$ és $\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow A_1B_1D_1\triangle \cong$ $\cong A_2B_2D_2\triangle$ és $A_1B_1D_1\triangle \cong C_1B_1D_1\triangle$, illetve $A_2B_2D_2\triangle \cong C_2B_2D_2\triangle \Rightarrow A_1B_1C_1D_1 \cong A_2B_2C_2D_2$. *b)* $D_1M_1 = D_2M_2$ és $A_1M_1 = A_2M_2$ és $D_1M_1A_1\sphericalangle = D_2M_2A_2\sphericalangle = 90^\circ \Rightarrow D_1M_1A_1\triangle \cong D_2M_2A_2\triangle \Rightarrow$ Az átlók négy egybevágó háromszögre bontják a rombuszt. $\Rightarrow$ A két rombusz egybevágó.
c) $a_1 = a_2$ és $e_1 = e_2 \Rightarrow A_1B_1D_1\triangle \cong A_2B_2D_2\triangle \Rightarrow$ A két rombusz egybevágó.

678. *a)* A szerkesztés: ① a; a; $\alpha \rightarrow ABD\triangle$. ② A-t tengelyesen tükrözzük BD-re: C. Egyértelmű a megoldás.
b) A szerkesztés: ① $e/2$; $f/2$; $90^\circ \rightarrow ABM\triangle$. ② A-t középpontosan tükrözzük M-re: C. ③ B-t középpontosan tükrözzük M-re: D. Egyértelmű a megoldás.
c) A szerkesztés: ① a hosszúságú szakasz: AD. ② AD-vel párhuzamos egyenes m távolságra: g. ③ A középpontú, a sugarú kör: k. ④ $k \cap g = B$. ⑤ BD felezőmerőlegese: f_{BD}. ⑥ $f_{BD} \cap g = C$. 0; 1 négyzet vagy 2 egybevágó rombusz a megoldás.
d) A szerkesztés: ① α szög $\rightarrow A$; h; j. ② h-val párhuzamos m távolságra: g. ③ $j \cap g = B$. ④ A középpontú, AB sugarú kör: k. ⑤ $k \cap h = D$. ⑥ BD felezőmerőlegese: f_{BD}. ⑦ $f_{BD} \cap g = C$. Egyértelmű a megoldás.

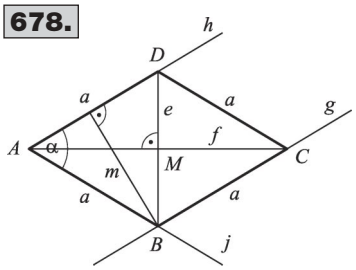
679. A szerkesztés: ① A-t középpontosan tükrözzük K-ra: C. ② AC felezőmerőlegese: f_{AC}. ③ $f_{AC} \cap e = B$. ④ B-t középpontosan tükrözzük K-ra: D. 0; 1 vagy végtelen sok megoldás lehet.

680. Az A pont tükörképe K-ra C, ezért a tükörképe K-ra kimetszi c-ből C-t. A szerkesztés: ① a-t középpontosan tükrözzük K-ra: a'. ② $a' \cap c = C$. ③ C-t középpontosan tükrözzük K-ra: A. ④ AC felezőmerőlegese: f_{AC}. ⑤ $f_{AC} \cap b = B$. ⑥ B-t középpontosan tükrözzük K-ra: D 0; 1 vagy végtelen sok megoldás lehet.

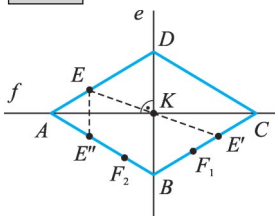
681. f-re K-ban állított merőleges az e egyenes. **1. eset:** E és F az e egyenes különböző oldalán van (E és F_1). A szerkesztés: ① E-t középpontosan tükrözzük K-ra: E'. ② e(E'; F_1) $\cap f = C$ és e(E'; F_1) $\cap e = B$. ③ C-t középpontosan tükrözzük K-ra: A. ④ B-t középpontosan tükrözzük K-ra: D.
2. eset: E és F az e egyenes azonos oldalán van (E és F_2). A szerkesztés: ① E-t tengelyesen tükrözzük f-re: E''. ② e(E''; F_2) $\cap f = A$ és e(E''; F_2) $\cap e = B$. ③ A-t középpontosan tükrözzük K-ra: C. ④ B-t középpontosan tükrözzük K-ra: D. 0 vagy 1 megoldás lehet.

682. d(e; f) = m: a rombusz magassága. A szerkesztés: ① PQ Thalész köre: k_T. ② P középpontú, m sugarú kör: k. ③ $k \cap k_T = T$.
I. Ha $m < PQ$, akkor: ④ e(Q; T) $\cap e = A$. ⑤ e(Q; T) $\cap f = B$. ⑥ P-n át párhuzamos AB-vel: g. ⑦ $g \cap e = D$ és $g \cap f = C$. 2 megoldás van.
II. Ha $m = PQ$, akkor $T \equiv Q$: ④ Q-ban merőleges PQ-ra: h. ⑤ $h \cap e = A$ és $h \cap f = B$. ⑥ P-n át párhuzamos AB-vel: g. ⑦ $g \cap e = D$ és $g \cap f = C$. 1 megoldás van.
III. Ha $m > PQ$, akkor nincs megoldás.

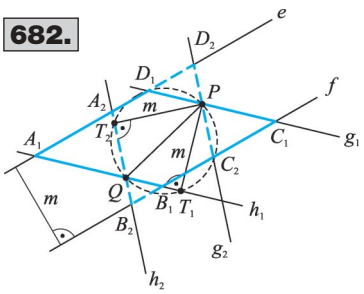
678.



681.

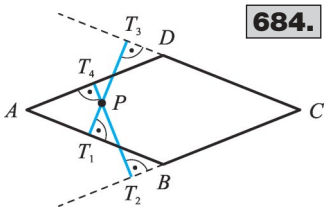


682.

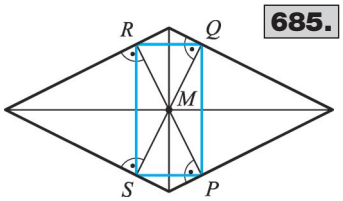


I

684.



685.



683. Legyen az $ABCD$ rombusz átlóinak metszéspontja M, M távolsága az oldalaktól m_1, m_2, m_3 és m_4. $AMB\triangle \cong CMB\triangle \cong AMD\triangle \cong CMD\triangle \Rightarrow m_1 = m_2 = m_3 = m_4$.

684. A rombusz szemközti oldalai párhuzamosak. $\Rightarrow T_1P$ és PT_3, illetve T_2P és PT_4 egy-egy egyenesen vannak. $T_1P + PT_3 = m = T_2P + PT_4$, ahol m a rombusz magassága. $\Rightarrow T_1P - T_2P = T_4P - T_3P$.

685. S; M; Q, illetve P; M; R egy-egy egyenesen vannak. $\Rightarrow SQ = RP =$ a rombusz magassága. M a szimmetria-középpont, ezért $MR = MQ = MP = MS \Rightarrow PQRS$ négyszög átlói egyenlő hosszúak és felezik egymást. $\Rightarrow PQRS$ téglalap.

686. A tengelyes szimmetria miatt a másik két szög egyenlő. $2\beta + \alpha + \gamma = 360° \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 96°}}$.

687. $\alpha = 39°$ és $\gamma = 100° \Rightarrow \beta = (360° - \alpha - \gamma) : 2 = 110{,}5°$. A szimmetriaátló oldalakkal bezárt szöge: $\alpha/2 = 19{,}5°$ és $\gamma/2 = 50°$. A másik átló oldalakkal bezárt szöge ezeknek a pótszöge: $90° - \alpha/2 = 70{,}5°$ és $90° - \gamma/2 = 40°$.

688. Legyen az $ABCD$ deltoid szimmetriatengelye $AC = f$; $BD = e$; $AC \cap BD = M$. *a)* A szerkesztés: ① e; b; $b \to DBC\triangle$. ② D középpontú, a sugarú kör: k_1. ③ B középpontú, a sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = A$. 0 vagy 2 megoldás lehet.
b) A szerkesztés: ① a; e; $a \to DBA\triangle$. ② DB felezőmerőlegese: g. ③ A középpontú, f sugarú kör: k. ④ $k \cap g = C$. 0 vagy 2 megoldás lehet.
c) A szerkesztés: ① Ha $\alpha < 180°$, akkor e; $\alpha \to DBA\triangle$. Ha $\alpha > 180°$, akkor e; $360° - \alpha \to DBA\triangle$. ② α szögfelezőjének félegyenesére $AC = f$. Egyértelmű a megoldás.

689. Rombusz és négyzet.

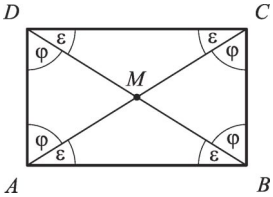
Téglalapok, négyzetek

690. A paralelogramma szemközti szögei egyenlők, szomszédos szögei 180°-ra egészítik ki egymást. $\Rightarrow$ Ha valamelyik szöge 90°-os, akkor a többi is. $\Rightarrow$ A négyszög téglalap.

691. $AC = BD \Rightarrow AM = BM = CM = DM \Rightarrow$ Az ábrán egyformán jelölt szögek egyenlők. $360° = 4\varepsilon + 4\varphi$, ezért $\varepsilon + \varphi = 90° \Rightarrow ABCD$ téglalap.

692. Legyen a K középpontú kör két átmérője AB és CD.
$KA = KB = KC = KD$, mert a kör sugarai. $\Rightarrow AKC\triangle$; $CKB\triangle$; $BKD\triangle$ és $DKA\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow$ alapon fekvő szögeik egyenlők $\Rightarrow ACB\triangle$-ben $2\varepsilon + 2\varphi = 180°$, ezért $\varepsilon + \varphi = 90°$. Hasonlóan megmutatható, hogy az $ABCD$ négyszög minden szöge 90°, tehát téglalap.

691.



693. Legyen az $ABCD$ téglalap átlóinak metszéspontja K, $KAB\sphericalangle = \varphi$ és $KBC\sphericalangle = \varepsilon$.
A téglalapot átlói két-két egybevágó egyenlő szárú háromszögre bontják. $CKB\sphericalangle$ külső szöge az $AKB\triangle$-nek. $\Rightarrow CKB\sphericalangle = 2\varphi$. $AKB\sphericalangle$ külső szöge a $BCK\triangle$-nek. $\Rightarrow AKB\sphericalangle = 2\varepsilon$.

694. Legyen az átlók metszéspontja K. $BKC\sphericalangle = 2AKB\sphericalangle = 52°$.

695. 62° és 28°.

696. Legyen az $ABCD$ téglalap átlóinak metszéspontja K. *a)* $A_1D_1 = A_2D_2$; $A_1B_1 = A_2B_2$; $D_1A_1B_1\sphericalangle = 90° = D_2A_2B_2\sphericalangle \Rightarrow A_1B_1D_1\triangle \cong A_2B_2D_2\triangle$. $A_1B_1D_1\triangle$ középpontos tükörképe K_1-re $C_1D_1B_1\triangle$ és $A_2B_2D_2\triangle$ középpontos tükörképe K_2-re $C_2D_2B_2\triangle \Rightarrow A_1B_1C_1D_1 \cong A_2B_2C_2D_2$.
b) $C_1K_1 = C_2K_2$; $K_1B_1 = K_2B_2$; $C_1K_1B_1\sphericalangle = C_2K_2B_2\sphericalangle \Rightarrow C_1K_1B_1\triangle \cong C_2K_2B_2\triangle$. $C_iK_iB_i\triangle$ középpontos tükörképe K_i-re $A_iK_iD_i\triangle \Rightarrow A_1B_1C_1D_1 \cong A_2B_2C_2D_2$.
c) $A_1D_1 = A_2D_2$; $A_1C_1 = A_2C_2$; $C_1D_1A_1\sphericalangle = 90° = C_2D_2A_2\sphericalangle \Rightarrow A_1D_1C_1\triangle \cong A_2D_2C_2\triangle$. $A_iD_iC_i\triangle$ középpontos tükörképe K_i-re $C_iB_iA_i\triangle \Rightarrow A_1B_1C_1D_1 \cong A_2B_2C_2D_2$.

697. *a)* AB-től és DC-től egyenlő távolságra lévő pontok AB és DC középpárhuzamosán, EG-n vannak. AD-től és BC-től egyenlő távolságra lévő pontok AD és BC középpárhuzamosán, HF-n vannak. Mindegyik oldaltól egyenlő távolságra lévő pontok csak EG és HF közös pontjai lehetnek. Egy ilyen pont van: M, a téglalap középpontja. $MF = ME$ csakis akkor teljesül, ha a téglalap négyzet.
b) A megfelelő pont csakis az oldalfelező merőlegesek metszéspontja lehet, ami a téglalap középpontja. Ez egyúttal az átlók metszéspontja is, és mivel az átlók felezik egymást, ez a pont megfelelő.

698. Legyen az átlók metszéspontja K. $KC = KB \Rightarrow KCB\sphericalangle = KBC\sphericalangle = 60° \Rightarrow KBC\triangle$ egyenlő oldalú $\Rightarrow BC = KC = KB \Rightarrow 2BC = AC = BD$.

699. Legyen az átlók metszéspontja K. Az átlók egyenlő hosszúak és felezik egymást. $\Rightarrow$ $\Rightarrow KC = KB = AC/2 \Rightarrow KC = KB = BC \Rightarrow KBC\triangle$ minden szöge 60°.

700. Legyen CD felezőpontja F és $AF \perp FB$. Tengelyes szimmetria miatt $AF = FB$. $\Rightarrow FAB\sphericalangle = FBA\sphericalangle = 45° \Rightarrow DAF\sphericalangle = CBF\sphericalangle = 45° \Rightarrow AD = DF = FC = CB \Rightarrow AB = CD = 2AD$.
$K_{ABCD} = 2(AB + AD) \Rightarrow$ $\underline{\underline{AD = 5\,\text{cm}}}$ és $\underline{\underline{AB = 10\,\text{cm}}}$.

701. $AB = AC \Rightarrow ABC\sphericalangle = ACB\sphericalangle = 45° \Rightarrow PB = PQ$ és $RQ = RC \Rightarrow k_{APQR} = 2(AP + PQ) = 2(AP + PB) = 2AB$ a Q helyétől függetlenül.

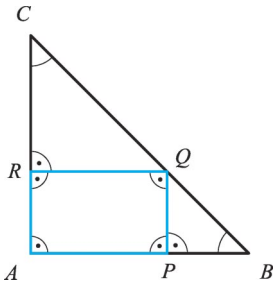
702. P rajta van α szögfelezőjén $\Rightarrow$ d$(P; AD)$ = d$(P; AB)$ és P rajta van δ szögfelezőjén $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ d$(P; AD)$ = d$(P; DC)$, ezért d$(P; AB)$ = d$(P; DC) \Rightarrow P$ rajta van az EF középvonalon. Hasonlóan R is rajta van EF-en, Q és S pedig a GH középvonalon. $\Rightarrow EDP\sphericalangle = PDC\sphericalangle = DPE\sphericalangle$ (szögfelezés és váltószögek) $\Rightarrow b/2 = ED = EP$. Hasonlóan belátható, hogy $b/2 = RF = FC$. $PR = EF - ED - RF = a - b/2 - b/2 = a - b$.

703. A szerkesztés: ① a-t középpontosan tükrözzük K-ra: a'. ② $a' \cap c = C$. ③ C-t középpontosan tükrözzük K-ra: A. ④ K középpontú, KA sugarú kör: k. ⑤ $k \cap b = B$. ⑥ B-t középpontosan tükrözzük K-ra: D. 0; 1; 2 vagy végtelen sok megoldás lehet.

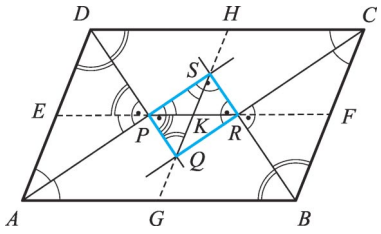
704. Középpontos szimmetria miatt $ER = FP$; $RQ = PS$ és $QF = SE$. A párhuzamosságok miatt egyállású és váltószögek keletkeznek, ezért az ábrán az egyformán jelölt szögek egyenlők és $QR = EF$. $\Rightarrow k_{PQRS} = 2(FQ + QR + RE) = 2(BF + FE + ED) = 2BD$.

705. G tengelyes tükörképe DC egyenesre G', ezért $CG' \parallel AE$ és $CAB\sphericalangle = G'FC\sphericalangle$ (egyállásúak) $\Rightarrow E$; F; G' egy egyenesen van és $EG' \parallel AC$. $\Rightarrow EA = G'C = CG \Rightarrow E$ középpontos tükörképe K-ra

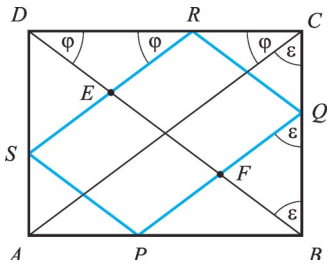
701.



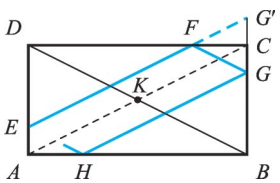
702.



704.

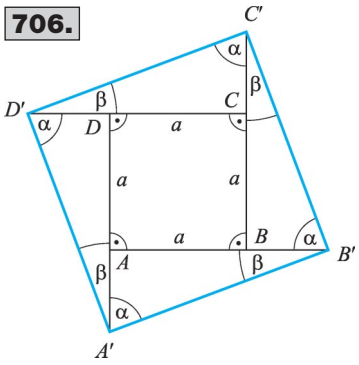


705.

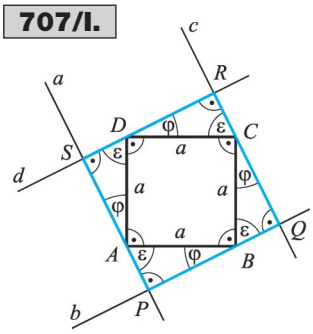


I

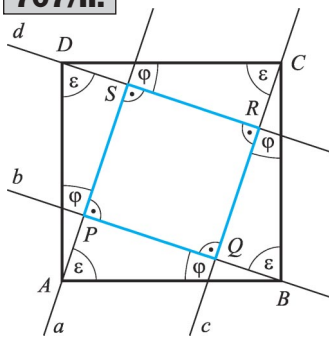
706.



707/I.



707/II.



$G \Rightarrow G$-ből AB-ről visszaverődve E-be érkezik a golyó $\Rightarrow F$ középpontos tükörképe K-ra $H \Rightarrow$ $\Rightarrow EFGH$ paralelogramma, amelynek kerülete a 704. feladat szerint független E helyzetétől.

706. $\alpha + \beta = 90°$, mert $AA'B'\triangle$ derékszögű. $AA'B'\triangle \cong BB'C'\triangle \cong CC'D'\triangle \cong DD'A'\triangle$, mert a derékszöget közrefogó oldalaik: b és $(a + b)$. $\Rightarrow A'B' = B'C' = C'D' = D'A' \Rightarrow A'B'C'D'$ négyzet.

707. $PQRS$ négyszög minden szöge 90°, ezért téglalap. $\varepsilon + \varphi = 90°$.

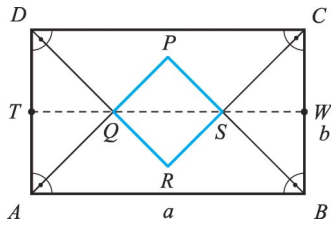
$APB\triangle \cong BQC\triangle \cong CRD\triangle \cong DSA\triangle$, mert szögeik egyformák, átfogójuk egyenlő $\Rightarrow AP = BQ = RC = DS$ és $PB = QC = RD = SA$.

1. eset: $PB + BQ = QC + CR = RD + DS = SA + AP$, vagyis $PQ = QR = RS = SP \Rightarrow PQRS$ négyzet.

2. eset: $PB - BQ = QC - CR = RD - DS = SA - AP \Rightarrow PQ = QR = RS = SP \Rightarrow PQRS$ négyzet.

708. Legyen az $ABC\triangle$-ben $f_\gamma \cap AB = D$. AD-ből húzott párhuzamosok metszéspontja a befogókkal E és F. $DF \parallel AC \Rightarrow DF \perp BC$ és $DE \parallel BC \Rightarrow DE \perp AC$, ezért $CEDF$ minden szöge 90°. CD szögfelező, ezért $FCD\sphericalangle = DCE\sphericalangle = 45° \Rightarrow FC = FD$, valamint $CE = ED$, azaz a $CEDF$ téglalap szomszédos oldalai egyenlők. $\Rightarrow CEDF$ négyzet.

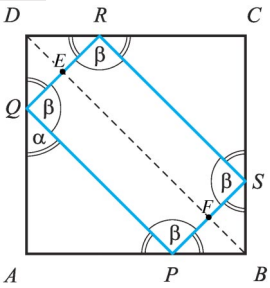
710.



709. Az AC átló fölé rajzolt $ACEF$ négyzet tartalmazza a B csúcsot. AC az $ABCD$ négyzet átlója, ezért $ACB\sphericalangle = 45° \Rightarrow CB$ egyenes az $ACEF$ négyzet átlóegyenese, ezért átmegy F-en. (Hasonlóan belátható, hogy AB is átmegy F-en.) A négyzet átlói felezik egymást. $\Rightarrow CF = 2CB \Rightarrow \underline{\underline{CF = 2a}}$.

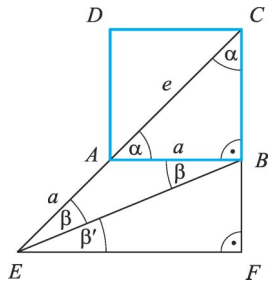
710. A téglalap szögfelezői 45°-os szögeket hoznak létre. $\Rightarrow$ $APB\triangle$-ben $APB\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$, $DRC\triangle$-ben $DRC\sphericalangle =$ $= 180° - 2 \cdot 45° = 90°$, $AQD\triangle$-ben $AQD\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 45° =$ $= 90° \Rightarrow PQR\sphericalangle = 90° \Rightarrow PQRS$ téglalap. Az ábra szimmetrikus a téglalap szimmetriatengelyeire, vagyis QS-re és PR-re. $\Rightarrow$ $\Rightarrow QP = QR = RS = SP \Rightarrow PQRS$ négyzet. QS szimmetriatengely $\Rightarrow TW$ középvonal $\Rightarrow TW = a$ és $TW \perp AD$, illetve $TW \perp BC \Rightarrow AT = TQ = b/2 = WB = SW \Rightarrow \underline{\underline{OS = a - b}}$.

711.

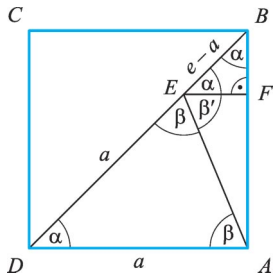


711. $AP = AQ = CS = CR \Rightarrow PB = BS = DR = DQ \Rightarrow \alpha =$ $= 45° \Rightarrow \beta = 90° \Rightarrow \underline{\underline{PQRS}}$ téglalap. DB átló szintén 45°-ban hajlik az oldalakhoz. $\Rightarrow DB \parallel QP \parallel RS$, ezért $EF = QP = RS$. 45°-os szögek miatt $QE = DE$ és $PF = FB$ és $SF = FB \Rightarrow k_{PQRS} =$ $= \underline{\underline{2DB}} = \text{állandó}$.

713/I.



713/II.



712. A szerkesztés: ① $AC = e$. ② AC felezőmerőlegese. ③ AC felezőpontjából $e/2$ sugarú kör, kimetszi a felezőmerőlegesből B-t és D-t. Egyértelmű a megoldás.

713. *a)* Hosszabbítsuk meg AC-t a-val. $\Rightarrow AB = AE$. $\alpha = 45° \Rightarrow \beta = 22{,}5°$. $EF \perp CB \Rightarrow \beta' = 22{,}5°$ és $EF = FC$. A szerkesztés: ① $(e + a)$ átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög: $ECF\triangle$. ② egyik hegyesszögének szögfelezője kimetszi a szemközti befogóból B-t. ③ $BC = a$ oldalú négyzet. Egyértelmű a megoldás.

b) BD átlóra a-t felmérve kapjuk E-t. $EF \perp BF \Rightarrow \alpha = 45°$. $DE = DA \Rightarrow \beta = 67{,}5° \Rightarrow \beta' = 67{,}5°$. A szerkesztés: ① $(e - a)$ átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög: $EFB\triangle$. ② egyik hegyesszög külső szögének szögfelezője kimetszi a szemközti befogó egyeneséből A-t. ③ $BA = a$ oldalú négyzet. Egyértelmű a megoldás.

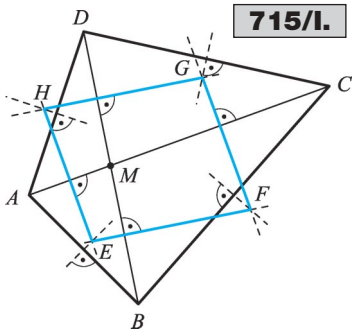
714. A szerkesztés: ① f-et tengelyesen tükrözzük e-re: f'. ② $f' \cap g = B$. ③ B-t tengelyesen tükrözzük e-re: D. ④ BD felezőpontja: F. ⑤ F középpontú, FB sugarú kör: k. ⑥ $k \cap e = \{A; C\}$. 0; 1 vagy végtelen sok megoldás lehet.

Négyszögekről általában

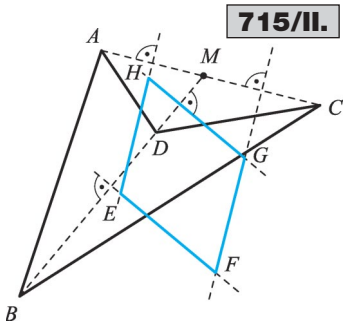
715. A háromszög köré írt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. E és H rajta van AM oldalfelező merőlegesén $\Rightarrow EH \perp AC$. F és G rajta van CM oldalfelező merőlegesén $\Rightarrow FG \perp AC \Rightarrow \underline{EH \parallel FG}$. Hasonlóan látható be, hogy $\underline{GH \parallel EF}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $EFGH$ paralelogramma.

716. $BC \parallel EF \Rightarrow DC \parallel EF$ és $AC \parallel ED \Rightarrow FC \parallel ED$, tehát $CFED$ paralelogramma. $\Rightarrow \underline{CF = DE}$ $\alpha/2 = CAD\sphericalangle = ADE\sphericalangle$, mert váltószögek $\Rightarrow ADE\sphericalangle = EAD\sphericalangle \Rightarrow \underline{AE = DE}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $\underline{\underline{CF = AE}}$.

715/I.

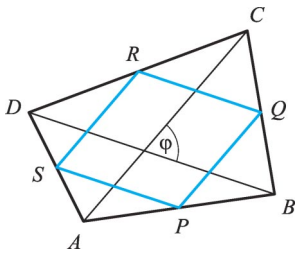


715/II.



I

717.



717. RS középvonal $ACD\triangle$-ben $\Rightarrow RS \parallel AC$ és $RS = AC/2$. PQ középvonal $ACB\triangle$-ben $\Rightarrow PQ \parallel AC$ és $PQ = AC/2$. SP középvonal $BDA\triangle$-ben $\Rightarrow SP \parallel BD$ és $SP = BD/2$. RQ középvonal $BDC\triangle$-ben $\Rightarrow$ $\Rightarrow RQ \parallel BD$ és $RQ = BD/2$. $RS = QP = 13{,}5$ cm; $SP = RQ =$ $= 9{,}5$ cm; $RSP\sphericalangle = RQP\sphericalangle = \varphi = 63°42'$; $SRQ\sphericalangle = SPQ = 180° -$ $- \varphi = 116°18'$.

718. Legyenek az AB, BC, CD és DA oldak felezőpontjai rendre F_1, F_2, F_3 és F_4. F_1F_2 középvonal az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow F_1F_2 = \dfrac{AC}{2}$ és $F_1F_2 \parallel AC$. F_3F_4 középvonal az $ACD\triangle$-ben $\Rightarrow F_3F_4 = \dfrac{AC}{2}$ és $F_3F_4 \parallel AC$. A két következményt összevetve: $F_1F_2 = F_3F_4$ és $F_1F_2 \parallel F_3F_4$. Hasonlóan megmutatható, hogy $F_1F_4 = F_2F_3$ és $F_1F_4 \parallel F_2F_3$.

719. F_1 felezi AB-t, F_2 felezi BC-t $\Rightarrow F_1F_2$ középvonal az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow F_1F_2 = \dfrac{AC}{2}$ és $F_1F_2 \parallel AC$. F_3 felezi DC-t, F_4 felezi AD-t $\Rightarrow F_3F_4$ középvonal az $ADC\triangle$-ben $\Rightarrow F_3F_4 = \dfrac{AC}{2}$ és $F_3F_4 \parallel AC$. A két következményt összevetve $F_1F_2 = F_3F_4$ és $F_1F_2 \parallel F_3F_4 \Rightarrow F_1F_2F_3F_4$ paralelogramma.

720. F_4 felezi AD-t, F_2 felezi BD-t $\Rightarrow F_2F_4$ középvonal az $ABD\triangle$-ben $\Rightarrow F_2F_4 = \dfrac{AB}{2}$ és $F_2F_4 \parallel AB$. F_1 felezi AC-t, F_3 felezi BC-t $\Rightarrow F_1F_3$ középvonal az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow F_1F_3 = \dfrac{AB}{2}$ és $F_1F_3 \parallel AB$. A két következményt összevetve $\Rightarrow F_4F_2F_3F_1$ paralelogramma.

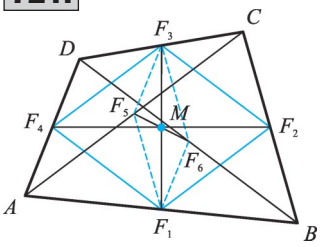
721. $F_1F_2F_3F_4$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow$ átlói felezik egymást $\Rightarrow F_1F_3 \cap F_2F_4 = M$ felezi F_1F_3-at és F_2F_4-et. A 720. feladat állítása szerint $F_1F_6F_3F_5$ négyszög paralelogramma, ezért átlói felezik egymást, tehát az F_5F_6 átlónak át kell mennie az F_1F_3 átló M felezéspontján, ami éppen a bizonyítandó állítást jelenti.

722. Legyenek a deltoid oldalfelező pontjai E, F, G és H. $EFGH$ egy olyan paralelogramma, aminek oldalai párhuzamosak a deltoid átlóival. Mivel a deltoid átlói merőlegesek egymásra, $EFGH$ téglalap.

723. Legyenek az $ABCD$ négyszög oldalfelező pontjai E, F, G és H. $EFGH$ paralelogramma, aminek oldalai párhuzamosak a négyszög átlóival. Akkor lesz téglalap, ha szomszédos oldalai merőlegesek egymásra. $\Rightarrow AC \perp BD \Rightarrow$ A négyszög oldalfelező pontjai akkor alkotnak téglalapot, ha a négyszög átlói merőlegesek egymásra.

724. Legyenek a négyszög AB, BC, CD és DA oldalainak felezőpontjai rendre E, F, G és H. EF; FG; GH; HE középvonalak egy-egy háromszögben, ezért $EF \parallel GH \parallel AC$ és $EF = GH =$ $= AC/2$, illetve $FG \parallel EH \parallel BD$ és $FG = EH = BD/2$. Ha $AC = BD$, akkor $EF = FG = GH = HE$, vagyis $EFGH$ rombusz.

721.



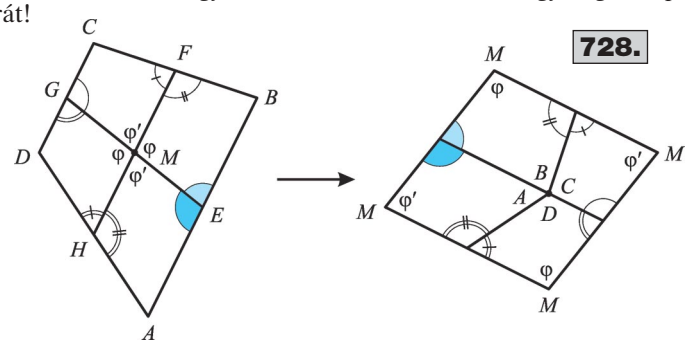
725. Legyenek a négyszög AB, BC, CD és DA oldalainak felezőpontjai rendre E, F, G és H. EF; FG; GH; HE középvonalak egy-egy háromszögben, ezért $EF \parallel GH \parallel AC$ és $EF = GH =$ $= AC/2$, illetve $FG \parallel EH \parallel BD$ és $FG = EH = BD/2$. $\Rightarrow EFGH$ négyszög szomszédos oldalai merőlegesek egymásra és egyenlő hosszúak. $EFGH$ négyzet.

726. Legyenek a paralelogramma AB, BC, CD és DA oldalainak felezőpontjai rendre E, F, G és H. EF; FG; GH; HE középvonalak egy-egy háromszögben, ezért $EF \parallel GH \parallel AC$ és $EF = GH = AC/2$, illetve $FG \parallel EH \parallel BD$ és $FG = EH = BD/2$.

a) EFGH téglalap $\Rightarrow EF \perp FG \Rightarrow AC \perp BD \Rightarrow ABCD$ rombusz. *b) EFGH* rombusz $\Rightarrow EF = FG \Rightarrow$ $\Rightarrow AC = BD \Rightarrow ABCD$ téglalap. *c) EFGH* négyzet $\Rightarrow EFGH$ téglalap is, rombusz is $\Rightarrow ABCD$ rombusz is, téglalap is $\Rightarrow ABCD$ négyzet.

727. Legyenek az *ABCD* négyszög oldalainak oldalfelező pontjai rendre *E*, *F*, *G* és *H*. *EFGH* paralelogramma, ezért átlói felezik egymást, és az átlói az *ABCD* négyszög középvonalai.

728. Lásd az ábrát!



729. Legyenek a négyszög *AB*, *BC*, *CD* és *DA* oldalainak oldalfelező pontjai rendre *E*, *F*, *G* és *H*. *EFGH* paralelogramma átlói az *ABCD* négyszög középvonalai. $EG = HF \Leftrightarrow EFGH$ téglalap $\Leftrightarrow EF \perp FG \Leftrightarrow AC \perp BD$.

730. Legyenek a négyszög *AB*, *BC*, *CD* és *DA* oldalainak oldalfelező pontjai rendre *E*, *F*, *G* és *H*. *EFGH* paralelogramma átlói az *ABCD* négyszög középvonalai. $EG \perp FH \Leftrightarrow EFGH$ rombusz $\Leftrightarrow EF = FG \Leftrightarrow \underline{\underline{AC = BD}}$.

731. Tükrözzük a négyszöget a vizsgált középvonalának egyik végpontjára! $CA' = BA$ és *EF* középvonala a $DA'A\triangle$-nek. $DCA'\triangle$-ben a háromszög-egyenlőtlenség: $DA' < DC + CA' = DC + AB \Rightarrow$ $\Rightarrow DA' = 2EF < DC + AB$, azaz $EF < (DC + AB)/2$. Az egyenlőség akkor áll fenn, ha $BC + CA' =$ $= DA'$, azaz $DC \parallel AB$. $\Rightarrow ABCD$ trapéz.

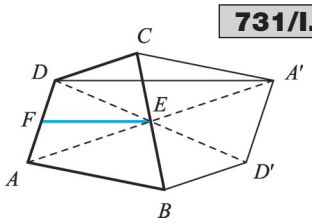
732. *a)* A szerkesztés: ① $BC = b$. ② *B*-ben β, *C*-ben $\gamma \rightarrow e$; *f*. ③ *e*-re $AB = a$ és *f*-re $DC = c$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

b) A szerkesztés: ① $AB = a$. ② *A*-ban α, *B*-ben β az *AB*-re $\rightarrow$ $\rightarrow e$; *f*. ③ *f*-re $BC = b$. ④ *C*-ből *c* sugarú kör: *k*. ⑤ $k \cap e =$ $= D$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

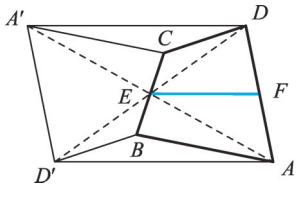
c) A szerkesztés: ① *c*; *b*; $e \rightarrow BCD\triangle$. ② *B*-ben β *BC*-re mindkét irányban $\rightarrow f_i$. ③ f_i-n $AB = a$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

d) A szerkesztés: ① *a*; *b*; $f \rightarrow ABC\triangle$. ② *B*-ből *e* sugarú kör: k_1. ③ *C*-ből *c* sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = D_i$. ⑤ a feltételeknek megfelelő $ABCD_i$ négyszög kiválasztása. 0; 1 vagy 2 megoldás van.

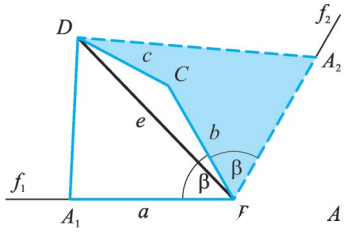
731/I.



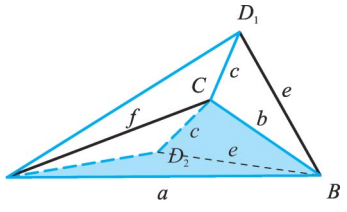
731/II.



732/I.

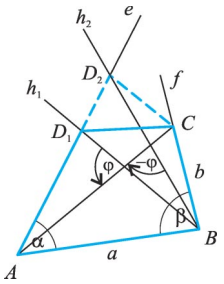


732/II.

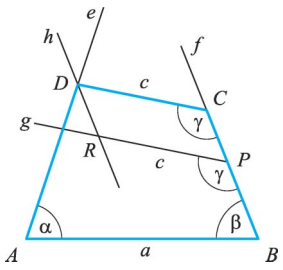


I

733.



735.



733. *a)* A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α, B-ben β az AB-re → e; f. ③ f-en $BC = b$. ④ C-ben γ BC-re az A-val azonos félsíkban → g. ⑤ $g \cap e = D$. 0 vagy 1 megoldás lehet.
b) A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α, B-ben β az AB-re → f; g. ③ B középpontú, e sugarú kör: k. ④ $k \cap f = D$. ⑤ g-n $BC = b$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.
c) A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α, B-ben β az AB-re → e; f. ③ f-en $BC = b$. ④ AC valamelyik pontjában egy-egy egyenes, ami AC-vel $+\varphi$, illetve $-\varphi$ szöget zár be: g_i. ⑤ B-n át g_i-vel párhuzamos: h_i. ⑥ $h_i \cap e = D_i$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

734. *a)* A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α, B-ben β az AB-re → f; g. ③ A középpontú, e sugarú kör: k_1. ④ $k_1 \cap g = C$. ⑤ C középpontú, c sugarú kör: k_2. ⑥ $k_2 \cap f = D$. 0; 1; 2; 3 vagy 4 megoldás lehet.
b) A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α az AB-re → h. ③ B középpontú, f sugarú kör: k_1. ④ $k_1 \cap h = D$. ⑤ DB valamelyik pontjában egy-egy egyenes, ami $+\varphi$, illetve $-\varphi$ szöget zár be DB-vel: g_i. ⑥ A-n át párhuzamos g_i-vel: j_i. ⑦ D középpontú, c sugarú kör: k_2. ⑧ $j_i \cap k_2 = C$. 0-tól 8-ig terjedhet a megoldások száma.

735. A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α, B-ben β az AB-re → e; f. ③ F tetszőleges P pontjában g félegyenes, amire $\sphericalangle (BP; g) = \gamma$. ④ g-n $PR = c$. ⑤ R-en át párhuzamos f-fel: h. ⑥ $h \cap e = D$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

Trapézok

736. $AD_1D\triangle$ és $BD_2C\triangle$ egyenlő szárú, mert szögeik: 90°, 45°, 45° ⇒ $c = 6\,\text{cm}$.

737. A trapéz két szöge 107° és 72°.

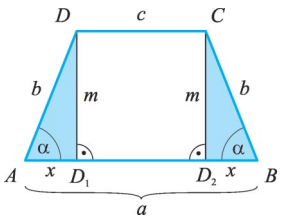
738. $2AT = AD$, mert $\alpha = 60°$. A szimmetria miatt $SB = AT$. $AB = AT + TS + SB$, azaz $a = b/2 + b + b/2 = 2b$.

739. A trapéz középvonala az alapok számtani közepe: $k = 11{,}5\,\text{cm}$.

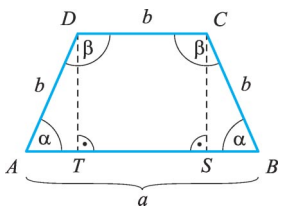
740. A trapéz középvonala az alapok számtani közepe: $c = 22\,\text{cm}$.

741. A trapéz középvonala az alapok számtani közepe: $k = 10{,}5\,\text{cm} > 10{,}4\,\text{cm}$, ezért a párhuzamos a rövidebb alaphoz van közelebb.

736.



738.



742. $DE \| CB \Rightarrow DC = EB$. GH középvonal $\Rightarrow 2GH = AE + 2DC \Rightarrow \underline{\underline{DC = 12\text{ cm}}} \Rightarrow \underline{\underline{AB = 14\text{ cm}}}$.

743. $\alpha = 60° \Rightarrow ABD\sphericalangle = 30°$ és $AB = 2AD = 10$ cm. $\beta = 180° - \alpha = 120°$ és $DBC\sphericalangle = 30°$ és $CDB\sphericalangle = \beta - 90° = 30° \Rightarrow DC = CB = 5$ cm. A trapéz oldalai: $\underline{\underline{5\text{ cm, } 5\text{ cm, } 5\text{ cm és } 10\text{ cm}}}$.

744. *a)* 39°12′; 39°12′; 140°48′; 140°48′. *b)* $\alpha = (180° - \varphi)/2 = 69° \Rightarrow \beta = 111°$.

745. E_2F_2 az $ABCD$ trapéz középvonala $\Rightarrow E_2F_2 \| AB \| CD \Rightarrow ABF_2E_2$ és E_2F_2CD trapéz, és ezek középvonalai E_1F_1, illetve E_3F_3. $E_2F_2 = (AB + CD)/2 = \underline{\underline{13\text{ cm}}}$, $E_1F_1 = (AB + E_2F_2)/2 = \underline{\underline{15\text{ cm}}}$, $E_3F_3 = (E_2F_2 + CD)/2 = \underline{\underline{11\text{ cm}}}$.

746. Legyen EF a trapéz középvonala és $EF \cap AC = M$. $EF \| AB$ és F a BC felezőpontja $\Rightarrow MF$ az $ABC\triangle$ középvonala $\Rightarrow \underline{\underline{MF = AB/2}}$. Hasonlóan megmutatható, hogy $\underline{\underline{EM = CD/2}}$.

747. Legyen EF a trapéz középvonala és $EF \cap AC = K$ és $EF \cap BD = L$. $EF \| AB \| CD$; E az AD felezőpontja; F a BC felezőpontja $\Rightarrow EK$ középvonal az $ACD\triangle$-ben és LE középvonal a $BAD\triangle$-ben $\Rightarrow EK = DC/2$ és $LE = AB/2 \Rightarrow KL = EL - EK = \underline{\underline{(AB - DC)/2}}$.

748. Legyen AC felezőpontja K, BD felezőpontja L, valamint a KL egyenes metszéspontja AD-vel E, BC-vel F. $AK = KC$ és $BL = LD \Rightarrow KL$ része az $ABCD$ trapéz középvonalának. $\Rightarrow$ Párhuzamos az alapokkal. EK középvonala $ADC\triangle$-nek, ezért $EK = DC/2$, valamint EL középvonala $ADB\triangle$-nek, ezért $EL = AB/2 \Rightarrow KL = EL - EK = \underline{\underline{(AB - DC)/2}}$.

749. Az EF középvonal az M pontban metszi az AC átlót. EF középvonal, ezért $EF \| DC$. E az AD felezőpontja, ezért EM az $ADC\triangle$ középvonala. $\Rightarrow M$ felezi AC átlót.

750. Legyen az átlók metszéspontja M. A feladat szerint M felezőpontja AC-nek, illetve BD-nek, ezért $ABCD$ középpontosan szimmetrikus M-re, tehát paralelogramma $\Rightarrow \underline{\underline{DC = AB}}$.

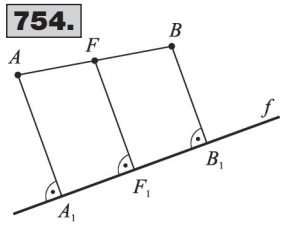
751. A feladat szerint EF középvonal átmegy az átlók M metszéspontján $\Rightarrow EM$ középvonala az $ADC\triangle$-nek, ezért $EM = DC/2$, valamint EM középvonala az $ABD\triangle$-nek, ezért $EM = AB/2 \Rightarrow$ $\Rightarrow DC = AB$, valamint $AB \| DC$, tehát $\underline{\underline{ABCD \text{ paralelogramma}}}$.

752. Az $ABCD$ trapézban $CD = a$, EF középvonal és $EF \cap AC = K$ és $EF \cap BD = L$. EK középvonala az $ADC\triangle$-nek, ezért $EK = DC/2$, valamint LF középvonala a $BDC\triangle$-nek, ezért $LF = DC/2 \Rightarrow EK = LF = a/2$. A feladat szerint $EK = KL = LF$, ezért $KL = a/2$. Az EF középvonal az AB és CD alapok számtani közepe: $\dfrac{a+b}{2} = 3 \cdot \dfrac{a}{2} \Rightarrow \underline{\underline{b = 2a}}$.

753. Az $ABCD$ trapéz EF középvonalának metszéspontja AC-vel K, DB-vel L. EF az $ABCD$ középvonala $\Rightarrow EK$ középvonala az $ADC\triangle$-nek, ezért $EK = a/2$, valamint LF középvonala a $BDC\triangle$-nek, ezért $LF = a/2 \Rightarrow EF = \dfrac{2a + a}{2} = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow KL = EF -$ $- EK - LF = a/2 \Rightarrow \underline{\underline{EK = KL = LF}}$.

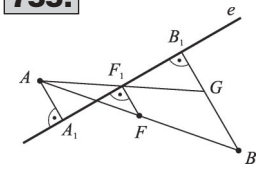
754. $AA_1 = 5$ km és $BB_1 = 4$ km. $AF + FF_1 = BF + FF_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow AF = FB$. FF_1 akkor a legrövidebb, ha merőleges f-re. Ekkor $AA_1 \| FF_1 \| BB_1 \Rightarrow ABB_1A_1$ trapéz, aminek középvonala FF_1. $\Rightarrow FF_1 =$ $= (BB_1 + AA_1)/2 = 4{,}5$ km $= \underline{\underline{4500\text{ m}}}$.

754.



755. **1. eset:** Az egyenes nem választja el A-t és B-t. A 754. ábra jelöléseit használjuk.
$AA_1 = 10$ cm és $FF_1 = 8$ cm. $AA_1 \| FF_1 \| BB_1 \perp e \Rightarrow ABB_1A_1$ trapéz, aminek középvonala FF_1. $\Rightarrow FF_1 = (BB_1 + AA_1)/2 \Rightarrow \underline{\underline{BB_1 = 6\text{ cm}}}$.

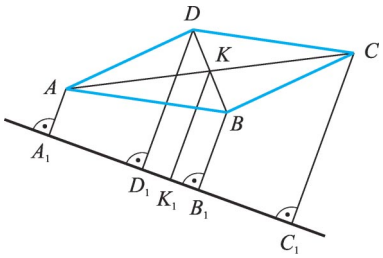
755.



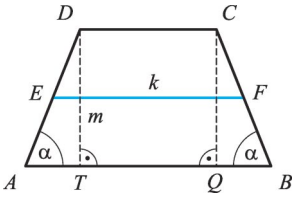
2. eset: Az egyenes elválasztja A-t és B-t. (755. ábra) $AA_1 = 10$ cm és $FF_1 = 8$ cm. $AA_1 \| FF_1 \| BB_1 \perp e \Rightarrow FF_1$középvonala az $ABG\triangle$-nek. $\Rightarrow BG = 16$ cm és $AF_1 = F_1G \Rightarrow AF_1A_1\triangle \cong GF_1B_1\triangle \Rightarrow B_1G =$ $= 10$ cm $\Rightarrow BB_1 = BG + GB_1 = \underline{\underline{26\text{ cm}}}$.

I

756.



757.



756. $AA_1 = 6$ cm, $DD_1 = 9$ cm, $KK_1 = 7$ cm. AA_1CC_1 trapéz, aminek középvonala $KK_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2KK_1 = AA_1 + CC_1 \Rightarrow \underline{\underline{CC_1 = 8\,\text{cm}}}$. DD_1BB_1 trapéz, aminek középvonala $KK_1 \Rightarrow 2KK_1 =$ $= DD_1 + BB_1 \Rightarrow \underline{\underline{BB_1 = 5\,\text{cm}}}$.

757. $AB = a$ és $CD = c$. $\alpha = 45° \Rightarrow ATD\triangle$ és $BQC\triangle$ egyenlő szárú, ezért $AT = TD = m$ és $QB = QC = m \Rightarrow a = AB = AT + TQ + QB = 2m + c$. Középvonal: $2k = a + c = (2m + c) + c =$ $= 2(m + c) \Rightarrow \underline{\underline{c = k - m}}$ és $\underline{\underline{a = k + m}}$.

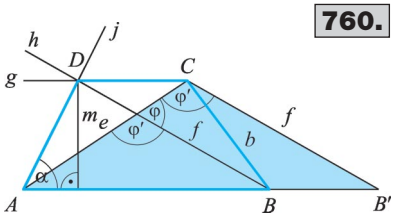
758. *a)* A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α, B-ben β az AB-re $\rightarrow e$; f. ③ AB-vel párhuzamos m távolságra: g. ④ $e \cap g = D$ és $f \cap g = C$. 0 vagy 1 megoldás lehet.
b) A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α, B-ben β az AB-re $\rightarrow e$; f. ③ F-en $BC = b$. ④ C-ben párhuzamos AB-vel: g. ⑤ $e \cap g = D$. 0 vagy 1 megoldás lehet.
c) A szerkesztés: ① a; e; $\beta \rightarrow ABC\triangle$. ② C-ben párhuzamos AB-vel: f. ③ A-ban α az AB-re $\rightarrow g$. ④ $f \cap g = D$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

759. *a)* $CC' \parallel AD \Rightarrow C'B = a - c$. **1. eset:** Ha $C' \equiv B$, akkor $ABCD$ paralelogramma.
2. eset: $C' \not\equiv B$. A szerkesztés: ① $a - c$; α; $\beta \rightarrow C'BC\triangle$. ② BC' meghosszabbítása C'-n túl c-vel $\rightarrow A$. ③ C-n át párhuzamos AB-vel: e. ④ C középpontú, c sugarú kör: k. ⑤ $k \cap e = D$. 0 vagy 1 megoldás van.
b) A szerkesztés: ① két párhuzamos egymástól m távolságra: e és f. ② e-n $AB = a$. ③ A-ban α az AB-re: g. ④ $g \cap f = D$. ⑤ D-ből f-re c hosszúságú szakasz α szögtartományában $\rightarrow C$. Egyértelmű a megoldás.
c) A szerkesztés: ① a; f; $\alpha \rightarrow ABD\triangle$. ② D-ben párhuzamos AB-vel: e. ③ D-ből e-n c hosszúságú szakasz α szögtartományában $\rightarrow C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.
d) A szerkesztés: ① $\alpha' = 180° - \alpha$. ② e; c; $\alpha' \rightarrow ACD\triangle$. ③ A-ból párhuzamos DC-vel: f félegyenes. ④ A középpontú, a sugarú kör: k. ⑤ $k \cap f = B$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

e) DB eltoltja $\overrightarrow{DC}$-ral CD'. A szerkesztés: ① $a + c$; e; $f \rightarrow AD'C\triangle$. ② A-ból a hosszúságú szakasz AD'-n $\rightarrow B$. ③ B-n át párhuzamos $D'C$-vel: g. ④ C-n át párhuzamos AB-vel: h. ⑤ $g \cap h = D$. 0 vagy 1 megoldás lehet.
f) A szerkesztés: ① két párhuzamos egymástól m távolságra: g és h. ② g-n $AB = a$. ③ B középpontú, f sugarú kör: k. ④ $k \cap h = D_i$. ⑤ h-n D_i-ből c hosszúságú szakasz az AD által határolt B-t tartalmazó félsíkban: C_i. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

760. *a)* DB eltoltja $\overrightarrow{DC}$-ral CB', $\varphi' = 180° - \varphi$. A szerkesztés: ① e; f; $\varphi' \rightarrow AB'C\triangle$.

760.

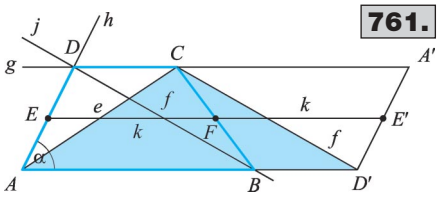


② C középpontú, b sugarú kör: k. ③ $k \cap AB' = B_i$. ④ B_i-n át párhuzamos CB'-vel: h_i. ⑤ C-n át párhuzamos AB'-vel: g. ⑥ $h_i \cap g = D_i$. ⑦ Ha $\varphi \neq 90°$, akkor másik megoldáshoz juthatunk az 1–5. lépések során az e; f; φ-ből szerkesztett $AB'C\triangle$-ből kiindulva. A megoldások száma 0-tól 4-ig változhat.

b) DB eltoltja $\overrightarrow{DC}$-ral CB'. A szerkesztés: ① e; f; $m \rightarrow$ $\rightarrow AB'C\triangle$. ② C-n át párhuzamos AB'-vel: g. ③ AB'-re

A-ból a hosszúságú szakasz → B. ④ B-n át párhuzamos CB'-vel: h. ⑤ $g \cap h = D$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

761.



c) DB eltoltja $\overrightarrow{DC}$-ral CB', $\varphi' = 180° - \varphi$. A szerkesztés: ① e; f; $\varphi' \rightarrow AB'C\triangle$. ② C-n át párhuzamos AB'-vel: g. ③ A-ban $\alpha\, AB$-re: j. ④ $g \cap j = D$. ⑤ D-n át párhuzamos CB'-vel: h. ⑥ $h \cap AB' = B$. ⑦ Ha $\varphi \neq \varphi'$, akkor az 1–6. lépéseket φ' helyett φ-vel végrehajtva másik megoldáshoz jutunk. 1 vagy 2 megoldás lehet.

d) DB eltoltja $\overrightarrow{DC}$-ral CB'. A szerkesztés: ① e; f; $m \rightarrow AB'C\triangle$. ② A-ban AB-re α: j. ③ C-n át párhuzamos AB'-vel: g. ④ $g \cap j = D$. ⑤ B'-t eltoljuk $\overrightarrow{CD}$-ral: B. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

761. *a)* $AD' = 2k$. A szerkesztés: ① $2k$; e; $f \rightarrow AD'C\triangle$. ② C-n át párhuzamos AD'-vel: g. ③ A-ban $\alpha\, AD'$-re: h. ④ $g \cap h = D$. ⑤ D-n át párhuzamos CD'-vel: j. ⑥ $j \cap AD' = B$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

b) $AD' = 2k$. A szerkesztés: ① $2k$; e; $f \rightarrow AD'C\triangle$. ② C-n át párhuzamos AD'-vel: g. ③ A középpontú, d sugarú kör: k. ④ $k \cap g = D$. ⑤ D-n át párhuzamos CD'-vel: j. ⑥ $j \cap AD' = B$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

762. Legyenek a trapéz alapjai $AB > CD$. Húzzunk párhuzamost D-n át BC-vel! Ez AB-t metszi E-ben. **1. eset:** Ha $E \neq A$, akkor $DE = CB$; $AE = AB - EB = AB - DC$. $ADE\triangle$-re a háromszög-egyenlőtlenség: $AD + DE > AE$, azaz $AD + BC > AB - DC$.

2. eset: Ha $E \equiv A$, akkor $ABCD$ paralelogramma, az alapok különbsége 0, így igaz az állítás.

763. *a)* $AE = a - c$. **1. eset:** $a > c$. A szerkesztés: ① $a - c$; b; $b \rightarrow AED\triangle$. ② D-n át párhuzamos AE-vel → g félegyenes. ③ g-n $DC = c$. ④ C-n át párhuzamos DE-vel: h. ⑤ $h \cap e(A; E) = B$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

2. eset: Ha $a = c$, akkor $ABCD$ egy a és b oldalú téglalap. Egyértelmű a megoldás.

b) A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban és B-ben ellentétes irányban $\alpha\, AB$-re: j és h félegyenesek. ③ j-n $AD = b$ és h-n $BC = b$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

c) $AG = FB = (a - c)/2$. A szerkesztés: ① m; $c \rightarrow GFCD$ téglalap. ② GF meghosszabbítása mindkét irányban $(a - c)/2$ hosszú szakasszal → A; B. Egyértelmű a megoldás.

d) A szerkesztés: ① a; b; $e \rightarrow ABD\triangle$. ② D-n át párhuzamos AB-vel: g. ③ B középpontú, b sugarú kör: k. ④ $k \cap g = C_i$. ⑤ C_i kiválasztása úgy, hogy $C_iBA\sphericalangle = BAD\sphericalangle$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

e) DB eltoltja $\overrightarrow{DC}$-ral CC'. A szerkesztés: ① $a + c$; e; $e \rightarrow AC'C\triangle$. ② AC'-n C'-ből $BC' = c$. ③ C-t eltoljuk $\overrightarrow{C'B}$-ral: D. 0 vagy 1 megoldás lehet.

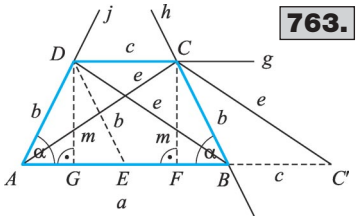
764. Legyen a trapéz $AB > CD$ alapjaira merőleges szára AD, és C merőleges vetülete AB-re E.

a) A szerkesztés: ① $AD = m$. ② A-ban és D-ben merőleges AD-re azonos félsíkban: g, h. ③ g-n $AB = a$. ④ h-n $DC = c$. Egyértelmű a megoldás.

b) $AE = c \Rightarrow EB = a - c$. A szerkesztés: ① 90°; $a - c$; $b \rightarrow CEB\triangle$. ② EB-t meghosszabbítjuk E-n túl: $BA = a$. ③ A-ban merőleges AB-re: g. ④ C-n át párhuzamos AB-vel: h. ⑤ $g \cap h = D$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

c) $AE = c \Rightarrow EB = a - c$. A szerkesztés: ① 90°; $a - c$; $\alpha \rightarrow CEB\triangle$. ② EB-t meghosszabbítjuk E-n túl: $BA = a$. ③ A-ban merőleges AB-re: g. ④ C-n át párhuzamos AB-vel: h. ⑤ $g \cap h = D$. Egyértelmű a megoldás.

763.

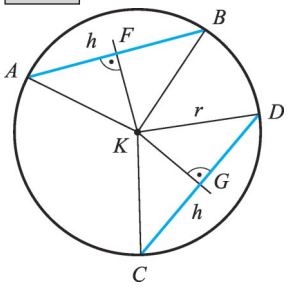


765. Legyenek a trapéz alapjai: $AB > CD$. Az A pontban húzott szögfelező M pontban metszi a CD oldalt. $BAM\sphericalangle = AMD\sphericalangle$, mert váltószögek, így $AMD\sphericalangle = DAM\sphericalangle \Rightarrow AMD\triangle$ egyenlő szárú, vagyis $AD = DM \Rightarrow MC = DC - DM = CB \Rightarrow CMB\sphericalangle = MBC\sphericalangle$. $CMB\sphericalangle = MBA\sphericalangle$, mert váltószögek, tehát $MBC\sphericalangle = MBA\sphericalangle$, vagyis M rajta van a B csúcsnál levő szögfelezőn.

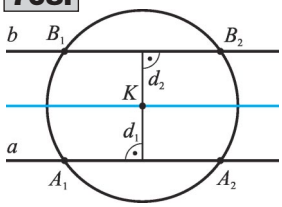
I Körök

Kör és egyenesek

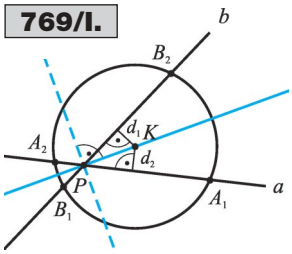
767.



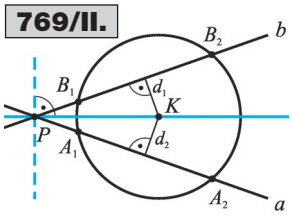
768.



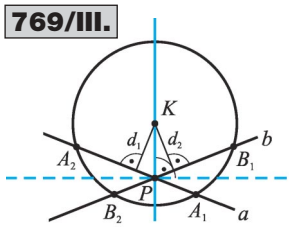
769/I.



769/II.



769/III.



766. Felvesszük a kör két nem párhuzamos AB és CD húrját. $f_{AB} \cap f_{CD} = K$ a kör középpontja.

767. F felezi AB-t, G felezi CD-t, valamint $\mathrm{d}(K; AB) = \mathrm{d}(K; F)$ és $\mathrm{d}(K; CD) = \mathrm{d}(K; G)$.
$AFK\triangle \cong DGK\triangle$, mert $AK = KD = r$, $AF = DG = h/2$ és mindkettő derékszögű. $\Rightarrow KG = KF$.

768. $A_1A_2 = B_1B_2 \Rightarrow d_1 = d_2 \Rightarrow a \parallel b$ miatt K rajta van az a és b egyenesek középpárhuzamosán. A középpárhuzamos minden pontja megfelelő.

769. $A_1A_2 = B_1B_2 \Rightarrow d_1 = d_2 \Rightarrow K$ rajta van $\sphericalangle(a; b)$ szögfelező egyenesein. Mindkét szögfelező minden pontja megfelelő.

770. A K középpontú kör AB húrjának felezőpontja F. Ha $h = 2r$, akkor $KF = 0$. Más esetben Pitagorasz-tétel az AFK derékszögű háromszögre: $AF = \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$.

771. Pitagorasz-tétel az $AKF\triangle$-re, illetve a $CGK\triangle$-re: $AF = \sqrt{r^2 - FK^2}$ és $CG = \sqrt{r^2 - GK^2}$.
$AF = \sqrt{r^2 - FK^2} < \sqrt{r^2 - GK^2} = CG \Rightarrow AF < CG \Rightarrow AB < CD$.

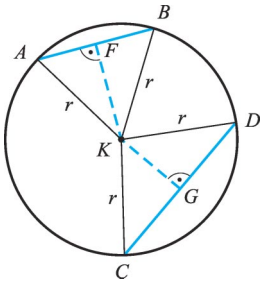
772. A háromszög oldalai a körülírt kör húrjai. Legyen AB a háromszög leghosszabb oldala. A 771. feladat állítása szerint a három húr közül AB van legközelebb a kör középpontjához.

773. Legyen AB a kör azon húrja, amelynek P a felezőpontja és $KP \perp AB$! A tetszőleges, P-re illeszkedő XY húr biztosan hosszabb AB-nél, hiszen a középponttól való távolsága kisebb PK-nál ($FKP\triangle$-ben FK befogó, PK átfogó). $\Rightarrow AB$ a legrövidebb húr. A leghosszabb húr a P-re illeszkedő átmérő, CD.

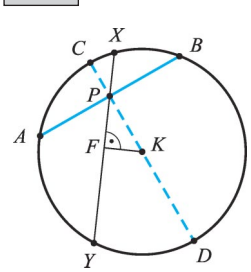
774. A 773. feladatban láttuk, hogy a K középpontú körben a P-n átmenő húrok közül legrövidebb a KP-re P-ben állított merőleges húr. A leghosszabb húr a KP egyenesének CD szakasza. $KP \perp AB$ miatt $CD \perp AB$.

775. P azt az AB húrt felezi, amely merőleges KP-re, hiszen $KAB\triangle$ egyenlő szárú, és KP súlyvonala egyúttal magasságvonal is.

771.



773.



776. A h hosszúságú húrok F felezéspontjai $d = \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ távolságra vannak a kör középpontjától. $\Rightarrow$ Az F pontok egy K középpontú, d sugarú k' körön vannak. A k' kör bármely F pontjához tartozik egy h hosszúságú húr.
A keresett ponthalmaz a K középpontú, d sugarú k' kör.

777. A h hosszúságú húrok középpontjai K középpontú, $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ sugarú k' körön vannak. A keresett húrt megkaphatjuk, ha P-ből érintőt szerkesztünk a k' körhöz. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

778. Felhasználjuk: A h hosszúságú húrok középpontjai K középpontú, $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ sugarú k' körön találhatók, és a h hosszúságú húrok a k' kör érintői. A szerkesztés: ① K középpontú, $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ sugarú kör: k'. ② P-ből érintő k'-höz. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

779. Felhasználjuk: A kör sugara a szerkesztendő szabályos hatszög oldala. A szerkesztés: ① P ponton át r hosszúságú húr szerkesztése (a módszert lásd a 778. feladat megoldásánál) $\rightarrow$ $\rightarrow A$; B. ② AB oldalú szabályos hatszög szerkesztése a körbe. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

780. **1. eset:** $AC \cap BD \neq K$. Húzzunk párhuzamost AC húrral a B ponton át! A párhuzamosnak k-val való másik metszéspontja E. Az $ACEB$ négyszög húrtrapéz, ezért AB ív és EC ív egyenlő hosszú ($i_1 = i_2$). Thalész-tétel megfordítása miatt DE a kör átmérője, ezért i_3 és CE ív együtt egy félkört alkot, azaz i_3 és i_1 ívek is félkört alkotnak együtt, és ezt akartuk belátni.
2. eset: $AC \cap BD = K \Rightarrow$ a keletkezett ívek egyenlő negyedkörök, tehát igaz az állítás.

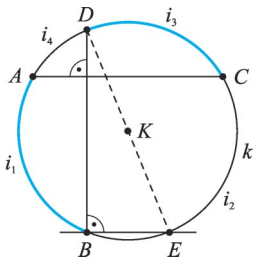
781. A szerkesztés: ① K-ból merőlegest állítunk e-re: f. ② $f \cap e = F$. ③ F-ből mindkét irányban $h/2$ hosszúságú szakasz $f$elvétele az e egyenesen: G és H. ④ G-ben és H-ban merőleges e-re: g és h. ⑤ $g \cap k = M$ és $h \cap k = N$. ⑥ MN a keresett húr. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

782. A szerkesztés: ① a kör egy a hosszúságú húrjának kijelölése $\rightarrow A$; B. ② $e(A; K) \cap k = C$. ③ $e(B; K) \cap k = D$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

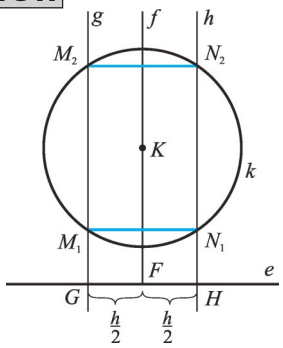
783. A szerkesztés: ① K ponton át e-vel $+45°$-os, illetve $-45°$-os szöget bezáró egyenesek: f; g. ② $f \cap k = \{A; C\}$ és $g \cap k = \{B; D\}$. $ABCD$ négyzet. Egyértelmű a megoldás.

784. A szerkesztés: ① P-ből merőlegest állítunk e-re $\rightarrow F$ pont. ② F-ből mindkét irányban $h/2$ hosszúságú szakasz felvétele az e egyenesen: A és B. ③ PA sugarú, P középpontú kör: k. Egyértelmű a megoldás.

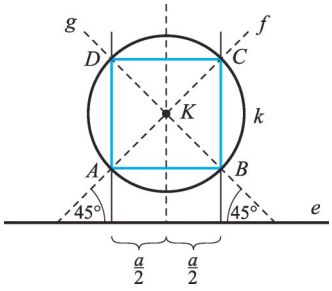
780.



781.

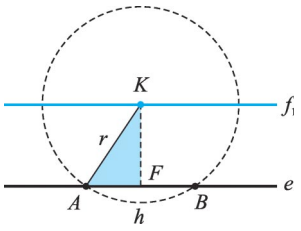


783.

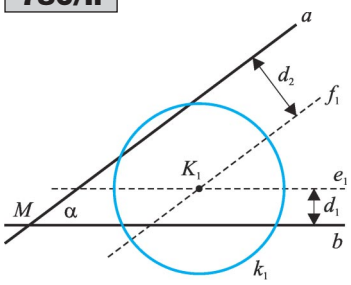


I

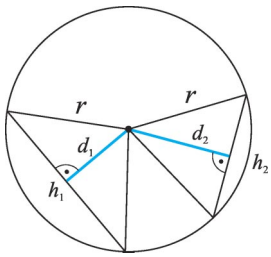
785.



786/I.



786/II.



785. **1. eset:** $h < 2r$. Az e-ből h hosszúságú húrt kimetsző r sugarú körök középpontjaira fennáll az AFK derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel: $KF = \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$. $KF = \mathrm{d}(K; e)$, tehát a körök középpontjai az e-vel párhuzamos $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ távolságra húzódó f_1 és f_2 egyenespáron vannak. f_1 és f_2 minden pontja megfelel a kívánt feltételeknek.

2. eset: $h = 2r$. Az e egyenes a keresett ponthalmaz.

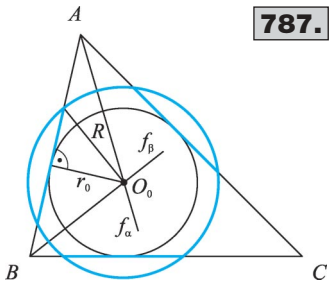
3. eset: $h > 2r$. Nincs megoldás.

786. A keresett kör középpontja $d_1 = \sqrt{r^2 - \frac{h_1^2}{4}}$ távolságra van az egyik, és $d_2 = \sqrt{r^2 - \frac{h_2^2}{4}}$ távolságra van a másik egyenestől. A szerkesztés: ① a 786/II. ábra alapján d_1 és d_2 megszerkesztése. ② b-vel párhuzamos d_1 távolságra: e_1 és e_2. ③ a-val párhuzamos d_2 távolságra: f_1 és f_2. ④ Bármely e-nek bármely f-fel való metszéspontja egy megfelelő kör középpontja. ⑤ A kapott köröknek az α szögfelezőjére való tükrözésével újabb megoldásokat kapunk. 0; 4 vagy 8 megoldás lehet.

787. Felhasználjuk, hogy a keresett kör koncentrikus a háromszög beírt körével és sugara $R = \sqrt{r_0^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$. A szerkesztés: ① $f_\alpha \cap f_\beta = O_0$. ② O_0 középpontú, R sugarú kör. Egyértelmű a megoldás.

788. Felhasználjuk: A kör átmérője a szerkesztendő négyzet átlója. A szerkesztés: ① $2r$ átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög szerkesztése → a, a négyzet oldala. ② P ponton át a hosszúságú húr szerkesztése (a módszert lásd a 778. feladat megoldásánál) → A; B. ③ AB oldalú négyzet szerkesztése. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

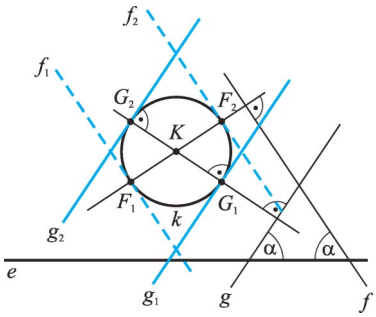
787.



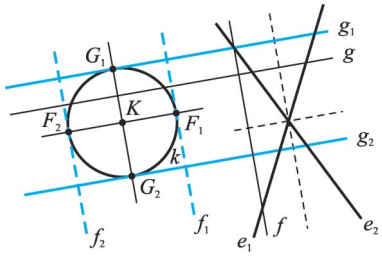
789. Felhasználjuk: A kör sugara a szerkesztendő szabályos háromszög magasságának kétharmad része. A szerkesztés: ① $\frac{3}{2}r$ befogóval és rajta fekvő 30°-os szöggel derékszögű háromszög szerkesztése → a háromszög átfogója a szabályos háromszög oldala, a. ② P ponton át a hosszúságú húr szerkesztése (a módszert lásd a 778. feladat megoldásánál) → A; B. ③ AB oldalú szabályos háromszög szerkesztése a körbe. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

I

791.



792.



790. A K középpontú körhöz a P pontból e hosszúságú érintőszakasz húzható. Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, ezért $PE = e$ felhasználásával Pitagorasz-tétel szerint $KP = \sqrt{e^2 + r^2}$. $\Rightarrow$ A keresett P pontok egy K középpontú, $KP = \sqrt{e^2 + r^2}$ sugarú k' körön vannak. A k' kör bármely P pontja megfelel. A keresett ponthalmaz egy K középpontú, $KP = \sqrt{e^2 + r^2}$ sugarú k' kör.

791. Adott: k; e; α. A szerkesztés: ① e-vel $(+\alpha)$ és $(-\alpha)$ szöget bezáró egyenesek: f és g ② K-ból merőleges f-re és g-re. ③ a merőlegeseknek k-val való metszéspontjai lesznek az érintési pontok: G_1; G_2; F_1; F_2. ④ G_1-ben és G_2-ben párhuzamos g-vel: g_1 és g_2 érintő. ⑤ F_1-ben és F_2-ben párhuzamos f-fel: f_1 és f_2 érintő. 2 vagy 4 megoldás lehet.

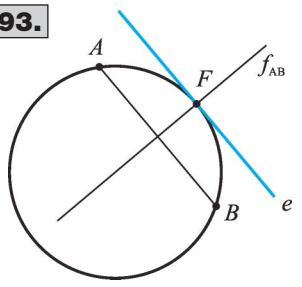
792. Adott: k; e_1; e_2. **1. eset:** e_1 és e_2 nem párhuzamos. A szerkesztés: ① e_1 és e_2 által meghatározott szögek felezése. ② a szögfelezőkre merőleges egyenesek: f és g. ③ K-ból merőleges f-re és g-re. ④ A merőlegeseknek k-val való metszéspontjai lesznek az érintési pontok: G_1; G_2; F_1; F_2. ⑤ G_1-ben és G_2-ben párhuzamos g-vel: g_1 és g_2 érintő. ⑥ F_1-ben és F_2-ben párhuzamos f-fel: f_1 és f_2 érintő. 4 megoldás van.

2. eset: Ha $e_1 \parallel e_2$, akkor a bezárt szög 0°, ezért két e_i-vel párhuzamos megoldás van.

793. Felhasználjuk: AB felezőmerőlegese felezi az AB ívet és átmegy a kör középpontján. A szerkesztés: ① AB felezőmerőlegese: f_{AB}. ② $f_{AB} \cap k = F$. ③ F-ben merőlegest állítunk f_{AB}-re: e. Egyértelmű a megoldás.

794. A K középpontú körhöz P-ből húzott érintők érintési pontjai E_1 és E_2. $E_1PE_2\sphericalangle = \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow E_1PK\sphericalangle = \alpha/2$. A keresett P pontokra KP szakasz hossza egy r befogójú, vele szemben $\alpha/2$ hegyesszögű derékszögű háromszög d átfogója. $\Rightarrow$ A P pontok a K középpontú, d sugarú k' körön vannak. A k' kör minden pontja megfelelő. A keresett ponthalmaz a K középpontú, d sugarú k' kör.

793.

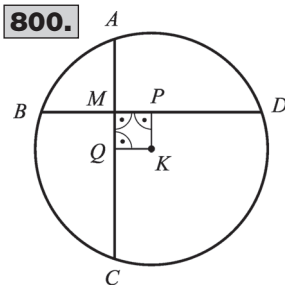


795. A szerkesztés: ① r; 22,5°; 90° $\rightarrow$ $ABC\triangle$. ② K középpontú, AB sugarú kör: k'. ③ $k' \cap e = P$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

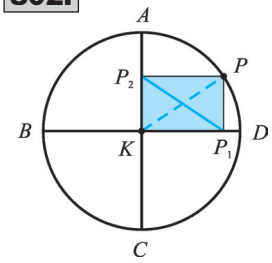
796. Legyen P a feltételeknek megfelelő pont. $\Rightarrow E_1PE_2\sphericalangle =$ $= 60°$. KP felezi az $E_1PE_2\sphericalangle$-et és KE_2 sugár merőleges az E_2P érintőre $\Rightarrow$ A KE_2P derékszögű háromszög hegyesszögei 30° és 60°, ezért $\underline{\underline{KP = 2r}}$.

I

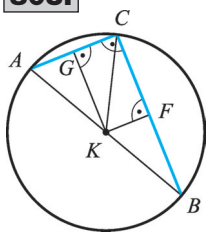
800.



802.



803.



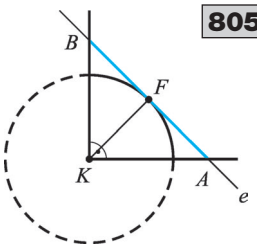
797. Az e-t E-ben érintő körök középpontjai az E-ben e-re állított merőlegesen vannak. A merőleges minden E-től különböző pontja megfelel, mert az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre.

798. Az r sugarú körben AB átmérő, $BC = r$ húr. $OBC\triangle$ szabályos, tehát az $ABC\sphericalangle = 60°$.

799. Az O középpontú, r sugarú körben $AB = AC = r$ húrok. $OAC\triangle$ szabályos $\Rightarrow OAB\sphericalangle = 60°$ és $OAB\triangle$ szabályos $\Rightarrow BAO\sphericalangle = 60°$, ezért $CAB\sphericalangle = CAO\sphericalangle + OAB\sphericalangle = 120°$.

800. Legyen P a BD húr, Q az AC húr felezéspontja! $KP \perp BD$ és $KQ \perp AC$ és $BD \perp AC \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $MPKQ$ négyszög téglalap. BD és AC egyenlő húrok, tehát egyenlő távol vannak a kör középpontjától: $KQ = KP$. Az aláhúzottakból következik, hogy $MPKQ$ négyzet. $\Rightarrow KP = MP = PB - BM = 6$ cm $- 4$ cm, azaz $KP = 2$ cm és $KQ = 2$ cm.

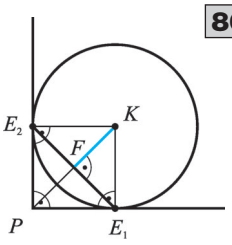
805.



801. A 800. ábra jelöléseit használjuk. A merőlegesség és $KQ = KP$ miatt $MPKQ$ négyzet. $\Rightarrow MP = 1{,}5$ cm, $BD = 7$ cm $\Rightarrow BP = 3{,}5$ cm, $BM = 3{,}5$ cm $- 1{,}5$ cm $= 2$ cm, $MD = 7$ cm $- 2$ cm $= 5$ cm, $MD = MC = 5$ cm, $MB = MA = 2$ cm.

802. Legyen a P pont BD átmérőre vetett merőleges vetülete P_1, AC átmérőre vetett merőleges vetülete P_2. A KP_1PP_2 négyszög téglalap, mert minden szöge 90°. A téglalap átlói egyenlő hosszúak, tehát $P_1P_2 = KP = 4$ cm.

806.



803. A kör K középpontjából a húrra bocsátott merőleges felezi a húrt. $KF \perp CB$ és $KG \perp AC$ és $AC \perp CB \Rightarrow CFKG$ téglalap $\Rightarrow CF = GK = 6$ cm $\Rightarrow CB = 12$ cm és $GC = KF = 4$ cm $\Rightarrow AC = 8$ cm.

804. A K középpontú kör $e_1 \perp e_2$ érintőinek érintési pontja E_1 és E_2, valamint $e_1 \cap e_2 = P$. $E_1P = PE_2$ és a merőlegesség miatt KE_2PE_1 négyzet $\Rightarrow E_1P = PE_2 = 3$ cm.

805. $AKB\sphericalangle = 90°$, KF felezi az ívet, tehát felezi a $BKA\sphericalangle$-et is. $\Rightarrow$ $\Rightarrow BA = 2KF = 12$ cm.

806. PE_1KE_2 négyszög négyzet, átlói felezik egymást. $\Rightarrow PK = E_1E_2 = 3$ cm. $KF = 1{,}5$ cm.

A kör mint ponthalmaz; körök szerkesztése

807. A P ponton átmenő r sugarú körök középpontjai r távolságra vannak P-től. $\Rightarrow$ Rajta vannak a P középpontú r sugarú k körön. A k kör minden pontja a ponthalmazhoz tartozik.

808. Legyen m_1 és m_2 a két merőleges, E és $F \in m_1$ a két pont. Felhasználjuk: A keresett kör átmegy E-n és F-en, ha középpontja rajta van az EF szakasz felezőmerőlegesén. $m_1 \perp m_2$ miatt $f_{EF} \parallel m_2$. Az f_{EF}-en lévő pontok köré rajzolt körök pontosan akkor érintik m_2-t, ha a kör sugara $r = \mathrm{d}(f_{EF}; m_2)$. A szerkesztés: ① EF szakaszfelező merőlegese: f_{EF}. ② $\mathrm{d}(f_{EF}; m_2) = r$ megszerkesztése. ③ E középpontú, r sugarú kör: k. ④ $k \cap f_{EF} = \{O_1; O_2\}$. ⑤ O_1 középpontú, r sugarú

kör: k_1. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_2. Nincs megoldás, ha m_2 elválasztja egymástól E-t és F-et, egyébként 1 vagy 2 kör szerkeszthető.

809. A K középpontú beírt kör G-ben érinti az AC oldalt $\Rightarrow KG \perp AC \Rightarrow KG \perp AG \Rightarrow$ e$(K; G)$ érinti az A középpontú, AG sugarú k_A kört. Hasonlóan megmutatható, hogy e$(K; G)$ érinti a C középpontú, CG sugarú k_C kört. $\Rightarrow k_A$ és k_C köröknek G-ben közös érintője van. $\Rightarrow k_A$ G-ben érinti k_C-t. Az E-beli és F-beli érintkezés hasonlóan látható be. Megjegyzés: Tudjuk, hogy a beírt kör G érintési pontja az AC oldalt $AG = s - a$ és $GC = s - c$ szakaszokra bontja. $AG + GC = s - a + s - c = b$, tehát a két kör sugarának összege egyenlő középpontjaik távolságával, azaz a két kör kívülről érinti egymást.

810. A szerkesztés: ① A háromszög körülírt körének megszerkesztése. $\rightarrow K; R$. ② K középpontú, $(R + e)$ sugarú kör: k_1. ③ K középpontú, $(R - e)$ sugarú kör: k_2. Egy megoldás van, ha $e \geq R$, két megoldás van, ha $e < R$.

811. **1. eset:** $AB = AC$, a háromszög egyenlő szárú. Bármely A középpontú kör teljesíti a feltételt, hogy B-től és C-től egyenlő távolságra halad.

2. eset: $AB > AC$. A szerkesztés: ① A középpontú, b sugarú kör: k_2. ② A középpontú, c sugarú kör: k_1. ③ A középpontú, $\frac{c+b}{2}$ sugarú kör: k_1 és k_2 úgynevezett középköre, k. k távolsága B-től: $c - \frac{c+b}{2} = \frac{c-b}{2}$ és k távolsága C-től: $\frac{c+b}{2} - b = \frac{c-b}{2}$, tehát a távolságok egyenlők.

812. Válasszunk ki a négy pont közül hármat: A-t, B-t és C-t! A szerkesztés: ① $ABC\triangle$ körülírt köre $k_1 \rightarrow K; R_1$. ② K középpontú, $KD = R_2$ sugarú kör: k_2. ③ K középpontú, $\frac{R_1 + R_2}{2}$ sugarú kör: k, a keresett kör. k kör megfelelő, hiszen pl. d$(B; k) = R_1 - \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{R_1 - R_2}{2}$ és d$(D; k) = \frac{R_1 + R_2}{2} - R_2 = \frac{R_1 - R_2}{2}$. Végtelen sok megoldás van, ha a négy pont egy körön van (ezzel a körrel koncentrikus körök). Négy megoldás van, ha a négy pont nincs egy körön. A négy megoldás úgy adódik, hogy négyféleképpen választhatunk ki a pontok közül hármat, amik köré a k_1 kört szerkesztjük.

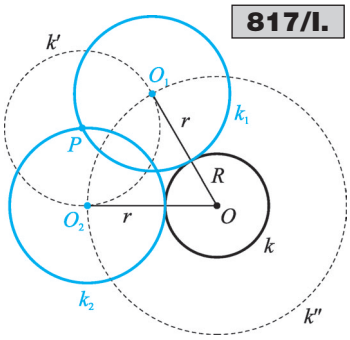
813. Adott: A; B; r. A szerkesztés: ① A középpontú, r sugarú kör: k_1. ② B középpontú, r sugarú kör: k_2. ③ $k_1 \cap k_2 = \{K_1; K_2\}$. ④ K_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. K_2 középpontú, r sugarú kör: k_{II}. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

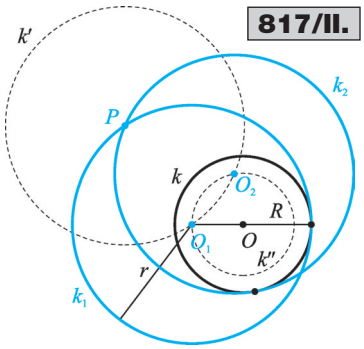
814. Legyen e az adott egyenes, E az érintési pont, P a kitűzött pont. A szerkesztés: ① E-ben merőlegest állítunk e-re: m. ② PE szakaszfelező merőlegese: f_{PE}. ③ $f_{PE} \cap m = K$. ④ K középpontú, KP sugarú kör: k. 0 vagy 1 megoldás lehet.

815. A szerkesztés lépéseit az a és b szögszárak által meghatározott konvex szögtartományban végezzük. A szerkesztés: ① r távolságra párhuzamos a-val: e_2. ② r távolságra párhuzamos b-vel: e_1. ③ $e_1 \cap e_2 = K$. ④ K középpontú, r sugarú kör: k. Konvex szög esetén a kör a szögtartományban, konkáv szög esetén a szögtartományon kívül van.

816. A szerkesztés: ① γ szögfelezője: f_γ. ② $f_\gamma \cap AB = P$. ③ P-ből merőleges CB-re $\rightarrow PE_1 = r$. ④ P középpontú, r sugarú félkör: k. Egyértelműen megoldható.

I





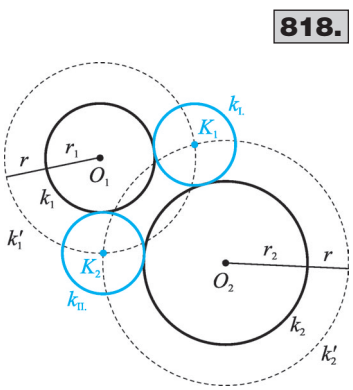
817. **1. eset:** Az adott kör a keresett kört kívülről érinti. Felhasználjuk: $O_1O = O_2O = r + R$ és $O_1P = O_2P = r$. A szerkesztés: ① P középpontú, r sugarú kör: k'. ② O középpontú, $(R + r)$ sugarú kör: k''. ③ $k' \cap k'' = \{O_1; O_2\}$. ④ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_2. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.
2. eset: Az adott kör a keresett kört belülről érinti. Felhasználjuk: $O_1O = O_2O = r - R$ és $O_1P = O_2P = r$. A szerkesztés: ① P középpontú, r sugarú kör: k'. ② O középpontú, $(r - R)$ sugarú kör: k''. ③ $k' \cap k'' = \{O_1; O_2\}$ ④ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_2. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

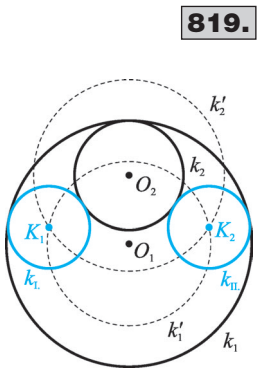
818. Felhasználjuk: $O_1K_1 = O_1K_2 = r_1 + r$ és $O_2K_1 = O_2K_2 = r_2 + r$. A szerkesztés: ① O_1 középpontú, $(r_1 + r)$ sugarú kör: k_1'. ② O_2 középpontú, $(r_2 + r)$ sugarú kör: k_2'. ③ $k_1' \cap k_2' = \{K_1; K_2\}$. ④ K_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. K_2 középpontú, r sugarú kör: k_{II}. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

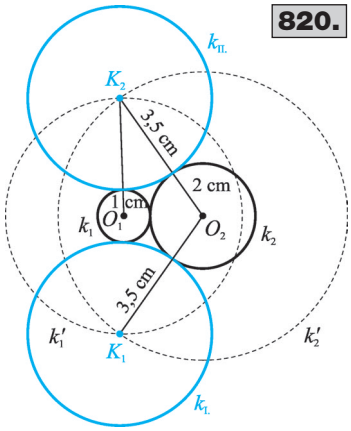
819. Felhasználjuk: $O_1K_1 = O_1K_2 = R_1 - r$ és $O_2K_1 = O_2K_2 = R_2 + r$. A szerkesztés: ① O_1 középpontú, $(R_1 - r)$ sugarú kör: k_1'. O_2 középpontú, $(R_2 + r)$ sugarú kör: k_2'. ② $k_1' \cap k_2' = \{K_1; K_2\}$. ③ K_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. K_2 középpontú, r sugarú kör: k_{II}. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

820. Felhasználjuk: $O_1K_1 = O_1K_2 = 4{,}5$ cm és $O_2K_1 = O_2K_2 = 5{,}5$ cm. A szerkesztés: ① O_1 középpontú, $r_1 + r = 4{,}5$ cm sugarú kör: k_1'. ② O_2 középpontú, $r_2 + r = 5{,}5$ cm sugarú kör: k_2'. ③ $k_1' \cap k_2' = \{K_1; K_2\}$. ④ K_1 középpontú, 3,5 cm sugarú kör: k_1. K_2 középpontú, 3,5 cm sugarú kör: k_{II}.

821. Legyen az adott pont P, az adott egyenes e! Felhasználjuk: $d(O_1; e) = d(O_2; e) = r$ és $O_1P = O_2P = r$. A szerkesztés: ① P középpontú, r sugarú kör: k. ② r távolságra párhuzamos e-vel: f. ③ $k \cap f = \{O_1; O_2\}$. ④ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_2. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.







822. Legyen az adott egyenes e, és annak adott pontja E! A szerkesztés: ① E középpontú, r sugarú kör: k. ② E-ben merőleges e-re: m. ③ $k \cap m = \{O_1; O_2\}$. ④ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_2. Mindig két megoldás van.

823. Legyen az adott egyenes e, az adott k kör középpontja O, sugara R. A szerkesztés: ① e-től r távolságra párhuzamos egyenespár: f_1; f_2. ② O középpontú, $(R - r)$ sugarú kör: k'. O középpontú, $(R + r)$ sugarú kör: k''. ③ $k' \cap f_1 = \{O_3; O_4\}$ és $k' \cap f_2 = \{O_1; O_2\}$ és $k'' \cap f_1 = \{O_7; O_8\}$ és $k'' \cap f_2 = \{O_5; O_6\}$. ④ O_i középpontú, r sugarú kör: k_i $(1 \leq i \leq 8)$. 0-tól 8-ig változhat a megoldások száma.

824. Felhasználjuk: $O_iO = 2r$ és $\mathrm{d}(O_i; e) = r$. A szerkesztés: ① O középpontú, $2r$ sugarú kör: k'. ② e-től r távolságra párhuzamos egyenespár: f_1; f_2. ③ $k' \cap f_1 = \{O_3; O_4\}$ és $k' \cap f_2 = \{O_1; O_2\}$. ④ O_i középpontú, r sugarú kör: k_i $(1 \leq i \leq 4)$. 4 megoldás van.

825. Legyen az adott kör középpontja O, átmérője AB. Felhasználjuk: $O_iO = 2$ cm és $\mathrm{d}(O_i; AB) = 1$ cm. A szerkesztés: ① AB átmérőtől 1 cm-re levő párhuzamos egyenespár: e_1; e_2. ② O középpontú, 2 cm sugarú kör: k'. ③ $k' \cap e_1 = \{O_1; O_2\}$ és $k' \cap e_2 = \{O_3; O_4\}$. ④ O_i középpontú, 1 cm sugarú kör: k_i $(1 \leq i \leq 4)$. 4 megoldás van.

826. Legyen az adott kör középpontja O, sugara r, érintője e, azon az érintési pont E! Felhasználjuk: $\mathrm{d}(O_i; e) = 2r$ és $OO_i = 3r$. **1. eset:** k kívülről érinti a szerkesztett kört. A szerkesztés: ① O középpontú, $3r$ sugarú kör: k'. ② e-től $2r$ távolságra párhuzamos egyenes a körrel azonos félsíkban: f_1. ③ $k' \cap f_1 = \{O_1; O_2\}$. ④ $k' \cap OE = O_3$. ⑤ O_i középpontú, $2r$ sugarú kör: k_i $(1 \leq i \leq 3)$. **2. eset:** k belülről érinti a szerkesztett kört. A szerkesztés: ① O középpontú, $2r - r$ sugarú kör: $k'' \equiv k$. ② $k \cap OE = O_4$. ③ O_4 középpontú, $2r$ sugarú kör: k_4. 4 megoldás van, ha $\alpha \neq 180°$.

827. Legyenek az adott szög szárai a és b. A szerkesztés lépéseit a szögszárak által meghatározott konvex szögtartományban végezzük. A szerkesztés: ① d távolságra párhuzamos a-val: e. ② $e \cap b = K$. ③ K középpontú, d sugarú kör: k. ④ A k kör szögfelezőre vonatkozó tükörképe b-t érinti, középpontja a-n van, tehát szintén megfelel. 2 megoldás van.

828. Legyenek a téglalap csúcsai A, B, C és D. A szerkesztés: ① BD átló felezőmerőlegese: f_{BD}. ② $f_{BD} \cap \mathrm{e}(B; C) = O_1 \rightarrow O_1$ középpontú, O_1D sugarú kör: k_1. $f_{BD} \cap \mathrm{e}(D; C) = O_2 \rightarrow O_2$ középpontú, O_2D sugarú kör: k_2. $f_{BD} \cap \mathrm{e}(A; B) = O_3 \rightarrow O_3$ középpontú, O_3D sugarú kör: k_3. $f_{BD} \cap \mathrm{e}(A; D) = O_4 \rightarrow O_4$ középpontú, O_4D sugarú kör: k_4. ③ AB felezőmerőlegesére tükrözve újabb 4 megoldást kapunk. Ha $ABCD$ négyzet, akkor $O_1 \equiv O_2 \equiv C$, $O_3 \equiv O_4 \equiv D \Rightarrow$ 4 megoldás van.

829. Az $ABO\triangle$ egyenlő szárú és $OAB\sphericalangle = 60° \Rightarrow ABO\triangle$ egyenlő oldalú is $\Rightarrow$ A keresett kör sugara AB-vel egyenlő. A szerkesztés: ① A középpontú, AB sugarú kör és B középpontú, AB sugarú kör metszéspontja: O_1 és O_2. ② O_1 középpontú, AO_1 sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, AO_2 sugarú kör: k_2.

830. A szerkesztés: ① Szerkesszük meg az $ABC\triangle$ beírt körét: k_o (középpontja O_o, sugara r_o). ② O_o középpontú $(r_o - 1\,\mathrm{cm})$ sugarú kör: k. Ha $r_o \leq 1$ cm, akkor nem létezik k, egyébként egyértelmű a megoldás.

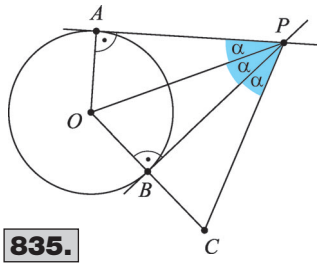
831. A szerkesztést a szögszárak által meghatározott konvex szögtartományban végezzük. Felhasználjuk: A kör E-ben érinti a-t, ha a középpontja rajta van az E-ben a-ra állított m merőlegesen. A kör érinti a szögszárakat, ha középpontja rajta van az f_α szögfelezőn. A szerkesztés: ① $f_\alpha \cap m = K$. ② K középpontú, KE sugarú kör: k. Egyértelmű a megoldás, ha $\alpha \neq 180°$.

832. Felhasználjuk: A kör E-ben érinti e-t, ha a középpontja rajta van az E-ben e-re állított m merőlegesen. A kör érinti az e és f párhuzamosokat, ha a középpontja rajta van e és f középpárhuzamosán, g-n. A szerkesztés: ① $g \cap m = K$. ② K középpontú, KE sugarú kör: k. Egyértelmű a megoldás.

833. Legyen a két párhuzamos e és f, az adott kör középpontja K. A szerkesztés: ① e és f középpárhuzamosa: g. ② $\mathrm{d}(e; g) = r$. ③ K középpontú, $(R + r)$ sugarú kör: k'. K középpontú, $(R - r)$ sugarú kör: k''. ④ $k' \cap g = \{O_1; O_2\}$ és $k'' \cap g = \{O_3; O_4\}$. ⑤ O_i középpontú, r sugarú kör: k_i $(1 \leq i \leq 4)$. 0; 1; 2; 3 vagy 4 megoldás lehet.

834. A szerkesztés: ① e és f középpárhuzamosa: g. ② $\mathrm{d}(e; g) = r$. ③ P középpontú, r sugarú kör: k. ④ $k \cap g = \{O_1; O_2\}$. ③ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_2. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

I



835.

835. $OAPB$ négyszög deltoid, OP szimmetriaátlója felezi az $APB\sphericalangle$-et: $APO\sphericalangle = OPB\sphericalangle = \alpha$. BP merőlegesen felezi az OC szakaszt, ezért felezi az $OPC\sphericalangle$-et: $\alpha = OPB\sphericalangle = BPC\sphericalangle$. $\Rightarrow APC\sphericalangle = APO\sphericalangle + OPB\sphericalangle + BPC\sphericalangle = 3\alpha = \underline{3BPC\sphericalangle}$.

836. Legyen az adott szög csúcsa A, a szögfelező belső pontja P. Felhasználjuk: $P \in f_\alpha$ miatt AP-re a P-ben állított merőleges érinti a szerkesztendő köröket. A szerkesztés: ① P-ben merőleges f_α-ra. A merőlegesnek a szögszárakkal való metszéspontjai B és C. ② k_o kör szerkesztése az $ABC\triangle$-be f_β segítségével. ③ A BC oldalt kívülről érintő k_a kör szerkesztése f_β segítségével. 2 megoldás van.

837. A szerkesztés: ① A keresett kör átmegy A-n és B-n $\Rightarrow$ középpontja rajta van AB felezőmerőlegesén $\rightarrow f_{AB}$. ② A keresett középponttól A R távolságban van, így K rajta van az A középpontú, R sugarú körön $\rightarrow k_A$. ③ $k_A \cap f_{AB} = \{K_1; K_2\} \rightarrow k_1; k_2$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

838. Legyen a megadott kör középpontja O, sugara r, tetszőleges átmérőjének két végpontja A és B. Ha $R > r$, akkor a feltételeknek eleget tevő körök K középpontjaira $AOK\sphericalangle = 90°$. Pitagorasz-tétel szerint: $KO = \sqrt{R^2 - r^2}$, tehát a K pontok O középpontú, $\sqrt{R^2 - r^2}$ sugarú k' körön vannak. A k' kör bármely K pontjához egyértelműen megadható a KO-ra merőleges átmérő, tehát a keresett ponthalmaz az O középpontú, $\sqrt{R^2 - r^2}$ sugarú kör. Ha $R = r$, akkor egyetlen középpont van: O pont. Ha $R < r$, akkor nincs megoldás.

Érintkező körök

839. Ha a k' kör érinti k_1-et az E_1, k_2-t az E_2 pontban, akkor E_2; O'; E_1 és O egy egyenesen vannak. $E_2O' + O'E_1 + E_1O = E_2O$, azaz $E_2O' + O'E_1 + r_1 = r_2 \Rightarrow E_2O' = O'E_1 = \frac{r_2 - r_1}{2} \Rightarrow O'$ rajta van a középkörön. A középkör bármely pontja megfelelő.

840. Legyen a koncentrikus körök középpontja O, a keresett kör középpontja K, sugara r, a külső körrel való érintési pontja E_1, a belsővel E_2. Érintkező körök érintési pontja rajta van a körök centrálisán. $2r = E_1E_2 = r_2 + r_1 \Rightarrow r = \frac{r_2 + r_1}{2}$. $OK = r_2 - r = r_2 - \frac{r_2 + r_1}{2} = \frac{r_2 - r_1}{2}$. A keresett körök középpontjai az eredeti körökkel koncentrikus, $\frac{r_2 - r_1}{2}$ sugarú k' körön helyezkednek el. Az érintő körök sugara $r = \frac{r_2 + r_1}{2}$. A k' kör minden pontja egy-egy érintő kör középpontja.

841. **1. eset:** A belső kör kívülről érinti a keresett kört. Felhasználjuk: A 839. feladatból tudjuk, hogy a k_1-et kívülről és k_2-t belülről érintő körök középpontjai az O középpontú, $\frac{r_2 + r_1}{2}$ sugarú körön vannak, sugaruk $\frac{r_2 - r_1}{2}$. A szerkesztés: ① O középpontú, $\frac{r_2 + r_1}{2}$ sugarú kör: k'. ② P középpontú, $r = \frac{r_2 - r_1}{2}$ sugarú kör: k''. ③ $k' \cap k'' = \{O_1; O_2\}$. ④ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_{II}. 0; 1 vagy 2 megoldás van.

2. eset: A belső kör belülről érinti a keresett kört. Felhasználjuk: A 840. feladatból tudjuk, hogy azoknak a köröknek a középpontjai, amelyek a k_2-t belülről érintik és amelyeket a k_1 belülről

érint, az O középpontú, $\frac{r_2-r_1}{2}$ sugarú körön vannak, sugaruk $\frac{r_2+r_1}{2}$. A szerkesztés: ① O középpontú, $\frac{r_2-r_1}{2}$ sugarú kör: k', ② P középpontú, $r=\frac{r_2+r_1}{2}$ sugarú kör: k''. ③ $k'\cap k''=\{O_1; O_2\}$. ④ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_{II}. 0; 1 vagy 2 megoldás van.

842. Felhasználjuk: A keresett körök csak olyanok lehetnek, amik k_2-t belülről, k_1-et kívülről érintik. Az 839. feladatban láttuk, hogy az ilyen körök középpontjai a két kör középkörén vannak, sugaruk $r=\frac{r_2-r_1}{2}$. Az e egyenest érintő körök középpontjai az e-től r távolságra lévő párhuzamos egyenespáron vannak. A szerkesztés: ① k_1 és k_2 középköre: k'. ② e-től r távolságra levő párhuzamos egyenesek: f_1 és f_2. ③ $k'\cap f_1=\{O_1; O_2\}$ és $k'\cap f_2=\{O_3; O_4\}$. ④ O_i középpontú, r sugarú kör: k_i $(1\le i\le 4)$. 4 megoldás van.

843. Felhasználjuk: k' átmegy O-n és P-n, ha középpontja rajta van az OP szakaszfelező merőlegesén. k' érinti k-t, ha O; K és E egy egyenesen vannak. $\Rightarrow OE$ a k' kör átmérője $\Rightarrow$ $\Rightarrow POE\triangle$ P-ben derékszögű. A szerkesztés: ① OP felezőmerőlegese: f_{OP}. ② P-ben merőleges OP-re: e. ③ $e\cap k=\{E; F\}$. ④ $OE\cap f_{OP}=K_1$ és $OF\cap f_{OP}=K_2$. ⑤ K_1 középpontú, K_1P sugarú kör: k_1'. K_2 középpontú, K_2P sugarú kör: k_2'. Nincs megoldás, ha P a körön kívül van. Egy megoldás van, ha $P\in k$. Két megoldás van, ha P a kör belső pontja, de nem azonos O-val. Végtelen sok megoldás van, ha $P\equiv O$.

844. *a)* $k_1\cap k_2=\emptyset$. *b)* k_1 kívülről érinti k_2-t. *c)* $k_1\cap k_2=\{A; B\}$. *d)* k_2 belülről érinti k_1-t. *e)* k_1 tartalmazza k_2-t. *f)* k_1 és k_2 koncentrikusak.

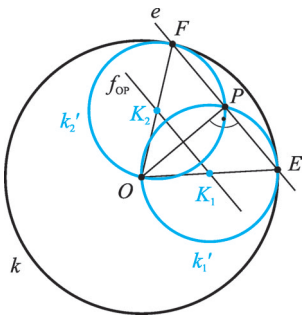
845. A szerkesztés: ① AB alaphoz tartozó magasság: m_c, talppontja F (m_c szimmetriatengely, tehát a két szerkesztendő kör erre a tengelyre vonatkozóan egymás tükörképe). ② $AFC\triangle$ beírt körének középpontja két szögfelező metszéspontja $\Rightarrow k_1$ kör. ③ k_1-et tükrözzük m_c egyenesére: k_2. Egyértelmű a megoldás.

846. A szerkesztendő kör a PQ ívet annak F felezéspontjában érinti. F-ben közös a kör és a PQ ív érintője, ami AF-re merőleges és B-ben, illetve C-ben metszi AP, illetve AQ félegyeneseket. $\Rightarrow$ Az $ABC\triangle$ beírt körét kell megszerkeszteni AF és f_β segítségével. A feladat egyértelműen megoldható.

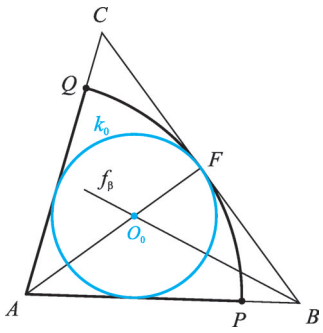
847. Az oldalíveket a felezéspontjukban érinti a szerkesztendő kör. A kör középpontja az $ABC\triangle$ beírt körének középpontjával azonos. A kör sugara az OF távolság, ahol F az ívháromszög egyik oldalívének felezéspontja. A feladat egyértelműen megoldható.

848. A keresett körök az adott kör középpontja körüli 120°-os forgatással egymásba vihetők. Osszuk fel az adott kört 3 db 120°-os középponti szögű egybevágó körcikkre! A 846. feladatnál látott módon mindegyik körcikkbe megszerkesztjük a beírt kört.

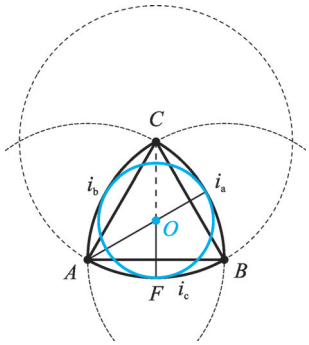
843.



846.

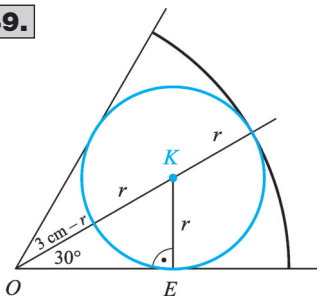


847.

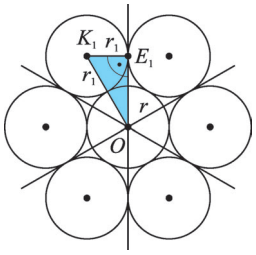


I

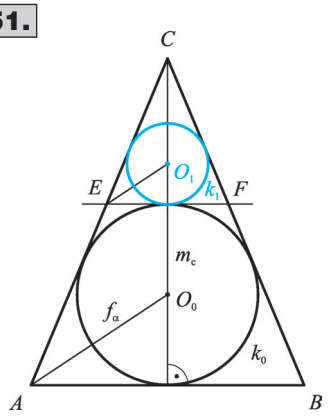
849.



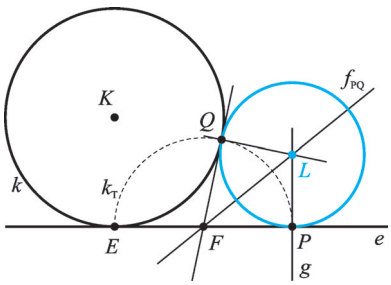
850.



851.



852.



849. A keresett körök az adott kör középpontja körüli 60°-os forgatással egymásba vihetők. Osszuk fel az adott kört 6 db egybevágó körcikkre. Az 846. feladatnál látott módon mindegyik körcikkbe megszerkesztjük a beírt kört. Az OEK derékszögű háromszögben 30° és 60° a hegyesszögek, ezért $OK = 2KE$, $3\text{ cm} - r = 2r \Rightarrow r = 1\text{ cm}$.

850. Osszuk fel az O-nál levő teljesszöget 6 db 60°-os szögtartományra! Az adott körből egy-egy körcikket vágunk ki 60°-os középponti szöggel, és a szögszárakat és ezt a körcikket kívülről érintő kört keresünk. A K_1E_1O derékszögű háromszögben 30° és 60° a hegyesszögek, tehát $2r_1 = r_1 + r$, azaz $r_1 = r$. A szerkesztendő körök sugara az adott kör sugarával egyenlő, így a 60°-os szög száraival r távolságban húzott párhuzamosok metszéspontja lesz a keresett kör középpontja.

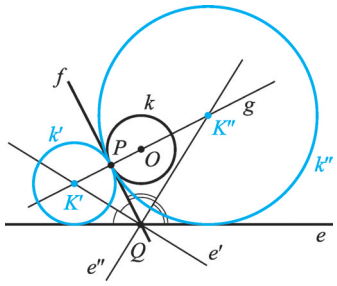
851. A keresett körnek és az $ABC\triangle$ beírt körének középpontja, valamint a két kör érintési pontja az alaphoz tartozó magasságon van. k_o AB-vel párhuzamos másik érintője közös érintő a két körhöz. A szerkesztés: ① k_0 beírt kör szerkesztése f_α és m_c segítségével. ② k_0 AB-vel párhuzamos érintője: EF. ③ $EFC\triangle$ beírt körének szerkesztése $CEF\sphericalangle$ szögfelezője és m_c segítségével: k_1. Egyértelmű a megoldás.

852. **1. eset:** $P \equiv E$. Végtelen sok ilyen kör van, középpontjaik az E-ben e-re állított merőlegesen vannak.
2. eset: $P \not\equiv E$. Felhasználjuk: A szerkesztendő és az eredeti kör közös belső érintőjének a közös külső érintővel való metszéspontja F. Az érintő szakaszok egyenlősége miatt $EF = FQ = FP \Rightarrow E, Q, P$ az F középpontú, EP átmérőjű körön vannak. A szerkesztés: ① EP átmérőjű kör → k_T. ② $k_T \cap k = \{E; Q\}$. ③ PQ felezőmerőlegese → f_{PQ}. ④ P-ben merőleges e-re → g. ⑤ $f_{PQ} \cap g = L$. ⑥ L középpontú, LP sugarú kör. Egyértelmű a megoldás.

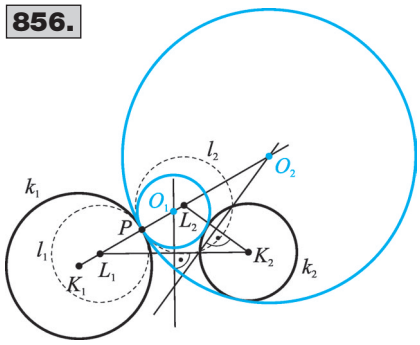
853. Felhasználjuk: Két egymást érintő körnek a közös pontban közös az érintője. Két egymást érintő kör centrálisa tartalmazza a közös pontot. A szerkesztés: ① OP centrális: g. ② OP-re merőleges P-ben: közös érintő, f. ③ f és e által meghatározott szögek szögfelezői: e'; e''. ④ $e' \cap g = K'$, K' középpontú, $K'P$ sugarú kör: k'. $e'' \cap g = K''$, K'' középpontú, $K''P$ sugarú kör: k''. Nincs megoldás $e \equiv g$ esetén, egyébként 1 vagy 2 megoldás lehet.

854. Az l érintő kör K középpontja rajta van az r sugarú körök középpontjait összekötő szakasz f felezőmerőlegesén és az O_1P egyenesen, ahol $P \in k_1$. Húzzunk O_1-en át párhuzamost f-fel: f_1. $f_1 \cap k_1 = \{A; B\}$. Kívülről érintő kör esetén P pont az AB átmérő által meghatározott k_2-höz közelebbi nyílt félkörön, belülről érintő kör esetén a k_2-től távolabbi nyílt félkörön van. Ha $P \equiv A$ vagy $P \equiv B$, akkor nincs érintő kör.

853.



856.



855. A 854. feladatban láttuk: a kívülről érintés feltétele, hogy P a k_2-höz közelebbi félkörön, a belülről érintésé pedig, hogy P a k_2-től távolabbi félkörön legyen. A szerkesztés: ① O_1O_2 felezőmerőlegese: $f_{O_1O_2}$. ② $e(P; O_1) \cap f_{O_1O_2} = K$. ③ K középpontú, KP sugarú kör: k.

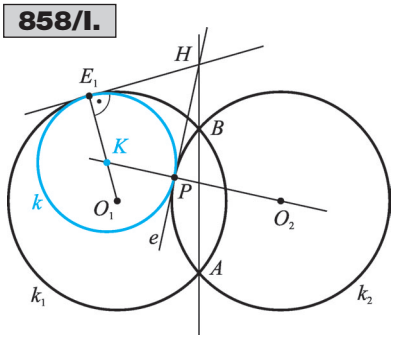
856. Ha azt szeretnénk, hogy a keresett kör P-ben érintse k_1-et, közös kell legyen a P-beli érintőjük, ezért k_1 helyett bármilyen más P-n átmenő kört is vehetünk, aminek PK_1 félegyenesen van a középpontja. A szerkesztés: ① Legyen l_i olyan L_i középpontú, r_2 sugarú kör, amelyre $L_i \in PK_1$ és $P \in l_i$ ($i \in \{1; 2\}$). ② l_i-t és k_2-t érintő körök középpontjai a tengelyes szimmetria miatt L_iK_2 felezőmerőlegesén vannak $\rightarrow f_{L_iK_2}$. ③ $e(K_1; P) \cap f_{L_iK_2} = O_i$. ④ O_i középpontú, O_iP sugarú kör. 1 vagy 2 megoldás lehet.

857. Legyen a közös részt határoló ív adott pontja P, és a P-t tartalmazó kör középpontja O_2. A keresett kör K középpontja rajta van az O_2P egyenesen, a tengelyes szimmetria miatt pedig az AB egyenesen, ahol A és B a körök közös pontjai. A szerkesztés: ① $e(O_2; P) \cap e(A; B) = K$. ② K középpontú, KP sugarú kör: k. Egyértelmű a megoldás.

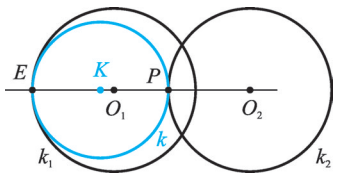
858. **1. eset:** $P \notin e(O_1; O_2)$. A szerkesztés: ① A keresett kör K középpontja rajta van az O_2P egyenesen. ② P-ben közös a k és k_2 kör érintője: e. ③ $e \cap e(A; B) = H$. ④ $HE_1 = HP$ miatt az E_1 érintési pont kijelölhető a k_1 körön. ⑤ $e(E_1; O_1) \cap e(P; O_2) = K$. ⑥ K középpontú, KP sugarú kör: k. Egyértelmű a megoldás.

2. eset: $P \in e(O_1; O_2)$. A PE átmérőjű kör a megoldás.

858/I.

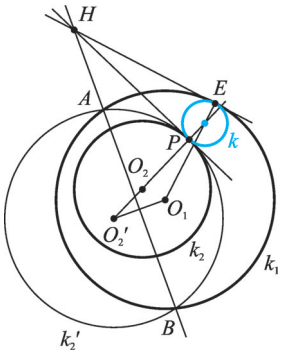


858/II.



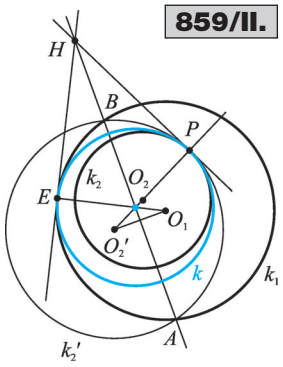
859. **1. eset:** k belülről érinti k_1-et és kívülről k_2-t. A k kör P-ben érinti k_2-t, ha P-ben közös az érintőjük. Cseréljük ki a k_2 kört arra a P-n átmenő k_2' körre, aminek az O_2' középpontja rajta van PO_2 félegyenesen, sugara pedig r_1-gyel egyenlő. k_2' és k_1 körök teljesítik a 858. feladat feltételeit, tehát az ott leírt eljárással szerkeszthető meg a k kör.

859/I.



I

859/II.



2. eset: k belülről érinti k_1-et, és k_2 belülről érinti k-t. Az 1. esetnél vázolt módszerrel a megoldás visszavezethető a 857. feladatra. Minden P ponthoz egyértelműen található az 1. és a 2. esetnek megfelelő megoldás is.

860. Legyen az egyik kör pontja A_1, a másiké A_2. Kössük össze A_1-et és A_2-t a két kör közös érintési pontjával, E-vel! E, O_1 és O_2 az érintkezés miatt egy egyenesen vannak. $EO_2A_2\sphericalangle = EO_1A_1\sphericalangle$, mert váltószögek. $EO_2A_2\triangle$ és $EO_1A_1\triangle$ egyenlő szárú, szárszögük az előbbiek miatt egyenlő, tehát az alapon fekvő szögeik is egyenlők: $\underline{O_2EA_2\sphericalangle} = EA_2O_2\sphericalangle = \underline{O_1EA_1\sphericalangle} = EA_1O_1\sphericalangle$. Az aláhúzott egyenlőség azt jelenti, hogy A_1A_2 egyenes átmegy E-n, hiszen ezeknek a szögeknek az O_2E, illetve O_1E szára ugyanannak az egyenesnek két kiegészítő félegyenese, egyenlőségük és helyzetük miatt a másik szárnak is ilyennek kell lenni.

861. Legyen az egyik kör pontja A_1, a másiké A_2. Kössük össze A_1-et és A_2-t a két kör közös érintési pontjával, E-vel! E, O_1 és O_2 az érintkezés miatt egy egyenesen vannak. $EO_2A_2\sphericalangle = EO_1A_1\sphericalangle$, mert egyállású szögek. $EO_2A_2\triangle$ és $EO_1A_1\triangle$ egyenlő szárú, szárszögük az előbbiek miatt egyenlő, tehát az alapon fekvő szögeik is egyenlők: $\underline{O_2EA_2\sphericalangle} = EA_2O_2\sphericalangle = \underline{O_1EA_1\sphericalangle} = EA_1O_1\sphericalangle$. Az aláhúzott egyenlőség azt jelenti, hogy A_1A_2 egyenes átmegy E-n, hiszen ezeknek a szögeknek az O_2E, illetve O_1E szára ugyanannak az egyenesnek két félegyenese. Egyenlőségük és helyzetük miatt a másik szárnak is ilyennek kell lenni.

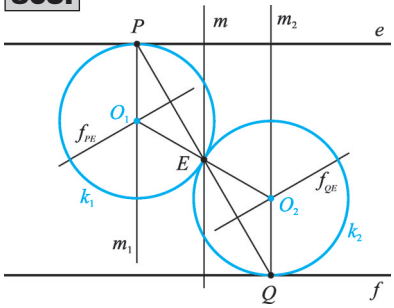
862. Legyen $P \in e$ a közös érintő E-től különböző tetszőleges pontja! P-ből k_1-hez húzott érintőszakaszok egyenlők, tehát $\underline{PE_1 = PE}$. P-ből k_2-hez húzott érintőszakaszok egyenlők, tehát $\underline{PE_2 = PE}$. Az aláhúzott egyenlőségekből $\Rightarrow PE_1 = PE_2$. Az állítás kívülről és belülről érintő körökre egyaránt igaz.

863. Legyen az e egyenesen kijelölt két érintési pont P és Q. Legyen a két kör E-beli közös érintőjének e-vel való metszéspontja F! F-ből k_1-hez húzott érintőszakaszok egyenlők, tehát $PF = FE$. Hasonlóan: $QF = FE$. $FP = FE = FQ$ miatt E rajta van a PQ átmérőjű körön. Ennek a körnek P-től és Q-tól különböző bármely pontja egyértelműen meghatároz két érintő kört. A keresett ponthalmaz tehát a PQ átmérőjű kör, P-t és Q-t kivéve.

864. Legyen a k_1 és k_2 körök érintési pontja E, közös érintőszakaszuk E_1E_2, F pedig az E_1E_2 átmérőjű kör középpontja! $FE_1 = FE_2$ e kör sugara. $FE_1 = FE$, mert az F-ből k_1-hez húzott érintőszakaszok egyenlők. $\Rightarrow E$ rajta van az F középpontú E_1E_2 átmérőjű körön.

865. Adott: e; $P \in e$; f; $Q \in f$. A szerkesztés: ① k_1 P-ben érinti e-t, ezért O_1 rajta van a P-ben e-re állított merőlegesen $\rightarrow m_1$. ② Hasonlóan: $O_2 \in m_2$. ③ A körök egyenlő sugara miatt az E érintési pont rajta van m_1 és m_2 középpárhuzamosán, m-en. A 860. feladat feltételei teljesülnek a PO_1 és O_2Q ellentétes irányú párhuzamos sugarakra $\Rightarrow$ a közös E érintési pont rajta van PQ-n. ④ $PQ \cap m = E$. ⑤ $f_{PE} \cap m_1 = O_1$ és $f_{QE} \cap m_2 = O_2$. Megjegyzés: A két kör nem feltétlenül esik a párhuzamosok által meghatározott sávba. A feladat egyértelműen megoldható.

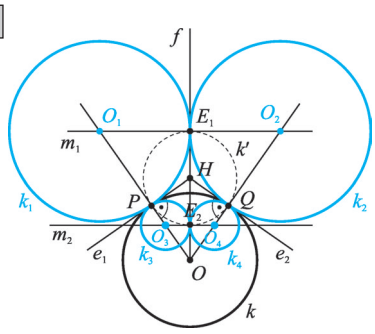
865.



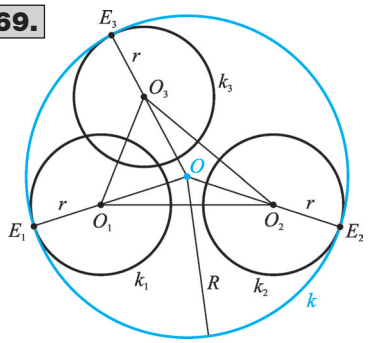
866. A négy kör sugara egyenlő. A négyzet K középpontja körüli negyedrendű forgásszimmetriája miatt a körök egymásba forgathatók. $KE_1 = KE_2$, mert a K-ból k_1-hez húzott érintőszakaszok hossza egyenlő. Hasonlóan: $KE_2 = KE_3$; $KE_3 = KE_4$ és $KE_4 = KE_1$. $E_1E_2E_3E_4$ olyan négyszög, amelynek átlói merőlegesen felezik egymást és egyenlők, tehát ez a négyszög négyzet.

867. A szerkesztés: ① k_1 E_1-ben érinti e-t, ezért $O_1 \in m_1$ ($m_1 \perp e$; $E_1 \in m_1$). ② Hasonlóan $O_2 \in m_2$ ($m_2 \perp e$; $E_2 \in m_2$). ③ A közös érintési pont rajta van m_1 és m_2 egyenesek középpárhuzamosán, m-en. ④ $d(m; m_1) = d(m; m_2) = r$ a körök sugara. ⑤ r távolságra párhuzamost húzunk e-vel: f. ⑥ $f \cap m_1 = O_1$ és $f \cap m_2 = O_2$.

868.



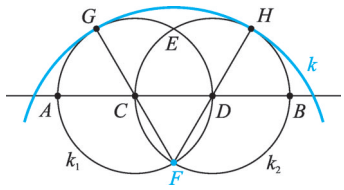
869.



⑦ O_1 középpontú, r sugarú kör: k_1. O_2 középpontú, r sugarú kör: k_2. A másik félsíkban is kapunk megoldást, így összesen két körpár létezik.

868. Mivel egyenlő sugarú köröket keresünk, k_1 és k_2 közös belső érintője a $POQ\sphericalangle$ szögfelezője lesz. k-nak P-beli és Q-beli érintője a fenti szögfelező H pontjában metszik egymást. H-ból k_1-hez húzott érintőszakaszok egyenlők: $HP = HE$. H-ból k_2-hez húzott érintőszakaszok egyenlők: $HQ = HE$. A szerkesztés: ① $POQ\sphericalangle$ szögfelezője: f. ② k kör P-beli érintője: e_1. ③ $e_1 \cap f = H$. ④ H középpontú, HP sugarú kör: k'. ⑤ $k' \cap f = \{E_1; E_2\}$. ⑥ E_i-ben merőleges f-re: m_i. ⑦ $m_1 \cap e(O; P) = \{O_1; O_3\}$ és $m_2 \cap e(O; Q) = \{O_2; O_4\}$. ⑧ O_i középpontú, O_iP, illetve O_iQ sugarú kör: k_i $(1 \le i \le 4)$. Egy körpár létezik, ha PQ átmérő. Egyébként két körpár a megoldás.

870.



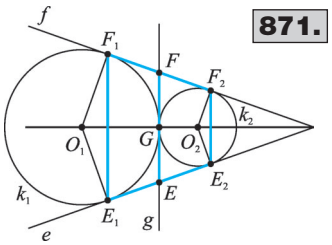
869. A közös érintési pontnak a centrálison kell lennie, ezért E_1; O_1; O és E_2; O_2; O és E_3; O_3; O egy-egy egyenesen vannak. $OO_1 = R - r$; $OO_2 = R - r$; $OO_3 = R - r \Rightarrow O$ az $O_1O_2O_3\triangle$ körülírt körének középpontja. A szerkesztés: ① $O_1O_2O_3\triangle$ körülírt körének középpontja: O. ② O középpontú, $(OO_1 + r)$ sugarú kör: k. Nincs megoldás, ha O_1; O_2; O_3 egy egyenesen vannak.

870. Jelöljük az AB szakasz harmadának hosszát r-rel. $CE = CF = DE = DF = r$. Az F-ből induló átmérő másik végpontja G, $2r$ távolságra van F-től. $\Rightarrow G$ rajta van az F középpontú, $2r$ sugarú k körön. A k_1 és k körök érintik egymást G-ben, mert k_1 középpontja C, k középpontja F és a két kör közös pontja G egy egyenesen vannak. Hasonlóan megmutatható, hogy k_2 H-ban érinti k-t.

Körök és érintők

871. Az O_1O_2 centrálisra való tengelyes szimmetria miatt $E_1E_2F_2F_1$ húrtrapéz, mivel a szimmetriatengely oldalakat felez. $\Rightarrow E_1E_2 = F_1F_2$. Legyen a két kör közös belső érintője g. $EG = EE_1$ a k_1 körhöz, $EG = EE_2$ a k_2 körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt. $\Rightarrow g$ felezi az E_1E_2, illetve F_1F_2 szakaszokat $\Rightarrow EF$ a trapéz középvonala. $FE = FG + GE = 2FG = F_1F + FF_2 = F_1F_2 = E_1E_2$.

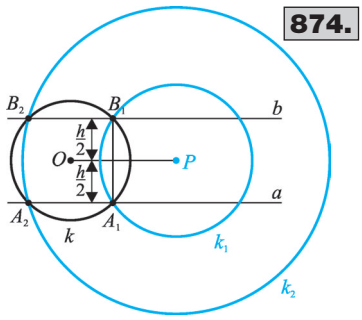
871.



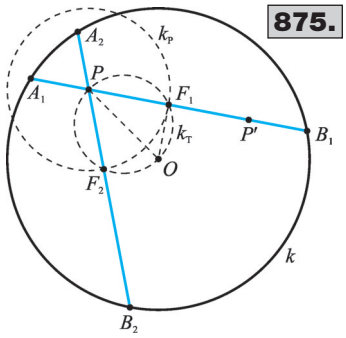
872. Legyen a két adott pont P és Q, az adott távolság r. A szerkesztés: ① Q-tól r távolságra lévő pontok halmaza a Q középpontú, r sugarú kör: k. ② P-ből szerkesszünk k-hoz érintőt $\rightarrow e_1$; E_1; e_2; E_2. ③ $PE_1 \perp QE_1$ miatt $d(Q; e_1) = r$ és $PE_2 \perp QE_2$ miatt $d(Q; e_2) = r$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

I

874.



875.



873. Legyen a két adott pont P és Q, az érintőszakasz e. A szerkesztés: ① Az E érintési pont rajta van PQ Thalész körén: k_T. ② Az E érintési pont e távolságra van P-től $\rightarrow k_P$. ③ $k_P \cap k_T = \{E_1; E_2\}$. ④ Q középpontú, QE sugarú kör: k. P és Q szerepe felcserélhető. 0 vagy 1 megoldás lehet.

874. A szerkesztés: ① k és k_1 körök közös húrja szimmetrikus az OP centrális egyenesére. ② OP-vel párhuzamos $h/2$ távolságra: a és b. ③ $a \cap k = \{A_1; A_2\}$ és $b \cap k = \{B_1; B_2\}$. ④ P középpontú, $PA_1 = PB_1$ sugarú kör: k_1. P középpontú, $PA_2 = PB_2$ sugarú kör: k_2. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

875. Felhasználjuk: A feltétel szerint $PB - PA = h$. Ha B-ből PA-val egyenlő szakaszt mérünk az AB húrra, akkor a kapott P' pontra teljesül, hogy $PP' = h$. PP' felezőpontja AB felezőpontjával megegyezik, így $OFP\sphericalangle = 90°$. A szerkesztés: ① OP Thalész köre: k_T. ② P középpontú, $h/2$ sugarú kör: k_P. ③ $k_P \cap k_T = \{F_1; F_2\}$. ④ PF_1 húrja A_1B_1 és PF_2 húrja A_2B_2. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

876. A közös belső érintő az O_1O_2 centrálisra E-ben állított merőleges: e. A közös külső érintők szerkesztése: **1. eset:** Ha $r_1 = r_2 = r$, akkor a centrálistól r távolságra húzódó párhuzamos egyenespár a két külső érintő.

2. eset: Ha $r_1 > r_2$, akkor O_2-ből érintőket szerkesztünk az O_1 középpontú, $(r_1 - r_2)$ sugarú körhöz, majd ezeket az érintőket rájuk merőlegesen a k_1 körvonalig toljuk: e_1 és e_2. (Részletesebb megoldás az 568. feladatnál.)

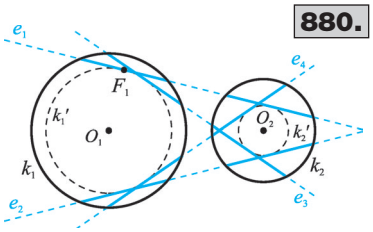
877. Vegyünk fel egy O_1 középpontú, 2 cm sugarú k_1 kört és egy O_2 középpontú, 3 cm sugarú k_2 kört. A k_1 és k_2 körök közös érintői teljesítik a feladat elvárásait. A közös érintők szerkesztését lásd a 876. vagy az 568. feladatnál!

878. A két kör tengelyesen szimmetrikus az O_1O_2 szakasz felezőmerőlegesére, így a közös belső érintők szimmetrikusak lesznek az O_1O_2 szakasz felezőpontjára, P-re. P-ből érintőket szerkesztünk az egyik körhöz, ezek a szimmetria miatt érintik a másik kört is. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

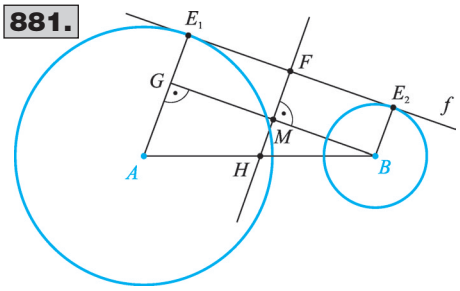
879. Jelöljük a körök középpontját O_1-gyel, illetve O_2-vel, sugarát r_1-gyel, illetve r_2-vel. Nincs közös érintőjük: $O_1O_2 < r_2 - r_1$. 1 közös érintőjük van: $O_1O_2 = r_2 - r_1$. 2 közös érintőjük van: $r_2 - r_1 < O_1O_2 < r_2 + r_1$. 3 közös érintőjük van: $O_1O_2 = r_2 + r_1$. 4 közös érintőjük van: $O_1O_2 > r_2 + r_1$.

880. Felhasználjuk: A 776. feladatban láttuk, hogy a k_1 kör h_1 hosszú húrjainak F_1 felezőpontjai az O_1 középpontú, $\sqrt{r_1^2 - \frac{h_1^2}{4}}$ sugarú körön vannak. E kör F_1-beli érintője merőleges O_1F_1-re, tehát a k_1 kör h_1 hosszú húrjához vezet. Hasonlót mondhatunk el a k_2 kör h_2 hosszú húrjairól is. A szerkesztés: ① O_1 középpontú, $\sqrt{r_1^2 - \frac{h_1^2}{4}}$ sugarú kör: k_1'. ② O_2 középpontú, $\sqrt{r_2^2 - \frac{h_2^2}{4}}$

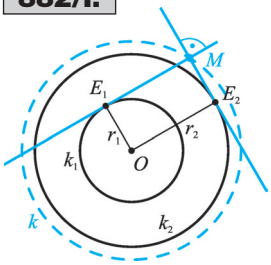
880.



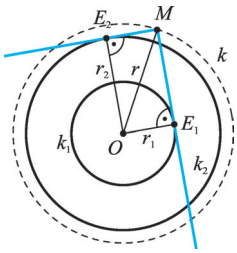
881.



882/I.



882/II.



sugarú kör: k_2'. k_1' és k_2' közös érintőinek megszerkesztése (lásd 568. feladat). k_1' és k_2' helyzetétől függően 0; 1; 2; 3 vagy 4 megoldás lehet.

881. Induljunk ki a kész ábrából! ABE_2E_1 négyszög derékszögű trapéz, párhuzamos oldalai $AE_1 = r_1$, $BE_2 = r_2$, derékszögű szára $E_1E_2 = e$. Húzzuk meg a trapéz B-ből induló magasságát: $GB = e$. A magasságnak a középvonallal való metszéspontja M, $MB = e/2$. A szerkesztés: ① AB felezéspontja H. ② HB Thalész köre: k_T. ③ B középpontú, $e/2$ sugarú kör: k_B. ④ $k_T \cap k_B = M$. ⑤ H-ból HM félegyenesre $\frac{r_1 + r_2}{2}$ szakasz felvétele $\rightarrow F$. ⑥ F-ben merőleges HF-re: f. ⑦ A-ból merőleges f-re $\rightarrow E_1$. B-ből merőleges f-re $\rightarrow E_2$. ⑧ A középpontú, AE_1 sugarú kör és B középpontú, BE_2 sugarú kör. Nincs megoldás, ha $e > AB$, egyébként egy körpár létezik.

882. A keresett derékszög M csúcsa, szárainak k_1, illetve k_2 körrel való érintési pontjai és a közös körközéppont téglalapot határoznak meg. $OE_2 = E_1M = r_2$ és $OE_1 = E_2M = r_1 \Rightarrow OM = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = r$. Az M pontok O középpontú, r sugarú k körön vannak. A k kör tetszőleges M pontjára Pitagorasz tételéből $E_2M = r_1$ és $E_1M = r_2$, ezért E_1ME_2O paralelogramma. $OE_1 \perp E_1M$, így E_1ME_2O téglalap $\Rightarrow E_2ME_1\sphericalangle = 90°$. $\Rightarrow$ A k kör bármely pontjához egyértelműen tartozik két érintő, melyek derékszöget zárnak be egymással. A keresett ponthalmaz tehát az O középpontú, r sugarú kör.

Kerületi és középponti szögek

883. 90°, illetve 45°; 270°, illetve 135°; 144°, illetve 72°; 300°, illetve 150°; 108°, illetve 54°.

884. $\beta = 60°$ és $\alpha = 120°$. **885.** $\beta = 36°42'16''$ és $\alpha = 73°24'32''$. **886.** $d(K; AB) = 5\,cm$.

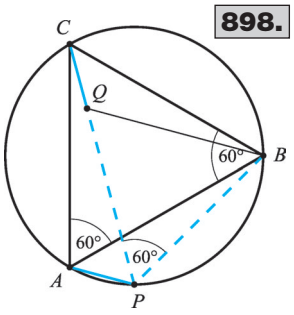
887. $d(K; AB) = 2\,cm$. **888.** $APB\sphericalangle = 148°$. **889.** $\gamma = 63°$, $\alpha = 34°$, $\beta = 83°$.

890. $BKC\sphericalangle = 2\alpha$. **891.** $AQB\sphericalangle = 52°$. **892.** 56,5° alatt; 132,5° alatt; E és F pontokból 0° alatt. **893.** 30° alatt; 150° alatt; A-ból és B-ből 0° alatt. **894.** 120°. **895.** $ABC\sphericalangle = 60°$.

896. A K középpontú körben AC átmérő, AB húr és $BAC\sphericalangle = 30°$. $BKC\sphericalangle = 2BAC\sphericalangle = 60°$, $BK = CK = r$.

897. Legyen az érintőnek az átmérő egyenesével való metszéspontja D. $BKC\sphericalangle = 2 \cdot BAC\sphericalangle = 60° \Rightarrow$ a BKD derékszögű háromszögben $2BK = KD = KC + CD$, és mivel $BK = KC$, $BK = CD$.

898.

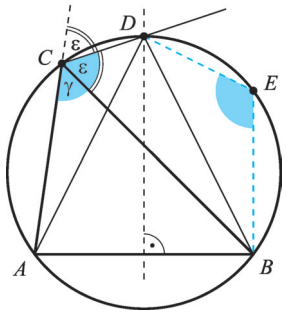


898. 1. eset: P a C-t nem tartalmazó AB ív belső pontja. $ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow BPC\sphericalangle = BAC\sphericalangle = 60°$, mert BC ívhez tartozó kerületi szögek. Legyen $Q \in PC$ olyan pont, amelyre $PQ = QB \Rightarrow PQB\triangle$ szabályos. Tekintsük a B pont körüli +60°-os elforgatást: $C' = A$, $Q' = P$, $B' = B \Rightarrow BQC\triangle \cong BPA\triangle$. $\Rightarrow AP = QC$ és $PC = PQ + QC = PB + AP$. Hasonlóan belátható az állítás a kör másik két ívén levő pontokra.

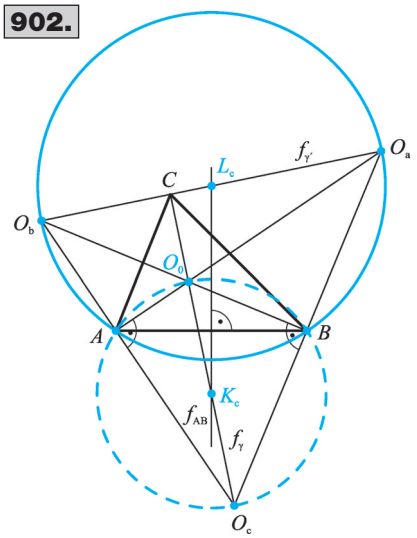
2. eset: $P \equiv B$. $PA + PB = BA + BB = BA = BC = PC$.

I

901.



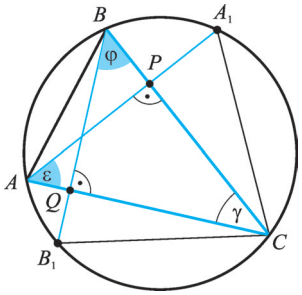
902.



899. Jelöljük a B csúcsból induló szögfelező és a kör metszéspontját D-vel. BD szögfelező, ezért $ABD\sphericalangle = DBC\sphericalangle$, így AD ív egyenlő DC ívvel $\Rightarrow AD = DC$.

900. Az előző feladat jelöléseit használva: BD szögfelező, ezért $ABD\sphericalangle = DBC\sphericalangle$, így AD ív egyenlő DC ívvel $\Rightarrow AD = DC \Rightarrow D$ rajta van az AC felezőmerőlegesén, ugyanakkor a szögfelezőn és a háromszög köré írható körön is. Megjegyzés: Ha $AB = BC$, akkor az $ABC\sphericalangle$ felezője és az AC oldal felezőmerőlegese egybeesik és az AC ív felezőpontján halad át.

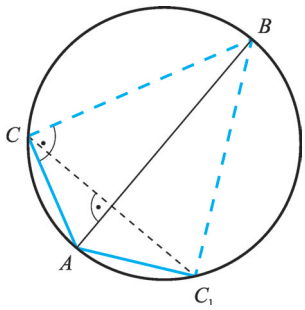
904/I.



901. AD húr C-ből $(\gamma + \varepsilon)$ szög alatt látszik. DB húr C-ből ε szög alatt látszik, ezért E-ből $(180° - \varepsilon) = \gamma + \varepsilon$ szög alatt $\Rightarrow AD = DB \Rightarrow D$ rajta van AB felezőmerőlegesén is. Megjegyzés: Ha $AC = CB$, akkor γ külső szögének felezője érinti C-ben a körülírt kört.

902. $O_0A \perp AO_c$, illetve $O_0B \perp BO_c$, mert ugyanazon csúcshoz tartozó külső és belső szögfelezők. $\Rightarrow A$ és B rajta vannak O_0O_c Thalész körén. A kör középpontja O_0O_c felezéspontja, másrészt rajta van AB felezőmerőlegesén, így a K_c középpont az f_γ szögfelező és az f_{AB} oldalfelező merőleges metszéspontja. A 900. feladat szerint ez a pont rajta van az $ABC\triangle$ köré írt körön.

904/II.

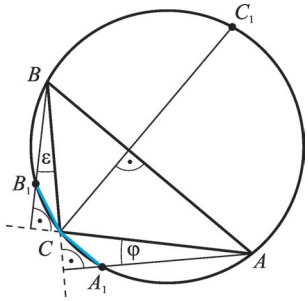


903. A 902. ábra jelöléseit használjuk. $O_bA \perp AO_a$, ill. $O_aB \perp BO_b$, mert ugyanazon csúcshoz tartozó külső és belső szögfelezők. $\Rightarrow$ $\Rightarrow A$ és B rajta vannak O_aO_b Thalész körén. A kör középpontja O_aO_b felezéspontja, másrészt rajta van AB felezőmerőlegesén, így az L_c középpont az f_γ szögfelező és az f_{AB} oldalfelező merőleges metszéspontja. A 901. feladat szerint ez a pont rajta van az $ABC\triangle$ köré írt körön.

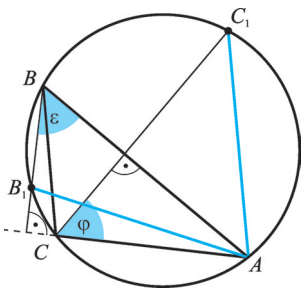
904. **1. eset:** $ABC\triangle$ hegyesszögű. A_1C az A-ból ε alatt látszik, APC derékszögű háromszög $\Rightarrow \varepsilon = 90° - \gamma$. B_1C a B-ből φ alatt látszik, BQC derékszögű háromszög $\Rightarrow \varphi = 90° - \gamma$. $\Rightarrow \varepsilon = \varphi \Rightarrow$ $\Rightarrow A_1C = B_1C$.

2. eset: $ABC\triangle$ derékszögű. m_a és m_b C-ben, m_c C_1-ben metszi a körülírt kört. m_a-t és m_b-t tekintve egybeesnek a pontok, a távol-

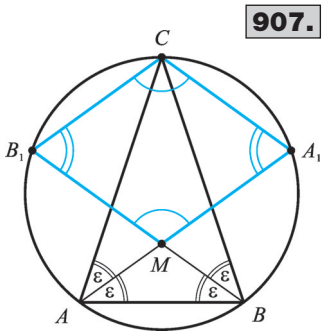
904/III.



904/IV.



907.



ság 0. m_a-t és m_c-t tekintve $CB = C_1B$, mert tükörképek AB-re. m_c-t és m_b-t tekintve $CA = C_1A$, mert tükörképek AB-re.

3. eset: $ABC\triangle$ tompaszögű. I. $\gamma + \gamma' = 180°$; B_1C a B-ből $\varepsilon = 90° - \gamma'$ alatt látszik, A_1C az A-ból $\varphi = 90° - \gamma'$ alatt látszik $\Rightarrow \varepsilon = \varphi \Rightarrow B_1C = A_1C$. II. B_1A a B-ből $\varepsilon = 90° - \alpha$ alatt látszik, C_1A a C-ből $\varphi = 90° - \alpha$ alatt látszik $\Rightarrow \varepsilon = \varphi \Rightarrow B_1A = C_1A$.

905. A feladatban említett húr nem jön létre, ha derékszögű háromszög befogókhoz tartozó magasságait tekintjük. Egyébként a 904. feladatból tudjuk, hogy $B_1C = A_1C$. $\Rightarrow$ A C-ből A_1B_1-re bocsátott merőleges az A_1B_1 felezőmerőlegese, tehát áthalad a kör középpontján.

906. A 904. feladat jelöléseit használjuk. Derékszögű háromszögnél nem jön létre $A_1B_1C_1\triangle$. Egyébként a 904. feladatból tudjuk, hogy $AB_1 = AC_1 \Rightarrow AA_1B_1\sphericalangle = AA_1C_1\sphericalangle$ és $BA_1 = BC_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow BB_1A_1\sphericalangle = BB_1C_1\sphericalangle$ és $CA_1 = CB_1 \Rightarrow CC_1A_1\sphericalangle = CC_1B_1\sphericalangle$.

907. Kerületi szögek tétele miatt: $B_1BC\sphericalangle = B_1A_1C\sphericalangle$ és $B_1BA\sphericalangle = B_1A_1A\sphericalangle$, valamint $A_1AC\sphericalangle =$ $= A_1B_1C\sphericalangle$ és $A_1AB\sphericalangle = A_1B_1B\sphericalangle \Rightarrow \underline{CA_1M\sphericalangle = CB_1M\sphericalangle = 2\varepsilon}$.

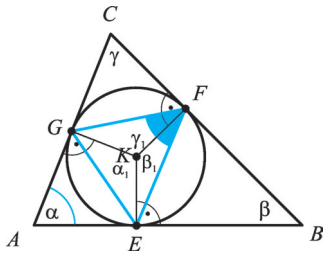
Ezenkívül: $B_1MA_1\sphericalangle = AMB\sphericalangle = 180° - \varepsilon \Rightarrow \underline{B_1CA_1\sphericalangle = B_1MA_1\sphericalangle}$. Az aláhúzottakból következik, hogy a CB_1MA_1 négyszög szemközti szögei egyenlők, tehát a vizsgált négyszög paralelogramma.

908. $\underline{\alpha' = 180° - 2\alpha}$; $\underline{\beta' = 180° - 2\beta}$ és $\underline{\gamma' = 180° - 2\gamma}$.

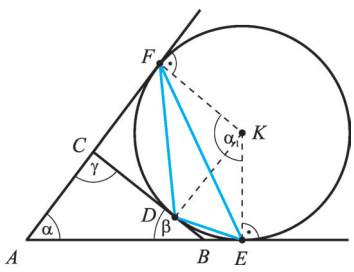
909. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre. $AEKG$ négyszögben $\alpha_1 = 180° - \alpha$. Kerületi és középponti szögek tétele miatt $GFE\sphericalangle = \alpha_1/2 = \underline{90° - \alpha/2}$. Hasonlóan: $FEG\sphericalangle =$ $= \underline{90° - \gamma/2}$ és $EGF\sphericalangle = \underline{90° - \beta/2}$. Az $EFG\triangle$ minden szöge kisebb 90°-nál, ezért hegyesszögű.

910. $AEKF$ négyszögben $\alpha_1 = 180° - \alpha$. $FDE\sphericalangle$ ugyanahhoz az ívhez tartozó kerületi szög, amelyhez tartozó középponti szög $(360° - \alpha_1) \Rightarrow FDE\sphericalangle = \underline{90° + \alpha/2}$. $DKFC$ négyszögben

909.



910.



I

$FCD\sphericalangle + FKD\sphericalangle = 180° \Rightarrow FKD\sphericalangle = \gamma$. $FED\sphericalangle$ kerületi szög és $FED\sphericalangle = FKD\sphericalangle/2 = \underline{\underline{\gamma/2}}$. $DBEK$ négyszögben $DKE\sphericalangle + DBE\sphericalangle = 180° \Rightarrow DKE\sphericalangle = \beta$. $DFE\sphericalangle$ kerületi szög és $DFE\sphericalangle = DKE\sphericalangle/2 = \underline{\underline{\beta/2}}$. $FDE\sphericalangle = 90° + \alpha > 90° \Rightarrow$ Az $FDE\triangle$ tompaszögű.

911. $\underline{\underline{60°}}$; $\underline{\underline{60°}}$ és $\underline{\underline{120°}}$.

912. Felhasználjuk: Ha AB-hez α kerületi szög tartozik, akkor ugyanahhoz az ívhez tartozó középponti szög 2α. $AK = BK$, ezért 2α szögfelezője merőlegesen felezi AB-t és a párhuzamosság miatt merőleges e-re is. A szerkesztés: ① a kör középpontjából merőlegest állítunk e-re: f. ② K-ban f két oldalára α; ezek szára kimetszi a körből A-t és B-t. Egyértelmű a megoldás.

913. *a)* 45°-os látószögköríven van a pont $\Rightarrow$ a középponti szög 90°. A szerkesztés: ① AB, A-ban és B-ben 45° azonos oldalon, ellentétes irányban. ② a két szögszár metszéspontja K. ③ K középpontú, KA sugarú kör. ④ az előbbi kör tükörképe AB-re. ⑤ a két nagyobb ív a keresett ponthalmaz, kivéve A-t és B-t.

b) 60°-os látószögköríven van a pont $\Rightarrow$ a középponti szög 120°. Ugyanúgy szerkesztünk, mint az *a)* pontban, csak 45° helyett 30° szerepel.

c) 150°-os látószögköríven van a pont. Ennek kiegészítő köríve a 30°-os látószögkörív. A szerkesztés az *a)* pontban látott módszerrel végezhető.

914. A szerkesztést érintőszárú kerületi szögekkel végezzük. A szerkesztés: ① AB felezőmerőlegese: f_{AB}. ② B-ben AB-re α, másik szára: e. ③ e-re merőleges B-ben: m. ④ $m \cap f_{AB} = K$. ⑤ K középpontú, KB sugarú körnek α szögtartományán kívüli AB íve. ⑥ AB ívet tükrözzük AB egyenesre.

915. Legyen a C-n átmenő egyenes AB alappal való metszéspontja D. $AC = BC \Rightarrow CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle \Rightarrow CD$ ugyanakkora szögben látszik A-ból, mint B-ből $\Rightarrow A$ és B a CD szakasz ellentétes félsíkba eső látószögkörívein vannak $\Rightarrow$ egyenlő az $ADC\triangle$ és a $BCD\triangle$ köré írt kör sugara.

916. *a)* 0; 1; 2; 3 vagy 4 metszéspont; *b)* 0; 1 vagy 2 metszéspont; *c)* 0; 1 vagy 2 metszéspont.

917. A híd két végpontját összekötő szakasz 30°-os látószögkörívének és a sétaútnak a közös pontjai a megfelelőek. Helyzetüktől függően 0; 1; 2; 3; 4, illetve végtelen sok megoldás lehet.

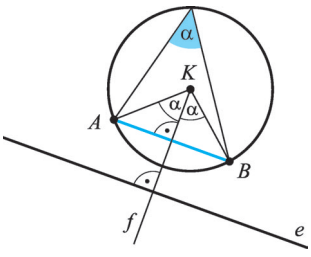
918. Végtelen sok közös pontja csak az egyenlő sugarú köríveknek lehet. Egyenlő sugarú körökben egyenlő hosszúságú húrokhoz tartozó kerületi szögek vagy egyenlők, vagy 180°-ra egészítik ki egymást. $\Rightarrow \alpha = \beta$ vagy $\alpha + \beta = 180°$.

919. A szerkesztés: ① AB Thalész-köre (90°-os látószögkörív): k_1. ② CB 120°-os látószögköríve: k_2. ③ $k_1 \cap k_2 = P$. Egyértelmű a megoldás.

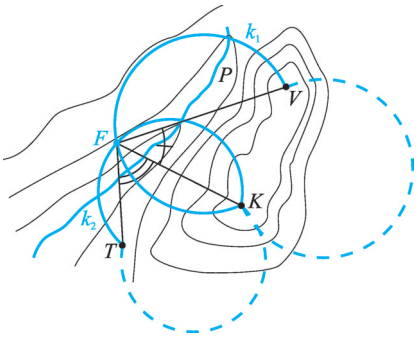
920. A szerkesztés: ① KV szakasz 45°-os látószögköríve: k_1. ② KT szakasz 60°-os látószögköríve: k_2. ③ k_1 és k_2 P-n túli metszéspontja a forrás helye a térképen.

921. Jelöljük a C csúcsnál keletkező érintő szárú kerületi szögeket ε-nal és φ-vel, az érintőnek az AB egyenessel való metszéspontját M-mel. **1. eset:** $\alpha > \beta$. α és ε ugyanazon íven nyugvó

912.



920.



kerületi szögek $\Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon = \alpha}}$. β és φ ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek $\Rightarrow \underline{\underline{\varphi = \beta}}$. α külső szöge az $ACM\triangle$-nek $\Rightarrow \delta = \alpha - \varphi = \underline{\underline{\alpha - \beta}}$. Ha ε, φ vagy δ tompaszög, akkor a hajlásszög a kiegészítő szög lesz.

2. eset: $\alpha < \beta$. Az 1. esethez hasonlóan megmutatható, hogy $\varepsilon = \alpha$; $\varphi = \beta$; $\delta = \beta - \alpha$.

3. eset: $\alpha = \beta$. Ekkor az érintő párhuzamos AB-vel. $\Rightarrow \varepsilon = \varphi = \alpha$ és $\delta = 0°$.

922. A 921. feladatból tudjuk, hogy $\varepsilon = \alpha$. A szerkesztés: ① BC-re C-ben az A-val ellentétes oldalra α. ② α szárának egyenese: e. Egyértelmű a megoldás.

923. A látószögkörív két körszeletet határol. Minél kisebb a körszelet magassága, annál nagyobb a látószög. Tehát a legkisebb magasságú olyan körszelet kell, aminek az AB húrja, és van közös pontja e-vel. $\Rightarrow$ Érintő körszeletet keresünk. $\Rightarrow$ AB felezőmerőlegese metszi ki e-ből az érintési pontot. $\Rightarrow$ Ez az a pont az e-n, ahonnan a legnagyobb szögben látszik AB.

924. P pont az AB szakasz felezőmerőlegesén van, ezért a 923. feladat alapján az MN szakaszon P a legkedvezőbb pont. A 16-os vonal többi pontja az $ABP\triangle$ körülírt körén kívül van, ezért onnan kisebb szögben látszik a kapu.

925. Az AB-hez tartozó legalább 90°-os látószögkörívnek nincs közös pontja e-vel. $\Rightarrow$ Hegyesszögű látószögkörív metszi ki e-ből a keresett pontot. A látószögkörív két körszeletet határol. Minél kisebb a körszelet magassága, annál nagyobb a látószög. Tehát a legkisebb magasságú olyan körszelet kell, aminek az AB húrja, és van közös pontja e-vel. $\Rightarrow$ Érintő körszeletet keresünk. A szerkesztés: ① AB felezőmerőlegese: f. ② $\mathrm{d}(f; e) = r$. ③ B középpontú, r sugarú kör: k. ④ $k \cap f = K$. ⑤ K-ból merőleges e-re: g. ⑥ $g \cap e = E$. Két megoldás van.

926. Az 925. feladat alapján annak a körnek az érintési pontját keressük, amelynek AB a húrja és érinti az AB-re merőleges falakat. $ME_1 = FK$, ahol $AF = FB$. $AK = KE_1 = \dfrac{d}{2} + \mathrm{t}$. AFK derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele $\Rightarrow FK^2 = AK^2 - FA^2 = \left(\dfrac{d}{2} + t\right)^2 - \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = dt + t^2 \Rightarrow$

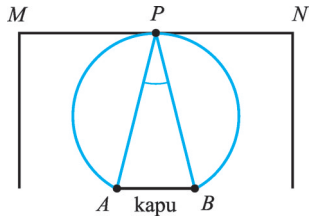
$\Rightarrow \underline{\underline{FK = \sqrt{dt + t^2}}}$.

927. *a)* A szerkesztés: ① $CB = a$. ② CB-vel $\parallel$ egyenes m_a távolságra: e. ③ CB α szögű látószögköríve: k. ④ $k \cap e = A$. 0; 2 vagy 4 egybevágó megoldás lehet.

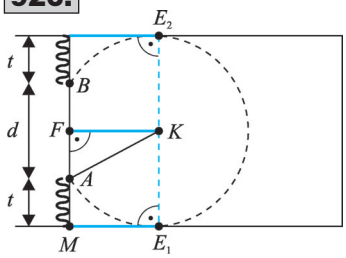
b) A szerkesztés: ① $CB = a$. ② CB felezőpontja: F. ③ F középpontú, s_a sugarú kör: k_1. ④ CB α szögű látószögköríve: k_2. ⑤. $k_1 \cap k_2 = A$. 0; 2 vagy 4 egybevágó megoldás lehet.

928. Adott az e és f félegyenes és szerkesztendő a g érintő úgy, hogy $EF = AB$ legyen, ahol $AB = a$ az adott szakasz. A szerkesztés: ① Olyan $\triangle$-et kell szerkeszteni, aminek egyik oldala $AB = a$, AB-vel szemközti szöge $\sphericalangle(e; f)$, és AB-hez tartozó magassága r. Ezt a szerkesztést l. a 927/*a* feladatnál. Így jutunk az $ABC\triangle$-höz, melynek adatait felhasználjuk a további szerkesztéshez. ② K középpontú, AC sugarú kör: k_1. ③ K középpontú, BC sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap e = E_1$; $k_1 \cap f = F_1$; $k_2 \cap e = E_2$; $k_2 \cap f = F_2$. ⑤ $E_1F_2 = g_1$; $E_2F_1 = g_2$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

924.



926.



I

929. *a)* Felhasználjuk: Hosszabbítsuk meg AB-t A-n túl AC-vel, D-t nyerjük. $\Rightarrow DA = AC \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi = \alpha/2$. A szerkesztés: ① $CB = a$. ② CB $\alpha/2$ szögű látószögköríve: k_1. ③ B középpontú, $(b + c)$ sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = D$. ⑤ DC felezőmerőlegese: f_{DC}. ⑥ $f_{DC} \cap DB = A$. 0; 2 egybevágó vagy 2-2 egybevágó megoldás lehet.
b) Felhasználjuk: AB-re A-ból felmérjük AC-t, D-t nyerjük. $AD = AC \Rightarrow \varepsilon = 90° + \alpha/2$. A szerkesztés: ① $BC = a$. ② BC ε szögű látószögköríve: k_1. ③ B középpontú, $(c - b)$ sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = D$. ⑤ DC felezőmerőlegese: f_{DC}. ⑥ $f_{DC} \cap \mathrm{e}(D; B) = A$. 0; 2 egybevágó vagy 2-2 egybevágó megoldás lehet.

930. Felhasználjuk: A középpontos tükörképe BC oldal F felezéspontjára $A' \Rightarrow ABA' \sphericalangle = \alpha' =$ $= 180° - \alpha$. **1. eset:** $m_a < s_a$. A szerkesztés: ① s_a; m_a; $90° \rightarrow AFT\triangle$. ② A-t középpontosan tükrözzük F-re: A'. ③ AA' α' szögű látószögköríve: k. ④ $k \cap \mathrm{e}(T; F) = \{B; C\}$. Egyértelmű a megoldás.
2. eset: $m_a = s_a \Rightarrow AC = AB$. A szerkesztés: ① α, szárai b és c; csúcsa A. ② α szögfelezője, ezen $AF = s_a$. ③ F-ben merőleges AF-re: e. ④ $e \cap b = C$; $e \cap c = B$. Egyértelmű a megoldás.
3. eset: Ha $m_a > s_a$, akkor nincs megoldás.

931. A szerkesztés: ① $BD = f$, felezőpontja K. ② BD α szögű látószögköríve: k_1. ③ K középpontú, $\frac{e}{2}$ sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = \{A; C\}$. 0; 1 vagy 2 egybevágó megoldás lehet.

932. Felhasználjuk: DB eltoltja $\overrightarrow{DC}$-ral CE, $\varepsilon' = 180° - \varepsilon$. A szerkesztés: ① $AE = 2a$, felezőpontja B. ② AE ε' szögű látószögköríve: k. ③ $EBC\sphericalangle = \alpha$, szára: g. ④ $k \cap g = C$. ⑤. AC felezőpontja K. ⑥ B tükörképe K-ra D. ⑦. Az eljárás ε' helyett ε szöggel újabb megoldáshoz vezethet. 2 megoldás van, ha $\varepsilon \neq 90°$, 1 megoldás van, ha $\varepsilon = 90°$.

933. **1. eset:** $\gamma < 180°$. A szerkesztés: ① f; a; $d \rightarrow ABD\triangle$. ② BD γ szögű látószögköríve: k_1. ③ A középpontú, e sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = C$. 0; 1; 2; 3 vagy 4 megoldás lehet.
2. eset: $\gamma > 180°$. A szerkesztés: ① f; a; $d \rightarrow ABD\triangle$. ② BD $(360° - \gamma)$ szögű látószögköríve: k_1. ③ A középpontú, e sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

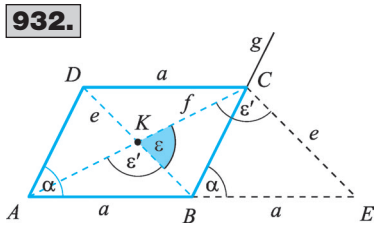
934. Induljunk ki a kész ábrából. Toljuk el DB-t az $\overrightarrow{AC}$-ral. Az eltolás miatt a $BB'D'D$ négyszög paralelogramma. A szerkesztés: ① e, f, $\varphi \Rightarrow BB'D'D$ paralelogramma. ② DB szakasz γ szögű látószögköríve $\Rightarrow k$, $D'B'$ szakasz α szögű látószögköríve $\Rightarrow l$. ③ $k \cap l = C$. ④ $C \xrightarrow{\overrightarrow{D'D}} A$. A megoldások száma a látószögkörívek közös pontjainak számától függ.

935. A 934. ábra jelöléseit használjuk. Induljunk ki a kész ábrából. $CDB\triangle$-et eltoljuk $\overrightarrow{CA}$-ral: $AD'B'\triangle$. $\Rightarrow BDD'B'$ és $BCAB'$ paralelogramma $\Rightarrow BAB'\sphericalangle = \beta$. A szerkesztés: ① e; f; $\varphi \rightarrow$ $\rightarrow BDD'B'$ paralelogramma. ② DB α szögű látószögköríve: k_1. ③ BB' β szögű látószögköríve: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = A$. ⑤ A-t eltoljuk $\overrightarrow{B'B}$-ral: C. k_1 és k_2 helyzetétől függ a megoldások száma.

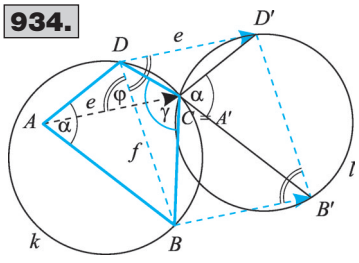
936. Felhasználjuk: kerületi és középponti szögek tétele miatt $CKB\sphericalangle = 2\alpha$ és $CKA\sphericalangle = 2\beta$. A szerkesztés: ① k kör, középpontja K. ② $CKB\sphericalangle = 2\alpha$, ahol C és B a k körön van. ③ $CKA\sphericalangle = 2\beta$, az előző szög mellett, A a k körön van. $\alpha + \beta < 180°$ esetén egyértelműen megoldható.

937. Felhasználjuk: kerületi és középponti szögek tétele miatt $CKB\sphericalangle = 2\alpha$. A szerkesztés: ① a k kör K középpontja legyen csúcsa a $CKB\sphericalangle = 2\alpha$ szögnek, ahol C és B a k-n van.

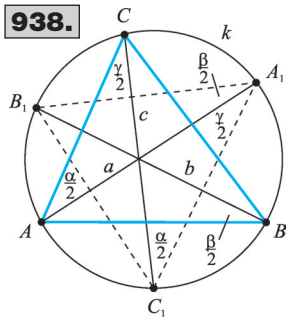
932.



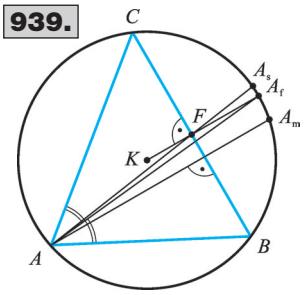
934.



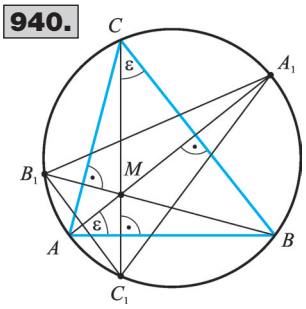
938.



939.



940.



② $(a+b)-CB=b$. ③ C középpontú, b sugarú kör: k_1. ④ $k_1\cap k=A$. ⑤ A csak akkor megoldás, ha $CAB\sphericalangle=\alpha$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

938. Felhasználjuk: Egyenlő ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlők. $AA_1B_1\sphericalangle=ABB_1\sphericalangle=\beta/2$ és $CC_1A_1\sphericalangle=CAA_1\sphericalangle=\alpha/2$ és $AA_1C_1\sphericalangle=ACC_1\sphericalangle=\gamma/2\Rightarrow CC_1A_1\sphericalangle+C_1A_1B_1\sphericalangle=(\alpha+\beta+\gamma)/2=$ $=90°\Rightarrow CC_1\perp A_1B_1$. Hasonlóan belátható, hogy $AA_1\perp B_1C_1$ és $BB_1\perp A_1C_1$. A szerkesztés: ① $A_1B_1C_1\triangle$ köré írt köre: k. ② C_1-ből merőleges A_1B_1-re: c. ③ $c\cap k=\{C;C_1\}$. ④ B_1-ből merőleges C_1A_1-re: b. ⑤ $b\cap k=\{B;B_1\}$. ⑥ A_1-ből merőleges C_1B_1-re: a. ⑦ $a\cap k=\{A;A_1\}$. Nincs megoldás, ha A_1; B_1; C_1 egy egyenesen van. Egyértelmű a megoldás, ha A_1; B_1; C_1 nincs egy egyenesen.

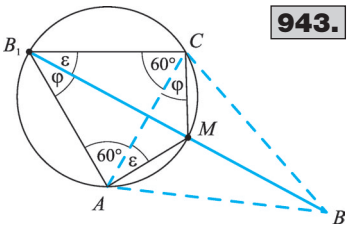
939. Felhasználjuk: $CAA_f\sphericalangle=A_fAB\sphericalangle\Rightarrow CA_sA_f$ ív egyenlő A_fA_mB ívvel $\Rightarrow A_fF$ átmegy K-n és $A_fF\perp CB$, vagyis $A_fK\parallel AA_m$. A szerkesztés: ① A_m; A_f; $A_s\rightarrow$ kör, középpontja K. ② A_m-en át párhuzamos A_fK-val, ez kimetszi a körből A-t. ③ $AA_s\cap KA_f=F$. ④ F-ben merőleges KA_f-re, ez kimetszi a körből C-t és B-t. Nincs megoldás, ha A_m; A_f; A_s egy egyenesen van. Egyértelmű a megoldás, ha A_m; A_f; A_s nincs egy egyenesen.

940. Felhasználjuk: $\varepsilon+\beta=90°$; kerületi szögek tétele miatt $C_1B_1B\sphericalangle=BB_1A_1\sphericalangle=\varepsilon\Rightarrow BB_1$ szögfelezője $A_1B_1C_1\sphericalangle$-nek. Hasonlóan AA_1 szögfelezője $B_1A_1C_1\sphericalangle$-nek és CC_1 szögfelezője $A_1C_1B_1\sphericalangle$-nek. A szerkesztés: ① A_1; B_1; $C_1\rightarrow A_1B_1C_1\triangle$ és köré írt köre. ② $A_1B_1C_1\triangle$ szögfelezői kimetszik a körből A-t, B-t és C-t. Nincs megoldás, ha A_1; B_1; C_1 egy egyenesen van. Egyértelmű a megoldás, ha A_1; B_1; C_1 nincs egy egyenesen.

941. Felhasználjuk: $APB\sphericalangle=BPC\sphericalangle=CPA\sphericalangle\Rightarrow$ mindhárom 120°. A szerkesztés: ① AB 120°-os látóköre. ② BC 120°-os látóköre. ③ a két látókörnek a háromszög belsejébe eső közös pontja a megfelelő pont. Egyértelmű a megoldás.

942. Az $ABC\triangle$ AC oldala a B_1-ből 60° alatt látszik. $\Rightarrow$ kiegészítő ív pontjaiból 120° alatt látszik. Hasonlóan: az $A_1BC\triangle$ köré írt körének az $ABC\triangle$ belsejébe eső ívén található pontokból BC 120° alatt látszik. $\Rightarrow A$ két 120°-os ív közös pontjából AB is 120° alatt látszik. $\Rightarrow$ A közös pont rajta van AB 120°-os látószögkörívén, aminek kiegészítő ívéről 60°-os szögben látszik AB. $\Rightarrow$ Az $ABC_1\triangle$ köré írt köre is átmegy a közös ponton.

943. $ACB_1\triangle$ szabályos, M az $AB_1C\triangle$ köré írt körnek és BB_1-nek a metszéspontja. Kerületi szögek tétele miatt az egyformán jelölt szögek egyenlők. $\varepsilon+\varphi=60°\Rightarrow \underline{CMA\sphericalangle=120°}$. $CMB\sphericalangle$ külső szöge $MCB_1\triangle$-nek $\Rightarrow \underline{CMB\sphericalangle}=\varepsilon+60°+\varphi=\underline{120°}$. $\underline{AMB\sphericalangle}=$ $=360°-CMA\sphericalangle-CMB\sphericalangle=\underline{120°}$.



Az aláhúzottakból következik, hogy M-ből 120° alatt látszik AB; BC és $CA\Rightarrow M$ az ABC izogonális pontja. Hasonló eredményt kapunk AA_1 és CC_1 esetén is, vagyis AA_1; BB_1 és CC_1 is áthalad az $ABC\triangle$ izogonális pontján, tehát ez a metszéspontjuk. Megjegyzés: $AMC\sphericalangle=120°$ forgatással is bizonyítható, mivel az AA_1 szakaszt B körül +60°-kal elforgatva C_1C szakaszt kapjuk, ezért AA_1 és CC_1 egyenesek szöge 60°.

I

944. Legyen P tetszőleges belső pontja az $ABC\triangle$-nek. A körül 60°-kal elforgatjuk az $APC\triangle$-et $\Rightarrow$ $\Rightarrow AP'C'\triangle$. $AP = AP'$ és $PAP'\sphericalangle = 60° \Rightarrow PP' = AP$, valamint $AC = AC'$ és $CP = C'P' \Rightarrow$ $\Rightarrow AP + BP + CP = PP' + BP + C'P' =$ a $BPP'C'$ töröttvonal hossza. Ez akkor a lehető legkisebb, ha B; P; P'; C' egy egyenesen van. $\Rightarrow BPP'\sphericalangle = 180°$, vagyis $BPA\sphericalangle + APP'\sphericalangle = 180° \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{BPA\sphericalangle = 120°}$, valamint $PP'C'\sphericalangle = 180°$, vagyis $PP'A\sphericalangle + AP'C'\sphericalangle = 180° \Rightarrow AP'C'\sphericalangle = 120° \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{APC\sphericalangle = 120°}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $BPC\sphericalangle = 120°$, vagyis P az $ABC\triangle$ izogonális pontja.

945. Legyenek K_1 és K_2 a körközéppontok. **1. eset:** a két kör kívülről érinti egymást. K_1K_2 áthalad E-n, ezért $K_1EA\sphericalangle = K_2EB\sphericalangle$ (csúcsszögek) $\Rightarrow AK_1E$ és BK_2E egyenlő szárú háromszögek szárszöge is egyenlő, és ezek pont a húrokhoz tartozó középponti szögek.
2. eset: az egyik kör belülről érinti a másikat. K_1K_2 áthalad E-n, ezért $EK_2B\triangle$ és $EK_1A\triangle$ egyenlő szárú és az alapon fekvő szögük egyenlő $\Rightarrow$ A szárak szöge is egyenlő és ez pont a húrokhoz tartozó középponti szög.

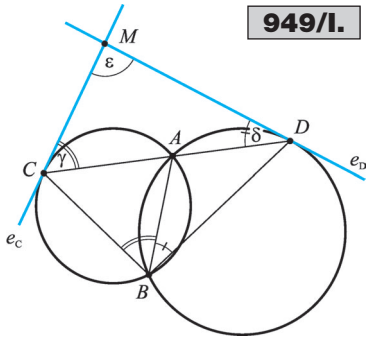
946. Legyenek K_1 és K_2 a körközéppontok. K_1K_2 áthalad E-n $\Rightarrow BEK_2\sphericalangle = AEK_1\sphericalangle \Rightarrow K_1AE\sphericalangle =$ $= EBK_2\sphericalangle \Rightarrow AK_1 \parallel K_2B \Rightarrow e_A \parallel e_B$, mert az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre.

947. **1. eset:** C pont nincs a másik kör belsejében, de $C \neq A$. $ACB\sphericalangle = \gamma$ a szelő bármely helyzetében, mert AB ívhez tartozó kerületi szög az egyik körben. $ADB\sphericalangle = \delta$ a szelő bármely helyzetében, mert AB ívhez tartozó kerületi szög a másik körben. $CBD\triangle$-ben $CBD\sphericalangle =$ $= 180° - \gamma - \delta =$ állandó.
2. eset: C pont a másik kör belsejében van. $ACB\sphericalangle = 180° - \gamma \Rightarrow BCD\sphericalangle = \gamma \Rightarrow CBD\sphericalangle =$ $= 180° - \gamma - \delta =$ állandó,
3. eset: C pont azonos A-val. $BAD\sphericalangle = \gamma$, mert érintő szárú kerületi szög $\Rightarrow CBD\sphericalangle = 180° - \gamma -$ $- \delta =$ állandó.

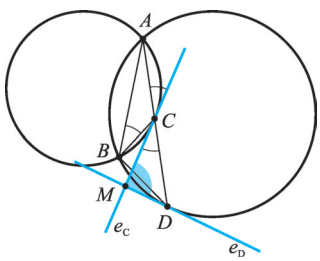
948. **1. eset:** P pont nincs az l kör belsejében. A 947. feladat alapján $PBC\sphericalangle$ állandó (független P helyétől), ezért $CBD\sphericalangle$ is állandó. Adott körben ugyanakkora kerületi szögekhez pedig ugyanakkora húrok tartoznak. $\Rightarrow CD$ hossza független P helyétől.
2. eset: P pont az l kör belsejében van. A 947. feladat alapján $PBC\sphericalangle$ állandó $\Rightarrow DBC\sphericalangle$ állandó. Adott körben az egyenlő kerületi szögekhez egyenlő húrok tartoznak. $\Rightarrow CD$ hossza független P helyétől.

949. **1. eset:** C és D az AB által határolt különböző félsíkokban vannak. $MCA\sphericalangle$ érintő szárú kerületi szög ugyanahhoz az ívhez tartozik, mint $ABC\sphericalangle$ kerületi szög $\Rightarrow MCA\sphericalangle = ABC\sphericalangle$. Hasonlóan belátható, hogy $MDA\sphericalangle = ABD\sphericalangle$. A 947. feladatból tudjuk, hogy $CBD\sphericalangle$ állandó, vagyis $(\gamma + \delta)$ állandó, tehát $\varepsilon = 180° - (\gamma + \delta)$ is állandó, azaz független CD helyzetétől.
2. eset: C és D az AB által határolt közös félsíkban vannak. $MCA\sphericalangle$ érintőszárú kerületi szög, az $ABC\sphericalangle$-höz tartozó körív kiegészítő ívéhez tartozik $\Rightarrow MCA\sphericalangle = 180° - ABC\sphericalangle$. Hasonlóan: $MDA\sphericalangle = 180° - ABD\sphericalangle$. A 947. feladatból tudjuk, hogy $CBD\sphericalangle$ állandó.
$CBD\sphericalangle = ABD\sphericalangle - ABC\sphericalangle = (180° - ABC\sphericalangle) - (180° - ABD\sphericalangle) = MCA\sphericalangle - MDA\sphericalangle = DMC\sphericalangle$ (külső szög miatt).

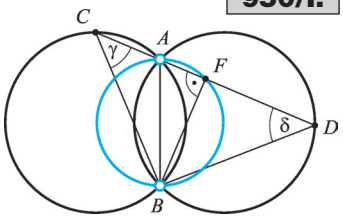
949/I.



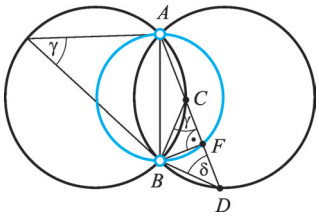
949/II.



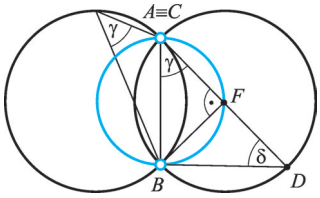
950/I.



950/II.



950/III.



950. **1. eset:** $C \neq A$. γ és δ az AB-hez tartozó kerületi szög. Mivel a körök egyenlő sugarúak, $\gamma = \delta \Rightarrow CB = BD \Rightarrow BF$ a $CBD\triangle$ alaphoz tartozó magassága $\Rightarrow BF \perp AF \Rightarrow F$ az AB szakasz Thalész körén van rajta. Az A körül forgatott egyenesen lévő felezőpontokkal az AB Thalész körét kapjuk meg. A Thalész-kör minden pontja megfelel. **2. eset:** $C \equiv A \Rightarrow CD$ érintő. $BAD\sphericalangle = BDA\sphericalangle$, mert egyenlő sugarú körökben ugyanakkora ívhez tartozó kerületi szögek $\Rightarrow$ $\Rightarrow AB = BD \Rightarrow ABD\triangle$-nek BF a magassága $\Rightarrow BF \perp AD \Rightarrow F$ rajta van AB Thalész körén. Az A körül forgatott egyenesen lévő felezőpontokkal az AB Thalész körét kapjuk meg. A Thalész-kör minden pontja megfelel.

951. Az AC felezőmerőlegesének minden AC-n kívüli pontja megfelelő.

952. $XB' = XB \Rightarrow XB'B\sphericalangle = XBB'\sphericalangle = \varepsilon$. $AXB\sphericalangle = \omega$ külső szöge az $XB'B$ $\triangle$-nek, ezért $\varepsilon = \omega/2 =$ állandó, mert ω állandó, hiszen AB ívhez tartozó kerületi szög $\Rightarrow$ Amikor $X \in ACB$ ív, akkor az AB $\omega/2$ szögű látószögkörívén mozog B', az X-szel közös félsíkban. Amikor $X_1 \in ADB$ ív, akkor B' az AB $\varphi = \omega'/2 = (180° - \omega)/2 = 90° - \omega/2$ szögű látószögkörívén mozog, az X_1-et tartalmazó félsíkban.

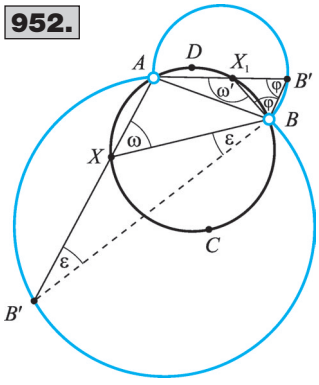
953. CD átmérő, A és B a két adott pont. Ha a CD átmérő valamelyik végpontja A vagy B, akkor nem jön létre az egyik összekötő egyenes. **1. eset:** AB átmérő. Thalész tétele miatt $ADBC$ téglalap $\Rightarrow$ Az összekötő vonalak nem metszik egymást.

2. eset: CD nem választja el A-t és B-t és AB nem átmérő. Legyen $DB \cap AC = M_2$ és $DA \cap CB = M_1$. $DAM_2\sphericalangle = CBM_2\sphericalangle = 90°$ Thalész tétele miatt. $ACB\sphericalangle = \gamma$ állandó, mert AB ívhez tartozó kerületi szög. $AM_2B\sphericalangle$ külső szöge $M_2BC\triangle$-nek $\Rightarrow AM_2B\sphericalangle = 90° + \gamma$. AM_2BM_1 négyszög húrnégyszög $\Rightarrow AM_1B\sphericalangle = 180° - AM_2B\sphericalangle = 90° - \gamma \Rightarrow$ A; B; M_1; M_2 egy körön van, az AB-nek C-vel ellentétes félsíkban levő $(90° - \gamma)$ szögű látószögkörívén és annak kiegészítő ívén.

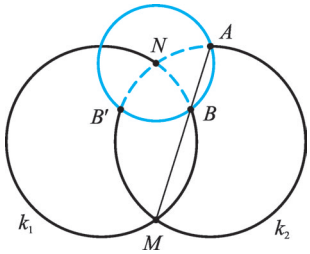
3. eset: CD elválasztja A-t és B-t és AB nem átmérő. $CAD\sphericalangle = DBC\sphericalangle = 90°$ Thalész tétele miatt. $M_2BC\triangle \Rightarrow CM_2B\sphericalangle = 90° - \gamma$, valamint $M_1AC\triangle \Rightarrow CM_1A\sphericalangle = 90° - \gamma \Rightarrow A$; B; M_1; M_2 egy körön van, az AB-nek C-vel ellentétes félsíkban levő $(90° - \gamma)$ szögű látószögkörívén.

954. A; B; B' egy körön vannak, aminek N a középpontja $\Rightarrow NA$; NB; NB' húrok, illetve ívek egyenlő hosszúak. $B'MN\sphericalangle = NMA\sphericalangle$, mert a k_2 körben egyenlő ívekhez tartozó kerületi szögek.

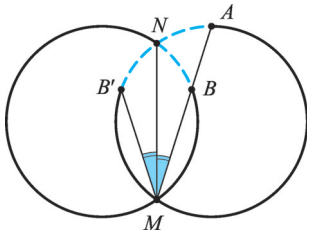
952.



954/I.

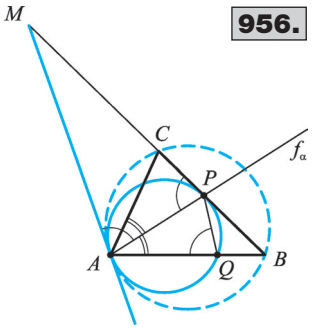


954/II.

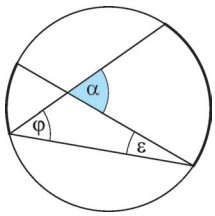


I

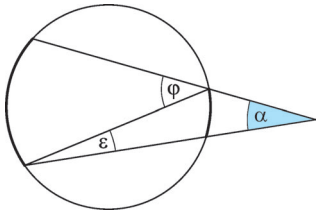
956.



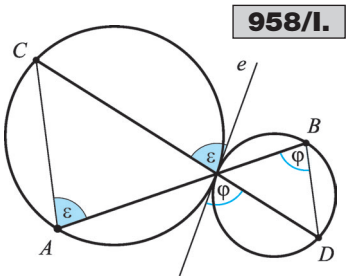
957/I.



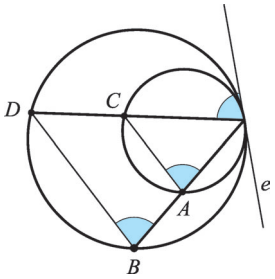
957/II.



958/I.



958/II.



$B'MN\sphericalangle = NMB\sphericalangle$, mert egyenlő sugarú körökben egyenlő ívekhez tartozó kerületi szögek. $\Rightarrow$ MB és MA egy egyenesbe esik $\Rightarrow$ M; A és B egy egyenesen van.

955. Legyen az A-ból induló szögfelezőnek BC-vel való metszéspontja P. Jelöljük az A pontbeli érintőnek a BC egyenessel való metszéspontját M-mel. AC ívhez tartozó kerületi szög β és érintőszárú kerületi szög $CAM\sphericalangle \Rightarrow CAM\sphericalangle = \beta \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\underline{MAP\sphericalangle = \beta + \alpha/2}$. $MPA\sphericalangle$ külső szöge az $ABP\triangle$-nek $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\underline{MPA\sphericalangle = \beta + \alpha/2}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $AM = PM$, az $AMP\triangle$ egyenlő szárú. Megjegyzés: Ha $AC = AB$, akkor $e \parallel BC$ miatt nem jön létre háromszög.

956. A 955. feladat miatt $MAP\sphericalangle = MPA\sphericalangle$ (MA érintője az $ABC\ \triangle$ köré írható körnek). $MPA\sphericalangle \equiv CPA\sphericalangle$ érintőszárú kerületi szög a kis körben $\Rightarrow$ $CPA\sphericalangle = PQA\sphericalangle \Rightarrow PQA\sphericalangle =$ $= MAP\sphericalangle$ és AP a $PQA\sphericalangle$ ívéhez tartozó húr $\Rightarrow$ $MAP\sphericalangle$ érintőszárú kerületi szöge a kis körnek $\Rightarrow$ MA érintője mindkét körnek $\Rightarrow$ $\underline{\text{a két kör érinti egymást}}$. Ha $AC = AB$, akkor a két körnek közös az A-ra illeszkedő átmérőegyenese, ezért A-ban érintik egymást.

957. Külső szög miatt: $\alpha = \varphi + \varepsilon$ (957/I. ábra). Külső szög miatt: $\varphi = \alpha + + \varepsilon \Rightarrow \alpha = \varphi - \varepsilon$ (957/II. ábra).

958. e: közös érintő. *a)* Az egyformán jelölt szögek egyenlők, mert azonos ívhez tartozó kerületi, illetve érintőszárú kerületi szögek. $\varepsilon = \varphi$, mert az érintőszárú kerületi szögek csúcsszögek $\Rightarrow$ $CAB\sphericalangle = ABD\sphericalangle \Rightarrow$ $\Rightarrow AC \parallel BD$.

b) Az egyformán jelölt szögek egyenlők, mert azonos ívhez tartozó kerületi, illetve érintőszárú kerületi szögek.

959. $BEA\sphericalangle = BEP\sphericalangle - AEP\sphericalangle = BCE\sphericalangle - ADE\sphericalangle = CED\sphericalangle$

kerületi szögek — külső szög

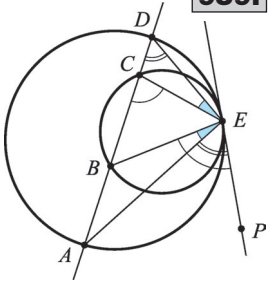
960. $\underline{\underline{PEA\sphericalangle}} = PET\sphericalangle - AET\sphericalangle = PQE\sphericalangle - ABE\sphericalangle = BPQ\sphericalangle = \underline{\underline{PEO\sphericalangle}}$

kerületi szögek — külső szög — kerületi szög

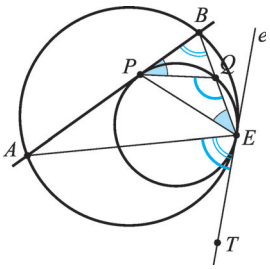
961. **1. eset:** $AC \neq AB$. Külső szög miatt: $\gamma = \varepsilon + \delta \Rightarrow \varepsilon = \gamma - \delta$. Kerületi szög miatt: $\delta = \beta \Rightarrow$ $\Rightarrow \varepsilon = \gamma - \beta$. **2. eset:** $AC = AB$. $e \parallel BC \Rightarrow \sphericalangle(e; BC) = 0°$.

962. A szerkesztés: ① AP 45°-os látószögköríve: k_1. ② PQ Thalész köre: k_2. ③ $k_1 \cap k_2 = C$. ④ AC felezőmerőlegese: f_{AC}. ⑤ a felezőmerőlegesen $AC/2$ hosszú szakaszt felmérni mindkét irányban $\rightarrow B$ és D. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

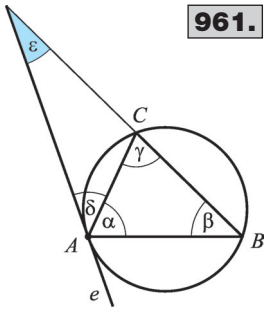
959.



960.



961.



963. Egy segédábrán olyan $PQR_1\triangle$-et szerkesztünk, melyre $PQ = a$, $PR_1Q\sphericalangle = \alpha$ és a PQ oldalhoz tartozó magasság d. A szerkesztés: ① α egyik szárán $RB = R_1Q \Rightarrow B$. ② α másik szárán $RA = R_1P \Rightarrow A$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

964. Legyen a két adott szakasz $AB = a$ és $BC = b$. A feladat csak akkor oldható meg, ha $\alpha + \beta < 180°$. A szerkesztés: ① AB α szögű látószögköríve: k_1. ② BC β szögű látószögköríve: k_2. ③ $k_1 \cap k_2 = P_1 \Rightarrow P_1A = PE$, $P_1B = PF$, amit az adott félegyeneseken felhasználunk. ④ e-n $PE = P_1A$. ⑤ f-en $PF = P_1B$. ⑥ EF egyenes. 0 vagy 1 megoldás van.

965. A szerkesztés: ① Egy segédábrán olyan $A_1B_1P_1\triangle$-et szerkesztünk, amelynek A_1B_1 oldala a kör átmérőjével, ehhez tartozó súlyvonala KP-vel, $A_1B_1P_1\sphericalangle$-e ε-nal egyenlő. ② P középpontú, P_1A_1 sugarú kör és k metszéspontja: A. ③ $e(A; K) \cap k = B$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

966. **1. eset:** C az AB által létrehozott *a)* íven mozog. γ állandó, mert mindig ugyanahhoz az ívhez tartozik $\Rightarrow$ $\alpha + \beta = 180° - \gamma$ szintén állandó $\Rightarrow$ $\alpha/2 + \beta/2 = 90° - \gamma/2$ is állandó $\Rightarrow$ $\Rightarrow \varepsilon = 180° - (\alpha/2 + \beta/2) = 180° - (90° - \gamma/2) = 90° + \gamma/2$ is állandó $\Rightarrow$ K rajta van az AB szakasz $(90° + \gamma/2)$ szögű látószögkörívén, az AB szakasz *a)* ív felé eső oldalán.

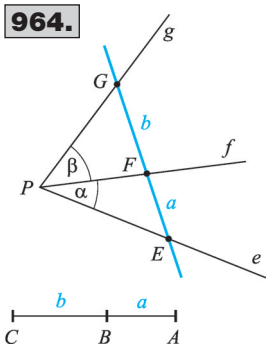
2. eset: C a kiegészítő *b)* íven mozog, hasonlóan az első esethez: $\varepsilon' = 90° + \gamma'/2$ és $\gamma' = 180° - \gamma \Rightarrow$ $\Rightarrow \varepsilon' = 180° - \gamma/2 \Rightarrow K$ rajta van az AB szakasz $(90° - \gamma/2)$ szögű látószögkörívén, az AB szakasz *b)* ív felé eső oldalán.

967. $AKB\sphericalangle = 180° - (\alpha/2 + \beta/2) = 180° - \left(\dfrac{180° - \gamma}{2}\right) = 90° + \gamma/2$.

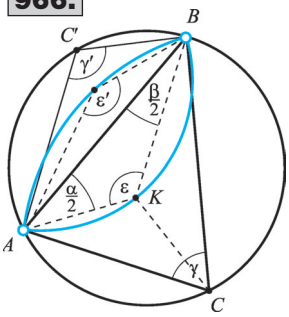
A szerkesztés: ① $AB = c$. ② AB $(90° + \gamma/2)$ szögű látószögköríve: k. ③ AB-vel párhuzamos r távolságra: e. ④ $e \cap k = K$. ⑤ $BAK\sphericalangle$-et AK másik oldalára is felmérni. ⑥ $ABK\sphericalangle$-et BK másik oldalára is felmérni. ⑦ A két új szögszár metszéspontja C. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

968. AB az adott szakasszal egyenlő: $AB = c$. Felhasználjuk: Az $ABC\triangle$-nek az adott k_c kör a c oldalhoz hozzáírt köre. Legyen az $ABC\triangle$ beírt köre k_0. A k_0 kör E_1 és a k_c kör E_2 érintési pontjának távolsága szintén c. O_0 és O_c rajta van az adott szög szögfelezőjén. A és B csúcsok rajta vannak O_0O_c Thalész körén (belső és külső szögfelezők).

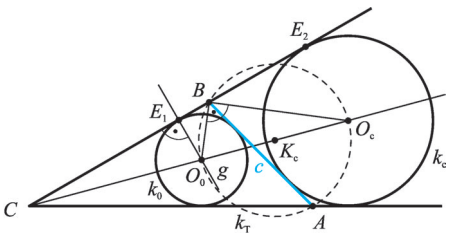
964.



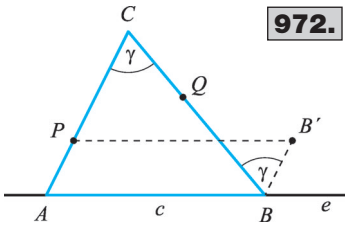
966.



968.



I



972. A szerkesztés: ① k_c-nek az egyik szögszárral való érintési pontja E_2. ② $E_1 \in CE_2$ és $E_1E_2 = c$. ③ E_1-ben merőleges CE_2-re: g. ④ $g \cap CO_c = O_0$. ⑤ O_0O_c Thalész köre: k_T. ⑥ k_T-nek a szögszárakkal való metszéspontjaiból a keresett szakasz megrajzolható. Megjegyzés: Ha a szerkesztés második lépésében a c távolságot E_2-ből a másik irányba mérjük, akkor k_c az $ABC\triangle$ beírt köre lesz.

969. *a)* AF ív egyenlő FB ívvel, ezért $ACF\sphericalangle = FCB\sphericalangle \Rightarrow F$ rajta van CO_0 szögfelezőn.
$ACF\sphericalangle = ABF\sphericalangle = \gamma/2 \Rightarrow O_0BF\sphericalangle = \gamma/2 + \beta/2$ és $BO_0F\sphericalangle$ külső szög $\Rightarrow BO_0F\sphericalangle = \beta/2 + \gamma/2$.
$BCF\sphericalangle = BAF\sphericalangle = \gamma/2 \Rightarrow O_0AF\sphericalangle = \gamma/2 + \alpha/2$ és $AO_0F\sphericalangle$ külső szög $\Rightarrow AO_0F\sphericalangle = \alpha/2 + \gamma/2$.
A fentiekből következik, hogy $O_0F = B_0F$ és $O_0F = AF \Rightarrow \underline{AF = O_0F = BF}$.
b) $FBO_c\sphericalangle = \beta'/2 - \gamma/2$ és $FO_cB\sphericalangle = \beta'/2 - \gamma/2$ külső szög miatt. $\underline{FAO_c\sphericalangle = \alpha'/2 - \gamma/2}$ és $AO_cF\sphericalangle = \alpha'/2 - \gamma/2$ külső szög miatt. A fentiekből következik, hogy $FB = FO_c$ és $FA = FO_c \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{FA = FO_c = FB}$.

970. Jelöljük a c oldalhoz hozzáírt kör középpontját O_c-vel, a körülírt kör és a belső szögfelező második metszéspontját M-mel. O_0 és O_c rajta van γ szögfelezőjén $\Rightarrow AM = MB$. A 969. *a)* feladat miatt $AM = O_0M$. A 969. *b)* feladat miatt $AM = O_cM$. A fentiekből következik, hogy M felezi a O_0O_c szakaszt.

971. Felhasználjuk: 969. *a)* feladat szerint $AF = FL$ és 969. *b)* feladat szerint $AF = FM \Rightarrow$
$\Rightarrow FM = FL$. A szerkesztés: ① LM szakasz felezőpontja: F. ② K középpontú, KF sugarú kör: k_1. ③ F középpontú, FL sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = \{A; B\}$. ⑤ $e(L; M) \cap k_1 = \{F; C\}$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

972. C-ből γ szög alatt látszik PQ is, AB is. PB' párhuzamos és egyenlő AB-vel $\Rightarrow QBB'\sphericalangle = \gamma$. A szerkesztés: ① P-ben párhuzamos e-vel, ezen $PB' = c$. ② QB' γ szögű látószögköríve: k. ③ $k \cap e = B$. ④ PB'-t eltoljuk $\overrightarrow{B'B}$-ral: AB. ⑤ $e(A; P) \cap e(B; Q) = C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

Húrnégyszögek, érintőnégyszögek

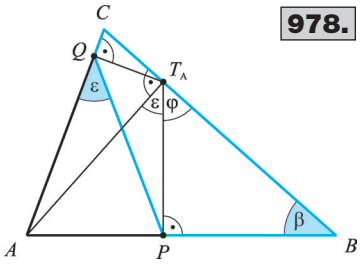
A **973; 974.** és **975.** feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.

976. Legyen a szomszédos szögfelezők metszéspontja rendre Q, R, S, P. P-nél lévő szög: $180° - \alpha/2 - \delta/2$ és R-nél lévő szög: $180° - \beta/2 - \gamma/2$.
A két szög összege: $(180° - \alpha/2 - \delta/2) + (180° - \beta/2 - \gamma/2) = 360° - (\alpha + \delta + \beta + \gamma)/2 = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow PQRS$ húrnégyszög.

977. Jelöljük T_A-val az A-ból induló, T_B-vel a B-ből induló magasság talppontját. $AT_AB\sphericalangle =$
$= AT_BB\sphericalangle = 90° \Rightarrow A; B; T_A; T_B$ egy körön van Thalész tétele miatt, az AB átmérőjű körön.

978. P és Q rajta van AT_A Thalész körén $\Rightarrow AQP\sphericalangle = AT_AP\sphericalangle$. $\varepsilon + \varphi = 90° = \varphi + \beta \Rightarrow \varepsilon = \beta$.
$CQP\sphericalangle = 180° - \varepsilon = 180° - \beta$, valamint $CQP\sphericalangle + PBC\sphericalangle = 180° \Rightarrow PBCQ$ húrnégyszög $\Rightarrow P; B;$
C és Q egy körön helyezkedik el.

979. Jelöljük M-mel a magasságpontot, T_A-val, T_C-vel a magasságtalppontokat. Tompaszögű és hegyesszögű $\triangle$ esetén: T_A-nál és T_C-nél derékszög van, ezért Thalész tétele miatt T_A és T_C rajta van az MB átmérőjű körön. C derékszögű csúccsal rendelkező $\triangle$ esetén: T_C rajta van BC Thalész körén. B derékszögű csúccsal rendelkező $\triangle$ esetén: $M \equiv T_A \equiv T_C \equiv B$, ezért egy körön is vannak.

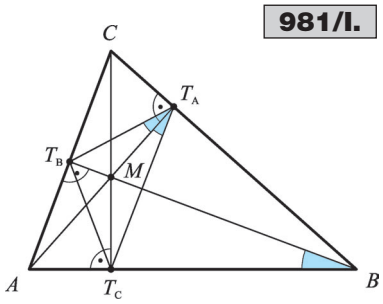


978.

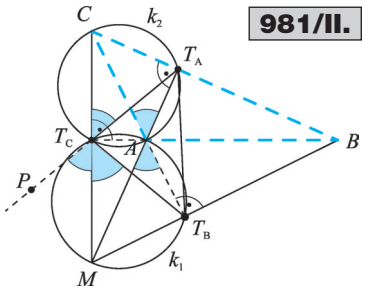
980. T_A és T_B rajta van AB Thalész körén, ezért ABT_AT_B húrnégyszög, aminek $T_AT_BC\sphericalangle$ külső szöge, egyenlő β-val. Hasonlóan látható be az állítás a másik két oldalra is.

981. **1. eset:** $ABC\triangle$ hegyesszögű. $A; B; T_A; T_B$ Thalész tétele miatt egy körön vannak $\Rightarrow \underline{ABT_B\sphericalangle = AT_AT_B\sphericalangle}$.

981/I.



981/II.



M; T_C; B; T_A Thalész tétele miatt egy körön vannak $\Rightarrow$ $T_C BM\sphericalangle = T_C T_A M\sphericalangle$. Az aláhúzottakból következik, hogy $AT_AT_C\sphericalangle = AT_AT_B\sphericalangle$, vagyis T_AM egyenes szögfelezője a $T_AT_BT_C\triangle$-nek. Hasonlóan belátható a másik két magasságról is, hogy szögfelező.

2. eset: $ABC\triangle$ tompaszögű. Az első esethez hasonlóan belátható, hogy MT_A szögfelező. M; A; T_B; T_C Thalész tétele miatt egy körön vannak $\Rightarrow$ $MT_CT_B\sphericalangle = MAT_B\sphericalangle$, mert kerületi szögek k_1-ben. $MAT_B\sphericalangle = T_AAC\sphericalangle$, mert csúcsszögek. C; A; T_A; T_C Thalész tétele miatt egy körön vannak $\Rightarrow$ $CT_CT_A\sphericalangle = CAT_A\sphericalangle$, mert kerületi szögek k_2-ben. $T_AT_CC\sphericalangle = MT_CP\sphericalangle$, mert csúcsszögek. Az aláhúzottakból következik, hogy $MT_CT_B\sphericalangle = MT_CP\sphericalangle$. $\Rightarrow$ MT_C a $T_AT_BT_C\triangle$ külső szögének szögfelezője. Hasonlóan látható be az állítás a harmadik magasságra is. Megjegyzés: Derékszögű háromszög esetén két magasságtalppont megegyezik a derékszögű csúccsal, ezért nem jön létre talpponti háromszög.

982. A 981. feladatban láttuk, hogy a talpponti háromszög külső vagy belső szögfelezői a háromszög magasságvonalai. A szerkesztés: ① $T_AT_BT_C\triangle$ belső szögfelezői, metszéspontjuk D. ② Ezekre a szögfelezőkre a szögek csúcsában merőlegest állítunk $\rightarrow$ a talpponti háromszög külső szögfelezői, metszéspontjaik A; B; C. ③ $ABC\triangle$, $ADB\triangle$, $BDC\triangle$, $CDA\triangle$ megoldása a feladatnak, mert $T_AT_BT_C\triangle$ mindegyiknek talpponti háromszöge. 4 megoldás van.

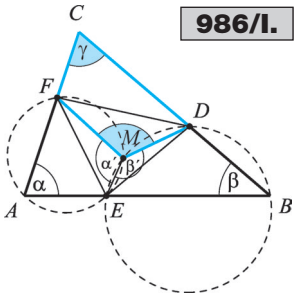
983. Jelölje T_A, T_B és T_C a magasságtalppontokat. C; A; T_A; T_C Thalész tétele miatt egy körön vannak $\Rightarrow$ $ACT_C\sphericalangle = AT_AT_C\sphericalangle = \gamma_1$. A; B; T_A; T_B Thalész tétele miatt egy körön vannak $\Rightarrow$ $ABT_B\sphericalangle = AT_AT_B\sphericalangle = \beta_1$. $AT_CC\triangle$ és $AT_BB\triangle$ hasonlók $\Rightarrow$ $\gamma_1 = \beta_1 = 90° - \alpha$. $T_BT_AT_C\sphericalangle = \gamma_1 + \beta_1 = \underline{\underline{180° - 2\alpha}}$. Hasonlóan belátható, hogy $T_AT_BT_C\sphericalangle = 180° - 2\beta$ és $T_BT_CT_A\sphericalangle = 180° - 2\gamma$.

A **984.** és **985.** feladat megoldását az olvasóra bízzuk.

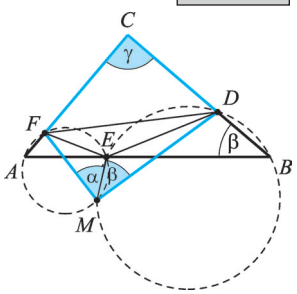
986. Legyen M az $AEF\triangle$ köré írt kör és az $EBD\triangle$ köré írt kör E-től különböző metszéspontja.

1. eset: M az $ABC\triangle$-ben van. $AEMF$ húrnégyszög $\Rightarrow$ $\alpha' = 180° - \alpha$ és $BEMD$ húrnégyszög $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\beta' = 180° - \beta$. $\Rightarrow$ $FMD\sphericalangle = 360° - \alpha' - \beta' = 180° - \gamma \Rightarrow FMD\sphericalangle + FCD\sphericalangle = 180° \Rightarrow CFMD$ is húrnégyszög, köré írt köre azonos $FCD\triangle$ köré írt körével $\Rightarrow$ mindegyik átmegy M-en.

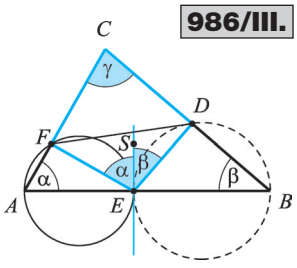
986/I.



986/II.

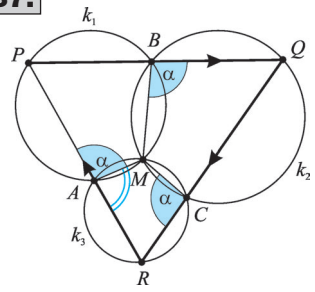


986/III.

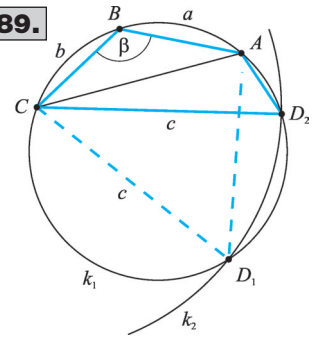


I

987.



989.



2. eset: M az $ABC\triangle$-ön kívül van. $AMEF$ húrnégyszög $\Rightarrow FME\sphericalangle = FAE\sphericalangle = \alpha$ és $BMED$ húrnégyszög $\Rightarrow EMD\sphericalangle = EBD\sphericalangle = \beta$. Az $MDCF$ négyszögben $AMD\sphericalangle + ACD\sphericalangle = \alpha + \beta + \gamma = 180°$ $\Rightarrow MDCF$ húrnégyszög, körülírt köre megegyezik $CFD\triangle$ körülírt körével $\Rightarrow$ mindhárom kör áthalad M-en.

3. eset: $AEF\triangle$ és $EBD\triangle$ köré írt köre érinti egymást. SE a két kör közös érintője. $SEF\sphericalangle = FAE\sphericalangle = \alpha$, mert azonos ívhez tartozó kerületi szögek. $SED\sphericalangle = DBE\sphericalangle = \beta$, mert azonos ívhez tartozó kerületi szögek. $EDCF$ négyszögben $FED\sphericalangle + FCD\sphericalangle = \alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow EDCF$ húrnégyszög, körülírt köre azonos $CFD\triangle$ köré írt körével $\Rightarrow$ mindhárom kör átmegy E-n.

987. $QBM\sphericalangle$ az $AMBP$ húrnégyszög külső szöge $\Rightarrow QBM\sphericalangle = \alpha$. $RCM\sphericalangle$ a $BQCM$ húrnégyszög külső szöge $\Rightarrow RCM\sphericalangle = \alpha$. $ARCM$ húrnégyszög $\Rightarrow MAR\sphericalangle = 180° - \alpha$. $RAP\sphericalangle = RAM\sphericalangle + MAP\sphericalangle = 180° - \alpha + \alpha = 180° \Rightarrow R; A; P$ egy egyenesen van.

988. A szerkesztés: ① $a; b; e \rightarrow ABC\triangle$. ② $ABC\triangle$ köré írható kör: k_1. ③ C középpontú, c sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = \{D_1; D_2\}$. ⑤ az a D_i a megfelelő, amit AC elválaszt B-től. 0 vagy 1 megoldás lehet.

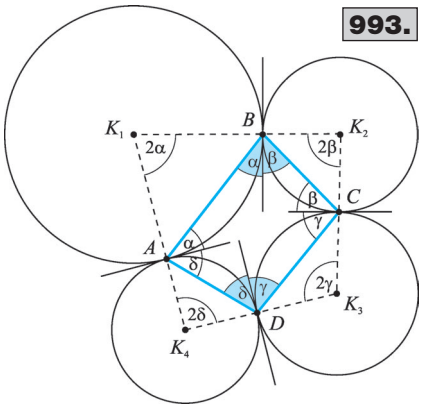
989. A szerkesztés:① $a; b; \beta \rightarrow ABC\triangle$. ② $ABC\triangle$ köré írt köre: k_1. ③ C középpontú, c sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = D_i$. ⑤ az a D_i a megfelelő, amit AC elválaszt B-től. 0 vagy 1 megoldás lehet.

A **990.**, **991.** és **992.** feladat megoldását az olvasóra bízzuk.

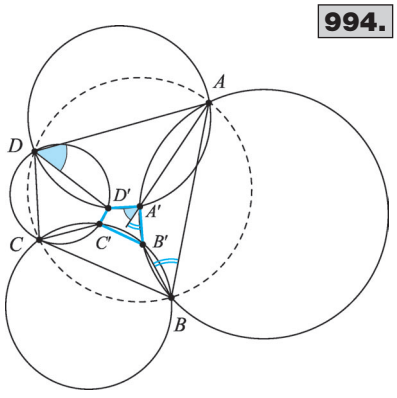
993. Megrajzoltuk az érintkező körök közös belső érintőit. Érintőszárú kerületi szögek és középponti szögek közötti kapcsolatokat az ábrán jelöltük. $K_1K_2K_3K_4$ négyszögben $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360° \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$. $BAD\sphericalangle + DCB\sphericalangle = (\alpha + \delta) + (\beta + \gamma) = 180° \Rightarrow ABCD$ húrnégyszög $\Rightarrow A; B; C; D$ egy körön van.

994. Két kör közös húregyenese a belső $A'B'C'D'$ négyszög szögét két olyan részre bontja, amely egy-egy húrnégyszög külső szöge. $B'A'D'\sphericalangle = ADD'\sphericalangle + ABB'\sphericalangle$ és $B'C'D'\sphericalangle =$

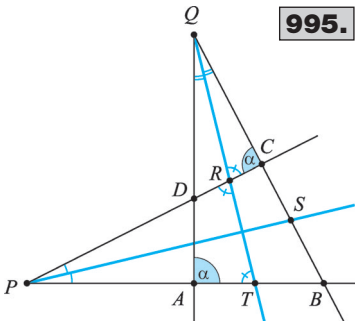
993.



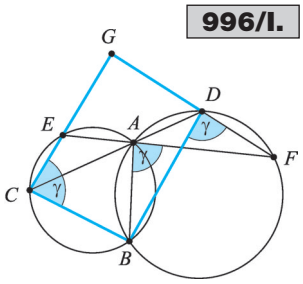
994.



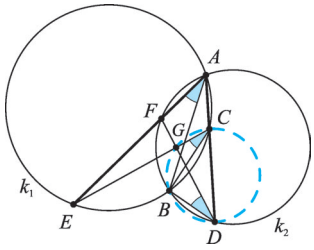
995.



996/I.

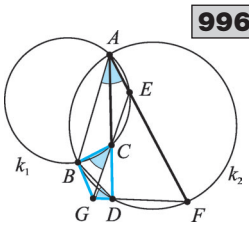


996/II.



$= CBB' \sphericalangle + CDD' \sphericalangle$. $\Rightarrow B'A'D' \sphericalangle + B'C'D' \sphericalangle = ADC \sphericalangle + ABC \sphericalangle =$ $= 180°$, mert $ABCD$ húrnégyszög. $\Rightarrow A'B'C'D'$ húrnégyszög $\Rightarrow$ $\Rightarrow A'$; B'; C'; D' egy körön van.

996/III.



995. QR szögfelező $\Rightarrow DQR \sphericalangle = RQC \sphericalangle$, valamint $DAB \sphericalangle =$ $= RCQ \sphericalangle \Rightarrow QCR\triangle$-nek és $QAT\triangle$-nek két szöge egyenlő, tehát a harmadik is: $ATR \sphericalangle = CRQ \sphericalangle$. $CRQ \sphericalangle = DRT \sphericalangle$, mert csúcsszögek $\Rightarrow ATR \sphericalangle = DRT \sphericalangle \Rightarrow TRP\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow$ a szárszög felezője merőleges az alapra $\Rightarrow PS \perp QT$.

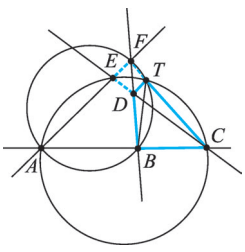
996. A szelők helyzetétől függően a kerületi szögek tétele, illetve a húrnégyszögek külső szögére vonatkozó tétel felhasználásával bizonyítható az állítás. A 996/I. ábrán $ECB \sphericalangle = FAB \sphericalangle = FDB \sphericalangle \Rightarrow CBDG$ húrnégyszög $\Rightarrow C$; B; D; G egy körön van. A 996/II. ábrán $EAB \sphericalangle = ECB \sphericalangle$ és $FAB \sphericalangle = FDB \sphericalangle \Rightarrow GCB \sphericalangle = GDB \sphericalangle \Rightarrow GBDC$ húrnégyszög $\Rightarrow G$; B; D; C egy körön van. A 996/III. ábrán $GDB \sphericalangle = BAF \sphericalangle$ és $BCG \sphericalangle = BAE \sphericalangle \Rightarrow$ $\Rightarrow BCG \sphericalangle = BDG \sphericalangle \Rightarrow BCDG$ húrnégyszög $\Rightarrow B$; C; D; G egy körön van.

997. Tekintsünk két háromszög köré írt kört: $AEC\triangle$-ét és $ABF\triangle$-ét. Metszéspontjuk A és T. Legyen a 996. feladat szerint a két szelő AE és AB. Legyenek a szelők második metszéspontjai F és C, valamint $EC \cap BF = D$. A 996. feladatból $\Rightarrow EDTF$ és $BDTC$ is húrnégyszög $\Rightarrow EDF\triangle$ köré írt kör és $BCD\triangle$ köré írt kör is átmegy T-n.

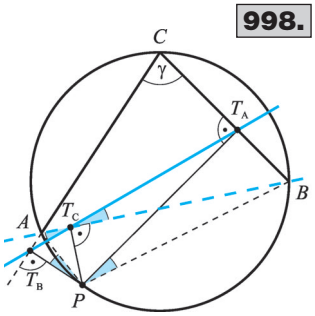
998. $CT_BP \sphericalangle = PT_AC \sphericalangle = 90° \Rightarrow T_APT_B \sphericalangle = 180° - \gamma$; $APBC$ húrnégyszög, ezért $APB \sphericalangle = 180° -$ $- \gamma \Rightarrow \underline{T_BPA \sphericalangle = T_APB \sphericalangle}$. $AT_BP \sphericalangle = PT_CA \sphericalangle = 90° \Rightarrow AT_BPT_C$ húrnégyszög $\Rightarrow T_BPA \sphericalangle = T_BT_CA \sphericalangle$. T_C és T_A rajta van PB Thalész körén $\Rightarrow \underline{T_AT_CB \sphericalangle = T_APB \sphericalangle}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $AT_CT_B \sphericalangle = T_AT_CB \sphericalangle \Rightarrow T_B$; T_C; T_A egy egyenesen van.

999. **1. eset:** $ABC\triangle$ hegyesszögű. Legyen M_C az M tükörképe AB-re. $BAM_C \sphericalangle = MAB \sphericalangle =$ $= 90° - \beta$ és $ABM_C \sphericalangle = MBA \sphericalangle = 90° - \alpha \Rightarrow AM_CB \sphericalangle = 180° - (90° - \beta) - (90° - \alpha) = 180° - \gamma \Rightarrow$ $\Rightarrow A$; B; C; M_C egy körön vannak.

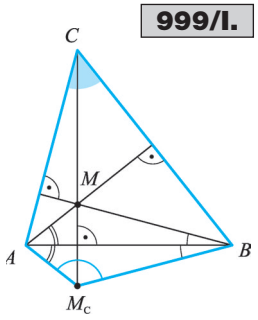
997.



998.

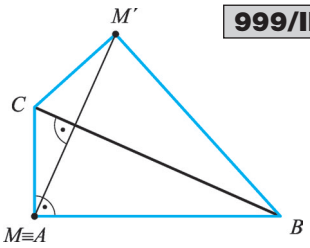


999/I.



I

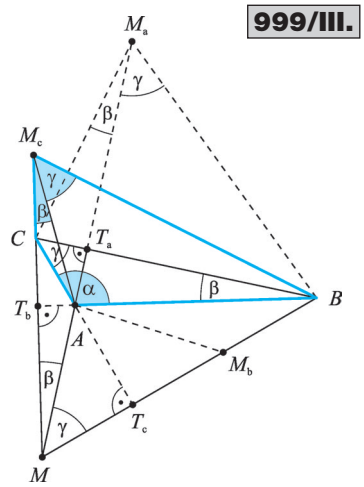
999/II.



2. eset: $ABC\triangle$ derékszögű. M tükörképe AB-re is, AC-re is A. M' az M tükörképe CB-re $\Rightarrow CM'B\sphericalangle = 90° \Rightarrow A$; B; M'; C egy körön vannak (BC Thalész körén).

3. eset: $ABC\triangle$ tompaszögű. $\beta = CBA\sphericalangle = CMA\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek, valamint $\gamma = BCA\sphericalangle = BMA\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek $\Rightarrow$ a tükrözés miatt $CM_aT_a\sphericalangle = \beta$ és $BM_aT_a\sphericalangle = \gamma \Rightarrow CM_aB\sphericalangle = \beta + \gamma \Rightarrow CM_aB\sphericalangle + CAB\sphericalangle = \beta + \gamma + \alpha = 180° \Rightarrow A$; C; B; M_a egy körön van. Tükrözés miatt $AM_bM\sphericalangle = AMT_c\sphericalangle = \gamma \Rightarrow AM_bB\sphericalangle = 180° - \gamma \Rightarrow AM_bB\sphericalangle + ACB\sphericalangle = 180° \Rightarrow A$; M_b; B; C egy körön van. Tükrözés miatt $CM_cA\sphericalangle = \beta$ és $AM_cB\sphericalangle = \gamma \Rightarrow CM_cB\sphericalangle = \beta + \gamma \Rightarrow CM_cB\sphericalangle + CAB\sphericalangle = \beta + \gamma + \alpha = 180° \Rightarrow A$; B; C; M_c egy körön vannak.

999/III.

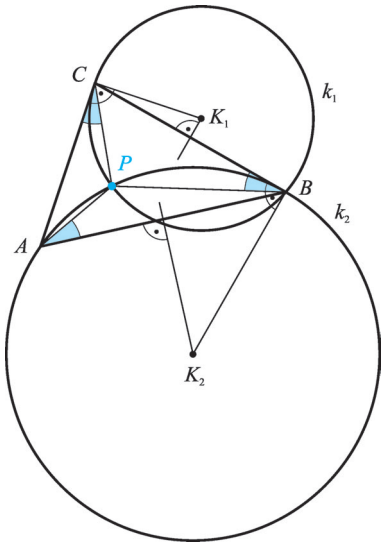


1000. M tükörképe az AB oldalegyenesre M_C. A 999. feladatból tudjuk, hogy a magasságpont tükörképe rajta van a háromszög köré írható körön. Így AB az M_C-ből vagy ugyanakkora szögben látszik, mint C-ből, azaz γ szög alatt, vagy $(180° - \gamma)$ szög alatt.

1001. M-et tükrözzük BC felezőpontjára: M'. $\Rightarrow CMB\sphericalangle = CM'B\sphericalangle$. M-et tükrözzük BC egyenesre: M_a. $\Rightarrow CMB\sphericalangle = CM_aB\sphericalangle$. A fentiekből következik: $CM'B\sphericalangle = CM_aB\sphericalangle \Rightarrow M'$ és M_a rajta van BC ugyanazon látószög-körívén. Mivel M' és M_a a BC azonos oldalán vannak, a látószögkörív azonos ívén helyezkednek el. A 999. feladatból tudjuk, hogy M_a rajta van az $ABC\triangle$ köré írható körön, ezért ennek része a kérdéses látószögkörív, vagyis M' rajta van a háromszög köré írt körön.

1002. M tükörképe AC egyenesre M_b. A tükrözés miatt az $ACM\triangle$ köré írható kör sugara egyenlő az $ACM_b\triangle$ köré írható kör sugarával. Az $ACM_b\triangle$ köré írható kör a 999. feladat miatt megegyezik az $ABC\triangle$ köré írható körrel. Hasonlóan belátható, hogy $ABM\triangle$ és $BCM\triangle$ köré írható kör sugara is egyenlő az $ABC\triangle$ köré írható kör sugarával.

1003.



1003. Felhasználjuk: $PCA\sphericalangle = CBP\sphericalangle$, mert kerületi szögek k_1-ben, valamint $CBP\sphericalangle = BAP\sphericalangle$, mert kerületi szögek k_2-ben. A szerkesztés: ① AC-t C-ben érintő, B-n áthaladó kör: k_1. ② BC-t B-ben érintő, A-n áthaladó kör: k_2. ③ $k_1 \cap k_2 = P$.

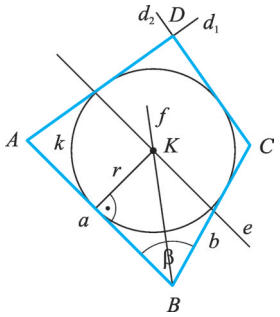
1004. $d = 4$ cm.

1005. A deltoid tengelyesen szimmetrikus, ezért két-két szomszédos oldala egyenlő. $\Rightarrow$ A szemközti oldalak összege megegyezik. $\Rightarrow$ A konvex deltoid érintőnégyszög.

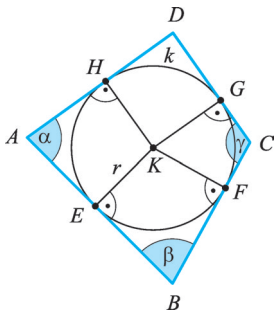
1006. A paralelogramma konvex. A paralelogramma érintőnégyszög, ha $a + a = b + b$, azaz $a = b$. $\Rightarrow$ A paralelogramma érintőnégyszög, ha rombusz.

1007. Legyenek az érintőhatszög csúcsai A, B, C, D, E és F, az érintési pontok pedig K, L, M, N, P és Q. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők. $\Rightarrow AK = AQ$; $FQ = FP$; $EP = EN$; $ND = DM$; $MC = CL$; $LB = BK \Rightarrow AB + CD + EF = AK + KB + CM + MD + EP + PF = AQ + BL + LC + DN + NE + FQ = BC + DE + FA$.

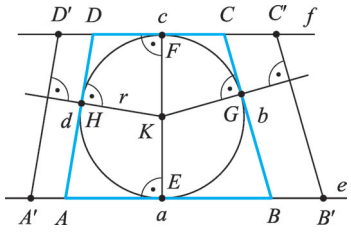
1012/I.



1012/II.



1013.



1008. Külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők. ⇒ A sokszög egy-egy csúcsából induló érintőszakaszok egyenlők és két szomszédos oldal darabjai. ⇒ Minden egyes érintőszakaszból egyik páros sorszámú, másik páratlan sorszámú oldal része, és ezek az érintőszakaszok kiadják az összes oldalt. ⇒ A páros sorszámú oldalak összege egyenlő a páratlan sorszámú oldalak összegével.

1009. A deltoid akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha konvex. A deltoid akkor és csak akkor húrnégyszög, ha $2\alpha = 180°$, azaz $\alpha = 90°$. ⇒ A deltoid akkor és csak akkor érintőnégyszög és húrnégyszög egyszerre, ha két szemközti szöge derékszög.

1010. Legyenek a rombuszba írt kör érintési pontjai *K, L, M, N*. A rombuszba beírt kör középpontja az átlók metszéspontja: *O*. ($KO = LO = MO = NO$). $OK \perp AD$ az érintés miatt, valamint $OM \perp BC$ az érintés miatt. ⇒ $AD \parallel BC$ miatt *K*; *O*; *M* egy egyenesen van. Hasonlóan megmutatható, hogy *N*; *O*; *L* egy egyenesen van. ⇒ *KLMN* négyszög átlói egyenlő hosszúak és felezik egymást. ⇒ *KLMN* téglalap.

1011. Jelöljük a rombusz középpontját *K*-val, csúcsait *A*-, *B*-, *C*-, *D*-vel. A szerkesztés:
① *a*; *r*; $90° \to ADK\triangle$. ② *A*-t tükrözni *K*-ra: *C*. ③ *D*-t tükrözni *K*-ra: *B*. 0 vagy 1 megoldás lehet.

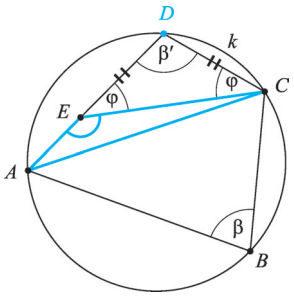
1012. *a)* Adott: *a*; *b*; β; *r*. A szerkesztés: ① *a*; *b*; $\beta \Rightarrow ABC\triangle$. ② β szögfelezője: *f*. ③ *AB*-vel párhuzamos a β felé *r* távolságra: *e*. ④ $f \cap e = K$. ⑤ *K* középpontú, *r* sugarú kör: *k*. ⑥ *A*-ból érintő *k*-hoz: d_1. ⑦ *C*-ből érintő *k*-hoz: d_2. ⑧ $d_1 \cap d_2 = D$. 0 vagy 1 megoldás lehet.
b) Adott: *r*; α; β; γ. Felhasználjuk, hogy az érintési pontba húzott sugarak a négyszöget négy húrnégyszögre bontják. A szerkesztés: ① *K* középpontú, *r* sugarú kör: *k*. ② *K* csúcsú, egymáshoz csatlakozó $(180° - \alpha)$; $(180° - \beta)$; $(180° - \gamma)$ szögek → *H*; *E*; *F*; G. ③ *H*-ban, *E*-ben, *F*-ben és *G*-ben merőleges az oda érkező sugarakra. ④ a merőlegesek metszéspontjai: *A*; *B*; *C*; *D*.
$\alpha + \beta + \gamma < 360°$ esetén egyértelmű megoldás van. $\alpha + \beta + \gamma \geq 360°$ esetén nincs megoldás.

1013. A szerkesztés: ① *k* egy átmérőjének *E* és *F* végpontjában érintő: *e* és *f*. ② *f* tetszőleges *C′* pontjából *b* sugarú körív; *e*-vel való metszéspontja: *B′*. ③ *K*-ból merőleges *C′B′*-re, ennek metszéspontja *k*-val: *G*. ④ *G*-n át párhuzamos *C′B′*-vel, ennek *e*-vel és *f*-fel való metszéspontja: *B* és *C*. ⑤ *f* tetszőleges *D′* pontjából *d* sugarú körív; *e*-vel való metszéspontja: *A′*. ⑥ *K*-ból merőleges *A′D′*-re, ennek metszéspontja *k*-val: *H*. ⑦ *H*-n át párhuzamos *A′D′*-vel, ennek *e*-vel és *f*-fel való metszéspontja: *A* és *D*. 0; 2 egybevágó vagy 2-2 egybevágó trapéz a megoldás egy kiválasztott átmérőhöz.

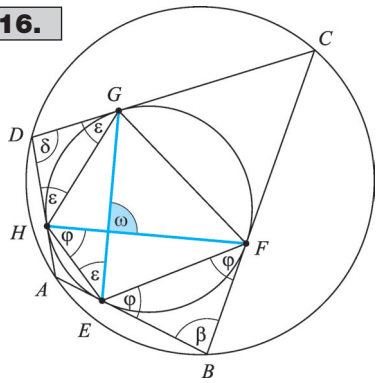
1014. *EF* középvonal, *K* a két félkör érintési pontja. Az érintő körök középpontjai és az érintési pont egy egyenesen vannak. *ABCD* érintőnégyszög ⇔ $AD + BC = AB + DC = 2EF$ ⇔ ⇔ $AD/2 + BC/2 = EF$ ⇔ *EF* ugyanabban a *K* pontban metszi az *AD* és a *CB* átmérőjű köröket ⇔ *K* a két kör érintési pontja.

I

1015.



1016.



1015. Felhasználjuk, hogy $ABCD$ húrnégyszög, ezért $\beta + \beta' = 180°$. $ABCD$ érintőnégyszög, ezért $AB + CD = BC + DA \Rightarrow AB - BC = DA - CD$. Legyen $E \in AD$ olyan pont, amelyre $DE = CD. \Rightarrow AE = DA - DE = DA - CD = AB - BC$, másrészt $DEC\triangle$ egyenlő szárú, így $\varphi = (180° - \beta')/2 = \beta/2 \Rightarrow AEC\sphericalangle = 180° - \beta/2$. A szerkesztés: ① AC; $AB - BC$; $180° - \beta/2 \rightarrow$ $\rightarrow AEC\triangle$. ② AE egyenes kimetszi k-ból D-t. 0; 1 vagy 2 megoldás van.

1016. $ABCD$ érintőnégyszög, ezért $DH = DG$ és $BE = BF \Rightarrow DHG\sphericalangle = DGH\sphericalangle = \varepsilon$ és $BEF\sphericalangle = BFE\sphericalangle = \varphi$. Ezek érintőszárú kerületi szögek a beírt körhöz $\Rightarrow DHG\sphericalangle = HEG\sphericalangle$ és $BEF\sphericalangle = EHF\sphericalangle$. $ABCD$ húrnégyszög $\Leftrightarrow \beta + \delta = 180° \Leftrightarrow (180° - 2\varphi) + (180° - 2\varepsilon) = 180° \Leftrightarrow \varepsilon + \varphi = 90° \Leftrightarrow \underline{\underline{\omega = 90°}} \Leftrightarrow \underline{\underline{GE \perp HF}}$.

Hasonlóság

Kicsinyítés, nagyítás

Az **1017–1024.** feladatok szerkesztési lépései könnyen elvégezhetők.

1025. **1. eset:** EA képe EP. E középpontú hasonlóságot alkalmazunk. A szerkesztés: ① P pontban merőlegest állítunk az AE egyenesre $\Rightarrow m$. ② $m \cap e(E; B) = B'$. ③ B' ponton át párhuzamost húzunk a BC egyenessel $\Rightarrow f$. ④ $f \cap e(E; C) = C'$. ⑤ C' ponton át párhuzamost húzunk a CD egyenessel $\Rightarrow g$. ⑥ $g \cap e(E; D) = D'$.

2. eset: EA képe PA. A középpontú hasonlóságot alkalmazunk. A szerkesztés lépései hasonlóak az első eseteihez.

1026. A szerkesztés: ① $OB \cap e = B'$. ② B' ponton át párhuzamost húzunk AB egyenessel $\Rightarrow f'$. ③ $OA \cap f' = A'$, $OA \cap e = A''$. ④ A'' ponton át párhuzamost húzunk AB egyenessel $\Rightarrow f''$. ⑤ $OB \cap f'' = B'$. A megoldások száma 0, 1, 2 vagy végtelen sok lehet.

1027. A szerkesztés: ① $e(O; B) \cap k = \{B_1; B_2\}$. ② B_i ponton át párhuzamost húzunk AB egyenessel $\Rightarrow a_i$. ③ $e(O; A) \cap a_i = A_i$. ④ Az A pontból kiindulva is végrehajtjuk a fenti szerkesztési lépéseket. Négy megoldás lehet.

1028. A szerkesztés lépései az *a), b), c)* esetben: ① $e(O; C) \cap e = C'$, $e(O; D) \cap e = D'$. ② $C'D'$ oldalú négyzet $ABCD$-vel azonos félsíkban $\Rightarrow A'B'C'D'$. ③ $e(O; A) \cap e = A''$, $e(O; B) \cap e = B''$. ④ $A''B''$ oldalú négyzet $ABCD$-vel azonos félsíkban $\Rightarrow A''B''C''D''$.

1029. A hasonlóság az e és f egyenesek M metszéspontjába a négyzet valamelyik csúcsát viszi. $\Rightarrow$ A hasonlóság középpontja a négyzet valamelyik átlóegyenesének és egy rá nem illeszkedő csúcs és az M pont összekötő egyenesének metszéspontja. A szerkesztés:
① $e(A; C) \cap e(D; M) = P_1$. ② $e(A; C) \cap e(B; M) = P_2$. ③ $e(B; D) \cap e(C; M) = Q_1$.
④ $e(B; D) \cap e(A; M) = Q_2$. Ha valamelyik átlóegyenesen rajta van M, akkor végtelen sok megoldás van. Egyébként legfeljebb négy megoldás lehet.

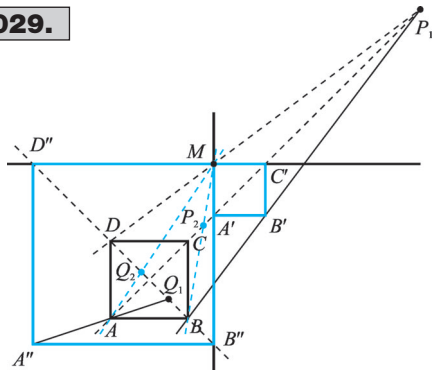
1030. Legyenek a téglalap csúcsai A, B, C és D, a négyzet csúcsai P, Q, R és S. $AB \parallel PQ$, $BC \parallel QR$. A szerkesztés: ① $e(C; R) \cap e(B; Q) = K_1$. ② $e(K_1; S) \cap e(C;D) = S'$, $e(K_1;P) \cap e(A; B) = P'$. ③ $e(C; R) \cap e(D; S) = K_2$. ④ $e(D; S) \cap e(A; P) = K_3$. ⑤ $e(A; P) \cap e(B; Q) = K_4$. Négy megoldás lehet, K_2, K_3 és K_4 középpontokkal is egy-egy hasonló négyzet adódik.

1031. Legyenek a négyzet csúcsai A, B, C és D, az adott szakasz végpontjai E és F. A szerkesztés: ① EF oldalra mindkét irányban megszerkesztjük a négyzetet $\Rightarrow EFC'D'$ és $EFD''C''$. ② $e(A; E) \cap e(B; F) = O_1$ és $e(A; F) \cap e(B; E) = O_2 \Rightarrow O_1$, O_2 a hasonlóságok középpontjai. Két megoldás van. Ha az adott szakasz valamelyik négyzetoldal egyenesére esik, akkor másik megfelelő csúcspárt választunk a középpont megkeresésére.

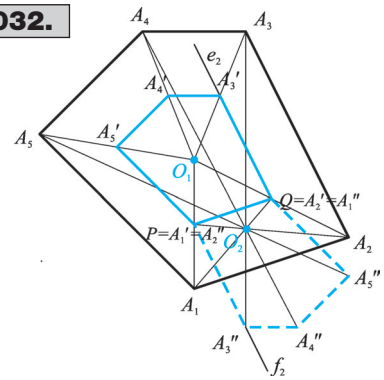
1032. **1. eset:** A_1 képe P, A_2 képe Q. A szerkesztés: ① $e(A_1; P) \cap e(A_2; Q) = O_1 \Rightarrow O_1$ a hasonlóság középpontja. ② Q ponton át párhuzamost húzunk az A_2A_3 egyenessel $\Rightarrow e_2$ és $e_2 \cap e(O_1; A_3) = A_3'$. ③ A_3' ponton át párhuzamost húzunk az A_3A_4 egyenessel $\Rightarrow e_3$ és $e_3 \cap e(O_1; A_4) = A_4'$. ④ A_4' ponton át párhuzamost húzunk az A_4A_5 egyenessel $\Rightarrow e_4$ és $e_4 \cap e(O_1; A_5) = A_5'$. **2. eset:** A_1 képe Q, A_2 képe P. A szerkesztés: ① $e(A_1; Q) \cap e(A_2; P) = O_2 \Rightarrow O_2$ a hasonlóság középpontja. ② P ponton át párhuzamost húzunk az A_2A_3 egyenessel $\Rightarrow f_2$ és $f_2 \cap e(O_2; A_3) = A_3''$. ③ A_3'' ponton át párhuzamost húzunk az A_3A_4 egyenessel $\Rightarrow f_3$ és $f_3 \cap e(O_2; A_4) = A_4''$. ④ A_4'' ponton át párhuzamost húzunk az A_4A_5 egyenessel $\Rightarrow f_4$ és $f_4 \cap e(O_2; A_5) = A_5''$. Két megoldás van.

1033. **1. eset:** $e(A; B) \neq e(D; E)$. A szerkesztés: ① D ponton át párhuzamost húzunk AC egyenessel $\Rightarrow d_1$. ② D ponton át párhuzamost húzunk BC egyenessel $\Rightarrow d_2$. ③ E ponton át párhuzamost húzunk BC egyenessel $\Rightarrow e_1$. ④ E ponton át párhuzamost húzunk AC egyenessel $\Rightarrow e_2$. ⑤ $d_1 \cap e_1 = C'$ és $d_2 \cap e_2 = C''$. ⑥ $e(A; D) \cap e(B; E) = O_1$ és $e(A; E) \cap e(B; D) = O_2 \Rightarrow O_1$, O_2 a hasonlóságok középpontjai. ⑦ $DEC'\triangle$ és $DEC''\triangle$ a keresett háromszögek. Egy megoldás van, ha $DE = AB$, ekkor $\lambda = -1$; két megoldás van, ha $DE \neq AB$. **2. eset:** $e(A; B) = e(D; E)$. A szerkesztés: ①–⑤ megegyezik az 1. esetben leírtakkal. ⑥ $e(C; C') \cap e(A; B) = O_1$ és $e(C; C'') \cap e(A; B) = O_2 \Rightarrow O_1, O_2$ a hasonlóságok középpontjai. ⑦ $DEC'\triangle$ és $DEC''\triangle$ a keresett háromszögek. Egy vagy két megoldás lehet.

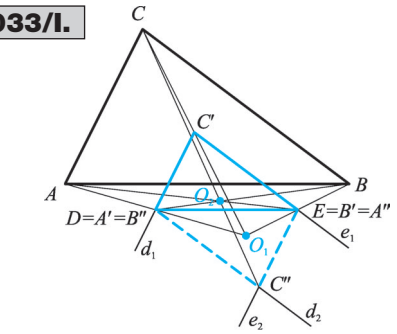
1029.



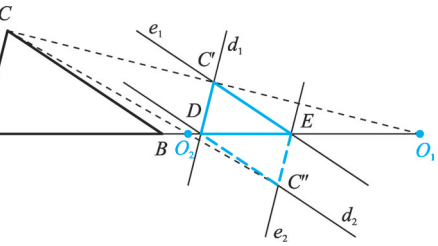
1032.



1033/I.

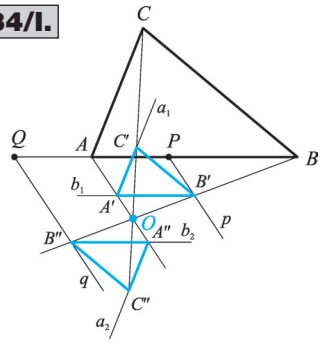


1033/II.

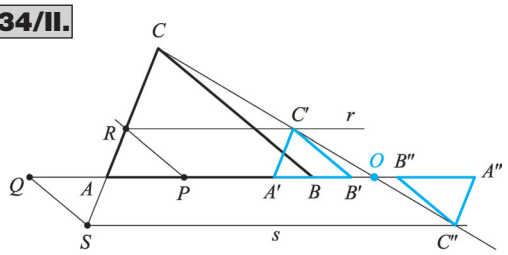


I

1034/I.



1034/II.



1034. Felhasználjuk, hogy az AB oldal és képe párhuzamos egymással. **1. eset:** az O pont nincs az AB egyenesen. A szerkesztés: ① AB-re A pontból d hosszúságú szakaszt mérünk mindkét irányban $\Rightarrow P$ és Q pontok. ② P ponton át párhuzamost húzunk AO egyenessel $\Rightarrow p$. Q ponton át párhuzamost húzunk AO egyenessel $\Rightarrow q$. ③ $p \cap e(B; O) = B'$ és $q \cap e(B; O) = B''$. ④ B' ponton át párhuzamost húzunk AB egyenessel $\Rightarrow b_1$. B'' ponton át párhuzamost húzunk AB egyenessel $\Rightarrow b_2$. ⑤ $b_1 \cap e(A; O) = A'$ és $b_2 \cap e(A; O) = A''$. ⑥ A' ponton át párhuzamost húzunk AC egyenessel $\Rightarrow a_1$. A'' ponton át párhuzamost húzunk AC egyenessel $\Rightarrow a_2$. ⑦ $a_1 \cap e(C; O) = C'$ és $a_2 \cap e(C; O) = C''$. Egy vagy két megoldás lehet.
2. eset: az O pont rajta van az AB egyenesen. A szerkesztés: ① AB-re A pontból d hosszúságú szakaszt mérünk mindkét irányban $\Rightarrow P$ és Q pontok. ② P és Q pontokon át BC egyenessel húzott párhuzamosok az AC egyenesből kimetszik az R és S pontokat. ③ R ponton át párhuzamost húzunk AB egyenessel $\Rightarrow r$, S ponton át párhuzamost húzunk AB egyenessel $\Rightarrow s$. ④ $r \cap e(C; O) = C'$ és $s \cap e(C; O) = C''$. ⑤ C' és C'' pontokon át AC egyenessel húzott párhuzamosok az AB egyenesből kimetszik az A' és A'' pontokat; C' és C'' pontokon át BC egyenessel húzott párhuzamosok az AB egyenesből kimetszik a B' és B'' pontokat. Egy vagy két megoldás lehet.

1035. A szerkesztés: ① Legyen P a k körnek az OA egyenesre nem illeszkedő pontja. ② O' ponton át párhuzamost húzunk PO egyenessel $\Rightarrow e$. ③ $e \cap e(A; P) = P'$. ④ O' középpontú $O'P'$ sugarú kör $\Rightarrow k'$. Nincs megoldás, ha $A = O'$. Végtelen sok megoldás van, ha $A = O$. Egy megoldás egyébként.

1036. A szerkesztés: ① $A'B'$-re A' pontban α szöget, B' pontban β szöget mérünk. ② Az azonos félsíkban levő két-két szögszár metszéspontja C_1, illetve C_2. Az egyik háromszög azonos, a másik ellentétes körüljárású lesz az eredetivel.

1037. A szerkesztés: ① Az AB oldalra $ADEF$ téglalapot szerkesztünk, amely egybevágó a megadottal, és a hosszabb oldala illeszkedik AB-re. ② B pontban merőlegest állítunk az AB egyenesre $\Rightarrow g$. ③ $e(A; E) \cap g = E'$. ④ E' pontból merőlegest állítunk az AB egyenesre $\Rightarrow$ a merőleges talppontja D'. ⑤ $A = A'$, $B = B' \Rightarrow A'B'E'D'$ téglalap. ⑥ BC, illetve CA oldalra hasonlóan megszerkesztjük a téglalapot. Egyértelmű a megoldás.

1038. Felhasználjuk, hogy az α szög $g \parallel h$ szelőire a párhuzamos szelők tétele: $KP : PQ = KR : RS$. A szerkesztés: ① tetszőleges szög f szárán $KP = a$ és $PQ = b$. ② az α szög e szárán $KR = a'$. ③ P és R egyenese: g. ④ g-vel párhuzamos Q-n át: $\Rightarrow h$. ⑤ $h \cap e = S$. ⑥ $RS = b'$. Egyértelmű a megoldás.

1039. AB szakasz arányos osztása két részre, ha $AP : PB = m : n$. A szerkesztés: ① A kezdőpontú tetszőleges félegyenes: f. ② tetszőleges, azonos egységben f-en $AP' = m$ és $P'B' = n$. ③ $B'B$ egyenes: g. ④ g-vel párhuzamos egyenes P'-n át: h. ⑤ $AB \cap h = P$. *a)* $m = 2$ és $n = 3$. *b)* $m = 5$ és $n = 7$. *c)* $m = 1$ és $n = 2$, mert $2\frac{2}{3} : 5\frac{1}{3} = \frac{8}{3} : \frac{16}{3} = 1 : 2$.

AB szakasz arányos osztása három részre, ha $AP : PQ : QB = m : n : p$. A szerkesztés: ① az A kezdőpontú tetszőleges félegyenes: f. ② tetszőleges, azonos egységben f-en $AP' = m$, $P'Q' = n$

és $Q'B' = p$. ③ $B'B$ egyenes: g. ④ g-vel párhuzamos egyenes Q'-n, illetve P'-n át: h, illetve i. ⑤ $AB \cap h = Q$ és $AB \cap i = P$. *d)* $m = 2$ és $n = 3$ és $p = 4$. *e)* $m = 5$ és $n = 7$ és $p = 8$. *f)* $m = 1$ és $n = 2$ és $p = 6$, mert $\frac{2}{3} : 1\frac{1}{3} : 4 = \frac{2}{3} : \frac{4}{3} : \frac{12}{3} = 1 : 2 : 6$.

1040. A háromszög oldalait segédegyenest alkalmazva osztjuk $m : n$ arányú részekre az 1039. feladat útmutatása szerint.

1041. $A_iB_i \| A_jB_j \Rightarrow$ az egyállású szögek egyenlők $\Rightarrow CA_iB_i\triangle \sim CA_1B_1\triangle$, ha $2 \le i \le 8$. $\Rightarrow$ megfelelő magasságaik aránya egyenlő a hasonlóság arányával $\Rightarrow \frac{A_8B_8}{A_1B_1} = \frac{1}{8} \Rightarrow A_8B_8 = 0{,}85$ m. Hasonlóan: $A_7B_7 = 1{,}7$ m; $A_6B_6 = 2{,}55$ m; $A_5B_5 = 3{,}4$ m; $A_4B_4 = 4{,}25$ m; $A_3B_3 = 5{,}1$ m; $A_2B_2 = 5{,}95$ m.

Az **1042.**, **1043.**, **1044.**, **1045.**, **1046.** feladat megoldását az olvasóra bízzuk.

1047. A szerkesztés: ① az A kezdőpontú e félegyenesen: AB; $BC_1 = BC$; $C_1A_1 = CA$. ② az A kezdőpontú f félegyenesre k hosszúságú szakasz $\Rightarrow AA_2$. ③ A_2A_1-gyel párhuzamos C_1-en át: c és A_2A_1-gyel párhuzamos B_1-en át: b. ④ $c \cap f = C_2$ és $b \cap f = B_2$. ⑤ AB_2; B_2C_2; C_2A_2 oldalú háromszög $\rightarrow A'B'C'\triangle$. Egyértelmű a megoldás.

1048. *a)* A szerkesztés: ① α; β szögű háromszög $\rightarrow A_0B_0C_0\triangle$. ② A_0 kezdőpontú A_0B_0 félegyenesre $B_0C_1 = B_0C_0$; Ugyanazon a félegyenesen C_1-ből $C_1A_1 = C_0A_0 \Rightarrow A_0A_1$, az $A_0B_0C_0\triangle$ kerületével egyenlő szakasz. ③ A_0 kezdőpontú f félegyenesre $A_0A_2 = 2s = k$. ④ A_2A_1-gyel párhuzamos C_1-en át: c és A_2A_1-gyel párhuzamos B_1-en át: b. ⑤ $c \cap f = C_2$ és $b \cap f = B_2$. ⑥ A_0B_2; B_2C_2; C_2A_2 oldalú háromszög $\rightarrow ABC\triangle$. Egyértelmű a megoldás.

b) A szerkesztés: ① α; β szögű háromszög $\rightarrow A_0B_0C_0\triangle$. ② B_0 kezdőpontú A_0-t nem tartalmazó félegyenesre $B_0C_1 = B_0C_0$; ugyanazon a félegyenesen C_1-ből $C_1A_1 = C_0A_0 \Rightarrow B_0A_1$, az $A_0B_0C_0\triangle$ $a' + b'$ oldalával egyenlő szakasz. ③ B_0 kezdőpontú f félegyenesre $B_0A_2 = a + b$. ④ A_1A_2-vel párhuzamos C_1-en át: p. ⑤ $p \cap f = C_2$. ⑥ B_0C_2; C_2A_2; $180° - \alpha - \beta$ adatokból $\rightarrow$ $ABC\triangle$. Egyértelmű a megoldás.

c) A szerkesztés: ① α; β szögű háromszög $\rightarrow A_0B_0C_0\triangle$. ② Legyen $A_1 \in C_0B_0$ olyan pont, amelyre $C_0A_1 = C_0A_0 \rightarrow B_0A_1 = a' - b'$. ③ A_1-en át f egyenes, azon B_2 pont, amelyre $A_1B_2 = a - b$. ④ B_0B_2-vel párhuzamos C_0-on át $\rightarrow g$. ⑤ $g \cap f = A_2$. ⑥ A_1A_2; A_2B_2; $\alpha \rightarrow ABC\triangle$. A megoldhatóság feltétele $\alpha > \beta$.

1049. *a)* A szerkesztés: ① α; $90° \rightarrow A_0B_0C_0\triangle$. ② $A_0C_0 + C_0B_0 \rightarrow A_0B_1$ (A_0C_0 egyenesen). ③ A_0-on át f-re $(a + b) = A_0B_2$. ④ B_1B_2-vel párhuzamos C_0-on át $\rightarrow c$. ⑤ $c \cap f = C_2$. ⑥ A_0C_2; $90°$; $\alpha \rightarrow ABC\triangle$. Egyértelmű a megoldás.

b) A szerkesztés: ① α; $90° \rightarrow A_0B_0C_0\triangle$. ② $A_0B_0 - A_0C_0 \rightarrow B_0B_1$ (A_0B_0 egyenesen). ③ B_0-on át f egyenes, $B_0B_2 = c - b$. ④ B_1B_2-vel párhuzamos A_0-on át $\rightarrow a$. ⑤ $a \cap f = A_2$. ⑥ B_0A_2; $90°$; $\alpha \rightarrow ABC\triangle$. Egyértelmű a megoldás.

1050. Ha két egyenlő szárú háromszög szárszöge egyenlő, akkor a háromszögek hasonlók. Ezért a szerkesztendő háromszöghöz hasonlót szerkesztünk, majd a megfelelő adata és az adott hosszúság közötti hasonlósági aránnyal megszerkesztjük a kívánt háromszöget. Egyértelmű a megoldás.

1051. *a)* A szerkesztés: ① Adott szakasz felmérése A kezdőpontú f félegyenesre $\rightarrow AD_2$. ② AB; $BD_1 = BD$ szakasz az A kezdőpontú e-re $\rightarrow AD_1$. ③ D_1D_2-vel párhuzamos B-n át $\Rightarrow b$. ④ $b \cap f = B_2$. ⑤ AB_2 oldalú négyzet. Egyértelmű a megoldás.

b) A szerkesztés: ① Adott szakasz felmérése B-n átmenő f egyenesre $\Rightarrow BC_2$. ② B-n átmenő e egyenes egyik félegyenesére BA, majd A-ból a B-t tartalmazó félegyenesre $AC_1 = AC$ szakasz $\rightarrow$ $\rightarrow C_1$ pont. ③ C_1C_2-vel párhuzamos A-n át $\Rightarrow a$. ④ $a \cap f = A_2$. ⑤ BA_2 oldalú négyzet a megoldás. Egyértelmű a megoldás.

1052. *a)* Bármely két négyzet hasonló, ezért tetszőleges négyzet átlójának és egyik oldalának összegére, valamint az adott szakaszra alkalmazzuk az 1051. *a)* feladatban látott szerkesztési eljárást.

b) Bármely két négyzet hasonló, ezért tetszőleges négyzet átlójának és egyik oldalának különbségére, valamint az adott szakaszra alkalmazzuk az 1051. *b)* feladatban látott szerkesztési eljárást.

I

Hasonló síkidomok beírása, levágása

1053. A szerkesztésnél felhasználjuk a párhuzamos szelők tételét.

1054. Kétféleképp rajzolhatunk egy oldalra kifelé az ABC háromszöggel egybevágó háromszöget: **1. eset:** AB egyenesre való tükrözéssel: $ABD_1\triangle$. Ekkor az $ABD_1\triangle$ C középpontú, 1/2 arányú hasonló képe az $A'B'D_1'\triangle$, ahol A' az AC felezőpontja, B' a BC felezőpontja és D_1' a C-ből induló magasság talppontja.
2. eset: AB szakasz felezőpontjára való tükrözéssel: $ABD_2\triangle$. Ekkor az $ABD_2\triangle$ C középpontú, 1/2 arányú hasonló képe az $A'B'D_2'\triangle$, ami az $ABC\triangle$ középvonal háromszöge. Egy adott csúcsból egy vagy két megoldás adódik.

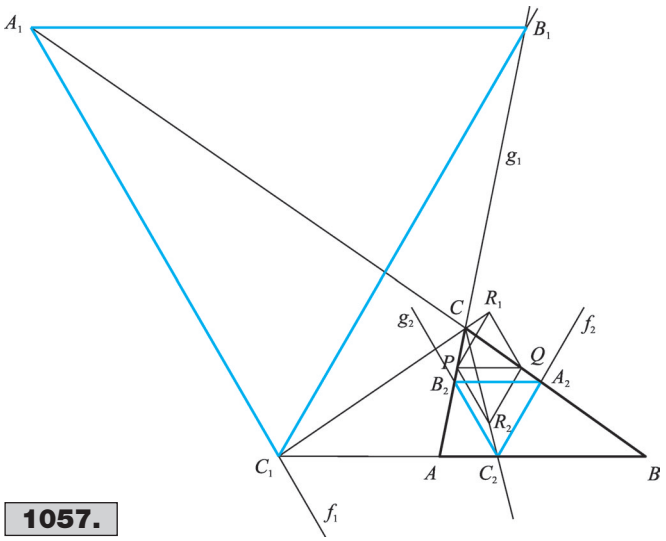
1055. Legyenek az egyenlő szárú háromszög csúcsai A, B és C, a szabályos háromszög csúcsai A, B és D. A szerkesztés: ① $e(A; B) \cap e(C;D) = D'$, ami az AB szakasz felezőpontja. ② D' ponton át párhuzamost húzunk az AD egyenessel $\Rightarrow e$. ③ D' ponton át párhuzamost húzunk a DB egyenessel $\Rightarrow f$. ④ $e \cap e(A; C) = A'$ és $f \cap e(B; C) = B'$. Egyértelmű a megoldás.

1056. C középpontú hasonlóság segítségével szerkesztünk. A szerkesztendő háromszög alappal szemközti D' csúcsa az átfogó belső pontja. A szerkesztés: ① Az átfogóra kifelé olyan egyenlő szárú $ABD\triangle$-et szerkesztünk, aminek a szára másfélszerese az átfogónak. ② $AB \cap e(C; D) = D'$. ③ D' ponton át párhuzamost húzunk az AD, illetve a BD egyenessel $\Rightarrow e$ és f. ④ $e \cap AC = A'$ és $f \cap BC = B' \Rightarrow A'D'B'\triangle$. Egyértelmű a megoldás.

1057. A szerkesztés: ① Legyen P az AC egyenes, Q a BC egyenes olyan tetszőleges pontja, hogy $PQ \parallel AB$ legyen. ② $PQR_1\triangle$ és $PQR_2\triangle$ szabályos háromszögek szerkesztése PQ szakaszra. ③ $e(C; R_2) \cap e(A; B) = C_2$ és $e(C; R_1) \cap e(A; B) = C_1$. ④ C_i ponton át párhuzamost húzunk R_iQ egyenessel $\Rightarrow f_i$ és C_i ponton át párhuzamost húzunk R_iP egyenessel $\Rightarrow g_i$. ⑤ $f_i \cap e(C; B) = A_i$ és $g_i \cap e(A; C) = B_i$. Egy vagy két megoldás lehet.

1058. Felhasználjuk, hogy $ABCD \sim PQDA$ esetén $BDA\triangle \sim AQD\triangle \Rightarrow$ szögeik egyenlők, azaz $DAQ\sphericalangle = ABD\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek $\Rightarrow BD$ átló merőleges AQ átlóra. A szerkesztés: ① BD átlóra merőlegest állítunk az A csúcsból $\Rightarrow m$. ② $m \cap e(D;C) = Q$. ③ Q pontban merőlegest állítunk a DC egyenesre $\Rightarrow e$ a keresett egyenes. ④ Az e egyenest az AB szakasz felezőmerőlegesére tükrözve másik megoldást kaphatunk. Egy vagy két megoldás lehet.

1059. Felhasználjuk, hogy $ABCD \sim PQCD$ esetén $BC : AB = PQ : PD = AB : PD$. A szerkesztés: ① CB félegyenesre B ponton túl AB szakaszt mérünk $\Rightarrow$ $\Rightarrow E$. ② C pontból tetszőleges félegyenest húzunk $\Rightarrow f$. ③ C pontból f egyenesre AB szakaszt mérünk $\Rightarrow B'$. ④ E ponton át párhuzamost húzunk a BB' egyenessel $\Rightarrow e$; $e \cap f = A'$. ⑤ D pontból DA egyenesre $B'A'$ szakaszt mérünk $\Rightarrow P$. ⑥ P ponton át párhuzamost húzunk a CD egyenessel $\Rightarrow g$; $g \cap e(C;E) = Q$. A DC oldalhoz kifelé a $PQBA$ paralelogrammával egybevágó paralelogrammát illesztve másik megoldást kapunk.



1057.

1060. Felhasználjuk, hogy $ABC\triangle \sim DAC\triangle$ esetén a megfelelő szögek egyenlők. $\alpha > \beta$ esetén az A csúcsban az AC ol-

dalra β szöget szerkesztünk $\Rightarrow$ az új szögszár egyenese e_1. $\gamma > \beta$ esetén hasonlóan adódik az e_2 megoldás. A megoldások száma 2 vagy 0.

1061. **1. eset:** $\alpha > \beta$, $\alpha > \gamma$. Felhasználjuk, hogy $ABC\triangle \sim DBC\triangle$ esetén a megfelelő szögek egyenlők. A szerkesztés: ① A B csúcsban a BC oldalra α szöget szerkesztünk $\Rightarrow$ az új szögszár egyenese f. ② A C csúcsban a BC oldalra α szöget szerkesztünk $\Rightarrow$ az új szögszár egyenese g. ③ $f \cap e(C; A) = D_1$ és $g \cap e(A; B) = D_2$.

2. eset: $\alpha < \beta$, $\alpha < \gamma$. Felhasználjuk, hogy $ABC\triangle \sim D_1CA\triangle \sim D_2BA\triangle$ esetén a megfelelő szögek egyenlők. A szerkesztés: ① Az A csúcsban az AC oldalra β szöget szerkesztünk $\Rightarrow$ az új szögszár egyenese h. ② Az A csúcsban az AB oldalra γ szöget szerkesztünk $\Rightarrow$ az új szögszár egyenese i. ③ $h \cap e(B; C) = D_1$ és $i \cap e(B; C) = D_2$.

3. eset: $\alpha = \beta = \gamma$ esetén nincs megoldás. A megoldások száma 4, 2 vagy 0.

1062. Felhasználjuk, hogy a $P'Q'R'S'$ négyzet hasonló a szerkesztendő $PQRS$ négyzethez, a hasonlóság középpontja B. A szerkesztés: ① A BC oldal tetszőleges P' pontjában a BC-re állított merőleges egyenes és az AB oldal metszéspontja S'. ② A BC egyenesen nyugvó $S'P'$ oldalhosszúságú négyzet $\Rightarrow$ $S'P'Q'R'$ négyzet. ③ $e(B; R') \cap e(A;C) = R$. ④ Az R ponton át BC-re állított merőleges egyenes $\Rightarrow m$; $m \cap e(B; C) = Q$. ⑤ Az R ponton át húzott SR-rel párhuzamos egyenes $\Rightarrow$ $\Rightarrow n$; $n \cap e(A; B) = S$. ⑥ Az S ponton át BC-re állított merőleges egyenes $\Rightarrow p$; $p \cap e(B; C) = P$. Hasonlóan szerkeszthető a másik két oldalegyenesen nyugvó négyzet. Három megoldás van.

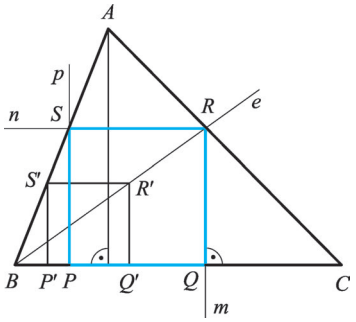
1063. B középpontú hasonlóságot alkalmazunk. A szerkesztés: ① A BC oldal tetszőleges P' pontjában a BC-re állított merőleges egyenes és az AB oldal metszéspontja S'. ② $S'P' : P'Q' = 2 : 3$ és $Q' \in e(B; C) \Rightarrow S'P'Q'R'$ téglalap. ③ $e(B; R') \cap e(A; C) = R_1$. ④ Az R_1 ponton át BC-re állított merőleges egyenes talppontja Q_1. ⑤ Az R_1 ponton át BC-vel húzott párhuzamos egyenes és AB egyenes metszéspontja S_1. ⑥ Az S_1 ponton át BC-re állított merőleges egyenes talppontja $P_1 \Rightarrow P_1Q_1R_1S_1$ téglalap. ⑦ Az előző lépéseket végezzük $S''P'' : P''Q'' = 3 : 2$ kiindulással $\Rightarrow P_2Q_2R_2S_2$ téglalap. Hasonlóan szerkeszthető a másik két oldalegyenesen nyugvó két-két téglalap. Hat megoldás van.

1064. A szerkesztés: ① A három adott iránnyal párhuzamos oldalú háromszög $\Rightarrow PQR\triangle$. ② $PQR\triangle$ köré írt köre és középpontja $\Rightarrow l$, K. ③ Az O pontból induló KP-vel, KQ-val, KR-rel egyirányú sugarak kimetszik a k körből az A, B, C pontokat. ④ Az $ABC\triangle$ O pontra vonatkozó tükörképe, $DEF\triangle$ is megoldás. Két megoldás van.

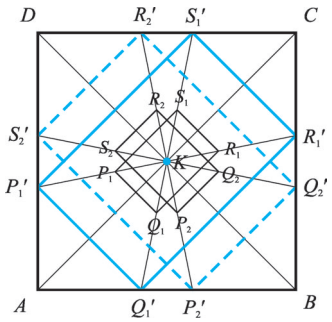
1065. A szerkesztés: ① DB átlón nyugvó, AC átlóval párhuzamos oldalú rombusz $\Rightarrow DBFE$. ② A középpontú hasonlóságot alkalmazunk: az E pont képe $R \in DC$, illetve az F pont képe $Q \in BC$. ③ Az R ponton átmenő AC-vel párhuzamos egyenes metszéspontja AD szakasszal $\Rightarrow$ S. ④ A Q ponton átmenő AC-vel párhuzamos egyenes metszéspontja AB szakasszal $\Rightarrow P$. Egyértelmű a megoldás.

1066. A szerkesztés: ① Az $ABCD$ négyzet középpontja $\Rightarrow K$. ② K középpontú AC, illetve BD szimmetriatengelyű, $EFGH$ téglalaphoz hasonló téglalapok szerkesztése $\Rightarrow P_1Q_1R_1S_1$ és $P_2Q_2R_2S_2$. ③ Olyan K középpontú hasonlóságot alkalmazunk, amelynél a fenti két téglalap csú-

1062.

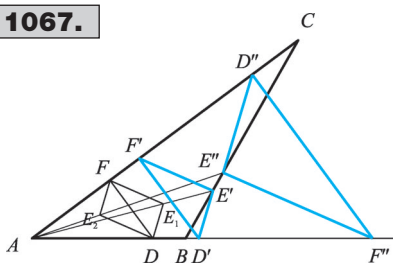


1066.

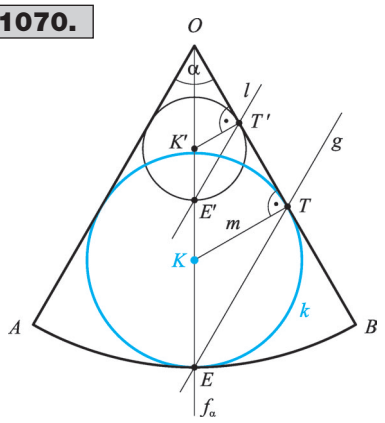


I

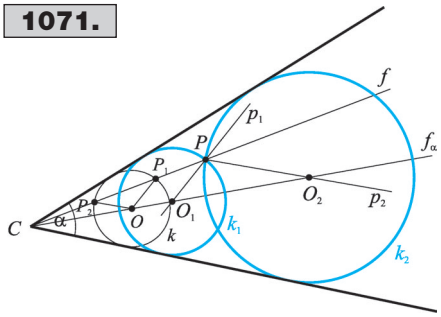
1067.



1070.



1071.



csainak képe a négyzet oldalaira esik $\Rightarrow P_1'Q_1'R_1'S_1'$ és $P_2'Q_2'R_2'S_2'$ téglalap. Végtelen sok megoldás van, ha $EFGH$ négyszög négyzet, két megoldás van egyébként.

1067. A szerkesztés: ① Legyen F az AC egyenes, D az AB egyenes olyan pontja, hogy $FD \| XZ$ teljesüljön. ② Az F ponton át ZY egyenessel párhuzamost húzunk $\Rightarrow a$, az F ponton át XY egyenessel párhuzamost húzunk $\Rightarrow b$, a D ponton át XY egyenessel párhuzamost húzunk $\Rightarrow c$, a D ponton át YZ egyenessel párhuzamost húzunk $\Rightarrow d$. ③ $a \cap c = E_1$ és $b \cap d = E_2$. ④ $e(A; E_1) \cap e(B; C) = E'$ és $e(A; E_2) \cap e(B; C) = E''$. ⑤ AE': AE_1 arányú A középpontú hasonlósággal $\Rightarrow D', F'$. ⑥ AE'': AE_2 arányú A középpontú hasonlósággal $\Rightarrow D'', F''$. Ha a kiindulási szakasz végpontjai a β vagy a γ szög száraira illeszkednek, újabb két-két megoldást kapunk.

1068. A szerkesztés: ① Legyen az AOB szög szögfelezője f_α és P' az OA sugár, S' az OB sugár olyan pontja, hogy $P'S' \perp f_\alpha$ teljesüljön. ② $P'S'$ oldalú négyzet $\Rightarrow Q'R'S'P'$. ③ OQ', illetve OR' egyenes metszéspontja az AB ívvel $\Rightarrow Q$, illetve R pont. ④ A Q, illetve az R pontokban a QR szakaszra állított merőlegesek metszéspontja a szögszárakkal $\Rightarrow$ $\Rightarrow P$, illetve S. Egyértelmű a megoldás.

1069. A szerkesztés: ① Az AB szakasz felezőpontja és felezőmerőlegese $\Rightarrow F_{AB}$ és f_{AB}. ② Legyenek P' és Q' az AB határoló húr tetszőleges f_{AB} egyenesre szimmetrikus pontjai. ③ $P'Q'$ oldalú négyzet $\Rightarrow R'S'P'Q'$. ④ $e(F_{AB}; R') \cap k = R$ és $e(F_{AB}; S') \cap k = S$. ⑤ Az R, illetve az S pontokból az AB szakaszra állított merőlegesek talppontja $\Rightarrow Q$, illetve P. Egyértelmű a megoldás.

1070. A szerkesztés: ① Az AOB szög szárait érintő tetszőleges kör: l, az AOB szög szögfelezője: f_α. ② $f_\alpha \cap l = E'$ az O ponttól távolabbi metszéspont. ③ Az l kör és a szögszár érintési pontja: T'. ④ Az E ponton át $E'T'$-vel párhuzamos egyenest húzunk $\Rightarrow$ $\Rightarrow g$; $g \cap OB = T$. ⑤ A T pontban OB-re merőleges egyenest állítunk $\Rightarrow m$; $m \cap f_\alpha = K$. ⑥ K középpontú KT sugarú kör $\Rightarrow k$. Egyértelmű a megoldás.

1071. A szerkesztés: ① A szögszárakat érintő tetszőleges sugarú kör: k (középpontja O), a szögfelező: f_α. ② $e(C; P) \cap k = \{P_1; P_2\}$. ③ P ponton át P_1O-val, illetve P_2O-val párhuzamos egyenest húzunk $\Rightarrow p_1$ és p_2. ④ $f_\alpha \cap p_1 = O_1$ és $f_\alpha \cap p_2 = O_2$. ⑤ O_i középpontú PO_i sugarú kör $\Rightarrow k_i$. Két megoldás van.

1072. Mivel a keresett Q pontra $d(Q; P) = d(Q; e)$, ezért Q a P ponton átmenő, e egyenest érintő kör középpontja. A szerkesztés: ① Az e egyenes f egyenesre vonatkozó tükörképe $\Rightarrow e'$. ② Az e és e' egyeneseket érintő, P ponton átmenő körök középpontja $\Rightarrow Q_1, Q_2$ (a szerkesztés az 1071. feladat megoldásában leírtak szerint történhet). A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.

Megjegyzés: A keresett pontok az e vezéregyenesű P fókuszú parabolának az f egyenessel közös pontjai.

Hasonló háromszögek

I

Bizonyítási feladatok

1073. *a)* Például a 40°, 70°, 70° és a 100°, 40°, 40° szögű háromszögek nem hasonlók, bár van egyenlő szögük. *b)* Ha az állítás igaz volna, akkor minden egyenlő szárú háromszög hasonló lenne szárszögétől függetlenül.

1074. Például a 4 cm, 6 cm, 8 cm és a 2 cm, 3 cm, 4 cm oldalú háromszögek nem egybevágók, bár megfelelő oldalaik aránya egyenlő és mindkettőnek van 4 cm-es oldala.

1075. *a)* Mivel $\underline{\gamma = \gamma'}$, f és f' szögfelező, ezért $DCB\sphericalangle = D'C'B'\sphericalangle = \gamma/2$ és $f : f' = a : a' \Rightarrow$ $\Rightarrow DCB\triangle \sim D'C'B'\triangle \Rightarrow \underline{\beta = \beta'}$. Az aláhúzottakból $\Rightarrow ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$. *b)* Legyen az AB, illetve az $A'B'$ oldal felezőpontja E, illetve E'. Tükrözzük C csúcsot az E, C' csúcsot az E' pontra $\Rightarrow D$, illetve D'. Mivel $a : b : s = a' : b' : s'$, ezért $a : b : 2s = a' : b' : 2s' \Rightarrow CDB\triangle \sim C'D'B'\triangle \Rightarrow CBD\sphericalangle =$ $= C'B'\ D'\sphericalangle \Rightarrow ACB\sphericalangle = A'C'B'\sphericalangle \Rightarrow ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$, mert két oldaluk aránya és az azok által közrezárt szög egyenlő.

1076. $ATC\triangle \sim A'T'C'\triangle$, mert szögeik $\varepsilon = \varepsilon'$ és $90° \Rightarrow \underline{\alpha = \alpha'}$. $BTC\triangle \sim B'T'C'\triangle$, mert szögeik $\varphi = \varphi'$ és $90° \Rightarrow \alpha = \alpha' \Rightarrow \underline{\beta = \beta'}$. $\Rightarrow ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$, mert szögeik egyenlők.

1077. $BC : CA : AB = 4 : 5 : 6 \Rightarrow \alpha < \beta < \gamma$. BC oldal C-n túli meghosszabbítására mérjük fel az AC oldal hosszát: $CD = AC \Rightarrow CDA\sphericalangle = CAD\sphericalangle$. $ABC\triangle \sim DBA\triangle$, mert $BA : BD = 6 : 9 =$ $= 4 : 6 = BC : AB$ és β közös $\Rightarrow BDA\sphericalangle = \alpha$, tehát $\gamma = 2\alpha$, mert γ külső szöge $ACD\triangle$-nek.

1078. Például egy négyzet és egy nem egyenlő oldalú téglalap nem hasonló négyszögek, bár szögeik páronként egyenlők.

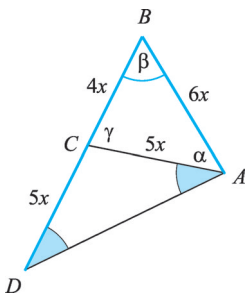
Az **1079.**, **1080.**, **1081.**, **1082.**, **1083.**, **1084.** feladat megoldását az olvasóra bízzuk.

1085. $EF \parallel AB \Rightarrow EG \parallel AD$ és $FG \parallel BD$.

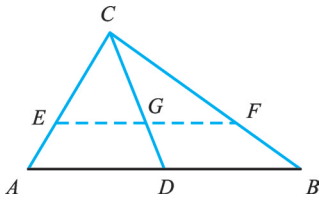
Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az $ACD\sphericalangle$-re: $\dfrac{EG}{AD} = \dfrac{CG}{CD}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a $BCD\sphericalangle$-re: $\dfrac{FG}{BD} = \dfrac{CG}{CD}$. A fentiekből következik: $\dfrac{EG}{AD} = \dfrac{FG}{BD}$. CD súlyvonal. $\Rightarrow AD = DB \Rightarrow EG = FG$, tehát a súlyvonal felezi az EF szakaszt.

1086. A szimmetrikus trapéz húrtrapéz vagy paralelogramma is lehet. Az ábrán vázolt négy szimmetrikus trapéz egyike sem hasonló a másikhoz, bár szögeik egyenlők.

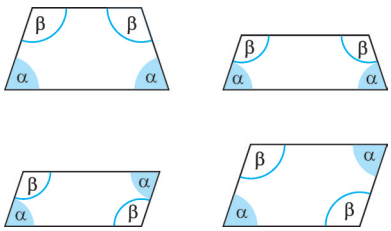
1077.



1085.

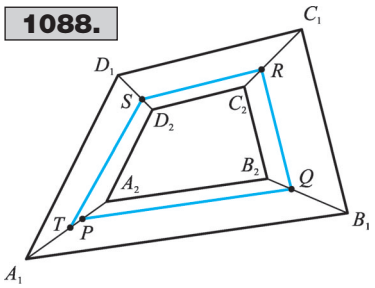


1086.



I

1088.



1087. **1. eset:** $ABCD$ nem paralelogramma. Tekintsük az $ABCD$ trapéz kiegészítő háromszögét, $DCO\triangle$-et! $AOB\sphericalangle$-re alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét:

$\frac{OD}{OC}=\frac{DP}{CQ}=\frac{PA}{QB}\Rightarrow DP:PA=CQ:QB.$

2. eset: $ABCD$ paralelogramma, ekkor $DP=CQ$ és $PA=QB\Rightarrow DP:PA=CQ:QB.$

1088. Az 1087. feladatban láttuk, hogy $A_1B_1\|A_2B_2\|PQ\Rightarrow$ $\Rightarrow A_1P:PA_2=B_1Q:QB_2$ és $B_1C_1\|B_2C_2\|QR\Rightarrow B_1Q:QB_2=$ $=C_1R:RC_2$ és $C_1D_1\|C_2D_2\|RS\Rightarrow C_1R:RC_2=D_1S:SD_2$ és $D_1A_1\|D_2A_2\|ST\Rightarrow D_1S:SD_2=$ $=A_1T:TA_2\Rightarrow A_1P:PA_2=A_1T:TA_2\Rightarrow P\equiv T.$

Számolási feladatok

1089. $b'=1$ cm és $c'=1{,}2$ cm. **1090.** $b'=5{,}6$ cm, $c'=3{,}5$ cm.

1091. $b'=\frac{3}{4}$ cm és $a'=\frac{9}{16}$ cm. **1092.** $b'=13{,}6$ cm.

1093. Az árnyékok hossza: $a=35{,}8$ m és $b=1{,}62$ m. A kémény magassága c, a karó magassága $d=1{,}9$ m. $\lambda=\frac{b}{a}=\frac{1{,}62}{35{,}8}=\frac{d}{c}\Rightarrow c=\frac{d}{\lambda}=1{,}9:\frac{1{,}62}{35{,}8}\approx 42$ m magas a kémény.

1094. $a=5$ m, $b=3{,}8$ m, $a'=2$ cm. $\frac{b'}{a'}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b'}{2}=\frac{380}{500}\Rightarrow b'=1{,}52$ cm a szélesség a tervrajzon.

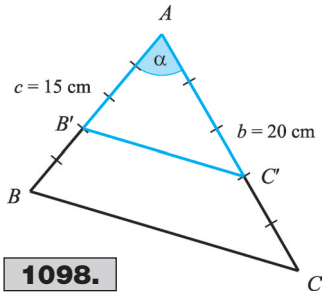
1095. $a'=\frac{9}{2}$ cm; $b'=6$ cm és $c'=\frac{15}{2}$ cm. **1096.** $a'=10$ m, $b'=20$ m, $c'=25$ m.

1097. $a'=1$ m, $b'=2$ m, $c'=2{,}5$ m.

1098. $B'AC'\sphericalangle=BAC\sphericalangle=\alpha$. $\frac{AB'}{AB}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$ és $\frac{AC'}{AC}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{AB'}{AC}=\frac{AC'}{AC}.\Rightarrow$ $\Rightarrow ABC\triangle\sim AB'C'\triangle$, mert két oldaluk aránya és azok közrezárt szöge egyenlő.

1099. $a=\frac{13}{2}$ m és $a'=\frac{11}{2}$ m.

1100. $ABC\triangle\sim A_1B_1C_1\triangle$, mert két oldaluk aránya és azok közrezárt szöge egyenlő $\Rightarrow b=3$ cm és $b_1=1{,}2$ cm.



1098.

1101. *a)* $b'=35$ cm és $c=8$ cm. *b)* $c=20$ cm és $c'=12$ cm.

1102. Vizsgáljuk a leghosszabb, a legrövidebb és a közbülső oldalak arányát!

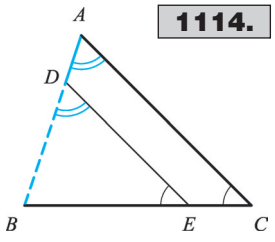
a) $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{1}{10}\Rightarrow$ Hasonlók a háromszögek.

b) $\frac{b'}{a}=\frac{a'}{c}=\frac{c'}{b}=\frac{4}{5}\Rightarrow$ Hasonlók a háromszögek, megfelelő oldalaik a és b', c és a', b és c'.

c) $\frac{b'}{a}=\frac{9}{10}\neq\frac{a'}{c}=\frac{c'}{b}=\frac{4}{5}\Rightarrow$ Nem hasonlók a háromszögek.

1103. $a' = 0{,}8\,\text{cm},\ b' = 1{,}2\,\text{cm},\ c' = 1{,}6\,\text{cm}$.
1104. $a_1' = 8\,\text{cm},\ a_2' = 12\,\text{cm},\ a_3' = 16\,\text{cm},\ a_4' = 20\,\text{cm}$.
1105. $a_1' = 18\,\text{cm},\ a_2' = 9\,\text{cm},\ a_3' = 12\,\text{cm},\ a_4' = 36\,\text{cm}$.
1106. Az oldalak: 30 cm, 24 cm, 18 cm, 36 cm.
1107. $k = 100\,\text{mm}$ és $k' = 40\,\text{mm}$.
1108. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ és $\frac{a}{a+b} = \frac{e}{f} = \frac{c}{c+d}$. A harmadik oszlop adataival: $\frac{c}{c+4} = \frac{7}{10} \Rightarrow c = \frac{28}{3}\,\text{cm}$; $\frac{a}{5} = \frac{\frac{28}{3}}{4} \Rightarrow a = \frac{35}{3}\,\text{cm}$. A táblázat hiányzó adatai: az első oszlopban: $d = \frac{36}{7}\,\text{cm}$ és $f = \frac{66}{7}\,\text{cm}$, a második oszlopban: $b = \frac{60}{11}\,\text{cm}$ és $f = \frac{136}{11}\,\text{cm}$, a harmadik oszlopban: $a = \frac{35}{3}\,\text{cm}$ és $c = \frac{28}{3}\,\text{cm}$, a negyedik oszlopban: $b = \frac{30}{11}\,\text{cm}$ és $e = \frac{99}{14}\,\text{cm}$.
1109. Legyen R a közös kiindulási pont. A_1, B_1 pontokba jutnak fél óra alatt: $A_1B_1 = 180\,\text{km}$. $A_1R : A_2R = B_1R : B_2R$; a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. A párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva az $A_2RB_2\sphericalangle$ szelőire: $A_2B_2 : A_1B_1 = \frac{5}{4} : \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow A_2B_2 = \frac{5}{2} \cdot 180 = 450\,\text{km}$. Általánosan: $l \cdot 360\,\text{km}$ a távolságuk l óra múlva.
1110. A keresett ponthalmaz egy, az e egyenessel párhuzamos egyenes, ami e-nek P középpontú λ arányú középpontos hasonló képe. *a)* $\lambda_1 = \frac{1}{3}$; $\lambda_2 = \frac{1}{4}$. *b)* $\lambda_3 = \frac{2}{5}$; $\lambda_4 = \frac{m}{m+n}$.
1111. A $BC = a$ alapú m_a magasságú háromszögek A csúcsa a BC-vel párhuzamos, m_a távolságra levő párhuzamos egyenespáron van. S súlypont $\Rightarrow SA = \frac{2}{3} FA \Rightarrow S$ pont az F pontnak A középpontú $\lambda = \frac{2}{3}$ arányú középpontos hasonló képe $\Rightarrow$ A keresett ponthalmazt a BC egyenessel párhuzamos egyenesek pontjai alkotják, amelyek $\frac{m_a}{3}$ távolságra vannak a BC egyenestől.
1112. Jelölje az egyik oldalon a létra csúcsát C, a lánc végeit D, E, a szárak talajon levő pontjait A, B. $CDE\triangle \sim CAB\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. Magasságaik aránya egyenlő a hasonlóság arányával. $CDE\triangle$ magassága: $m = 1{,}4$ és $CAB\triangle$ magassága: $h = 2$.
$\frac{m}{h} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow \underline{\underline{DE = 0{,}7\,\text{m} = 70\,\text{cm}}}$.
1113. Jelölje A a pálya belátható pontját, B a kerítés talapzatát, K a legfelső pontját, NM a ház alapjától a legalacsonyabb keresett pontig terjedő szakaszát. $ABK\triangle \sim ANM\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\frac{KB}{AB} = \frac{MN}{AN} \Rightarrow MN = 22\,\text{m} \Rightarrow$ A nyolcadik szinttől kezdve, azaz a 7., 8., 9., 10. emeletről lehet belátni a pályára.

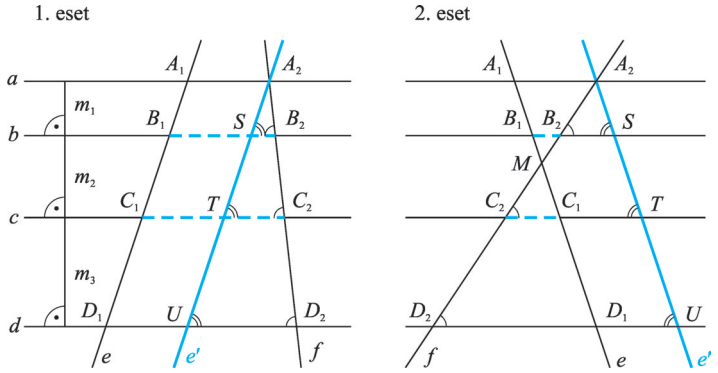
1114.



1114. Az ábrán azonosan jelölt egyállású szögek egyenlők. $\Rightarrow$
$\Rightarrow BED\triangle \sim BCA\triangle \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}$.
a) $BD = 12\,\text{cm}$ és $\underline{\underline{AD = AB - BD = 4\,\text{cm}}}$.
b) $\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{BD} = \frac{\underline{\underline{AD}} + BD}{BD} = \frac{AD}{BD} + 1 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{AD}{BD} = \frac{27}{28}}}$.

I

1115.



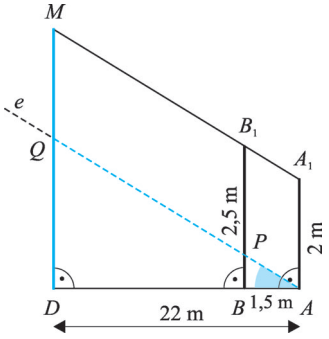
1115. $a \parallel b \parallel c \parallel d$; $d(a; b) : d(b; c) : d(c; d) = m_1 : m_2 : m_3 = 2 : 3 : 4$. e és f metsző egyenesek A_i; B_i; C_i; D_i pontokban metszik a párhuzamosokat. $A_1A_2 = 60$ cm és $D_1D_2 = 96$ cm. Húzzunk e egyenessel párhuzamost az A_2 ponton át: e' és $A_1A_2 = B_1S = C_1T = D_1U = 60$ cm. Az ábrán azonosan jelölt egyállású szögek egyenlők, ezért $A_2B_2S\triangle \sim A_2D_2U\triangle$ és $A_2C_2T\triangle \sim A_2D_2U\triangle \Rightarrow$ magasságaik aránya egyenlő a hasonlóság arányával. $A_2B_2S\triangle$ magassága: m_1 és $A_2D_2U\triangle$ magassága: $m_1 + m_2 + m_3$ és $A_2C_2T\triangle$ magassága: $m_1 + m_2 \Rightarrow \dfrac{B_2S}{D_2U} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \Rightarrow B_2S = \dfrac{2}{9} D_2U$ és $\dfrac{C_2T}{D_2U} = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \Rightarrow C_2T = \dfrac{5}{9} D_2U$.

1. eset: $D_2U = D_1D_2 - D_1U = 36$ cm $\Rightarrow B_2S = 8$ cm és $C_2T = 20$ cm $\Rightarrow B_1S + B_2S = B_1B_2 = 68$ cm és $C_1T + C_2T = C_1C_2 = 80$ cm.

2. eset: A_1M: $MD_1 = 5 : 8 \Rightarrow e$ és f a b és c párhuzamosok között metszi egymást. $D_2U = D_1D_2 + D_1U = 156$ cm $\Rightarrow B_2S = \dfrac{104}{3}$ cm és $C_2T = \dfrac{260}{3}$ cm $\Rightarrow B_1S - B_2S = B_1B_2 = \dfrac{76}{3}$ cm és $C_2T - C_1T = C_1C_2 = \dfrac{80}{3}$ cm.

1116. Húzzunk MA_1-gyel párhuzamos egyenest A-n át: e. Az e által kimetszett P, Q pontokra $AA_1 = B_1P = MQ = 2$; $PB = 0{,}5$. $PB \parallel DQ \Rightarrow DAQ\sphericalangle$-re alkalmazhatjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét: $\dfrac{DQ}{PB} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow DQ = \dfrac{22}{3} \Rightarrow MD = DQ + QM = \dfrac{28}{3}$, tehát a fa körülbelül 9,3 m magas.

1116.



1117. $ABCD \sim ADQP \Rightarrow \dfrac{AP}{AD} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow AP = AD^2 \cdot \dfrac{1}{AB} \Rightarrow$ $\Rightarrow AP = 4^2 \cdot \dfrac{1}{7} = \dfrac{16}{7}$. Az új paralelogramma oldalai $\underline{\underline{\dfrac{16}{7}\text{ cm}}}$ és $\underline{\underline{4\text{ cm}}}$.

1118. $ABCD \sim ADFE$ és k középvonal $\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AD}{\frac{1}{2}AB} \Rightarrow \dfrac{1}{2} AB^2 = AD^2 \Rightarrow \underline{\underline{\dfrac{AB}{AD} = \sqrt{2}}}$.

1119. Legyenek $P \in BC$, $Q \in AC$ és $R \in AB$ a paralelogramma csúcsai. $BP : QP = 6 : 5 = y : x$ és $PCQ\triangle \sim BCA\triangle$, mert szögeik egyállású szögek $\Rightarrow$ megfelelő oldalaik aránya egyenlő $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{QP}{BA} = \dfrac{PC}{BC} \Rightarrow \dfrac{QP}{25} = \dfrac{20 - BP}{20}$ és $BP = \dfrac{6}{5} QP \Rightarrow QP = 10\,\text{cm}$ és $BP = 12\,\text{cm}$.

1120. Legyenek P_1, $Q_1 \in BC$, $R_1 \in AC$, $S_1 \in AB$ a téglalap csúcsai.

B pontot $\overrightarrow{S_1R_1}$vektorral eltolva B' pont adódik. $B'C = BC - P_1Q_1$ és $B'CR_1\triangle \sim BCA\triangle$, mert szögeik egyenlők $\Rightarrow \dfrac{R_1Q_1}{m_a} = \dfrac{B'C}{BC} = \dfrac{BC - P_1Q_1}{BC}$.

1. eset: $R_1Q_1 : P_1Q_1 = 5 : 9 \Rightarrow \dfrac{R_1Q_1}{16} = \dfrac{48 - \frac{9}{5}R_1Q_1}{48} \Rightarrow \underline{\underline{R_1Q_1 = 10\,\text{cm}}}$ és $\underline{\underline{P_1Q_1 = 18\,\text{cm}}}$.

2. eset: $R_1Q_1 : P_1Q_1 = 9 : 5 \Rightarrow \dfrac{R_1Q_1}{16} = \dfrac{48 - \frac{5}{9}R_1Q_1}{48} \Rightarrow \underline{\underline{R_1Q_1 = \dfrac{27}{2}\,\text{cm}}}$ $\underline{\underline{P_1Q_1 = \dfrac{15}{2}\,\text{cm}}}$.

1121. $S_1R_1A\triangle \sim BCA\triangle$, mert szögeik egyállású szögek $\Rightarrow \dfrac{y}{a} = \dfrac{h - x}{h}$.

1. eset: $x : y = m : n \Rightarrow \dfrac{\frac{n}{m}x}{a} = \dfrac{h - x}{h} \Rightarrow \underline{\underline{x = \dfrac{ahm}{am + nh}}}$ $y = \dfrac{ahn}{am + nh}$.

2. eset: $x : y = n : m \Rightarrow \dfrac{\frac{m}{n}x}{a} = \dfrac{h - x}{h} \Rightarrow \underline{\underline{x = \dfrac{ahn}{an + mh}}}$ $y = \dfrac{ahm}{an + mh}$. Megjegyzés: adott oldalarányú, háromszögbe írt téglalapot szerkesztettünk az 1063. feladatban.

1122. $SRA\triangle \sim BCA\triangle$, mert szögeik egyállású szögek $\Rightarrow$ megfelelő szakaszaik aránya egyenlő $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{x}{h - x} = \dfrac{a}{h} \Rightarrow \underline{\underline{x = \dfrac{ah}{a + h}}}$, azaz $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{h}$.

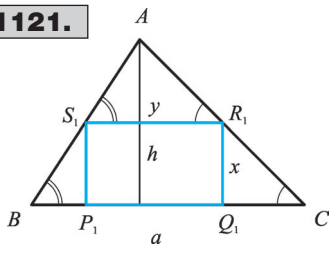
1123. $ABC\triangle \sim DAC\triangle$, mert szögeik egyenlők $\Rightarrow$ megfelelő oldalaik aránya egyenlő, azaz
$\dfrac{DC}{CA} = \dfrac{CA}{CB} \Rightarrow DC = \dfrac{CA^2}{CB} = \dfrac{6 \cdot 6}{12} \Rightarrow DC = 3\,\text{cm}$ és $BD = BC - DC = 9\,\text{cm}$.

1124. $ABC\triangle \sim ADB\triangle$, mert szögeik egyenlők $\Rightarrow$ megfelelő oldalaik aránya egyenlő, azaz
$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{BC} \Rightarrow AB^2 = AC \cdot AD = c^2$.

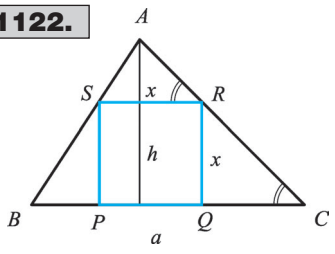
1. eset: $AD : DC = 9 : 7 \Rightarrow c^2 = (9 + 7) \cdot 9$, $\underline{\underline{c = 12\,\text{cm}}}$ és $\underline{\underline{BD : BC = 9 : 12 = 3 : 4}}$.

2. eset: $AD : DC = 7 : 9 \Rightarrow c^2 = (7 + 9) \cdot 7$, $\underline{\underline{c = 4\sqrt{7}\,\text{cm}}}$ és $\underline{\underline{BD : BC = \sqrt{7} : 4}}$.

1121.



1122.



I

1125. $DC = |AC - AD|$, mert $c < b$ esetén $\gamma < \beta \Rightarrow D$ az AC szakasz belső pontja, ekkor $DC = AC - AD$; $c > b$ esetén $\gamma > \beta \Rightarrow D$ az AC egyenes C-n túli pontja, ekkor $DC = AD - AC$. $ABC\triangle \sim ADB\triangle$, mert szögeik egyenlők $\Rightarrow$ megfelelő oldalaik aránya egyenlő, azaz $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AC}$. *a)* $c = 2\text{ cm} < b = 4\text{ cm} \Rightarrow AD = \frac{2^2}{4} \Rightarrow$ $\underline{\underline{AD = 1\text{ cm}}}$ és $\underline{\underline{DC = 3\text{ cm}}}$. *b)* $\underline{\underline{AD = \frac{c^2}{b}}}$ és $DC = \left| b - \frac{c^2}{b} \right|$.

1126. $K_1P_1E\sphericalangle = K_1EP_1\sphericalangle = K_2EP_2\sphericalangle = K_2P_2E\sphericalangle$, mert $K_1P_1E\triangle$ és $K_2P_2E\triangle$ egyenlő szárú, illetve $K_1EP_1\sphericalangle$ és $K_2EP_2\sphericalangle$ csúcsszögek $\Rightarrow K_1P_1E\triangle \sim K_2P_2E\triangle \Rightarrow P_1E : P_2E = K_1E : K_2E = r_1 : r_2$.
a) $r_1 + r_2 = 36$ cm és $r_1 : r_2 = 13 : 5 \Rightarrow \underline{\underline{r_1 = 26\text{ cm}}}$ és $\underline{\underline{r_2 = 10\text{ cm}}}$. *b)* $r_1 + r_2 = d$ és $r_1 : r_2 = a : b \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\underline{r_1 = \frac{ad}{a+b}}}$ és $\underline{\underline{r_2 = \frac{bd}{a+b}}}$.

1127. $PQ \parallel BC \Rightarrow$ az azonosan jelölt egyállású szögek egyenlők $\Rightarrow APQ\triangle \sim ABC\triangle \Rightarrow$ magasságaik aránya egyenlő a hasonlóság arányával, azaz $\frac{PQ}{BC} = \frac{AU}{AT} \Rightarrow \frac{2r}{a} = \frac{h-r}{h} \Rightarrow r = \frac{ah}{2h+a}$.

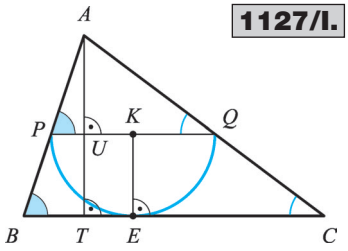
1128. $PQ \parallel BC \Rightarrow APQ\triangle \sim ABC\triangle \Rightarrow$ magasságaik aránya egyenlő a hasonlóság arányával, azaz $\frac{PQ}{BC} = \frac{m_a - KR}{m_a} \Rightarrow \frac{2KR}{30} = \frac{10 - KR}{10} \Rightarrow KR = 6\text{ cm} \Rightarrow$ a $PQR\triangle$ oldalai 12 cm, $6\sqrt{2}$ cm és $6\sqrt{2}$ cm.

1129. $PQ \parallel AB \Rightarrow$ az egyállású szögek egyenlők $\Rightarrow CQP\triangle \sim CAB\triangle \Rightarrow$ oldalaik aránya egyenlő a hasonlóság arányával, azaz $\frac{QP}{AB} = \frac{CQ}{CA} \Rightarrow \frac{AQ}{c} = \frac{b - AQ}{b} \Rightarrow$ a rombusz oldala $AQ = \frac{cb}{c+b}$.

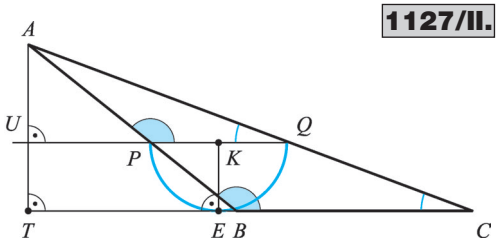
1130. Az N ponton átmenő AB-vel párhuzamos egyenes az AC oldalt L pontban metszi $\Rightarrow$
$\Rightarrow MNLA$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow BN = AM = NL \Rightarrow BNL\triangle$ egyenlő szárú, az alapon fekvő szögeinek nagysága $\beta/2 \Rightarrow BL$ felezi a β szöget. A szerkesztés: ① β szögfelezője $\Rightarrow f_\beta$.
② $f_\beta \cap AC = L$. ③ L ponton át AB-vel párhuzamosan húzott egyenes $\Rightarrow g$. ④ $g \cap BC = N$.
⑤ N ponton át AC-vel párhuzamosan húzott egyenes $\Rightarrow h$. ⑥ $h \cap AB = M \Rightarrow MN$ szakasz a megoldás. MN szakasz hosszának kiszámítása: A megfelelő szögek egyenlősége miatt $CLN\triangle \sim$
$\sim CAB\triangle$ és $BNM\triangle \sim BCA\triangle$, illetve az $MNLA$ paralelogramma oldalaira $AL = MN$ és $LN = BN \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{CL}{CA} = \frac{LN}{AB}$, $\frac{b - AL}{b} = \frac{LN}{c}$, $\frac{b - MN}{b} = \frac{BN}{c}$ és $\frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}$, $\frac{BN}{a} = \frac{MN}{b} \Rightarrow BN = \frac{a}{b}MN$,

$\frac{b - MN}{b} = \frac{\frac{a}{b}MN}{c} \Rightarrow$ a szakasz hossza $\underline{\underline{MN = \frac{bc}{a+c}}}$.

1127/I.



1127/II.

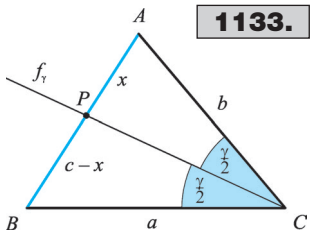


1131. $DE \parallel AC \Rightarrow ABC\sphericalangle$-ben alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{DE}{AC} = \dfrac{BE}{BC}$, azaz $\dfrac{DE}{28} = \dfrac{32 - CE}{32} \Rightarrow CE = 32 - \dfrac{8}{7}DE$.
$\dfrac{DE}{AC} = \dfrac{BD}{BA}$, azaz $\dfrac{DE}{28} = \dfrac{24 - AD}{24} \Rightarrow AD = 24 - \dfrac{6}{7}DE$.
A fentiekből $AD + CE = 56 - 2DE$ és $AD + CE = 16$ cm adott $\Rightarrow DE = \underline{\underline{20\text{ cm}}}$.

Szögfelezőtétel

1132. Legyen $f_c \cap AB = P$. Jelöljük az AP szakasz hosszát x-szel. $\Rightarrow PB = 5{,}5\text{ cm} - x$.
Alkalmazzuk a szögfelezőtételt: $x : (5{,}5 - x) = 6 : 7 \Rightarrow AP = x = \dfrac{33}{13}\text{ cm} \approx 2{,}54\text{ cm}$.
$PB = 5{,}5\text{ cm} - \dfrac{33}{13}\text{ cm} = \dfrac{77}{26}\text{ cm} \approx 2{,}96\text{ cm}$.

1133. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt az ábra jelöléseivel: $x : (c - x) = b : a \Rightarrow b(c - x) = ax \Rightarrow bc = x(a + b) \Rightarrow x = \dfrac{bc}{a + b} \Rightarrow c - x = c - \dfrac{bc}{a + b} = \dfrac{ac}{a + b}$.



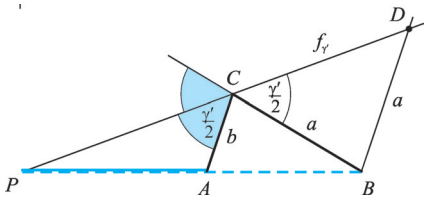
1133.

1134. **1. eset:** Ha $a = b$, akkor $f_\gamma \cap \mathrm{e}(A; B) = \emptyset$.
2. eset: Ha $a \neq b$, akkor *a)* Húzzunk párhuzamost B-n át AC-vel $\rightarrow D$. $CDB\triangle$-ben $CDB\sphericalangle = PCA\sphericalangle = \gamma'/2$, mert egyállású szögek. $DCB\sphericalangle = \gamma'/2$, mert D a külső szögfelező pontja. $\Rightarrow CDB\triangle$ egyenlő szárú, $DB = CB = a$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a $DPB\sphericalangle$ CA és DB párhuzamos szelőire: $CA : DB = PA : PB$, azaz $\underline{\underline{b : a = PA : PB}}$.
b) $b : a = PA : (PA + c) \Rightarrow PA = \dfrac{bc}{a - b} \Rightarrow PB = \dfrac{bc}{a - b} + c = \dfrac{ac}{a - b}$. Megjegyzés: $a > b$ esetén P az A csúcshoz, $b > a$ esetén a B csúcshoz van közelebb.

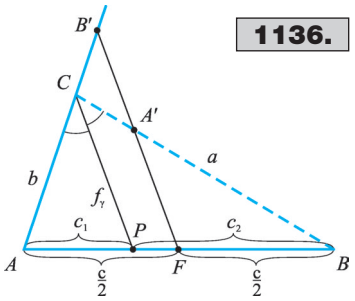
1135. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt az $AC_1C\triangle$ f_1 szögfelezőjére, valamint a $BC_1C\triangle$ f_2 szögfelezőjére: $AD : DC = AC_1 : C_1C$ és $BE : EC = C_1B : C_1C$. Mivel C_1 felezéspont, $AC_1 = C_1B \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{AD : DC} = AC_1 : C_1C = C_1B : C_1C = \underline{BE : EC}$. Az aláhúzottak az $ACB\sphericalangle$ AB és DE szelőinek a szögszárakból kimetszett szakaszairól szólnak. A párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt $DE \parallel AB$.

1136. $CP \parallel B'F$ miatt alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét a $B'AB\sphericalangle$ CP és $B'F$ szelőire, valamint az $ABC\sphericalangle$ FA' és PC szelőire: $B'A : b = \dfrac{c}{2} : c_1 \Rightarrow \dfrac{c}{2} = c_1 \cdot \dfrac{B'A}{b}$ és $BA' : b = \dfrac{c}{2} : c_2 \Rightarrow \dfrac{c}{2} =$

1134.

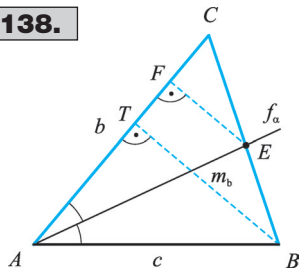


1136.

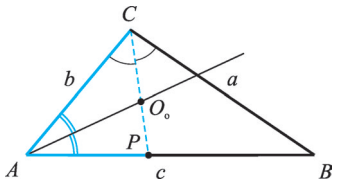


I

1138.



1139.



$= c_2 \cdot \frac{BA'}{a} \Rightarrow c_1 \cdot \frac{B'A}{b} = c_2 \cdot \frac{BA'}{a} \Rightarrow \underline{B'A} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{b}{a} \cdot BA' = \underline{BA'}$, mert a szögfelezőtétel szerint $\frac{c_2}{c_1} = \frac{a}{b}$.

1137. Legyen a párhuzamosnak a BC oldallal való metszéspontja Q. $PQ \parallel AC$; CP felezi $ACB\sphericalangle$-et. A szögfelezőtételből tudjuk, hogy $AP : PB = b : a$, azaz $(c - PB) : PB = b : a \Rightarrow PB = \frac{ac}{a+b}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az $ABC\sphericalangle$ PQ és AC párhuzamos szelőire: $PQ : AC = PB : AB$, azaz $PQ : b = \frac{ac}{a+b} : c \Rightarrow PQ = \frac{ab}{a+b}$.

1138. A szögfelezőtételt alkalmazva az f_α szögfelezőre: $CE : EB = b : c$. $EF \parallel BT$ miatt alkalmazzuk a szelőszakaszok tételét az $ACB\sphericalangle$ EF és BT szelőire: $TB : FE = CB : CE = (CE + EB) : CE = 1 + EB : CE$. A szögfelezőtételt és az adatokat felhasználva: $\frac{m_b}{FE} = 1 + \frac{c}{b} \Rightarrow FE = \frac{m_b \cdot b}{b + c} = 16\,\text{cm}$.

1139. Állítás: $CO_o : O_oP = (a + b) : c$.

Az $ABC\triangle$-re alkalmazott szögfelezőtételből belátható, hogy $AP = \frac{bc}{a+b}$. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt az $APC\triangle$-ben a $CAP\sphericalangle$ AO_o felezőjére: $CO_o : O_oP = b : \frac{bc}{a+b} = 1 : \frac{c}{a+b} \Rightarrow$

$\Rightarrow CO_o : O_oP = (a + b) : c$.

Magasságtétel, befogótétel

1140. Legyen a háromszög derékszögű csúcsa C, az ebből induló magasság talppontja T.

c) $ATC\triangle \sim CTB\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda = \frac{BC}{AC} = n \Rightarrow \frac{TB}{TC} = \frac{TC}{AT} = n \Rightarrow AT = \frac{TC}{n}$ és $TB = TC \cdot n \Rightarrow AT : TB = \frac{TC}{n} : (TC \cdot n) = 1 : n^2$, tehát az átfogó szeleteinek aránya $1 : n^2$.

a) esetben $n = 3$, az arány $1 : 9$. *b)* esetben $n = 4$, az arány $1 : 16$. *d)* esetben $n = \frac{p}{q}$, az arány $\frac{q^2}{p^2}$.

1141. Legyen az átfogó két szelete p és $122 - p$. A befogótétel szerint $(5x)^2 = 122\,p$ és $(6x)^2 = 122 \cdot (122 - p) \Rightarrow \frac{25x^2}{36x^2} = \frac{122p}{122 \cdot (122 - p)} \Rightarrow 25 \cdot (122 - p) = 36p \Rightarrow p = 50$ cm, azaz $\underline{\underline{AT = 50\,\text{cm}}}$ és $\underline{\underline{TB = 72\,\text{cm}}}$.

1142. Legyen az átfogó két szelete y és $y+2$. A befogótétel szerint $(2x)^2 = y(2y+2)$ és $(3x)^2 = (y+2)(2y+2) \Rightarrow \frac{9x^2}{4x^2} = \frac{(y+2)(2y+2)}{y(2y+2)} \Rightarrow 9y = 4y + 8 \Rightarrow y = 1{,}6$ cm, azaz $AT = 1{,}6$ cm és $TB = 3{,}6$ cm $\Rightarrow \underline{\underline{AB}} = AT + TB = \underline{\underline{5{,}2\text{ cm}}}$.

1143. Legyen a háromszög derékszögű csúcsa C, az ebből induló magasság talppontja T. $ABC\triangle \sim ACT\triangle \sim CTB\triangle$, mert mindegyik derékszögű és $BAC\sphericalangle = CAT\sphericalangle = BCT\sphericalangle$.

A megfelelő oldalak aránya: $\frac{AC}{CB} = \frac{AT}{TC} \Rightarrow \frac{3x}{7x} = \frac{p}{42} \Rightarrow \underline{\underline{p = 18\text{ cm}}}$ és $\frac{AC}{CB} = \frac{TC}{TB} \Rightarrow \frac{3x}{7x} = \frac{42}{q} \Rightarrow \underline{\underline{q = 98\text{ cm}}}$.

1144. Magasságtétel: $m_c = \sqrt{4 \cdot 12} = 4\sqrt{3}$ cm. Befogótétel: $b = \sqrt{4 \cdot 16} = 8$ cm és $a = \sqrt{12 \cdot 16} = 8\sqrt{3}$ cm.

1145. Befogótétel: $5 = \sqrt{2c} \Rightarrow c = 12{,}5\text{ cm} \Rightarrow TB = 10{,}5$ cm és $a = \sqrt{12{,}5 \cdot 10{,}5} = 2{,}5\sqrt{21}$ cm. Magasságtétel: $m_c = \sqrt{2 \cdot 10{,}5} = \sqrt{21}$ cm.

1146. Legyen a háromszög derékszögű csúcsa C, az ebből induló magasság talppontja T. Pitagorasz tétele az $ATC\triangle$-re: $AT^2 = 25 - 9 \Rightarrow AT = 4$ cm.

Befogótétel: $5 = \sqrt{4c} \Rightarrow c = 6{,}25\text{ cm} \Rightarrow TB = 2{,}25$ cm és $a = \sqrt{2{,}25 \cdot 6{,}25} = 3{,}75$ cm.

1147. A szerkesztés: ① $(a+b)$ átmérőjű k kör átmérővégpontjai A és B. ② A-tól a távolságra lévő T pontban merőleges AB-re: m. ③ $m \cap k = \{C_1; C_2\}$. $C_1T = C_2T = \sqrt{ab}$ az $ABC\triangle$-re alkalmazott magasságtétel miatt.

1148. A téglalap oldalai a és b, a keresett négyzet oldala x. A téglalap és a négyzet területe egyenlő: $ab = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{ab}$. A téglalap két szomszédos oldalának mértani közepét kell megszerkeszteni. Az eljárást lásd az 1147. feladatnál.

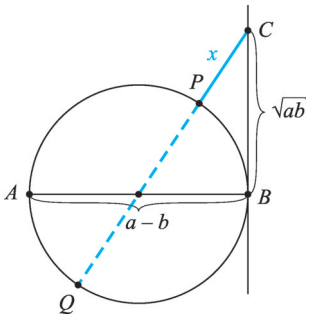
1149. Felhasználjuk: Ha egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága a és b szakaszokra bontja az átfogót, akkor az átfogóhoz tartozó magasság $\sqrt{ab}$. A szerkesztés: ① Vegyünk fel $(a+b)$ átmérőjű kört → k; A; B. ② Húzzunk párhuzamost AB-vel tőle $\sqrt{ab}$ távolságra: e_1; e_2. ③ $e_i \cap k = \{C_1; C_2; C_3; C_4\}$. ④ C-ből merőleges AB-re → T, $AT = a$ és $TB = b$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

1150. A szerkesztés: ① Rajzoljunk $(a-b)$ átmérőjű kört. ② Az egyik átmérő végpontjában meghúzzuk az érintőt. ③ Az érintőre felmérjük a $\sqrt{ab}$ szakaszt. ④ Az új végpontot összekötjük a kör középpontjával. ⑤ A szelő rövidebb darabja b, hosszabb darabja a hosszúságú. Az ⑤ pont bizonyítása: A C-ből induló szelőre a szelődarabok tétele: $x(x+a-b) = \sqrt{ab}^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 + (a-b)x - ab = 0$, aminek megoldásai:

$x_{1;2} = \frac{-a+b \pm (a+b)}{2} \rightarrow x_1 = -a$, ami nem lehet, illetve $x_2 = b$.

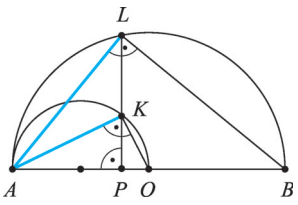
Tehát $CP = b$ és $CQ = b + a - b = a$, ezért a szerkesztés valóban a-hoz és b-hez vezetett.

1150.



I

1153.



1151. A befogótétel szerint $b = \sqrt{pc}$ és $a = \sqrt{qc} \Rightarrow b^2 = pc$ és $a^2 = qc \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{pc}{qc} = \frac{p}{q}$.

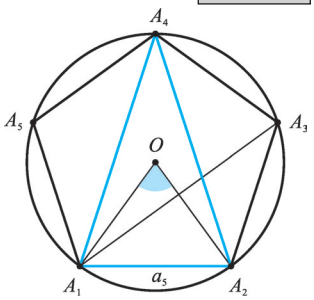
1152. $ABC\triangle$-ben B-nél derékszög van Thalész tétele miatt. A befogótételt alkalmazva az $ABC\triangle$-re: $AB = \sqrt{AT \cdot AC}$.

1153. Thalész tétele miatt $AKO\sphericalangle = 90°$. Az $AKO\triangle$-ben KP az átfogóhoz tartozó magasság, így AK a befogótételből számolható: $AK = \sqrt{AP \cdot AO}$. Ugyancsak Thalész tétele miatt $ALB\sphericalangle = 90°$. Az $ALB\triangle$-ben LP az átfogóhoz tartozó magasság, így $AL = \sqrt{AP \cdot AB}$ a befogótételt felhasználva. $AL = \sqrt{AP \cdot AB} = \sqrt{AP \cdot 2AO} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{AP \cdot AO} = \sqrt{2} \cdot AK \Rightarrow AL^2 = 2AK^2$.

Aranymetszés

1154. Vegyünk fel egy a átmérőjű kört. Húzzunk hozzá A külső pontból $AB = a$ hosszú érintőszakaszt, majd A-ból egy, a kört C-ben és D-ben metsző szelőt. Írjuk fel a szelődarabok szorzatára vonatkozó összefüggést az A pontból induló AC szelőre és AB érintőre: $a^2 = AC \cdot AD \Rightarrow$ $\Rightarrow a^2 = AC \cdot (AC + a) \Rightarrow AC$ szakasz az AB szakasz aranymetszete.

1158.



1155. Legyen a háromszög alapja AB, az A-ból induló szögfelező AD.

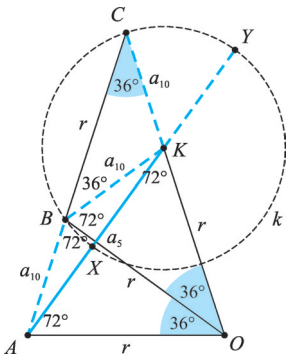
$ABD\triangle \sim CAB\triangle$. $\frac{\alpha}{2} = 180° - 2\alpha \Rightarrow \alpha = 72°$; $\quad 180° - 2\alpha = 36°$.

A háromszög szögei 72°; 72° és 36°.

1156. A háromszög alapon fekvő szögének szögfelezője az eredetivel hasonló háromszöget vág le, mert mindkettőben 36°-; 72°- és 72°-osak a szögek. $\Rightarrow ABD\triangle \sim CAB\triangle$. A szögfelezés miatt $ADC\triangle$ is egyenlő szárú, így $AD = DC = a \Rightarrow BD = b - a$.

A hasonlóságnál egymásnak megfelelő oldalak aránya: $\frac{a}{b} = \frac{b-a}{a} \Rightarrow a^2 = b(b-a) \Rightarrow$ az a alap aranymetszete b-nek.

1159.

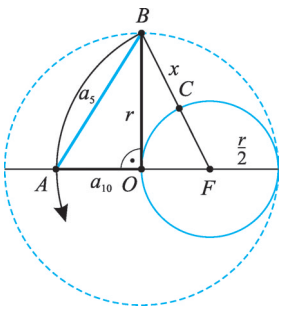


1157. A szabályos tízszög a körülírt kör középpontjából a csúcsokhoz húzott sugarakkal tíz darab egyenlő szárú háromszögre bontható. Ezeknek a háromszögeknek 36°-os szárszöge van, ezért az 1156. feladat eredményét felhasználva az alap aranymetszete a szárnak: alap $\rightarrow a_{10}$, a tízszög oldala; $\quad$ szár $\rightarrow r$, a kör sugara.

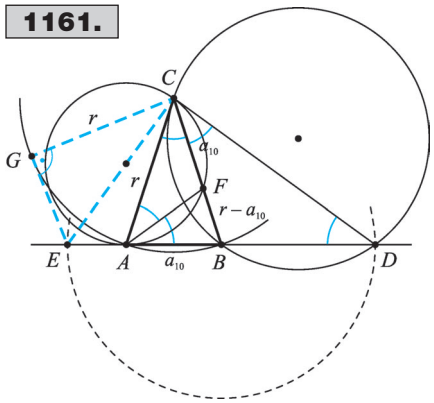
1158. $A_1A_2A_4\triangle$ egyenlő szárú. Az $A_1OA_2\sphericalangle$ a teljesszög ötöde, 72°. $A_1OA_2\sphericalangle$-gel azonos íven nyugvó kerületi szög az $A_1A_4A_2\sphericalangle$, ami fele a középponti szögnek $\Rightarrow A_1A_4A_2\sphericalangle = 36°$. Az $A_1A_4A_2\triangle$ egyenlő szárú, szárszöge 36°, így az 1156. feladat szerint alapja a szár aranymetszete: alap $\rightarrow a_5$; $\quad$ szár $\rightarrow$ az ötszög átlója.

1159. Legyen $AOB\triangle$ és $BOK\triangle$ a 10 oldalú szabályos sokszög két szomszédos oldalához tartozó középponti háromszöge. OK-t hosszabbítsuk meg $KC = a_{10}$ szakasszal. Az egyes részhá-

1160.



1161.



romszögek szögeit az ábra tartalmazza. Eszerint $AOC\triangle$ egyenlő szárú, $AC = OC = a_{10} + r$ és $ACO\sphericalangle = 36°$. $AOK\sphericalangle = 72°$ és $AO = OK = r$ miatt $AK = a_5$. Tekintsük a K középpontú a_{10} sugarú kört. B és C rajta van ezen a körön. Vegyük a k körhöz A-ból húzott szelőket. A szelődarabok szorzatára vonatkozó tétel miatt: $AB \cdot AC = AX \cdot AY \Rightarrow a_{10}(a_{10} + r) = (a_5 - a_{10})(a_5 + a_{10})$ (*). Az 1156. feladatban láttuk, hogy a 36°-os szárszögű egyenlő szárú háromszög alapja aranymetszete a szárnak, tehát $r^2 = a_{10}(a_{10} + r)$. Ezt a (*) összefüggésben felhasználva:

$r^2 = (a_5 - a_{10})(a_5 + a_{10}) \Rightarrow r^2 + a_{10}^2 = a_5^2$.

1160. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az $OFB\triangle$-re: $\left(x + \frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} \Rightarrow x^2 + rx = r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x + r) = r^2. \Rightarrow x$ aranymetszete r-nek (l. 1154. feladat) $\Rightarrow x = a_{10}$ (l. 1155. feladat). Az ábra alapján $AO = BC = x = a_{10}$. Írjunk Pitagorasz-tételt az AOB derékszögű háromszögre:

$AB^2 = a_{10}^2 + r^2$. Az 1159. feladat állítását felhasználva $AB = a_5$.

1161. Az ábrán a $BCD\triangle$ körülírt köre a BC szakasz, az $AFC\triangle$ körülírt köre az AF szakasz 36°-os látószögkörívének tekinthető. $\Rightarrow BCA\sphericalangle$, illetve az $FAB\sphericalangle$ érintőszárú kerületi szögek $\Rightarrow$ $\Rightarrow AC$ egyenes a $BCD\triangle$ körülírt körének, BA egyenes pedig az $AFC\triangle$ körülírt körének érintője. Alkalmazzuk a szelődarabok tételét: A $BCD\triangle$ köré írt körhöz az A-ból induló érintőre és szelőre $r^2 = a_{10}(a_{10} + r)$. Az $AFC\triangle$ köré írt körhöz a B-ből induló érintőre és szelőre $a_{10}^2 = r(r - a_{10})$. A BCE egyenlő szárú háromszög szára r, a szárszöge 72°, tehát EC tekinthető az r sugarú körbe írható szabályos ötszög oldalának. Az E pontból a C középpontú r sugarú körhöz a_{10} hosszú érintő húzható (EG), mert $EG^2 = EA \cdot EB = (r - a_{10})r$, és a jobb oldalról már megmutattuk, hogy a_{10}^2-tel egyenlő. Így az $EGC\triangle$ G-ben derékszögű, a két befogó a_{10} és $r = a_6$, az átfogó a_5.

Menelaosz tétele, Ceva tétele

1162. Húzzunk párhuzamost B-n át AC-vel! A párhuzamosnak a B_1, A_1, C_1 pontokat tartalmazó egyenessel való metszéspontja legyen B^*.

Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az $AC_1B_1\sphericalangle$ BB^* és AB_1 párhuzamos szelőire:

$\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{AB_1}{BB^*} \Rightarrow \frac{-AC_1}{C_1B} = \frac{-B_1A}{BB^*} \Rightarrow \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{B_1A}{BB^*}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a $CA_1B_1\sphericalangle$ BB^* és CB_1 párhuzamos szelőire: $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{BB^*}{CB_1} \Rightarrow \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BB^*}{B_1C}$. Vizsgáljuk

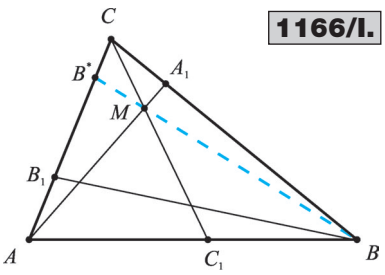
I

az állításban kijelölt szorzatot, felhasználva a fent kapott eredményeket: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=$
$=\frac{B_1A}{BB^*}\cdot\frac{BB^*}{B_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CB_1}{B_1C}=-1.$

1163. Tegyük fel, hogy B_1, A_1 és C_1 nincsenek egy egyenesen. Legyen B_1A_1 összekötő egyenesének az AB egyenessel való metszéspontja C^*. Alkalmazzuk a Menelaosz-tételt a B_1A_1 egyenesre: $\frac{AC^*}{C^*B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1$. A feltétel szerint: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1$. Egyenlőségükből:
$\frac{AC^*}{C^*B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\Rightarrow\frac{AC^*}{C^*B}=\frac{AC_1}{C_1B}\Rightarrow\frac{AC_1+C_1C^*}{C^*C_1+C_1B}=\frac{AC_1}{C_1B}\Rightarrow AC_1\cdot C_1B+$
$+C_1C^*\cdot C_1B=AC_1\cdot C^*C_1+AC_1\cdot C_1B\Rightarrow C_1C^*(C_1B+AC_1)=0$. C_1B+AC_1 nem lehet 0, mert $A\neq B$, tehát csak $C_1\equiv C^*$ lehet, vagyis B_1, A_1 és C_1 egy egyenesen vannak.

1164. Legyen a C-ből induló szögfelezőnek AB-vel való metszéspontja P, az A-ból induló szögfelezőnek BC-vel való metszéspontja Q, a beírt kör kp-ja O_o.
Alkalmazzuk a Menelaosz-tételt a $PBC\triangle$-re és az A, O_o, Q pontokat tartalmazó szelőre: $\frac{BA}{AP}\cdot\frac{PO_o}{O_oC}\cdot\frac{CQ}{QB}=-1$. A szögfelezőtétel miatt $\frac{BA}{AP}=\frac{c}{-\frac{cb}{a+b}}=-\frac{a+b}{b}$, illetve $\frac{CQ}{QB}=\frac{b}{c}$.
Az összefüggéseket behelyettesítve: $-\frac{a+b}{b}\cdot\frac{PO_o}{O_oC}\cdot\frac{b}{c}=-1\Rightarrow PO_o:O_oC=\frac{c}{a+b}$.

1165. Legyen az AA_1, BB_1, és CC_1 egyenesek metszéspontja M. Alkalmazzuk a Menelaosz-tételt az $AC_1C\triangle$-re és a B, M, B_1 pontokat tartalmazó szelőre:
(1) $\frac{AB}{BC_1}\cdot\frac{C_1M}{MC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1.$
Alkalmazzuk a Menelaosz-tételt a $BC_1C\triangle$-re és az A, M, A_1 pontokat tartalmazó szelőre:
(2) $\frac{BA}{AC_1}\cdot\frac{C_1M}{MC}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}=-1$. Osszuk el az (1) összefüggést a (2) összefüggéssel:
$\frac{AB}{BC_1}\cdot\frac{C_1M}{MC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{BA}\cdot\frac{MC}{C_1M}\cdot\frac{A_1B}{CA_1}=1$. Felhasználva az $AB=-BA$ és $A_1B=-BA_1$ és $BC_1=$
$=-C_1B$, $CA_1=-A_1C$ egyenlőségeket, az állítást kapjuk: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$



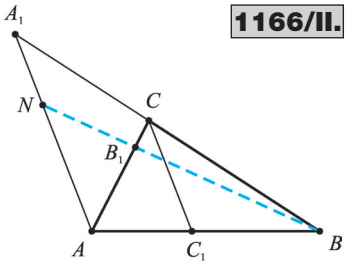
1166/I.

1166. Feltétel: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$

1. eset:
Tegyük fel, hogy AA_1 és CC_1M-ben metszik egymást. Tegyük fel, hogy BB_1 a feltétel ellenére sem megy át M-en. Legyen $BM\cap AC=B^*$. Alkalmazzuk a Ceva-tételt az $ABC\triangle$-re és az AA_1, BB^*, CC_1 egy ponton átmenő szelőkre: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB^*}{B^*A}=1$. A feltétellel összehasonlítva:

$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB^*}{B^*A}=\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\Rightarrow\frac{CB^*}{B^*A}=\frac{CB_1}{B_1A}\Rightarrow$
$\Rightarrow\frac{CB_1+B_1B^*}{B^*B_1+B_1A}=\frac{CB_1}{B_1A}\Rightarrow CB_1\cdot B_1A+B_1B^*\cdot B_1A=$
$=CB_1\cdot B^*B_1+CB_1\cdot B_1A\Rightarrow B_1B^*(CB_1+B_1A)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow B_1B^*\cdot CA=0$. $AC\neq 0$ miatt $B_1B^*=0$ teljesülése kell, ami azt jelenti, hogy $B_1\equiv B^*$, tehát az egyenesek egy pontban, M-ben metszik egymást.

1166/II.



2. eset:

Tegyük fel, hogy $AA_1\parallel CC_1$, de BB_1 nem párhuzamos velük. A feltétel szerint $e(B;B_1)\cap e(A;A_1)=$ $=N$. Ekkor az első esetben bizonyítottak szerint $N\in e(C;C_1)$, azaz CC_1 nem lenne párhuzamos AA_1 egyenessel.

1167. *a)* Súlyvonalak esetében: $AC_1=C_1B$ és $BA_1=A_1C$ és $CB_1=B_1A$.

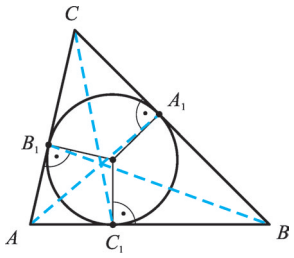
$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{AC_1}\cdot\frac{BA_1}{BA_1}\cdot\frac{CB_1}{CB_1}=1$, tehát a Ceva-tétel megfordítása miatt AA_1, BB_1 és CC_1 súlyvonalak egy pontban metszik egymást (párhuzamosak nem lehetnek, mert A_1, B_1 és C_1 az oldalak belső pontjai).

b) Szögfelezők esetében a szögfelezőtétel szerint: $AC_1:C_1B=b:a$ és $BA_1:A_1C=c:b$ és $CB_1:B_1A=a:c$. $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}=1$, tehát a Ceva-tétel megfordítása miatt AA_1, BB_1 és CC_1 szögfelezők egy pontban metszik egymást (párhuzamosak nem lehetnek, mert A_1, B_1 és C_1 az oldalak belső pontjai).

c) Magasságvonalak esetében: $AC_1C\triangle\sim AB_1B\triangle$, mert mindkettő derékszögű és A-nál lévő szögük egyenlő. $\Rightarrow AC_1:B_1A=b:c$. $AA_1B\triangle\sim CC_1B\triangle\Rightarrow BA_1:C_1B=c:a$ és $AA_1C\triangle\sim BB_1C\triangle\Rightarrow$
$\Rightarrow CB_1:A_1C=a:b$. Vizsgáljuk az arányok szorzatát.

$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{B_1A}\cdot\frac{BA_1}{C_1B}\cdot\frac{CB_1}{A_1C}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$. A merőleges viszony miatt a párhuzamosság nem fordulhat elő, így Ceva tételének megfordítása miatt az AA_1, BB_1 és CC_1 magasságvonalak egy pontban metszik egymást. Megjegyzés: Tompaszögű háromszög esetében C_1 is, B_1 is külső pont, így két negatív tényező szerepel, ami a szorzat előjelét nem változtatja. A bizonyítás derékszögű háromszög esetében a Ceva-tétel felhasználásával nem végezhető el.

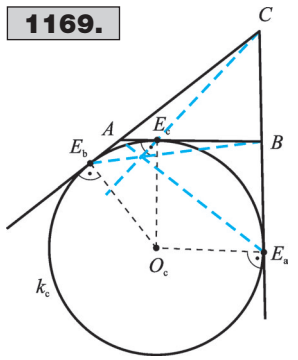
1168.



1168. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők: $AB_1=C_1A$; $BC_1=A_1B$; $CA_1=B_1C$.

$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{C_1B}{CB_1}\cdot\frac{CB_1}{AC_1}=1$, tehát Ceva tételének megfordítása miatt az AA_1, BB_1 és CC_1 egy pontban metszik egymást (párhuzamosak nem lehetnek, mert A_1, B_1 és C_1 mindegyike belső pont).

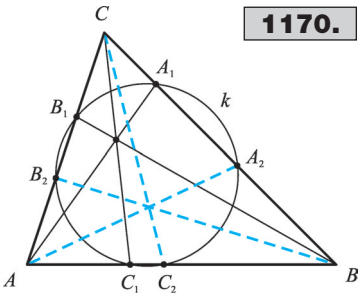
1169.



1169. A külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $CE_b=E_aC$ és $AE_b=E_cA$ és $E_aB=BE_c$. Vizsgáljuk meg az AE_a, BE_b és CE_c szelők által létrehozott szeletek arányának szorzatát:

I

1170.



$\frac{AE_c}{E_cB}\cdot\frac{BE_a}{E_aC}\cdot\frac{CE_b}{E_bA}=\frac{-AE_b}{-E_aB}\cdot\frac{-E_aB}{E_aC}\cdot\frac{E_aC}{-AE_b}=1$. Ceva tételének megfordítása miatt az AE_a, BE_b és CE_c egyenesek egy pontban metszik egymást (párhuzamosak nem lehetnek, mivel A és E_a, B és E_b a CE_c egyenesnek más-más oldalára esnek).

1170. Feltétel: AA_1, BB_1 és CC_1 egy pontban metszik egymást. A Ceva-tétel miatt $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$. A-ból k-hoz húzott szelőkre a szelődarabok szorzata: $AC_1\cdot AC_2=$ $=B_2A\cdot B_1A\Rightarrow\frac{AC_2}{AB_2}=\frac{AB_1}{AC_1}$. B-ből húzott szelőkre: $C_2B\cdot C_1B=BA_2\cdot BA_1\Rightarrow\frac{BA_2}{BC_2}=\frac{BC_1}{BA_1}$. C-ből húzott szelőkre: $A_1C\cdot A_2C=CB_1\cdot CB_2\Rightarrow\frac{CB_2}{CA_2}=\frac{CA_1}{CB_1}$. Vizsgáljuk a Ceva-feltételt a 2 indexű pontokra: $\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=\frac{AC_2}{B_2A}\cdot\frac{BA_2}{C_2B}\cdot\frac{CB_2}{A_2C}=\frac{AC_2}{-AB_2}\cdot\frac{BA_2}{-BC_2}\cdot\frac{CB_2}{-CA_2}=$

$=(-1)\cdot\frac{AB_1}{AC_1}\cdot(-1)\cdot\frac{BC_1}{BA_1}\cdot(-1)\cdot\frac{CA_1}{CB_1}=(-1)\cdot\frac{-B_1A}{CB_1}\cdot(-1)\cdot\frac{-C_1B}{AC_1}\cdot(-1)\cdot\frac{-A_1C}{BA_1}=$

$=\frac{1}{\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}}=1\Rightarrow$ A Ceva-tétel megfordítása miatt az AA_2, BB_2 és CC_2 egyenesek egy pontban metszik egymást.

Hasonló négyszögek

1171. $AE\parallel CD\Rightarrow BEP\triangle\sim CDP\triangle\Rightarrow\frac{BE}{CD}=\frac{BP}{CP}=\frac{BC-CP}{CP}$.

a) $\frac{5}{20}=\frac{5-CP}{CP}\Rightarrow\underline{\underline{CP=4\,\text{cm}}}$. *b)* $\frac{b}{a}=\frac{b-CP}{CP}\Rightarrow\underline{\underline{CP=\frac{ab}{a+b}\,\text{cm}}}$, azaz $\frac{1}{CP}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

1172. $ABCD$ paralelogramma és $BP:PC=5:7\Rightarrow AD=BC$, $BP:BC=5:12=BP:AD$ és $AD\parallel BP\Rightarrow AED\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{BE}{AE}=\frac{BP}{AD}$, azaz $\frac{BE}{BE+4{,}2}=$

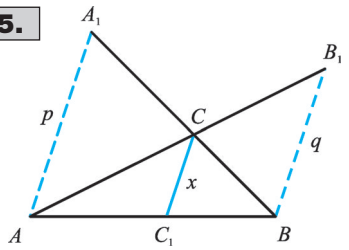
$=\frac{5}{12}\Rightarrow\underline{\underline{BE=3\,\text{cm}}}$.

1173. Legyen az E ponton át AD-vel húzott párhuzamosnak az AB oldallal való metszéspontja P, DC oldallal való metszéspontja Q. $PQ\parallel BC$, $AP+PB=a$ és $AE:EC=m:n\Rightarrow PE\parallel BC$ és $CAB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelők tétele szerint: $\frac{AE}{EC}=\frac{AP}{a-AP}=\frac{m}{n}\Rightarrow\underline{\underline{AP=\frac{ma}{m+n}}}$;

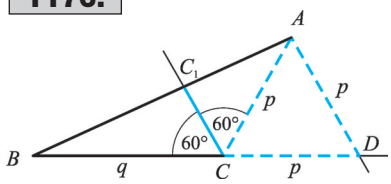
$\underline{\underline{PB=\frac{na}{n+m}}}$.

1174. Legyen a DE egyenesnek az AB egyenessel való metszéspontja P. $AE:EC=m:n$ és $AP\parallel CD\Rightarrow APE\triangle\sim CDE\triangle\Rightarrow\frac{AE}{EC}=\frac{AP}{CD}$, azaz $\frac{m}{n}=\frac{a+BP}{a}\Rightarrow\underline{\underline{BP=\frac{a(m-n)}{n}}}$.

1175.



1176.



1175. $AA_1 \| CC_1 \Rightarrow ABA_1\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{BC_1}{AB} = \frac{CC_1}{AA_1} = \frac{x}{p} \Rightarrow BC_1 = \frac{AB \cdot x}{p}$. $BB_1 \| CC_1 \Rightarrow BAB_1\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{AC_1}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1} = \frac{x}{q} \Rightarrow AC_1 = \frac{AB \cdot x}{q}$. Fentieket összegezve: $AC_1 + BC_1 = AB \Rightarrow \frac{AB \cdot x}{p} + \frac{AB \cdot x}{q} = AB \Rightarrow x = \frac{pq}{p+q}$, azaz $\frac{1}{x} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

1176. Hosszabbítsuk meg a BC szakaszt a C csúcson túl CA hosszúságú szakasszal, azaz $CD = CA = p$ legyen. Az $ACD\sphericalangle = 180° - 120° = 60°$ és $CD = CA \Rightarrow ACD\triangle$ szabályos $\Rightarrow AD = p$ és $CDA\sphericalangle = 60°$ és $AD \| CC_1 \Rightarrow DBA\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{CC_1}{AD} = \frac{BC}{BD}$, azaz $\frac{CC_1}{p} = \frac{q}{p+q} \Rightarrow CC_1 = \frac{pq}{p+q}$.

1177. $CP \| DE \Rightarrow EAD\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{CP}{DE} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow x = \frac{a \cdot b}{a+b}$. $QC \| FG \Rightarrow FBG\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{CQ}{FG} = \frac{BC}{BF} \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow y = \frac{a \cdot b}{a+b}$. Fentieket összevetve: $x = y$.

1178. $CD = \frac{30}{7}$ cm. **1179.** $EC = 20$ cm. **1180.** $AD = 2$ cm és $BC = 2{,}5$ cm.

1181. Legyen a két szár egyenesének metszéspontja E. $AB \| CD \Rightarrow EDC\triangle \sim EAB\triangle \Rightarrow$ megfelelő oldalaik aránya egyenlő: *a)* $\frac{ED}{EA} = \frac{DC}{AB}$, azaz $\frac{y}{y+4} = \frac{3}{10} \Rightarrow y = \frac{12}{7}$ és $\frac{EC}{EB} = \frac{DC}{AB}$, azaz $\frac{x}{x+6} = \frac{3}{10} \Rightarrow x = \frac{18}{7}$. A kiegészítő háromszög oldalai: 3 cm, $\frac{12}{7}$ cm, $\frac{18}{7}$ cm.

b) $\frac{ED}{EA} = \frac{DC}{AB}$, azaz $\frac{y}{y+d} = \frac{c}{a} \Rightarrow y = \frac{cd}{a-c}$ és $\frac{EC}{EB} = \frac{DC}{AB}$, azaz $\frac{x}{x+b} = \frac{c}{a} \Rightarrow x = \frac{bc}{a-c}$.

A kiegészítő háromszög oldalai: c, $\frac{cd}{a-c}$, $\frac{bc}{a-c}$ egység.

1182. $AC = 18$ cm. **1183.** $DC = \frac{5}{3}$ cm. **1184.** $BM = 24$ cm és $MD = 3$ cm.

1185. Legyen M az átlók metszéspontja. $AB \| CD \Rightarrow ABM\triangle \sim CDM\triangle \Rightarrow MC : MA = MD : MB$ és $DC : AB = MC : MA$. A fentiekből következik, hogy $MC : MA = DC : AB$.

I

1186. EF középvonal $\Rightarrow EF = \frac{AB + CD}{2} = 29\,\text{cm}$. $AB \parallel CD \Rightarrow ABM\triangle \sim CDM\triangle \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{BM}{MD} = \frac{9}{20} = \frac{AB}{CD}$ és $AB + CD = 58\,\text{cm} \Rightarrow \underline{\underline{AB = 18\,\text{cm}}}$ és $\underline{\underline{CD = 40\,\text{cm}}}$.

1187. Legyenek P és Q a szárakon levő osztópontok. Legyen R az AC átló $m : n$ arányú osztópontja $\Rightarrow AR : RC = m : n$. $DAC\sphericalangle$-ben $\frac{AP}{PD} = \frac{AR}{RC}$ egyenlőség áll fenn a csúcsból induló, egymáshoz csatlakozó szakaszokra $\Rightarrow PR \parallel CD$. $ACB\sphericalangle$-ben $\frac{BQ}{QC} = \frac{AR}{RC}$ egyenlőség áll fenn a csúcsból induló, egymáshoz csatlakozó szakaszokra $\Rightarrow RQ \parallel AB$. Mivel $AB \parallel CD$, a fentiek szerint $RQ \parallel PR \Rightarrow R, P, Q$ pontok egy egyenesen vannak $\Rightarrow PQ \parallel AB \parallel CD$.

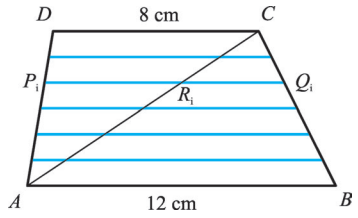
1188. Legyenek P és Q a szárakon levő osztópontok. Felhasználjuk, hogy ha $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$ és $AB \parallel CD$, akkor $PQ \parallel AB \parallel CD$, amit az 1187. feladatban bizonyítottunk. $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC} = \frac{1}{2}$ és $AB \parallel CD$ a trapéz alapjai, valamint $AC \cap PQ = R \Rightarrow PR \parallel CD$, illetve $RQ \parallel AB$. $DAC\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{PR}{DC} = \frac{AP}{AD}$, azaz $\frac{PR}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{PR = 3\,\text{cm}}}$. $ACB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{RQ}{AB} = \frac{CQ}{BC}$, azaz $\frac{RQ}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{\underline{RQ = 8\,\text{cm}}}$. Hasonlóan kiszámítható, hogy $\underline{\underline{PS = 8\,\text{cm}}}$ és $\underline{\underline{QS = 3\,\text{cm}}}$.

1189. Legyenek P és Q a szárakon levő osztópontok. Felhasználjuk, hogy ha $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$ és $AB \parallel CD$, akkor $PQ \parallel AB \parallel CD$, amit az 1187. feladatban bizonyítottunk. $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC} = \frac{2}{3}$ és $AB \parallel CD$ a trapéz alapjai, valamint $AC \cap PQ = R \Rightarrow PR \parallel CD$, illetve $RQ \parallel AB$. $DAC\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{PR}{DC} = \frac{AP}{AD}$, azaz $\frac{PR}{b} = \frac{2}{5} \Rightarrow PR = \frac{2b}{5}$. $ACB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{RQ}{AB} = \frac{CQ}{BC}$, azaz $\frac{RQ}{a} = \frac{3}{5} \Rightarrow RQ = \frac{3a}{5} \Rightarrow PR + RQ = PQ = \underline{\underline{\frac{3a + 2b}{5}}}$.

1190. Legyenek P_i és Q_i az egyes szárakon levő osztópontok. Felhasználjuk, hogy ha $\frac{AP_i}{P_iD} = \frac{BQ_i}{Q_iC}$ és $AB \parallel CD$, akkor $P_iQ_i \parallel AB \parallel CD$, amit az 1187. feladatban bizonyítottunk. $\Rightarrow$ $\Rightarrow ABQ_iP_i$ és P_iQ_iCD négyszögek trapézok. P_2Q_2 az $ABCD$ trapéz középvonala $\Rightarrow \underline{\underline{P_2Q_2 = \frac{a + b}{2}}}$. P_1Q_1 az ABQ_2P_2 trapéz középvonala $\Rightarrow \underline{\underline{P_1Q_1 = \frac{a + \frac{a + b}{2}}{2} = \frac{3a + b}{4}}}$. P_3Q_3 az P_2Q_2CD trapéz középvonala $\Rightarrow \underline{\underline{P_3Q_3 = \frac{\frac{a + b}{2} + b}{2} = \frac{a + 3b}{4}}}$.

1191. Legyenek az egyik szár meghosszabbításának új végpontjai P és Q, a másik száré S és R. Az 1187. feladat állítása szerint, ha $QA:AD:DP=RB:BC:CS$ és $AB\|CD\Rightarrow$ $\Rightarrow QR\|AB\|CD\|SP$. EF az $ABCD$ trapéz középvonala $\Rightarrow$ $\Rightarrow EF\|CD\|PS$ és $EF\|AB\|QR$, valamint $PD=DF$ és $AF=$ $=AQ$. Az EF középvonal hossza $(12+16):2=14$ cm. CD az $FESP$ trapéz középvonala $\Rightarrow$ $(PS+14):2=12\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $PS=10$ cm a trapéz egyik alapja. AB a $QREF$ trapéz középvonala $\Rightarrow$ $(QR+14):2=16\Rightarrow$ $QR=18$ cm a trapéz másik alapja.

1192.



1192. Felhasználjuk, hogy ha $\frac{AP_i}{P_iD}=\frac{BQ_i}{Q_iC}$ és $AB\|CD$, akkor $P_iQ_i\|AB\|CD$, amit az 1187. feladatban bizonyítottunk. $\frac{AP_i}{P_iD}=\frac{BQ_i}{Q_iC}=\frac{i}{6-i}$ és $AB\|CD$ a trapéz alapjai, valamint $AC\cap P_iQ_i=$ $=R_i\Rightarrow P_iR_i\|CD$, illetve $R_iQ_i\|AB$. $DAC\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{P_iR_i}{DC}=\frac{AP_i}{AD}$, azaz $\frac{P_iR_i}{8}=\frac{i}{6}\Rightarrow P_iR_i=\frac{4i}{3}$. $ACB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{R_iQ_i}{AB}=\frac{CQ_i}{BC}$, azaz $\frac{R_iQ_i}{12}=\frac{6-i}{6}\Rightarrow R_iQ_i=2(6-i)$. $P_iR_i+R_iQ_i=P_iQ_i=\frac{4i}{3}+$ $+2(6-i)=12-\frac{2i}{3}$. $P_1Q_1=\frac{34}{3}$ cm, $P_2Q_2=\frac{32}{3}$ cm, $P_3Q_3=10$ cm, $P_4Q_4=\frac{28}{3}$ cm, $P_5Q_5=$ $=\frac{26}{3}$ cm.

1193. Legyenek P és Q a szárakon levő osztópontok. Legyen $PQ\cap AC=R$ és $PQ\cap BD=S$. Felhasználjuk, hogy ha $\frac{AP}{PD}=\frac{BQ}{QC}$ és $AB\|CD$, akkor $PQ\|AB\|CD$, amit az 1187. feladatban bizonyítottunk. $\frac{AP}{PD}=\frac{BQ}{QC}=\frac{m}{n}$ és $AB\|CD$ a trapéz alapjai, valamint $AC\cap PQ=R\Rightarrow PR\|CD$, illetve $RQ\|AB$.

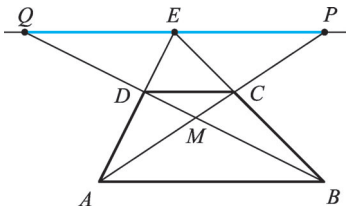
a) $DAC\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{PR}{DC}=\frac{AP}{AD}$, azaz $\frac{PR}{b}=\frac{m}{m+n}\Rightarrow PR=\frac{mb}{m+n}$. $ACB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{RQ}{AB}=\frac{CQ}{BC}$, azaz $\frac{RQ}{a}=\frac{n}{m+n}\Rightarrow RQ=\frac{na}{m+n}$. BD átló esetén hasonlóan adódik, hogy $PS=\frac{na}{m+n}$; $SQ=\frac{mb}{m+n}$.

b) $PR+RQ=PQ=\frac{na+mb}{m+n}$.

1194. Legyen M az átlók metszéspontja, $P\in AD$ és $Q\in BC$ pedig az M-en át húzott párhuzamosnak a szárakkal való metszéspontja. $AB\|CD\|e\Rightarrow ABM\triangle\sim CDM\triangle\Rightarrow\frac{DM}{MB}=\frac{CM}{MA}=$ $=\frac{5}{8}\Rightarrow\frac{DM}{DB}=\frac{CM}{CA}=\frac{5}{13}$. $AB\|PM\Rightarrow ADB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint:

I

1195.



$\frac{PM}{AB}=\frac{DM}{DB}=\frac{5}{13}\Rightarrow\frac{PM}{8}=\frac{5}{13}\Rightarrow PM=\frac{40}{13}$ cm. $AB\parallel MQ\Rightarrow$ $\Rightarrow ACB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{MQ}{AB}=\frac{CM}{CA}=\frac{5}{13}\Rightarrow\frac{MQ}{8}=\frac{5}{13}\Rightarrow MQ=\frac{40}{13}$ cm.

1195. $DC\parallel EP\Rightarrow EAP\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{EP}{CD}=\frac{AE}{AD}$.

$DC\parallel QE\Rightarrow EBQ\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{EQ}{CD}=\frac{BE}{BC}$. $AEB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelők tétele szerint: $\frac{AE}{AD}=\frac{BE}{BC}\Rightarrow\frac{EP}{CD}=\frac{EQ}{CD}\Rightarrow EP=EQ$. Megjegyzés: ha az $ABCD$ négyszög paralelogramma, akkor nem jön létre az E metszéspont.

1196. Legyen M az átlók metszéspontja, P és Q pedig az M-en át húzott párhuzamosnak a szárakkal való metszéspontja. $AB\parallel PM\Rightarrow ADB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{PM}{AB}=\frac{DP}{DA}$. $AB\parallel MQ\Rightarrow ACB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{MQ}{AB}=\frac{CQ}{CB}$. $ABM\triangle\sim CDM\triangle\Rightarrow\frac{DP}{DA}=\frac{CQ}{CB}\Rightarrow\frac{PM}{AB}=\frac{MQ}{AB}\Rightarrow PM=MQ$.

1197. Az 1196. feladatban láttuk, hogy az átlók M metszéspontja felezi a rá illeszkedő, az alapokkal párhuzamos egyenes trapézba eső szakaszát. $\Rightarrow RM=MS$. $DP\parallel RM\Rightarrow REM\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{DP}{RM}=\frac{EP}{EM}$. $PC\parallel SM\Rightarrow SEM\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{PC}{RM}=\frac{PC}{MS}=\frac{EP}{EM}\Rightarrow DP=PC\Rightarrow P$ felezi DC szakaszt. Hasonlóan igaz, hogy $AQ=QB\Rightarrow Q$ felezi az AB szakaszt. Tehát az EM egyenes felezi a trapéz alapjait. Megjegyzés: ha az $ABCD$ négyszög paralelogramma, akkor nem jön létre az E metszéspont.

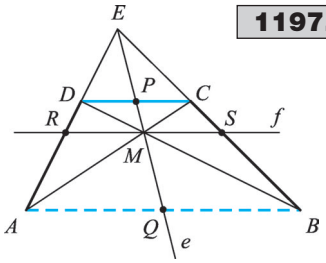
1198. Felhasználjuk, hogy ha $AH_1:AD=BH_2:BC=1:3$ és $AB\parallel CD$, akkor $H_1H_2\parallel CD$.

a) $DAC\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{AH_1}{AD}=\frac{H_1P}{CD}=\frac{1}{3}\Rightarrow H_1P=\frac{1}{3}b$.

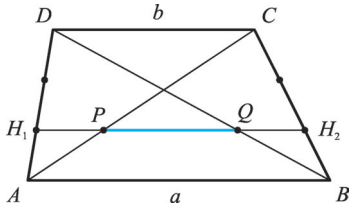
$ADB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{H_1D}{AD}=\frac{H_1Q}{AB}=\frac{2}{3}\Rightarrow H_1Q=\frac{2}{3}a$.

A fentiekből következik, hogy $H_1Q-H_1P=PQ=\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}b$.

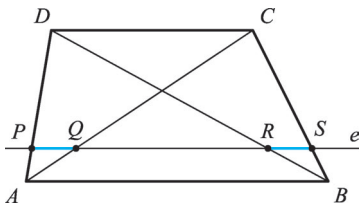
1197.



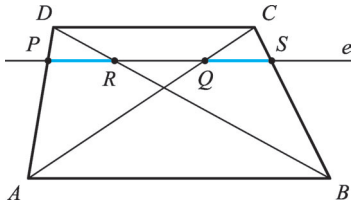
1198.



1199/I.



1199/II.



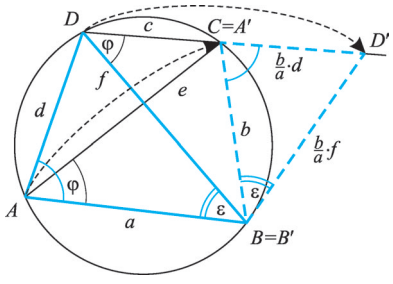
b) $DAC\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{AH_1}{AD}=\frac{H_1P}{CD}=\frac{m}{m+n}\Rightarrow$ $\Rightarrow H_1P=\frac{mb}{m+n}$. $ADB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{H_1D}{AD}=\frac{H_1Q}{AB}=$ $=\frac{n}{m+n}\Rightarrow H_1Q=\frac{na}{m+n}$. A fentiekből következik: Ha $\frac{a}{b}\geq\frac{m}{n}$, akkor $PQ=H_1Q-H_1P$. Ha $\frac{a}{b}<\frac{m}{n}$, akkor $PQ=H_1P-H_1Q$. Tehát $PQ=\left|\frac{na-mb}{m+n}\right|$.

1199. $CD\parallel e\Rightarrow PQ\parallel CD$ és $RS\parallel CD$. $DAC\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele: $\frac{PQ}{CD}=\frac{AP}{AD}$. $CBD\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele: $\frac{RS}{CD}=\frac{BS}{BC}$. Az AD egyenes és a BC egyenes által bezárt szögre a párhuzamos szelők tétele: $\frac{AP}{AD}=\frac{BS}{BC}$. A fentiekből következik, hogy $\frac{PQ}{CD}=\frac{BS}{BC}=\frac{RS}{CD}$, azaz $PQ=RS$.

Az 1199/I. ábrán látható helyzetben: $\underline{\underline{PQ=RS}}$ és $\underline{\underline{PR}}=PQ+QR=RS+QR=\underline{\underline{QS}}\Rightarrow$ igaz az állítás. Az 1199/II. ábrán látható helyzetben: $\underline{\underline{PQ=RS}}$ és $\underline{\underline{PR}}=PQ-QR=RS-QR=\underline{\underline{QS}}\Rightarrow$ igaz az állítás.

1200. Alkalmazzunk B középpontú $\frac{b}{a}$ arányú forgatva nyújtást az $ABD\triangle$-re úgy, hogy A képe C legyen. D képét jelöljük D'-vel. $D'\in e(D;C)$, mivel $ABCD$ húrnégyszög, így $DAB\sphericalangle$ egyenlő a $DCB\sphericalangle$ külső szögével. A transzformáció miatt $CD'=\frac{b}{a}\cdot d$ és $BD'=\frac{b}{a}\cdot f$, a kerületi szögek tétele miatt $BAC\sphericalangle=BDC\sphericalangle=\varphi$. $ABC\triangle\sim DBD'\triangle$, mert $BAC\sphericalangle=BDD'\sphericalangle=\varphi$ és $ABC\sphericalangle=$ $=\varepsilon+DBC\sphericalangle=DBD'\sphericalangle$.

1200.

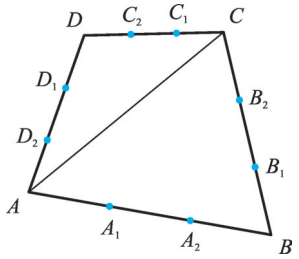


A hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő: $DD':BD'=AC:BC$, azaz $\frac{c+\frac{b}{a}\cdot d}{\frac{b}{a}\cdot f}=\frac{e}{b}\Rightarrow$ $\Rightarrow ac+bd=ef$. Megjegyzés: A tétel tetszőleges konvex négyszögre általánosítható. Bármely konvex négyszög átlóinak szorzata legfeljebb akkora, mint a szemközti oldalak szorzatának összege. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a négyszög húrnégyszög.

I

Háromszögek hasonlóságával megoldható feladatok

1201.



1201. Húzzuk meg a négyszög AC átlóját! Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az $ABC\sphericalangle AC$ és A_1B_2 szelőire: $AC \parallel A_1B_2$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az $ABC\sphericalangle AC$ és A_1B_2 párhuzamos szelőire: $AC : A_1B_2 = 3 : 2 \Rightarrow A_1B_2 = \frac{2}{3}AC$. Hasonlóan belátható, hogy $AC \parallel C_1D_2$ és $C_1D_2 = \frac{2}{3}AC$. A fentiekből következik, hogy $A_1B_2 \parallel C_1D_2$ és $A_1B_2 = C_1D_2 \Rightarrow A_1B_2C_1D_2$ paralelogramma.

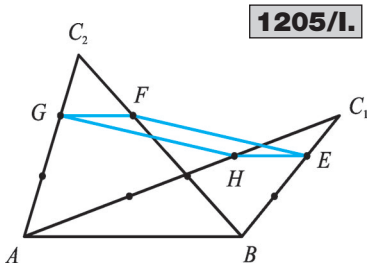
1202. Az 1201. ábra jelöléseit használjuk. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az $ABC\sphericalangle AC$ és A_2B_1 szelőire: $AC \parallel A_2B_1$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az $ADC\sphericalangle AC$ és C_2D_1 szelőire: $AC \parallel C_2D_1$. A fentiekből következik, hogy $C_2D_1 \parallel A_2B_1$. Hasonlóan belátható, hogy $A_1D_2 \parallel B_2C_1$. Az új négyszög szemközti oldalegyenesei párhuzamosak, tehát paralelogramma.

1203. Az 1201. ábra jelöléseit használjuk. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az $ADC\sphericalangle AC$ és C_2D_1 szelőire: $AC \parallel C_2D_1$. Hasonlóan belátható, hogy $AC \parallel A_1B_2$. $\Rightarrow$ $\Rightarrow C_2D_1 \parallel A_1B_2 \Rightarrow A_1B_2C_2D_1$ trapéz. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az $ADC\sphericalangle AC$ és C_2D_1 párhuzamos szelőire: $D_1C_2 : AC = 1 : 3$. Hasonlóan belátható, hogy $A_1B_2 : AC = 2 : 3 \Rightarrow D_1C_2 : A_1B_2 = 1 : 2$.

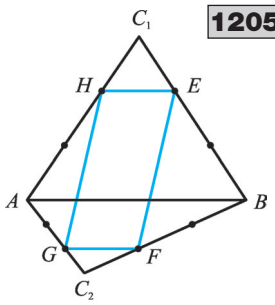
1204. Az 1201. ábra jelöléseit használjuk. Legyen a D_1B_2 és A_1C_2 szakaszok metszéspontja M. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az $ADC\sphericalangle AC$ és C_2D_1 szelőire, valamint az $ABC\sphericalangle AC$ és A_1B_2 szelőire: $AC \parallel C_2D_1$ és $AC \parallel A_1B_2 \Rightarrow C_2D_1 \parallel A_1B_2$. A párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva ugyanezekre a szögekre és szelőkre: $D_1C_2 : AC = 1 : 3$ és $A_1B_2 : AC = 2 : 3$. A párhuzamosság miatt $D_1MC_2\triangle \sim B_2MA_1\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. A hasonlóság aránya: $\lambda = \frac{A_1B_2}{D_1C_2} = \frac{\frac{2}{3}AC}{\frac{1}{3}AC} = 2$. A másik két oldalpár aránya: $\frac{A_1M}{MC_2} = \frac{B_2M}{MD_1} = 2$. A szakaszok 2 : 1 arányban osztják egymást.

1205. **1. eset:** Ha a két háromszög ugyanabban a félsíkban van és egyenlő magas, akkor E; F; G; H ugyanabban a félsíkban ugyanolyan messze van AB egyenesétől $\Rightarrow$ egy egyenesen vannak.
2. eset: Egyébként: Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását az AC_2B, illetve

1205/I.



1205/II.



AC_1B szögek GF és AB, illetve HE és AB szelőire: $GF \parallel AB$ és $HE \parallel AB \Rightarrow \underline{GF \parallel HE}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a fenti szögekre és szelőkre: $GF : AB = 1 : 3$ és $HE : AB = 1 : 3$, ezért $\underline{GF = HE}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $EFGH$ paralelogramma.

1206. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét a $DBA\sphericalangle\ DA$ és MP párhuzamos szelőire: $\underline{DM : MB = AP : PB}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét a $DBC\sphericalangle\ DC$ és MQ párhuzamos szelőire: $\underline{DM : MB = CQ : QB}$. Az aláhúzottakból $AP : PB = CQ : QB$. A párhuzamos szelők tételének megfordítását alkalmazzuk az $ABC\sphericalangle\ AC$ és PQ szelőire: $AC \parallel PQ$.

1207. Az átlók 3 : 1 arányban osztják egymást.

1208. Legyen F_a a BC oldal, F_b az AC oldal felezéspontja. Legyen $F_aA \cap F_bB = S$ a súlypont. F_aF_b a háromszög középvonala, tehát $F_aF_b \parallel AB$ és $F_aF_b = AB : 2$. $ABS\triangle \sim F_aF_bS\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. A hasonlóság aránya $\lambda = \dfrac{AB}{F_aF_b} = 2 \Rightarrow \dfrac{AS}{SF_a} = \dfrac{BS}{SF_b} = \dfrac{2}{1}$. Az állítás bármely két súlyvonalra hasonlóan belátható.

1209. Legyen T az átfogóhoz tartozó magasság talppontja. $ATC\triangle \sim CTB\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. A hasonlóság aránya: $\lambda = 2$. $\Rightarrow$ A megfelelő oldalak: $CT = 2AT$ és $TB = 2CT \Rightarrow$ $\Rightarrow TB = 2 \cdot 2AT = 4AT \Rightarrow AT : TB = 1 : 4$.

1210. $DE = \dfrac{4}{3}$ cm.

1211. $A_1AT_1\triangle \sim CAT\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda_1 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow A_1T_1 = \dfrac{1}{3}\, m_c$.

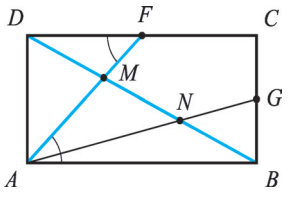
$B_2BT_2\triangle \sim CBT\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda_2 = \dfrac{2}{3} \Rightarrow B_2T_2 = \dfrac{2}{3}\, m_c$. A fentiekből következik, hogy $B_2T_2 = 2A_1T_1$. Az állítás derékszögű háromszögre is érvényes, ott azonban nem létezik az $A_1AT_1\triangle$. $A_1T_1 = \dfrac{1}{3}\, AC$ és $B_2T_2 = \dfrac{2}{3}\, AC \Rightarrow B_2T_2 = 2A_1T_1$.

1212. *a)* Legyen $AC \cap H_1F_4 = M$. $AF_4M\triangle \sim CH_1M\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda = 1 : 2 \Rightarrow H_1M : MF_4 = 1 : 2$, tehát az AC átló 1 : 2 arányban osztja a H_1F_4 szakaszt.
b) Legyen $AC \cap H_3F_5 = M$. $CH_3M\triangle \sim AF_5M\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow \lambda = 3 : 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow H_3M : MF_5 = 3$, tehát az AC átló 3 : 1 arányban osztja a H_3F_5 szakaszt.

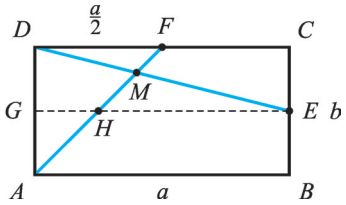
1213. $ABM\triangle \sim FDM\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow \lambda = \dfrac{AB}{DF} = 2 \Rightarrow \dfrac{BM}{MD} =$ $= \dfrac{AM}{MF} = 2 : 1$. Hasonlóan belátható, hogy $\dfrac{DN}{NB} = \dfrac{AN}{NG} = 2 : 1$.

1214. Húzzunk párhuzamost E-n át AB-vel $\rightarrow G$ és H. GE a téglalap középvonala $\Rightarrow GH$ az $AFD\triangle$ középvonala $\Rightarrow H$ felezi AF-et $\Rightarrow GH = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{4}\, a \Rightarrow HE = \dfrac{3}{4}\, a$. $HEM\triangle \sim FDM\triangle$,

1213.

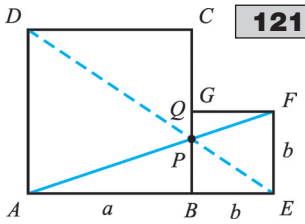


1214.



I

1217.



mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda = \frac{HE}{FD} = \frac{\frac{3}{4}a}{\frac{1}{2}a} = \frac{3}{2}$. $\Rightarrow$ $\Rightarrow HM : MF = 3 : 2$ és $\underline{\underline{EM : MD = 3 : 2}} \Rightarrow HM = 3x$, $MF = 2x$ és H felezi AF-et, ezért $AH = HF = 5x \Rightarrow AM = 8x$ és $MF = 2x \Rightarrow \underline{\underline{AM : MF = 4 : 1}}$.

1215. Legyenek A_1, A_2, ill. B_1, B_2 a szárak harmadolópontjai az alaptól a szárak metszéspontja felé haladva. $ABC\triangle \sim A_2B_2C\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\Rightarrow A_2B_2 = \frac{1}{3}a$. Legyen $e(A_2; B_1) \cap e(A; B) = M$. $BMB_1\triangle \cong B_2A_2B_1\triangle$, mert $B_2B_1 = BB_1$, $BB_1M\sphericalangle = B_2B_1A_2\sphericalangle$ (csúcsszögek), $B_1BM\sphericalangle = B_1B_2A_2\sphericalangle$ (váltószögek) $\Rightarrow A_2B_2 = MB \Rightarrow MB = \frac{1}{3}a$. Megjegyzés: az állítás Menelaosz tételének megfordításával is bizonyítható.

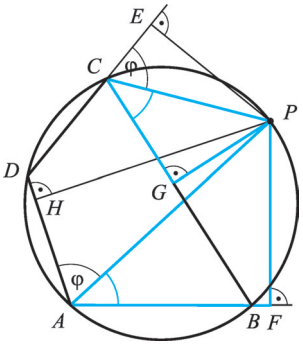
1216. Legyen $BP \cap AC = M$. $AMP\triangle \sim CMB\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda = \frac{AP}{CB} = \frac{AP}{DA} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{PM}{MB} = \frac{1}{n} \Rightarrow MC = n \cdot AM$.

$AC = AM + MC = AM + n \cdot AM = (n+1) \cdot AM \Rightarrow \underline{\underline{\frac{AM}{AC} = \frac{1}{n+1}}}$.

1217. Legyen $AF \cap CB = P$! $APB\triangle \sim AFE\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda_1 = \frac{AB}{AE} = \frac{PB}{FE}$; $\lambda_1 = \frac{AB}{AB + BE} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow PB = \frac{a}{a+b} \cdot b$. Legyen $DE \cap CB = Q$! $EQB\triangle \sim EDA\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda_2 = \frac{BE}{AE} = \frac{BQ}{AD}$; $\lambda_2 = \frac{BE}{AB + BE} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow QB = \frac{b}{a+b} \cdot a$. A fentiekből: $PB = QB$, ezért $P \equiv Q$, tehát AF és DE a CB szakaszon metszik egymást.

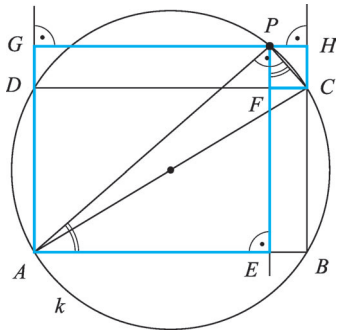
1218. $PAF\triangle \sim PCG\triangle$, mert mindkettő derékszögű, és $FAP\sphericalangle = GCP\sphericalangle$, mivel a körben a BP íven nyugvó kerületi szögek. $\Rightarrow \underline{\underline{\frac{PF}{PG} = \frac{PA}{PC}}}$. $PHA\triangle \sim PEC\triangle$, mert mindkettő derékszögű és $DAPC$ húrnégyszög miatt az A-nál lévő φ szög egyenlő a C-nél lévő külső szöggel. $\Rightarrow \underline{\underline{\frac{PH}{PE} = \frac{PA}{PC}}}$. Az aláhúzott egyenlőségekből: $\frac{PF}{PG} = \frac{PH}{PE} \Rightarrow PF \cdot PE = PG \cdot PH$. Ha P valamelyik csúccsal azonos, akkor az abba a csúcsba futó oldalaktól való távolsága 0, tehát mindkét szorzat 0, az állítás igaz.

1218.



1219. Legyen a magasságpont M, az A-ból induló magasság talppontja A_1, a B-ből induló B_1. $AMB_1\triangle \sim BMA_1\triangle$, mert mindkettő derékszögű és M-nél lévő szögeik csúcsszögek. $\lambda = \frac{A_1M}{B_1M} = \frac{BM}{AM} \Rightarrow AM \cdot MA_1 = BM \cdot MB_1$.

1220. $ABCD$ téglalap $\Rightarrow AC$ a kör átmérője $\Rightarrow$ Thalész tétele miatt $APC\sphericalangle = 90°$; $PAE\sphericalangle = CPF\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek ($PC \perp AP$, $PF \perp AE$) $\Rightarrow AEP\triangle \sim PFC\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow$ $AEPG$ téglalap hasonló az $FCHP$ téglalaphoz.



1220.

1221. $BA_1 = 2{,}25$ cm és $A_1C = 5{,}75$ cm.

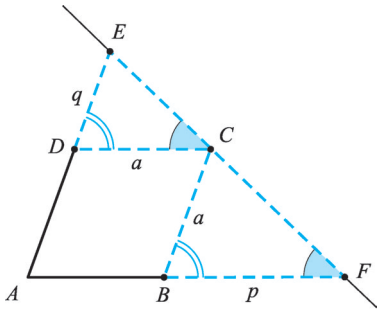
1222. Legyen a derékszögű csúcs C, a szárakon lévő osztópontok A_2, A_1, ill. B_2, B_1, a négyzet AB-n levő csúcsai P és Q, AB felezőpontja F. $A_2B_2C\triangle \sim ABC\triangle$, mert két-két oldaluk aránya és az általuk bezárt szög egyenlő. $\lambda_1 = \dfrac{A_2C}{AC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow A_2B_2 = \dfrac{1}{3}AB$. $APA_2\triangle \sim AFC\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda_2 = \dfrac{AA_2}{AC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow A_2P = \dfrac{2}{3}CF$. $CF = \dfrac{1}{2}AB$ miatt $A_2P = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{3}AB$. Hasonlóan megmutatható, hogy $B_2Q = \dfrac{1}{3}AB$. $\Rightarrow A_2B_2 = A_2P = B_2Q$ és $A_2PQ\sphericalangle = PQB_2\sphericalangle = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow A_2B_2QP$ négyzet.

1223. Húzzuk meg a C-ből induló súlyvonalat: CC_1. Felhasználjuk, hogy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó súlyvonala merőleges az átfogóra és fele olyan hosszú. $CC_1 \cap AD = S$ az $ABC\triangle$ súlypontja. $ABD\triangle \sim ASC_1\triangle$, mert mindkettő derékszögű és az A csúcsnál lévő szögük közös. $\Rightarrow \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AC_1}{C_1S} = \dfrac{AC_1}{\frac{1}{3}CC_1} = \dfrac{AC_1}{\frac{1}{3}AC_1} = 3$.

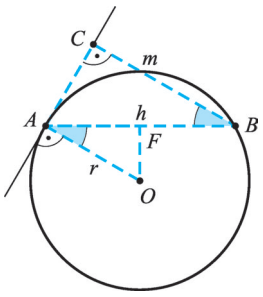
1224. $DCE\triangle \sim BFC\triangle$, mert szögeik páronként egyállású szögek, tehát egyenlők. $\lambda = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{DC}{BF}$, azaz $\dfrac{q}{a} = \dfrac{a}{p} \Rightarrow a^2 = pq \Rightarrow a = \sqrt{pq}$.

1225. Állítás: $h = \sqrt{2rm}$. $AOF\triangle \sim BAC\triangle$, mert mindkettő derékszögű, és $OAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle$, hiszen váltószögek. $\lambda = \dfrac{AO}{AB} = \dfrac{AF}{BC}$, azaz $\dfrac{r}{h} = \dfrac{\frac{h}{2}}{m} \Rightarrow h^2 = 2rm \Rightarrow h = \sqrt{2rm}$.

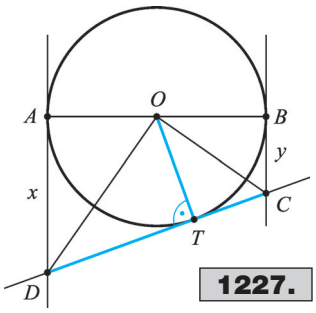
1224.



1225.



I



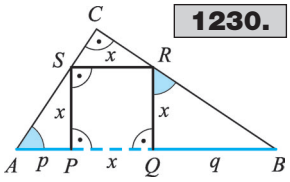
1227.

1226. Legyen a CD húrra merőleges átmérő AB! Thalész tétele miatt $ACB\triangle$ C-ben derékszögű, CT az átfogóhoz tartozó magassága. A magasságtételt alkalmazva az $ACB\triangle$-re: $\frac{h}{2} = \sqrt{m\cdot(2r-m)} \Rightarrow h = 2\sqrt{m(2r-m)}$.

1227. Állítás: $r = \sqrt{xy}$. $AOTD$ és $BOTC$ négyszögek deltoidok, mert két-két szomszédos oldaluk egyenlő. DO felezi az $AOT\sphericalangle$-et és CO felezi a $BOT\sphericalangle$-et. $AOT\sphericalangle$ és $BOT\sphericalangle$ mellékszögek, tehát szögfelezőik merőlegesek egymásra. $\Rightarrow DOC\sphericalangle = 90°$. $OT \perp CD$, mert az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. Alkalmazzuk a magasságtételt az ODC derékszögű háromszögre: $OT = \sqrt{DT\cdot TC}$. $DT = DA = x$ és $TC = CB = y$, mert az érintőszakaszok hossza egyenlő $\Rightarrow r = OT = \sqrt{xy}$.

1228. Állítás: $AB = \sqrt{AD\cdot AC}$. $ABC\triangle \sim ADB\triangle$, mert az A csúcsnál lévő szögük közös, B-nél, illetve D-nél lévő szögük pedig β. A hasonlóság aránya: $\lambda = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD\cdot AC \Rightarrow$ $\Rightarrow AB = \sqrt{AD\cdot AC}$.

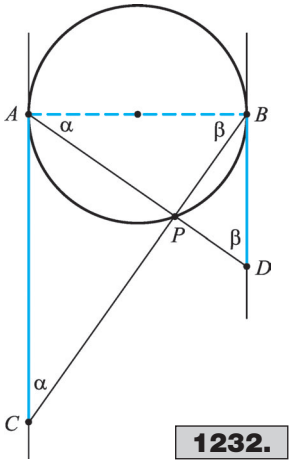
1229. Legyenek az $ABCD$ trapéz beírt körének érintési pontjai AB-n E, BC-n G, CD-n F és DA-n H. A trapéz egy száron lévő szögeinek összege 180°, tehát $EBC\sphericalangle + BCF\sphericalangle = \alpha + \beta = 180°$. A beírt kör középpontja a szögfelezők metszéspontja. A húrtrapéz alapon fekvő szögei egyenlők. $EBO\triangle \sim FOD\triangle$, mert mindkettő derékszögű, és $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$, tehát szögeik egymás pótszögei. $\Rightarrow AEOH \sim BEOG \sim OGCF \sim OFDH$.



1230.

1230. Állítás: $x = \sqrt{pq}$. $APS\triangle \sim RQB\triangle$, mert mindkettő derékszögű, és az egyformán jelölt szögek merőleges szárú hegyesszögek. $\lambda = \frac{PS}{QB} = \frac{AP}{RQ}$, azaz $\frac{x}{q} = \frac{p}{x} \Rightarrow x^2 = pq \Rightarrow x = \sqrt{pq}$.

1231. Állítás: $AB = \sqrt{BC\cdot BP}$. Kössük össze P-t A-val! $ABP\triangle$ egyenlő szárú, mert FP merőlegesen felezi az AB szakaszt. $ABC\triangle \sim$ $\sim PAB\triangle$, mert mindkettő egyenlő szárú és a B-nél lévő szögük közös. $\lambda = \frac{AB}{BP} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BC\cdot BP$, tehát $AB = \sqrt{BC\cdot BP}$.



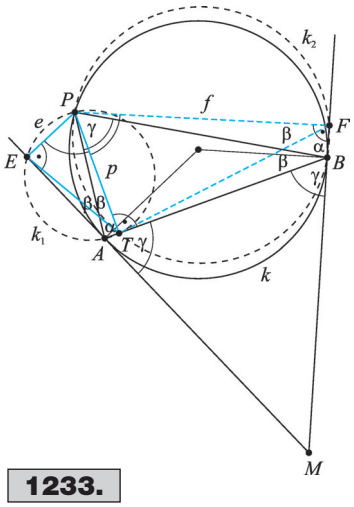
1232.

1232. Állítás: $AB = \sqrt{AC\cdot BD}$. $APB\triangle$ derékszögű Thalész tétele miatt. $DBA\sphericalangle = CAB\sphericalangle = 90°$, mert az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. $APB\triangle$ hegyesszögei: α és $\beta \Rightarrow$ $\Rightarrow ACB\sphericalangle = \alpha$ és $ADB\sphericalangle = \beta \Rightarrow ACB\triangle \sim BAD\triangle$. $\lambda = \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow$ $\Rightarrow AB^2 = AC\cdot BD$, tehát $AB = \sqrt{AC\cdot BD}$.

1233. $BAM\sphericalangle = ABM\sphericalangle = APB\sphericalangle = \gamma$, mert ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek. E és T pontból az AP szakasz 90° alatt látszik, ezért E és T rajta vannak az AP szakasz Thalész körén, k_1-en. $\Rightarrow \otimes EAP\sphericalangle = ETP\sphericalangle$, mert ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek k_1-ben. Jelöljük az $ABP\triangle$ $PAB\sphericalangle$-ét α-val, $PBA\sphericalangle$-ét β-val! $ABP\triangle$ belső szögeinek összege $\gamma + \alpha + \beta = 180°$. Az A csúcsnál az érintő

két félegyenese egyenesszöget alkot: $\gamma + \alpha + EAP\sphericalangle = 180°$. Az aláhúzottakból $EAP\sphericalangle = \beta$, ⊗-ból $ETP\sphericalangle = \beta$. $EATP$ húrnégyszögben $EAT\sphericalangle = \alpha + \beta \Rightarrow EPT\sphericalangle = \gamma$. Hasonlóan megmutatható, hogy F és T rajta vannak PB Thalész körén, k_2-n, a $TBFP$ húrnégyszögben $TBF\sphericalangle = \beta + \alpha$, $TPF\sphericalangle = \gamma$ és $TFP\sphericalangle = \beta$, mert a k_2 kör ugyanazon ívén nyugvó kerületi szögek. $ETP\triangle \sim TFP\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők (P csúcsnál γ; T, ill. F csúcsnál β).

$\lambda = \dfrac{EP}{PT} = \dfrac{PT}{PF} \Rightarrow PT^2 = EP \cdot PF \Rightarrow PT = \sqrt{EP \cdot PF}$, és ezt akartuk belátni.

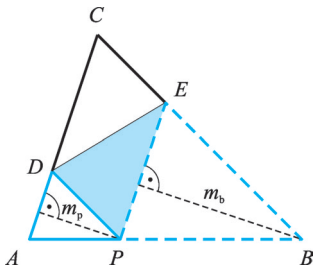


1233.

1234. Legyen T a C-ből induló magasság talppontja. Állítás: $CT = \sqrt{TA \cdot TB}$. $CAB\sphericalangle = \beta + 90° \Rightarrow CAT\sphericalangle = 90° - \beta \Rightarrow$ $\Rightarrow ACT\sphericalangle = \beta \Rightarrow ACT\triangle \sim CBT\triangle$, mert mindkettő derékszögű és egyik hegyesszögük β. $\Rightarrow \lambda = \dfrac{AT}{TC} = \dfrac{TC}{TB} \Rightarrow TC^2 =$ $= AT \cdot TB \Rightarrow TC = \sqrt{TA \cdot TB}$.

1235. Állítás: $T_{BDC} = \sqrt{T_{ABC} T_{DEC}}$. Legyen az $ABC\triangle$ C-ből induló magassága m_c, a $DEC\triangle$ C-ből induló magassága m! $T_{BDC} = T_{DEC} + T_{DEB} = \dfrac{DE \cdot m}{2} + \dfrac{DE \cdot (m_c - m)}{2} = \dfrac{DE \cdot m_c}{2}$. $T_{ABC} = \dfrac{AB \cdot m_c}{2}$ és $T_{DEC} = \dfrac{DE \cdot m}{2} \Rightarrow \otimes\, T_{ABC} \cdot T_{DEC} = \dfrac{AB \cdot DE \cdot m_c \cdot m}{4}$, $ABC\triangle \sim DEC\triangle$, mert egy szögük közös, másik két szögpárjuk egyállású. $\Rightarrow \lambda = \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{m}{m_c} \Rightarrow AB \cdot m = DE \cdot m_c$. Ezt a ⊗ összefüggésbe helyettesítve $T_{ABC} \cdot T_{DEC} = \left(\dfrac{DE \cdot m_c}{2}\right)^2 = (T_{BDC})^2 \Rightarrow T_{BDC} = \sqrt{T_{ABC} \cdot T_{DEC}}$.

1236. Állítás: $T_{DPE} = \sqrt{T_{APD} \cdot T_{PBE}}$. $APD\triangle \sim PBE\triangle$, mert szögeik páronként egyállású szögek. $\lambda = \dfrac{DA}{EP} = \dfrac{m_p}{m_b} \Rightarrow$ $\Rightarrow \otimes\, DA \cdot m_b = EP \cdot m_p$. $T_{DAP} = \dfrac{DA \cdot m_p}{2}$ és $T_{EPB} = \dfrac{EP \cdot m_b}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow T_{DAP} \cdot T_{EPB} = \dfrac{DA \cdot m_p}{2} \cdot \dfrac{EP \cdot m_b}{2}$. A ⊗ összefüggést felhasználva $T_{DAP} \cdot T_{EPB} = \left(\dfrac{EP \cdot m_p}{2}\right)^2 = (T_{EPD})^2 \Rightarrow T_{DPE} = \sqrt{T_{APD} \cdot T_{PBE}}$.



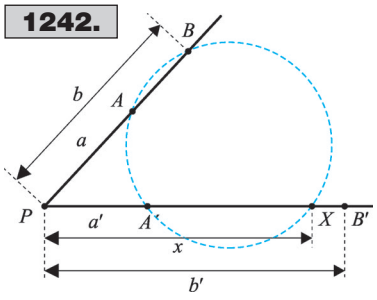
1236.

Szelődarabok szorzata

1237. Legyen az érintési pont E, a szelőnek a körrel való metszéspontjai pedig A (P-hez közelebbi) és B. $EPB\triangle \sim APE\triangle$, mert P-nél lévő szögük közös, és $AEP\sphericalangle = ABE\sphericalangle$, mivel a k kör AE ívén nyugvó kerületi szögek. $\lambda = \dfrac{EP}{AP} = \dfrac{BP}{EP} \Rightarrow EP^2 = AP \cdot BP \Rightarrow EP = \sqrt{AP \cdot BP}$.

I

1242.



1238. Legyenek a szelőkön a P-hez közelebbi metszéspontok A_1, ill. A_2, a távolabbiak B_1, ill. B_2. $PB_2A_1\triangle \sim PB_1A_2\triangle$, mert P-nél lévő szögük közös, $PB_2A_1\sphericalangle$ és $PB_1A_2\sphericalangle$ pedig a k kör ugyanazon ívén nyugvó kerületi szögek, tehát egyenlők. $\lambda = \dfrac{PA_2}{PA_1} = \dfrac{PB_1}{PB_2} \Rightarrow PA_2 \cdot PB_2 = PA_1 \cdot PB_1$.

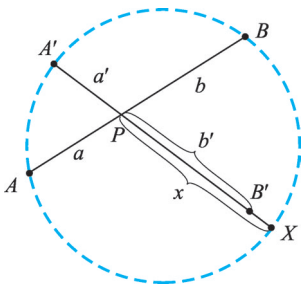
1239. Legyenek az egyik szelő végpontjai A és B, az átmérőre merőleges másik szelőé C és D. $PBC\triangle \sim PDA\triangle$, mert P-nél lévő szögeik csúcsszögek, $CBP\sphericalangle$ és $CDA\sphericalangle$ pedig a k kör ugyanazon ívéhez tartozó kerületi szögek, tehát egyenlők. $\lambda = \dfrac{BP}{PD} = \dfrac{CP}{PA}$, amiből $CP = PD = \dfrac{h}{2}$-t felhasználva: $BP \cdot PA = \dfrac{h^2}{4} \Rightarrow \dfrac{h}{2} = \dfrac{h^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{h}{2} = \sqrt{BP \cdot PA}$.

1240. Legyenek az egyik szelő végpontjai A_1, B_1, a másik szelőé A_2, B_2. $PA_2A_1\triangle \sim PB_1B_2\triangle$, mert P-nél lévő szögeik csúcsszögek, $PB_1B_2\sphericalangle$ és $PA_2A_1\sphericalangle$ pedig a k kör ugyanazon ívéhez tartozó kerületi szögek, tehát egyenlők. $\lambda = \dfrac{PB_1}{PA_2} = \dfrac{PB_2}{PA_1} \Rightarrow PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$.

1241. A DC húrra rajzolt négyzet területe h^2. Az AF és BF oldalú téglalap területe $AF \cdot BF$. Alkalmazzuk a szelődarabok szorzatáról szóló tételt az F ponton átmenő DC és AB szelőkre! $FA \cdot FB = FD \cdot FC$, azaz $FA \cdot FB = \dfrac{h}{2} \cdot \dfrac{h}{2} \Rightarrow 4 \cdot FA \cdot FB = h^2$, ami a bizonyítandó állítás.

1243.



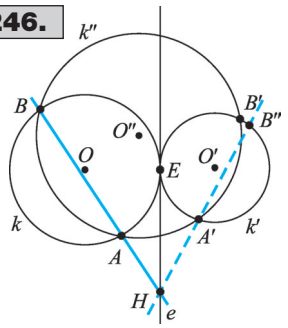
1242. Tekintsük az $ABA'\triangle$ körülírt körének a PA'-vel való X metszéspontját. A szelődarabok szorzatára vonatkozó tételt a P-ből induló szelőkre alkalmazva: $PA \cdot PB = PA' \cdot PX$, azaz $a \cdot b = a' \cdot x$. A feltétel szerint $a \cdot b = a' \cdot b'$, ezért $b' = x$. $\Rightarrow B' \equiv X$, tehát B'; A; B; A' egy körön vannak.

1243. Tekintsük az $ABA'\triangle$ körülírt körének a PA'-vel való X metszéspontját. A szelődarabok szorzatára vonatkozó tételt a P-ből induló szelőkre alkalmazva: $PA \cdot PB = PA' \cdot PX$, azaz $a \cdot b = a' \cdot x$. A feltétel szerint $a \cdot b = a' \cdot b'$, ezért $b' = x$. $\Rightarrow B' \equiv X$, tehát B'; A; B; A' egy körön vannak.

1244. HA, illetve HA' a H ponton át k-hoz húzott két szelő. A szelődarabok szorzatára vonatkozó tétel miatt $HA \cdot HB = HA' \cdot HB'$.

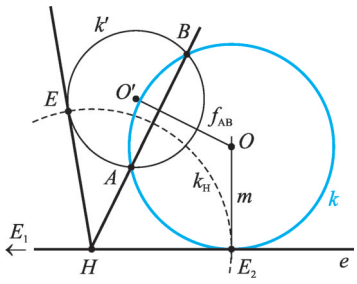
1245. Legyen E a körök érintési pontja, P a közös érintő tetszőleges pontja, A_1 és B_1 a k_1 kör és az egyik szelő, A_2 és B_2 a k_2 kör és a másik szelő közös pontja. P-ből a k_1 körhöz húzott szelőre a szelődarabokra vonatkozó összefüggés: $PA_1 \cdot PB_1 = PE^2$. P-ből a k_2-höz húzott szelőre: $PA_2 \cdot PB_2 = PE^2$. A két egyenlőségből $PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$. A $B_1PB_2\sphericalangle$ szárain lévő PA_1, PB_1, illetve PA_2, PB_2 szakaszokra teljesül az 1242. feladat feltétele. E feladat állítása szerint A_1, A_2, B_1, B_2 egy körön vannak. A bizonyítás során nem használtuk ki, hogy a két kör kívülről érinti egymást.

1246.

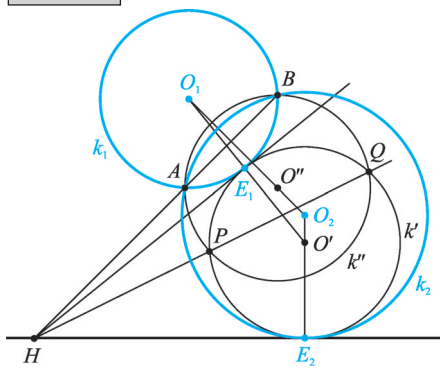


1246. Legyen $AB \cap e = H$! A k körre a szelődarabokra vonatkozó összefüggés: $HA \cdot HB = HE^2$. Húzzunk H-ból A'-n át szelőt k'-höz! Legyen a második metszéspont B''.

1247.



1248.



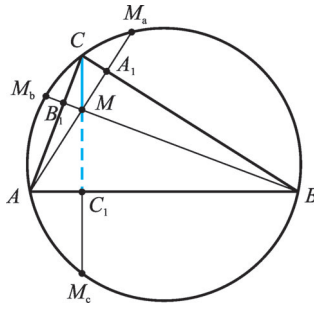
A k' körre vonatkozóan: $HA' \cdot HB'' = HE^2$. A két egyenlőségből: $HA \cdot HB = HA' \cdot HB''$. A $BHB''\sphericalangle$ száraira teljesül az 1242. feladat feltétele, így a feladat állítása szerint A, A', B'' és B egy körön vannak. A, A' és B köre a k'' kör, tehát $B'' \in k''$. A k' és k'' körök közös pontjai A', B'' és B', ami $B'' \equiv B'$-t kell jelentse. $\Rightarrow e(A'; B') \cap e = H$.

1247. **1. eset:** Ha $AB \parallel e$, akkor $f_{AB} \cap e = E_2$ az érintési pont. Egyértelmű a megoldás. **2. eset:** AB nem párhuzamos e-vel. A szerkesztés: ① Vegyünk fel egy A-n, B-n átmenő tetszőleges k' kört! ② $AB \cap e = H$ ③ H-ból érintő k'-höz $\rightarrow E$. ④ H középpontú, HE sugarú k_H kör. ⑤ $k_H \cap e = E_i$. ⑥ $ABE_i\triangle$ körülírt köre: k. Indoklás: k és k' közös húrjára és H-ból húzott érintőire $HE^2 = HA \cdot HB = HE_2^2 \Rightarrow HE = HE_2$. 2 megoldás van.

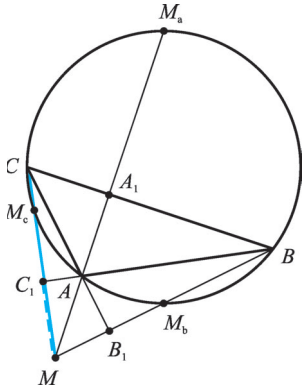
1248. Adott: A; B; k'. **1. eset:** $O' \notin f_{AB}$. A szerkesztés: ① Vegyünk fel egy A-n, B-n átmenő tetszőleges k'' kört, ami metszi k'-t! ② $k' \cap k'' = \{P; Q\}$. ③ $e(P; Q) \cap e(A; B) = H$. ④ H-ból érintőt szerkesztünk k'-höz $\rightarrow E_1; E_2$. ⑤ $ABE_1\triangle$ körülírt köre: k_1. $ABE_2\triangle$ körülírt köre: k_2. Indoklás: A k_1, illetve k_2 kör érinti a k' kört. A k'' kör metszi k_1-et és k'-t, illetve k_2-t és k'-t. Az 1246. feladat feltételei teljesülnek a fenti körökre, így $AB \cap PQ = H$ független a k'' segédkörtől, $HE_1 = HE_2$-t egyértelműen meghatározza. **2. eset:** $O' \in f_{AB}$. Ekkor $PQ \parallel AB \Rightarrow f_{AB} \cap k'$ lesz az érintési pont. 2 megoldás lehet.

1249. Tudjuk, hogy a magasságpont oldalegyenesekre vonatkozó tükörképe a körülírt körön van. Alkalmazzuk a szelődarabok szorzatára vonatkozó tételt az M ponton átmenő szelőkre! $MC \cdot MM_c = MB \cdot MM_b = MA \cdot MM_a \Rightarrow MC \cdot 2MC_1 = MB \cdot 2MB_1 = MA \cdot 2MA_1 \Rightarrow MC \cdot MC_1 = MB \cdot MB_1 = MA \cdot MA_1$.

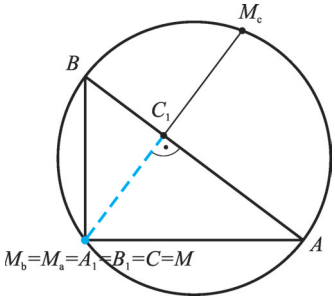
1249/I.



1249/II.

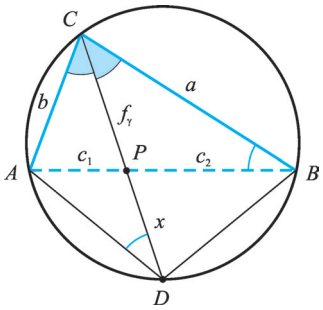


1249/III.



I

1250.



1250. Állítás: $f_\gamma^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2$. Legyen a CP szögfelezőnek a körülírt körrel való metszéspontja D. A P-n átmenő AB és CD szelőkre alkalmazzuk a szelődarabok szorzatára vonatkozó tételt: $f_\gamma \cdot x = c_1 \cdot c_2$. Az $ADC\sphericalangle$ és az $ABC\sphericalangle$ ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek, tehát egyenlők. $ADC\triangle \sim PBC\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\Rightarrow$ A megfelelő oldalak aránya egyenlő, azaz $a : f_\gamma = (f_\gamma + x) : b \Rightarrow ab = f_\gamma \cdot (f_\gamma + x) = f_\gamma{}^2 + c_1 \cdot c_2 \Rightarrow f_\gamma^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2$.

1251. Az 1250. feladatban láttuk, hogy $f_\gamma^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2 \Rightarrow f_\gamma^2 < ab \Rightarrow f_\gamma < \sqrt{ab}$.

Hasonlóságon alapuló szerkesztések

Az **1252–1255.** feladat megoldását az olvasóra bízzuk.

1256. Legyen a szög csúcsa M. A szerkesztés: ① Vegyünk fel az e és f szárakon MA' és MB' szakaszokat úgy, hogy $\frac{MB'}{MA'} = \frac{a}{b}$. ② Húzzunk párhuzamost $A'B'$-vel P-n át $\rightarrow A; B$. ③ $AMB\triangle \sim \sim A'MB'\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\frac{BM}{AM} = \frac{MB'}{MA'} = \frac{a}{b}$. Egyértelmű a megoldás.

1257. Adott: γ; m_c; $\frac{AT}{TB}$ arány, ahol T az m_c magasság talppontja. A szerkesztés: ① $A'T'$ és $T'B'$ szakasz felvétele egy egyenesen úgy, hogy $A'T' : T'B' = AT : TB$ legyen. ② T'-ben merőleges $A'B'$-re : m'. ③ $A'B'$ γ szögű látószögköríve: k_γ. ④ $k_\gamma \cap m' = C' \Rightarrow C'T' = m'_c$. ⑤ Alkalmazzunk $A'B'C'\triangle$-re $\frac{m_c}{m'_c}$ arányú hasonlóságot $\rightarrow ABC\triangle$. Megjegyzés: ha $AT : TB < 0$, akkor A' elválasztja T'-t és B'-t. Két egybevágó megoldás van.

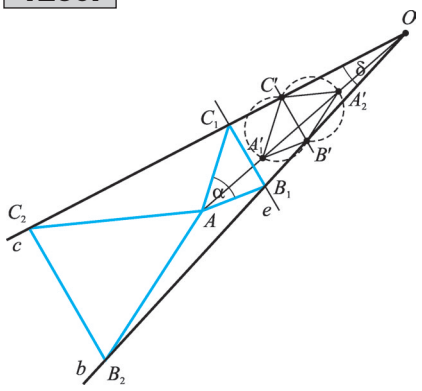
1258. Adott: $a + b - c$; α; β. A szerkesztés: ① Szerkesszünk $A'B'C'\triangle$-et α és β szögekkel! ② Adjuk meg az $(a' + b' - c')$ szakaszt! ③ Alkalmazzunk $A'B'C'\triangle$-re $\frac{a + b - c}{a' + b' - c'}$ arányú hasonlóságot $\rightarrow ABC\triangle$. Egyértelmű a megoldás.

1259. Felhasználjuk: Az O középpontú hasonlóság az e-vel párhuzamos, szögszárakat összekötő $A'C'$-t vele párhuzamos szakaszba viszi, tehát teljesül az első feltétel. A fenti hasonlóság C'-t OC' egyenesére, tehát a δ szög egyik szárára, A'-t a δ szög másik szárára viszi, tehát teljesül a második feltétel. $\lambda = \frac{OB}{OB'}$ miatt B' képe B. A szerkesztés: ① Szerkesszünk $A'B'C'\triangle$-et a δ szög szárai közé úgy, hogy $A'C' \parallel e$, $B' \in OB$ és $C'A' = C'B'$ legyen! ② Alkalmazzunk O középpontú hasonlóságot az $A'B'C'\triangle$-re úgy, hogy B' képe B legyen! $\rightarrow ABC\triangle$. Ha az $A'B'C'$ segédháromszöget úgy vesszük fel, hogy $C'A' \parallel e$ és $C'A' = A'B'$ legyen, akkor újabb két megoldást kaphatunk. 2; 3 vagy 4 megoldás lehet.

1260. Adott: A; α; δ; e. Felhasználjuk: Az O középpontú hasonlóság $B'C'$-t vele párhuzamos szakaszba viszi, tehát teljesül a $BC \parallel e$ feltétel. A fenti hasonlóság C'-t OC' egyenesére, tehát a δ szög egyik szárára, B'-t a másik szárára viszi, tehát teljesül a $C \in c$ és $B \in b$ feltétel. $\lambda = \frac{OA}{OA'}$

miatt A' képe A. A szerkesztés: ① A szerkesztendővel hasonló $A'B'C'\triangle$-et szerkesztünk: *a)* e-vel párhuzamos $C'B'$ szakasz δ szárai között. *b)* $C'D'$ α szögű látószögköríve: k_α. *c)* $k_\alpha \cap AO = A'$. ② $A'B'C'\triangle$-et O középpontú hasonlóságnak vetjük alá úgy, hogy A' képe A legyen $\rightarrow ABC\triangle$. 1 vagy 2 megoldás lehet.

1260.

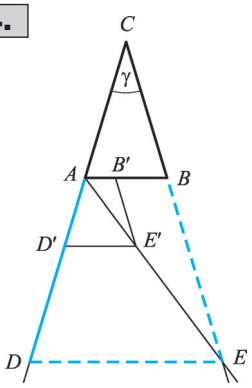


1261. Adott: γ; $|a - c| = d$. Felhasználjuk: Ha $\gamma < 60°$, akkor $a > c \Rightarrow d = a - c$. Ha $\gamma = 60°$, akkor $a = c \Rightarrow d = 0$ kell legyen, csak ekkor szerkeszthető háromszög. Ha $\gamma > 60°$, akkor $c > a \Rightarrow d = c - a$. A szerkesztés: ① γ szárszögű $A'B'C'\triangle$-et szerkesztünk, alapja c', szára a'. ② $d' = |a' - c'|$ szakasz felvétele. ③ Alkalmazzunk $\frac{d}{d'}$ arányú hasonlóságot $A'B'C'\triangle$-re $\rightarrow$ $ABC\triangle$. 0; 1 vagy végtelen sok megoldás lehet.

1262. A szerkesztés: ① $ABC\triangle$-höz hasonló $A'B'C'\triangle$-et szerkesztünk: *a)* C csúcsú $\sphericalangle$ felvétele. *b)* a $\sphericalangle$ egyik szárára tetszőleges CB' szakasz. *c)* a $\sphericalangle$ felező félegyenese. *d)* a szögfelezőre CB'-vel egyenlő szakasz felvétele $\rightarrow P'$. *e)* $B'P'$ egyenesének és a $\sphericalangle$ másik szárának metszéspontja $A' \Rightarrow B'A' = c'$. ② Alkalmazzunk $\frac{c}{c'}$ arányú C középpontú hasonlóságot az $A'B'C'\triangle$-re $\rightarrow$ $\rightarrow ABC\triangle$. Egyértelmű a megoldás.

1263. A szerkesztés: ① $ABC\triangle$-höz hasonló $A'B'C'\triangle$-et szerkesztünk: *a)* C csúcsú γ szög felvétele $\rightarrow e$; *f*. *b)* e félegyenesre tetszőleges CA' szakasz. *c)* γ szögfelezőjére CA'-vel egyenlő szakasz felvétele $\rightarrow P'$. *d)* $A'P' \cap f = B' \Rightarrow A'B' = c'$. ② Alkalmazzunk C középpontú $\frac{c}{c'}$ arányú hasonlóságot $A'B'C'\triangle$-re $\rightarrow ABC\triangle$. $\gamma \geq 120°$ esetén nincs megoldás, $\gamma < 120°$ esetén egyértelmű a megoldás.

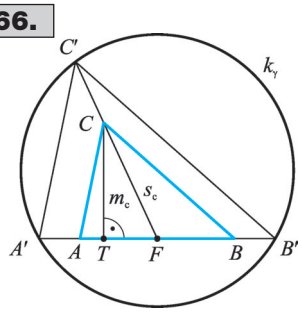
1264.



1264. A szerkesztés: ① Szerkesszünk az A csúcshoz egy, a feltételnek eleget tevő toldással hasonló $AD'E'B'$ trapézt, amelyre $AD' = D'E' = E'B'$. ② Alkalmazzunk olyan A középpontú hasonlóságot, melynek során E' képe a CB egyenesen van $\rightarrow D$; E. Ha $\gamma \geq 60°$, akkor nincs megoldás.

1265. Legyen $AC = BC$ és a BC oldal felezőpontja F. A szerkesztés: ① $ABC\triangle$-höz hasonló $A'B'C'\triangle$-et szerkesztünk: *a)* F csúcsú φ szög felvétele $\rightarrow s$; a. *b)* F-ből tetszőleges egyenlő szakaszok felvétele a-ra $\rightarrow B'$; C'. *c)* C' középpontú, $C'B'$ sugarú kör: k. *d)* $k \cap s = A' \Rightarrow A'F = s'_a$. ② F középpontú $\frac{s_a}{s'_a}$ arányú középpontos hasonlóság $A'B'C'\triangle$-et $ABC\triangle$-be viszi. Egyértelmű a megoldás.

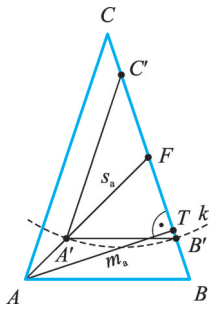
1266.



1266. 1. eset: Ha $s_c > m_c$, akkor a szerkesztés: ① $CTF\triangle$ szerkesztése m_c és s_c felhasználásával. ② A szerkesztendőhöz hasonló $A'B'C'\triangle$ szerkesztése úgy, hogy F az $A'B'$ felezéspontja legyen: *a)* F-ből tetszőleges egyenlő szakaszok felmérése FT egyenesre $\rightarrow A'$; B'. *b)* $A'B'$ γ szögű látószögköríve: k_γ.

I

1267.



c) $k_\gamma \cap e(F; C) = C'$. ③ F középpontú $\frac{m_c}{m_c'}$ arányú hasonlóság $A'B'C'\triangle$-et $ABC\triangle$-be viszi. **2. eset:** Ha $s_c = m_c$, akkor a háromszög egyenlő szárú. 0 vagy 1 megoldás lehet.

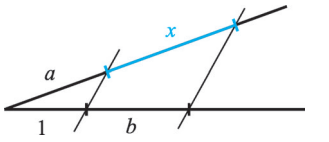
1267. A szerkesztés: ① $ATF\triangle$ szerkesztése m_a, $\sphericalangle$ és s_a felhasználásával. ② A szerkesztendőhöz hasonló $A'B'C'\triangle$ szerkesztése úgy, hogy F legyen a $B'C'$ szár felezéspontja: *a)* F-ből tetszőleges szakaszok felvétele FT egyenesére → B'; C'. *b)* C' középpontú, $C'B'$ sugarú kör: k. *c)* $k \cap AF = A' \Rightarrow A'F = s_a'$. ③ F középpontú $\frac{s_a}{s_a'}$ arányú hasonlóság az $A'B'C'\triangle$-et az $ABC\triangle$-be viszi. Ha $s_a < m_a$, akkor nincs megoldás. Ha $s_a = m_a$, akkor a háromszög szabályos. Ha $s_a > m_a$, akkor a háromszög egyenlő szárú, de nem szabályos.

1268. Az *a)*; *b)*; *c)*; *d)*; *e)* és *f)* feladatrészekben egy tetszőleges szög szárait párhuzamos egyenesek metszik. Alkalmazzuk rájuk a párhuzamos szelők tételét! *a)* $ab = x \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{1}{b}$. *b)* $\frac{1}{a} = x \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{a}{1}$. *c)* $\frac{a}{b} = x \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{b}{a}$, egyik szögszáron b és a, másikon $1 \to x$. *d)* $a^2 = x \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{1}{a}$, egyik szögszáron 1 és a, másikon $a \to x$. *e)* $\frac{ab}{c} = x \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{c}{b}$, egyik szögszáron c és b, másikon $a \to x$. *f)* $\frac{a^2}{b} = x \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{a}$, egyik szögszáron b és a, másikon $a \to x$. *g)* Alkalmazzuk a magasságtételt az $a + 1$ átfogójú derékszögű $\triangle$-re. *h)* Alkalmazzuk a magasságtételt az $a + b$ átfogójú derékszögű $\triangle$-re.

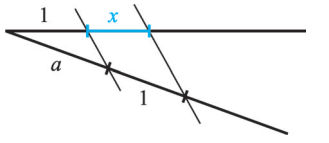
1269. Írjuk fel a háromszög területét háromféleképpen! $T = \frac{a \cdot m_a}{2} \Rightarrow m_a = \frac{2T}{a}$, hasonlóan $T = \frac{b \cdot m_b}{2} \Rightarrow m_b = \frac{2T}{b}$ és $T = \frac{c \cdot m_c}{2} \Rightarrow m_c = \frac{2T}{c}$. $m_a : m_b : m_c = \frac{2T}{a} : \frac{2T}{b} : \frac{2T}{c} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

1270. Felhasználjuk az 1269. feladat állítását: $m_a : m_b : m_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$. A szerkesztés: ① $ABC\triangle$-höz hasonló $A'B'C'\triangle$ szerkesztése: *a)* Tetszőleges $A'B' = c'$ szakasz felvétele. *b)* $\frac{1}{c'} : \frac{1}{a'} = m_c' : m_a' = m_c : m_a \Rightarrow \frac{m_c}{a'} = \frac{m_a}{c'} \to a'$ szakasz. *c)* $\frac{1}{c'} : \frac{1}{b'} = m_c' : m_b' = m_c : m_b \Rightarrow \frac{m_c}{b'} = \frac{m_b}{c'} \to$ $\to b'$ szakasz. *d)* $A'B'C'\triangle$ megszerkesztése a', b', c' szakaszokból → m_a', m_b', m_c'. ② Alkalmazzunk $\frac{m_c}{m_c'}$ arányú hasonlóságot $A'B'C'\triangle$-re → $ABC\triangle$. Nincs megoldás, ha $\frac{1}{m_a}$, $\frac{1}{m_b}$, $\frac{1}{m_c}$ szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

1268/I.



1268/II.



1271. Az 1269. feladatból tudjuk, hogy $m_a : m_b : m_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$. $\Rightarrow a : b : c = \frac{1}{m_a} : \frac{1}{m_b} : \frac{1}{m_c}$.

A szerkesztés: ① Tetszőleges K' szakaszt osszunk fel $\frac{1}{m_a} : \frac{1}{m_b} : \frac{1}{m_c}$ arányban $\rightarrow a', b', c'$ szakasz. ② Szerkesszünk háromszöget a', b', c' oldalakkal $\rightarrow A'B'C'\triangle$. ③ Adjuk meg $A'B'C'\triangle$ beírt körének sugarát: r_0'. ④ Alkalmazzunk $\frac{r_0}{r_0'}$ arányú hasonlóságot az $A'B'C'\triangle$-re $\rightarrow ABC\triangle$.

Nincs megoldás, ha $\frac{1}{m_a}, \frac{1}{m_b}, \frac{1}{m_c}$ szakaszokra nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

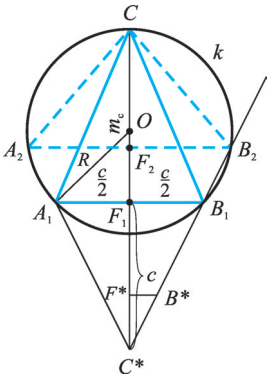
1272. Az 1269. feladatból tudjuk, hogy $m_a : m_b = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} \Rightarrow a : b = \frac{1}{m_a} : \frac{1}{m_b}$. A szerkesztés: ① Osszuk fel az $(a + b)$ szakaszt $\frac{1}{m_a} : \frac{1}{m_b}$ arányban $\rightarrow a, b$ szakasz. ② O középpontú, R sugarú kör: k. ③ k-ban közös C kezdőpontú a és b hosszúságú húrok felvétele $\rightarrow A$ és B. 0; 2 vagy 2-2 egybevágó megoldás lehet.

1273. A szerkesztés: ① O középpontú, R sugarú kör: k. ② Tetszőleges C pontból húzzunk átmérőt és mérjük rá az egyenesére a $(c + m_c)$ szakaszt $\rightarrow C^*$. ③ C^*FB derékszögű háromszögben $C^*F : FB = c : \frac{c}{2} = 2 : 1$, ezért $C^*F^*B^*$ derékszögű háromszög szerkesztése $C^*F^* : F^*B^* = 2 : 1$ arányú befogókkal. ④ C^* középpontú hasonlóságot alkalmazunk a $C^*F^*B^*\triangle$-re úgy, hogy B^* képe a k körön legyen $\rightarrow B_1; B_2$. ⑤ B_1-et, B_2-t tükrözzük CC^*-ra $\rightarrow A_1; A_2$. 2 megoldás van, ha C^* a kör külső vagy belső pontja. 1 megoldás van, ha C^* a kör pontja.

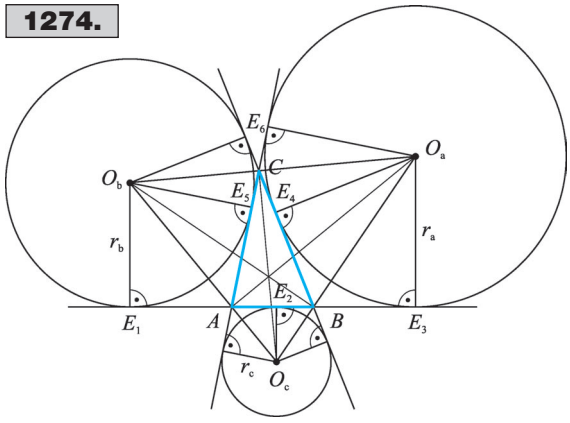
1274. Felhasználjuk: Az $AE_2O_c\triangle \sim AE_1O_b\triangle$, mert mindkettő derékszögű és A-nál lévő szögeik csúcsszögek. $AE_2 = s - b$; $AE_1 = s - c$, ahol $s = (a + b + c) : 2$. Ezt a hasonlóságnál felhasználva $\lambda = \frac{AE_2}{AE_1} = \frac{E_2O_c}{E_1O_b}$, azaz $\frac{s-b}{s-c} = \frac{r_c}{r_b}$. Hasonlóan belátható, hogy $\frac{s-b}{s-a} = \frac{r_a}{r_b}$ és $\frac{s-a}{s-c} = \frac{r_c}{r_a}$.

A szerkesztés: ① Felveszünk egy tetszőleges $(s' - a')$ szakaszt. ② $\frac{r_b}{r_a} = \frac{s'-a'}{s'-b'}$ arányt felhasználva negyedik arányos szerkesztésével $(s' - b')$ megszerkesztése. ③ $s' - a' + s' - b' = c'$ oldal

1273.

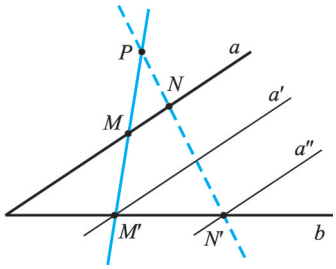


1274.

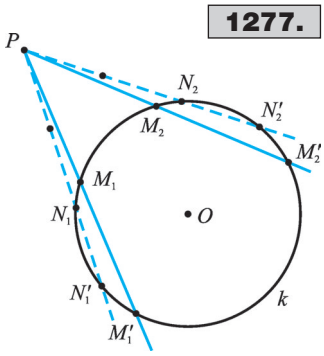


I

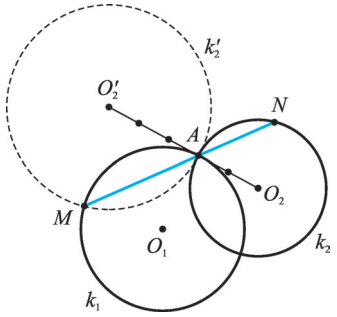
1276.



1277.



1278.



a fenti két szakasz összege. ④ Hasonlóan juthatunk az a' és b' szakaszokhoz is. ⑤ $a'; b'; c' \rightarrow$ $\rightarrow A'B'C'\triangle$. ⑥ $A'B'C'\triangle$ hasonló a szerkesztendőhöz, pl. $\frac{r_c}{r_c'}$ arányú középpontos hasonlósággal $ABC\triangle$-höz jutunk. 0 vagy 1 megoldás lehet.

1275. Legyen az átlók metszéspontja M, az adott szögek $MCB\sphericalangle = \varphi$ és $MBC\sphericalangle = \varepsilon$. A szerkesztés: ① Szerkesszünk egy $M'B'C'\triangle$-et ε; φ szögekkel. ② $ABM\triangle \sim CDM\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda = \frac{a}{c} = \frac{BM}{DM} = \frac{AM}{CM} \Rightarrow DM = \frac{c}{a} \cdot BM$ és $AM = \frac{a}{c} \cdot CM$. ③ Alkalmazzunk B'-re M' középpontú $\left(-\frac{c}{a}\right)$ arányú hasonlóságot $\rightarrow D'$. ④ Alkalmazzunk C'-re M' középpontú $\left(-\frac{a}{c}\right)$ arányú hasonlóságot $\rightarrow A'$. ⑤ $A'B'C'D'$ trapéz hasonló a szerkesztendő trapézhoz, mert részháromszögeik hasonlók. ⑥ Alkalmazzunk $A'B'C'D'$ trapézra $\frac{c}{c'}$ arányú hasonlóságot $\rightarrow ABCD$ trapéz. Egyértelmű a megoldás.

1276. A szerkesztés: *a)* $PM = MM' \Rightarrow 2PM = PM'$. Alkalmazzunk P középpontú $\lambda_1 = 2$ arányú hasonlóságot a-ra $\rightarrow a'$. $a' \cap b = M'$, $M'P$ a keresett egyenes. *b)* $2PN = NN' \Rightarrow PN' = 3PN$. Alkalmazzunk P középpontú $\lambda_2 = 3$ arányú hasonlóságot a-ra $\rightarrow a''$. $a'' \cap b = N'$, $N'P$ a keresett egyenes. Egyértelmű a megoldás.

1277. A szerkesztés: *a)* $PM = MM' \Rightarrow 2PM = PM'$. Alkalmazzunk a k körre P középpontú $\lambda_1 = 2$ arányú hasonlóságot $\rightarrow k'$. $k' \cap k = M'$, $M'P$ egyenes a keresett szelő. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet. *b)* $PN = 2NN' \Rightarrow PN' = \frac{3}{2}PN$. Alkalmazzunk a k körre P középpontú $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ arányú hasonlóságot $\rightarrow k''$. $k'' \cap k = N'$, $N'P$ egyenes a keresett szelő. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

1278. **1. eset:** 3 egységnyi húr a k_1 körben, 2 egységnyi húr a k_2-ben, A elválasztja M-et és N-et. $MA : AN = 3 : 2 \Rightarrow AM = \frac{3}{2}AN$. A szerkesztés: ① Alkalmazzunk A középpontú $\lambda = -\frac{3}{2}$ arányú hasonlóságot a k_2 körre $\rightarrow k_2'$. ② $k_2' \cap k_1 = M$. ③ MA egyenes metszi ki a körökből a keresett húrokat.

2. eset: 2 egységnyi húr a k_1 körben, 3 egységnyi húr a k_2-ben, A elválasztja M-et és N-et. $MA : AN = 2 : 3 \Rightarrow AM = \frac{2}{3}AN \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$.

3. eset: 3 egységnyi húr a k_1 körben, 2 egységnyi húr a k_2-ben, A nem választja el M-et és N-et. $MA:AN=3:2 \Rightarrow AM=\frac{3}{2}AN \Rightarrow \lambda=\frac{3}{2}$.

4. eset: 2 egységnyi húr a k_1 körben, 3 egységnyi húr a k_2-ben, A nem választja el M-et és N-et. $MA:AN=2:3 \Rightarrow AM=\frac{2}{3}AN \Rightarrow \lambda=\frac{2}{3}$. 4 megoldás van.

1279. Adott: k; OA; OB. A szerkesztés: ① Osszuk fel az AB szakaszt három egyenlő részre $\rightarrow H_1; H_2$. ② Alkalmazzunk O középpontú hasonlóságot az AB húrra úgy, hogy H_1 és H_2 képe a körvonalon legyen. ③ $A'A = B'B$-vel kell meghosszabbítani az r_1 és r_2 sugarakat. Megjegyzés: ha AB átmérő, akkor mindkét irányban saját hosszával kell meghosszabbítani, hogy a feltételnek eleget tevő szelőhöz jussunk. Egyértelmű a megoldás.

1280. Adott: k; OA; OB. A szerkesztés: ① Hosszabbítsuk meg az AB húrt saját hosszával mindkét irányban $\rightarrow C$ és D. ② $OC \cap k = C'$ és $OD \cap k = D'$. ③ O középpontú $\frac{OC'}{OC}$ arányú hasonlóság DC-t a vele párhuzamos $D'C'$-be viszi, és a középpontos hasonlóság aránytartása miatt $D'A' = A'B' = B'C'$. Ha AB átmérő, akkor nincs megoldás, egyébként egyértelmű a $C'D'$ húr.

1281. Felhasználjuk: $BOA\sphericalangle = AOP\sphericalangle \Rightarrow OA$ szögfelező a $BOP\triangle$-ben. A szögfelezőtétel miatt $BA:AP = OB:OP$, azaz $BA:AP = r:p \Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{BA+AP}{AP} = \frac{BA}{AP}+1 = \frac{r}{p}+1 = \frac{r+p}{p}$.

A szerkesztés: ① Alkalmazzunk P középpontú $\frac{r+p}{p}$ arányú hasonlóságot a k körre $\rightarrow k'$. ② $k' \cap k = B$. ③ BP a keresett szelő. 2 megoldás van.

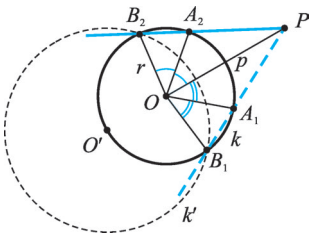
1282. Felhasználjuk: l_i kör E_i középpontú hasonlósággal k_1 körbe vihető. Ekkor L_i képe O_1; P képe A_i és $L_iP \parallel O_1A_i$, valamint O_2; P és L_i egy egyenesen vannak. A szerkesztés: ① O_1-en át párhuzamos O_2P-vel $\rightarrow g$. ② $g \cap k_1 = \{A_1; A_2\}$. ③ $A_iP \cap k_1 = E_i$. ④ $E_iO_1 \cap O_2P = L_i$. ⑤ L_i középpontú, L_iP sugarú kör $\rightarrow l_i$. Két megoldás van.

1283. Adott: A; c; s; C ($A \in c$ és $A \in s$). Felhasználjuk: $CF = FB \Rightarrow CB = 2CF$. A szerkesztés: ① Alkalmazzunk C középpontú $\lambda = 2$ arányú hasonlóságot s-re $\rightarrow s'$. ② $s' \cap c = B$. Egyértelmű a megoldás.

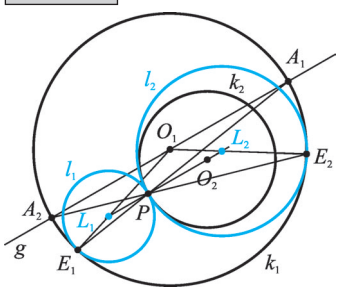
1284. Adott: A; B; s; γ ($A \in s$). Felhasználjuk: $BF = FC \Rightarrow BC = 2BF$. A szerkesztés: ① AB γ szögű látószögkörívе: k. ② B középpontú $\lambda = 2$ arányú hasonlóság s egyenesre $\rightarrow s'$. ③ $s' \cap k = C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

1285. Az $ABC\triangle$ S súlypontja a C pont F középpontú $\lambda = \frac{1}{3}$ arányú kicsinyített képe, ahol F az AB felezőpontja. Az AB fölé rajzolt háromszögek súlypontjai a k kör F középpontú $\lambda = \frac{1}{3}$

1281.

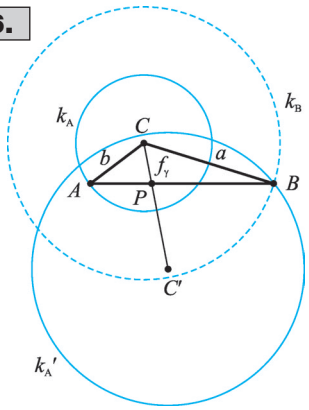


1282.

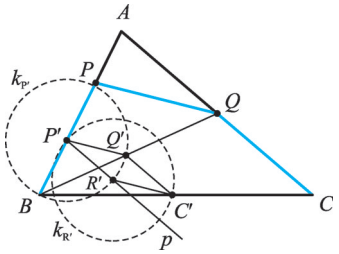


I

1286.



1287.



arányú k' kicsinyített képén vannak rajta. A k' kör A'-től és B'-től különböző minden S pontja megfelel egy k körülírt körű $ABC\triangle$-nek, hiszen F középpontú $\lambda' = 3$ arányú hasonlósággal S pont képe k-ra kerül. A keresett ponthalmaz tehát a k' kör az AB húrra eső A' és B' pontok kivételével.

1286. Felhasználjuk: A szögfelezőtétel szerint $PA : PB = b : a \Rightarrow PB = \frac{a}{b} \cdot PA$. A szerkesztés: ① $CP = f_\gamma$ szakasz felvétele. ② C középpontú, a sugarú kör: k_B. C középpontú, b sugarú kör: k_A. ③ Alkalmazzunk P középpontú $\lambda = -\frac{a}{b}$ arányú hasonlóságot a k_A körre. Ennél a hasonlóságnál A képe B, így $A \in k_A$-ból $B \in k_A'$ következik. ④ $k_A' \cap k_B = B$. ⑤ $BP \cap k_A = A$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

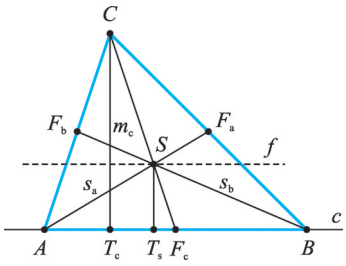
1287. Induljunk ki a kész ábrából! Jelölje $P \in AB$ az első, $Q \in AC$ a második elágazást! A feltétel szerint $BP = PQ = QC$. Induljunk ki a szerkesztendőhöz hasonló $BP'Q'C'$ töröttvonalból! Húzzunk párhuzamost P'-n át $Q'C'$-vel, azaz AC-vel és vegyünk fel rajta $P'R' = Q'C' (= P'Q' = = P'B)$ szakaszt. Ekkor $P'R'C'Q'$ rombuszhoz jutunk. A $BP'R'C'$ töröttvonal megszerkeszthető: ① P'-n át párhuzamost húzunk AC-vel $\rightarrow p$. ② P' középpontú, $P'B$ sugarú kör: $k_{P'}$. ③ $k_{P'} \cap p = = R'$. ④ R' középpontú, $P'B$ sugarú kör: $k_{R'}$. ⑤ $k_{R'} \cap BC = C'$. ⑥ P'-n át párhuzamos $R'C'$-vel, majd ennek $k_{P'}$-vel való metszete Q'. ⑦ B középpontú hasonlóságot alkalmazunk a $BP'Q'C'$ töröttvonalra úgy, hogy Q' képe AC-n legyen. B helyzete miatt P' képe P AB-n lesz, $Q'C' \parallel AC$ miatt C' képe C lesz, és a hasonlóság aránytartása miatt $BP = PQ = QC$. Egyértelmű a megoldás.

1288. *a)* Felhasználjuk: F felezi BC-t, ezért a B középpontú $\lambda = 2$ arányú hasonlóságnál F képe C. A szerkesztés: ① $AB = c$ szakasz felvétele. ② AB γ szögű látószögköríve: k_γ. ③ A középpontú, s_a sugarú kör: k_A. ④ k_A kör B középpontú $\lambda = 2$ arányú hasonló képe: k_A' ⑤ $k_A' \cap k_\gamma = C$. 0 vagy 2 egybevágó megoldás lehet.

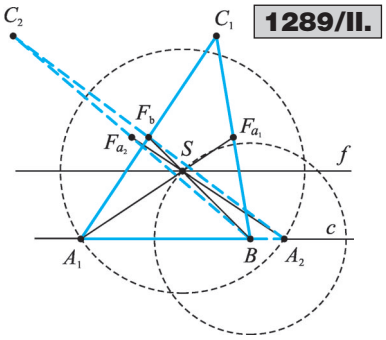
b) Felhasználjuk: F felezi BC-t, ezért a B középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú hasonlóságnál C képe F. A szerkesztés: ① $AB = c$ szakasz felvétele. ② A-ban α szög felvétele AB-re $\rightarrow e$. ③ B középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú hasonlóságnál e képe e'. ④ A középpontú, s_a sugarú kör: k_A. ⑤ $k_A \cap e' = F$. ⑥ B-t tükrözzük F-re: C. Egyértelmű a megoldás, ha $s_a > c/2$. 0; 1 vagy 2 megoldást kaphatunk, ha $s_a < c/2$. Nincs megoldás, ha $s_a = c/2$.

c) Felhasználjuk: B_1 pontból az AB szakasz 90° alatt látszik, tehát B_1 rajta van az AB Thalész körén. F felezi BC-t, ezért a B középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú hasonlóságnál C képe F. A szerkesztés:

1289/I.



1289/II.

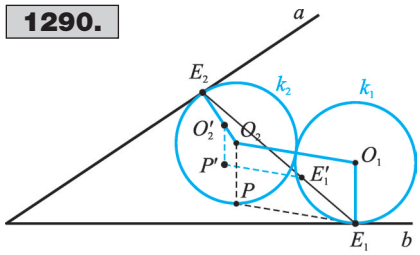


① $AB = c$ szakasz felvétele. ② AB Thalész köre: k_T. ③ B középpontú, m_b sugarú kör: k_B. ④ $k_T \cap k_B = B_1$, AB_1 egyenese f. ⑤ B középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú hasonlóságnál f képe f'. ⑥ A középpontú, s_a sugarú kör: k_A. ⑦ $k_A \cap f' = F$. ⑧ $e(B;F) \cap f = C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

1289. Felhasználjuk: I. S a CF_c szakasz C-től távolabbi harmadolópontja.

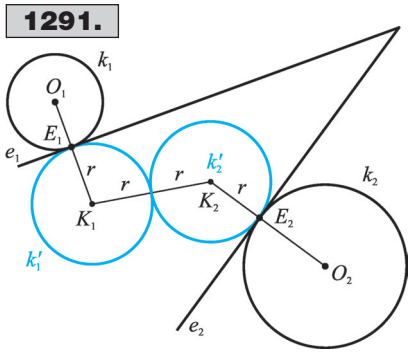
II. $ST_SF_c\triangle \sim CT_cF_c\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. III. $\lambda = \frac{1}{3}$ a hasonlósági arány $\Rightarrow ST_S = \frac{1}{3}m_c$ az $ABS\triangle$ AB-hez tartozó magassága. A szerkesztés: ① $\frac{2}{3}s_a$; $\frac{2}{3}s_b$; $\frac{1}{3}m_c \rightarrow ABS\triangle$. ② AS-re S-ből A-val ellentétes oldalra $\frac{1}{3}s_a \rightarrow F_a$. ③ B-t tükrözzük F_a-ra $\rightarrow C$. Nincs megoldás, ha $\frac{2}{3}s_b \le \frac{1}{3}m_c$ vagy ha $\frac{2}{3}s_a \le \frac{1}{3}m_c$. Egy megoldás van, ha $\frac{2}{3}s_b = \frac{2}{3}s_a > \frac{1}{3}m_c$. Két megoldás van, ha $\frac{2}{3}s_b > \frac{1}{3}m_c$ vagy $\frac{2}{3}s_a > \frac{1}{3}m_c$ és $s_b \neq s_a$.

1290.



1290. Induljunk ki a kész ábrából! Az $E_2O_2O_1E_1$ töröttvonal szakaszai $E_2O_2 = r$, $O_2O_1 = 2r$, $O_1E_1 = r$ hosszúak, arányuk 1 : 2 : 1 Húzzunk párhuzamost O_2-n át O_1E_1-gyel, és vegyünk fel rá r szakaszt $\rightarrow P$. $O_2PE_1O_1$ paralelogramma, tehát $PE_1 = 2r$. Az $E_2O_2PE_1$ töröttvonal szakaszai $E_2O_2 = r$ és $E_2O_2 \perp a$, $O_2P = r$ és $O_2P \parallel O_1E_1 \perp b$, $PE_1 = 2r$. Ehhez a töröttvonalhoz hasonlót szerkeszthetünk az E_2 pontból kiindulva: ① E_2-ben a-ra állított merőlegesen tetszőleges O_2' pont. ② O_2'-ből merőleges b-re, majd erre E_2O_2' hosszú szakasz felvétele $\rightarrow P'$. ③ P' középpontú $2E_2O_2'$ sugarú kör: $k_{P'}$. ④ $k_{P'} \cap E_1E_2 = E_1'$. ⑤ E_2 középpontú hasonlóságot alkalmazunk az $E_2O_2'P'E_1'$ töröttvonalra úgy, hogy E_1' képe E_1 legyen $\rightarrow E_2O_2PE_1$. ⑥ E_1-ben merőleges b-re és O_2-ben párhuzamos PE_1-gyel, ezek metszéspontja O_1. Egyértelmű a megoldás.

1291.



1291. **1. eset:** O_1, E_1, O_2, E_2 nincsenek egy egyenesen. Induljunk ki a kész ábrából! k_1 E_1-ben érinti k_1'-t, ha E_1-ben közös az érintőjük: e_1. Hasonlóan k_2 és k_2'

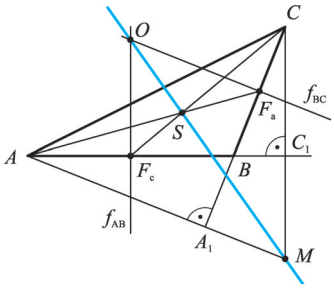
I

köröknek E_2-ben közös az érintője: e_2. Olyan köröket keresünk, amelyek az e_1 egyenest az E_1 pontban, az e_2 egyenest az E_2 pontban érintik, és a sugaruk egyenlő. Ennek a problémának a megoldása az 1290. feladatban megtalálható.
2. eset: O_1, E_1, O_2, E_2 egy egyenesen vannak. E_1E_2 szakasz E_1-hez, illetve E_2-höz közelebbi negyedelőpontjai adják a keresett körök középpontját. Egyértelmű a megoldás.

Euler-egyenes, Feuerbach-kör, Simson-egyenes, Apollonius-kör

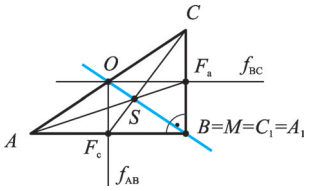
1292. Legyen F_a a BC, F_b az AC és F_c az AB oldal felezéspontja. $ABC\triangle \sim F_aF_bF_c\triangle$, mert oldalaik páronként párhuzamosak, szögeik váltószögek, $\lambda = 2$. CF_c, AF_a, BF_b a háromszög súlyvonalai, melyek az S súlypontban metszik egymást. Az S középpontú $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú hasonlóság C-t F_c-be, B-t F_b-be, A-t F_a-ba viszi, mivel a súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja. Tehát a hasonlóság középpontja a súlypont.

1293/I.



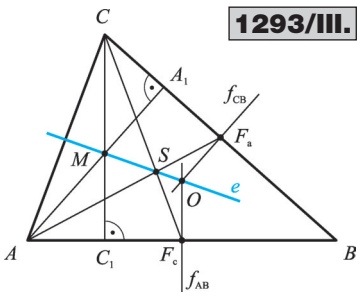
1293. Tekintsük az S középpontú, $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot! Mivel a súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja, a fenti hasonlóságnál: F_c képe C; F_c-n átmenő, AB-re merőleges f_{AB} képe C-n átmenő, vele párhuzamos, tehát AB-re merőleges egyenes: CC_1. F_a képe A; F_a-n átmenő, CB-re merőleges f_{CB} képe A-n átmenő, vele párhuzamos, tehát CB-re merőleges egyenes: AA_1. A fentiekből következik, hogy $f_{AB} \cap f_{CB} = O$; az O képe $e(C; C_1) \cap e(A; A_1) = M$. Ha az S középpontú $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú hasonlóság O-t M-be viszi, akkor $S \in OM$ és $2OS = OM$.

1293/II.

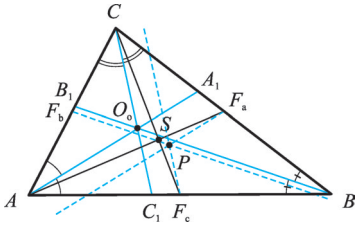


1294. Tekintsük az S középpontú, $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot! Mivel a súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja, a fenti hasonlóságnál C képe F_c; a C-n átmenő CC_1 szögfelező képe az F_c-n átmenő, CC_1-gyel párhuzamos egyenes. Hasonlóan megmutatható, hogy BB_1 képe az F_b-n átmenő, BB_1-gyel párhuzamos egyenes, AA_1 képe az F_a-n átmenő, AA_1-gyel párhuzamos egyenes. Az egy ponton átmenő egyenesek képei is egy ponton mennek át, így az egymást O_0-ban metsző AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek képei is, ami a bizonyítandó állítás volt.

1293/III.

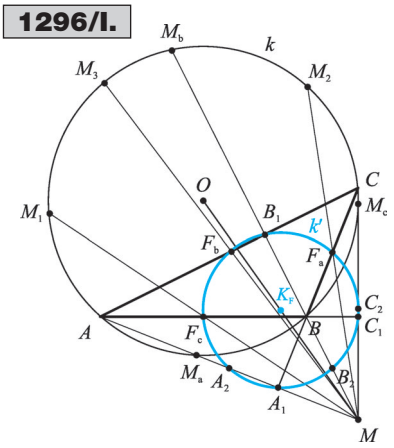


1294.

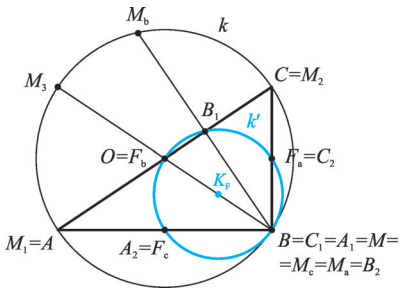


I

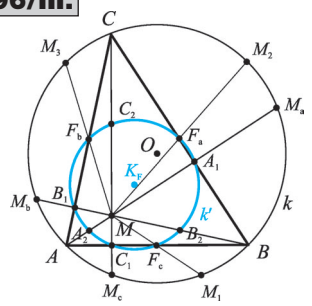
1296/I.



1296/II.



1296/III.



1295. Felhasználjuk: A súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja. A súlypont az MO szakasz O-hoz közelebbi harmadolópontja (M magasságpont, O a körülírt kör középpontja) → lásd az 1293. feladatot az Euler-egyenesről. A szerkesztés: ① Alkalmazzuk az S középpontú, $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot! M képe O; A képe F_a. ② AM egyenes az A-ból induló magasságvonal. ③ F_a-ból merőlegest állítunk AM egyenesre: a oldal egyenese, f. ④ O középpontú, OA sugarú kör a háromszög körülírt köre: k. ⑤ $k \cap f = \{ C; B \}$. 0 vagy 1 megoldás van.

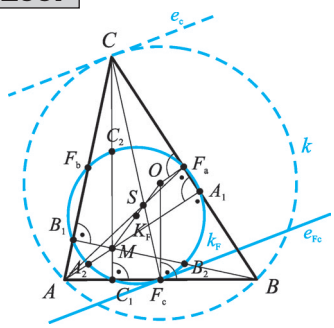
1296. Felhasználjuk: A magasságpont oldalegyenesekre vonatkozó tükörképe a háromszög körülírt körén van. A magasságpont oldalfelezéspontokra vonatkozó tükörképe a háromszög körülírt körén van. Alkalmazzunk M középpontú, $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot! C_1 felezi M_cM-et, tehát M_c képe C_1. A_1 felezi M_aM-et, tehát M_a képe A_1. B_1 felezi M_bM-et, tehát M_b képe B_1. F_b felezi M_3M-et, tehát M_3 képe F_b. F_c felezi M_1M-et, tehát M_1 képe F_c. F_a felezi M_2M-et, tehát M_2 képe F_a. $C_1, A_1, B_1, F_b, F_c, F_a$ rajta vannak a k körülírt kör k' képén, melynek sugara $\frac{1}{2}R$, középpontja pedig az MO szakasz felezéspontja. Ugyanezen a körön vannak a feles kicsinyítés miatt a CM szakasz C_2, az AM szakasz A_2 és BM szakasz B_2 felezéspontjai is. Megjegyzés: a Feuerbach-kör középpontja MO felezéspontja, ezért rajta van a háromszög Euler-egyenesén.

1297. A szóban forgó négy háromszög: $ABM\triangle$, $BCM\triangle$, $CAM\triangle$, $ABC\triangle$. A négy háromszög magasságtalppontjai megegyeznek: A_1; B_1; C_1. Három nem egy egyenesen lévő pont egyértelműen meghatározza a saját körét, így a fenti talppontok is a háromszögek Feuerbach körét (lásd az 1296. feladatot). Tehát az állítás igaz.

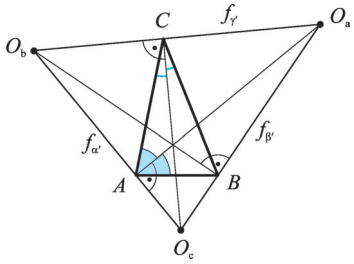
1298. A Feuerbach-kör középpontja rajta van a háromszög Euler egyenesén (MO felezéspontja), és a négy háromszög Feuerbach köre megegyezik. ⇒ A négy háromszög Euler egyenesei egy ponton mennek át, a közös Feuerbach-kör középpontján.

I

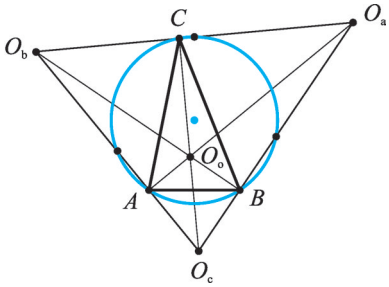
1299.



1300.



1301.



1299. Az 1293. feladatban láttuk, hogy az S súlypont az MO szakasznak $2:1$ arányú osztópontja. $\Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{SO = \frac{1}{3}MO}$. Az 1296. feladatban láttuk, hogy a Feuerbach-kör K_F középpontja felezi az MO szakaszt. $\Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{K_F O = \frac{1}{2}MO}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $K_F S = K_F O - SO = \frac{1}{2}MO - \frac{1}{3}MO = \frac{1}{6}MO$, vagyis S a $K_F O$ szakasz $1:2$ arányú osztópontja. Alkalmazzunk S középpontú, $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot! Ennek során O képe K_F, k képe k_F, C képe F_c, e_c képe e_{F_c}. Ha e_c érinti k-t C-ben, akkor e_{F_c} érinti k_F-et F_c-ben. A középpontos hasonlóságnál a középponton át nem menő egyenes és képe párhuzamosak, tehát $e_c \parallel e_{F_c}$.

1300. Felhasználjuk: A hozzáírt kör középpontja két külső és egy belső szögfelező metszéspontja. A háromszög ugyanazon csúcshoz tartozó külső és belső szögfelezője merőleges egymásra. Az $ABC\triangle$ belső szögfelezői az $O_aO_bO_c$ magasságvonalai; A, B és C a magasságtalppontok. Az 1296. feladat szerint a magasságtalppontok az ún. Feuerbach-körön vannak, ami a háromszög körülírt körének feles kicsinyítése. Az $ABC\triangle$ körülírt köre az $O_aO_bO_c\triangle$ Feuerbach köre, tehát valóban igaz, hogy $O_aO_bO_c\triangle$ körülírt körének sugara kétszerese az $ABC\triangle$ köré írt kör sugarának.

1301. Az 1300. feladatban láttuk, hogy az $O_aO_bO_c\triangle$ Feuerbach köre az $ABC\triangle$ körülírt köre. A, B, C pontok a Feuerbach-kör 9 pontja közül a magasságtalppontok. Rajtuk kívül rajta vannak az $O_aO_bO_c\triangle$ oldalfelezéspontjai is, tehát igaz, hogy az $ABC\triangle$ körülírt köre felezi az $O_aO_bO_c\triangle$ oldalait (átmegy annak felezéspontjain). A beírt kör középpontját bármelyik hozzáírt kör középpontjával összekötő szakasz felezőpontja is a körülírt körön van. Így az $O_aO_bO_c\triangle$ Feuerbach-körének mind a kilenc kitüntetett pontját megkaptuk.

1302. Az 1300. feladatban láttuk, hogy az $O_aO_bO_c\triangle$ Feuerbach köre az $ABC\triangle$ körülírt köre. Az $ABC\triangle$ belső szögfelezői az $O_aO_bO_c\triangle$ magasságvonalai. Az $O_aO_bO_c\triangle$-ben tehát K a körülírt kör középpontja, O a Feuerbach-kör középpontja, O_0 a magasságpontja. Az 1296. feladatban láttuk, hogy a Feuerbach-kör középpontja felezi a magasságpont és a körülírt kör középpontja közti szakaszt, azaz O felezi KO_0-t, tehát K, O_0 és O egy egyenesen vannak. Megjegyzés: ez az egyenes az $O_aO_bO_c\triangle$ Euler egyenese.

1303. Felhasználjuk: Az $O_aO_bO_c\triangle$ magasságvonalai az $ABC\triangle$ belső szögfelezői; A, B és C a magasságtalppontok. O_0 az $O_aO_bO_c\triangle$ magasságpontja. A szerkesztés: ① Az O_a, O_b, O_c, O_0 pontok által meghatározott háromszögek közül bármelyiknek a kimaradó negyedik csúcs a magasságpontja. Eszerint bármely három ismeretében a negyedik megadható. ② $O_aO_bO_c\triangle$ magasságtalppontjai A, B, és C. 0 vagy 1 megoldás lehet.

1304. *a)* Felhasználjuk: Az $ABC\triangle$ körülírt köre az $O_aO_bO_c\triangle$ Feuerbach köre, ezért átmegy az $O_aO_bO_c\triangle$ oldalfelezéspontjain és magasságtalppontjain. Az $ABC\triangle$ belső szögfelezői az $O_aO_bO_c\triangle$ magasságvonalai, A, B és C a magasságtalppontok. A szerkesztés: ① O_aO_c szakasz felezéspontja: F. ② O középpontú, OF sugarú kör: k ($ABC\triangle$ körülírt köre vagy az $O_aO_bO_c\triangle$ Feuerbach köre). ③ $k \cap e(O_a; O_c) = B$ (magasságtalppont $e(O_a; O_c)$-n). ④ O_aO_c Thalész köre: k_T. ⑤ $k_T \cap k = \{A; C\}$ (magasságtalppontok $e(O_b; O_c)$-n, ill. $e(O_b; O_a)$-n). 0 vagy 1 megoldás lehet.

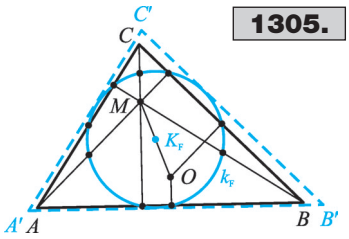
b) Felhasználjuk: Az $ABC\triangle$ körülírt köre az $O_aO_bO_c\triangle$ Feuerbach köre. Az $ABC\triangle$ belső szögfelezői az $O_aO_bO_c\triangle$ magasságvonalai, A, B és C a magasságtalppontok. A magasságpont és egy csúcs közti szakasz felezéspontja rajta van a Feuerbach-körön. A szerkesztés: ① O_0O_c szakasz felezéspontja: F. ② O középpontú, OF sugarú kör: k. ③ O_0O_c Thalész köre: k_T. ④ $k_T \cap k = \{A; B\}$. ⑤ $k \cap e(O_0; O_c) = C$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

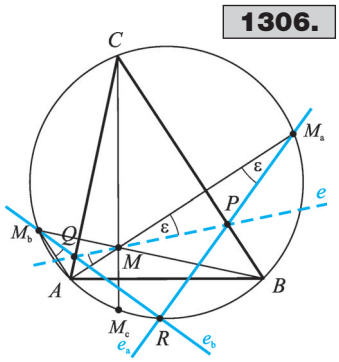
1305. Legyen r_0 az $ABC\triangle$ beírt körének, r_F a Feuerbach körének, R a körülírt körének sugara! Nagyítsuk fel úgy az $ABC\triangle$-et, hogy oldalai érintsék az $ABC\triangle$ Feuerbach körét $\rightarrow A'B'C'\triangle$. Nagyításról lévén szó $r_0 \le r_0'$, $r_F \le r_F'$ és $R \le R'$. Az $ABC\triangle$ Feuerbach köre az $A'B'C'\triangle$ beírt köre,

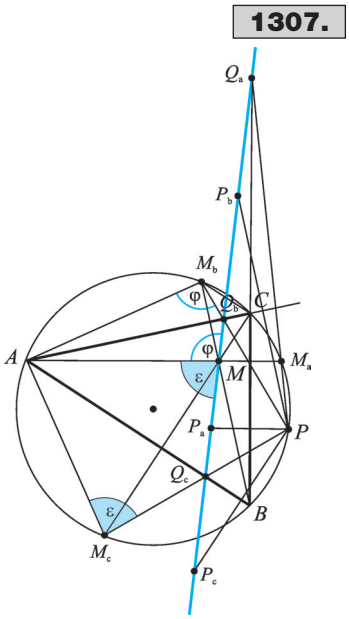
és az 1296. feladatban láttuk, hogy $r_F = \dfrac{R}{2}$, ezért $r_0 \le r_0' = r_F = \dfrac{R}{2}$. $\Rightarrow r_0 \le \dfrac{R}{2}$.

1306. Felhasználjuk: A magasságpont oldalegyenesekre vonatkozó tükörképe a háromszög körülírt körén van. Elég belátni, hogy bármely két tükörkép metszéspontja a körülírt körön van, hiszen a tükörkép egyenesnek a körrel való egyik metszéspontja a magasságpont megfelelő tükörképe, másik metszéspont pedig csak egy van, így nem lehet az egyik tükörképpel a kör egyik, a másik tükörképpel a kör másik pontja. Legyen $e \cap e(C; B) = P$ és $e \cap e(C; A) = Q$, az e tükörképei e_a és e_b. A tükrözés miatt $M_aMP\sphericalangle = MM_aP\sphericalangle = \varepsilon$. $QMA\sphericalangle$ és $M_aMP\sphericalangle$ csúcsszögek, így $QMA\sphericalangle = \varepsilon$. A tükrözés miatt $QMA\sphericalangle = QM_bA\sphericalangle = \varepsilon$. Legyen $e_a \cap e_b = R$: $AM_bR\sphericalangle = AM_aR\sphericalangle = \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy AR az M_a és M_b pontokból egyenlő szögek alatt látszik. $\Rightarrow M_a$ és M_b rajta vannak AR látószögkörívén. Mivel A, M_a és M_b meghatározzák a körüket, az $ABC\triangle$ körülírt körét, így R is ezen a körön van. $\Rightarrow e_a$ és e_b a körülírt körön metszik egymást. Megjegyzés: általában igaz, hogy A, M_a, R és M_b egy körön vannak, mert vagy $AM_bR\sphericalangle = AM_aR\sphericalangle$, vagy $AM_bR\sphericalangle + AM_aR\sphericalangle = 180°$.

1307. M magasságpont tükörképei az oldalegyenesekre M_a; M_b; M_c, amelyek az $ABC\triangle$ körülírt körén találhatók. P tükörképei az oldalegyenesekre P_a; P_b; P_c. PM_b egyenesnek az AC egyenesre vonatkozó tükörképe P_bM, ezért e két egyenes az AC egyenesen metszi egymást. $\Rightarrow$

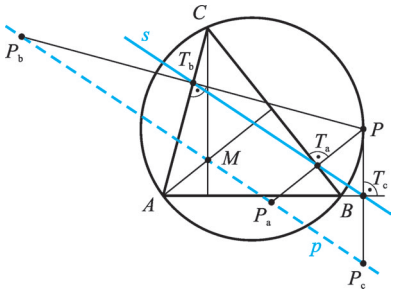




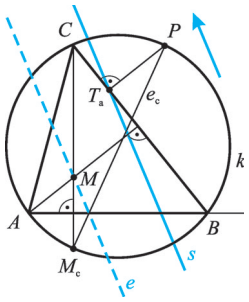


I

1308.



1309.



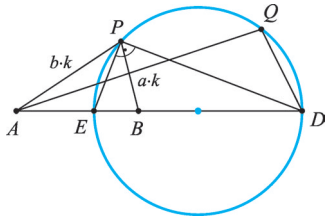
$\Rightarrow PM_b \cap AC = Q_b$ e két egyenesnek a tükörtengelyen levő metszéspontja $\Rightarrow P_b \in e(M; Q_b)$. Hasonlóan megmutatható, hogy $P_c \in e(M; Q_c)$. A tengelyes szimmetria miatt $Q_bM_bA\sphericalangle = Q_bMA\sphericalangle = \varphi$, valamint $Q_cM_cA\sphericalangle = Q_cMA\sphericalangle = \varepsilon$. PM_bAM_c húrnégyszög, ezért $\varphi + \varepsilon = 180° \Rightarrow Q_c; M; Q_b$ egy egyenesen vannak $\Rightarrow P_c; M; P_b$ egy egyenesen vannak. Hasonlóan igazolható, hogy a PM_a és BC egyenesek Q_a metszéspontja és egyúttal a P_a tükörkép is az M ponton átmenő $P_cM\,P_b$ egyenesre illeszkedik.

1308. Az 1307. feladatban láttuk, hogy a P pontnak a, b és c oldalegyenesekre vonatkozó P_a, P_b, P_c tükörképei magasságponton átmenő egyenesen vannak. A tükrözésnél a tükörtengely merőlegesen felezi a pontot a képével összekötő szakaszt, így $PP_a = 2PT_a$; $PP_b = 2PT_b$ és $PP_c = 2PT_c$ miatt a P középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság P_a-t T_a-ba, P_b-t T_b-be és P_c-t T_c-be viszi. Mivel P_a, P_b és P_c egy egyenesen voltak, így a képek is egy egyenesen lesznek, méghozzá az M-en átmenő egyenes P középpontú feles kicsinyített képén.

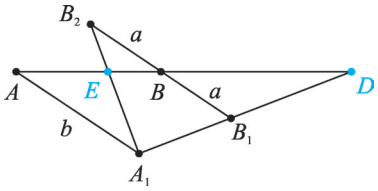
1309. Felhasználjuk: A magasságponton átmenő egyenes oldalegyenesekre vonatkozó tükörképei a körülírt kör egy pontjában metszik egymást. A körülírt kör P pontjából az oldalegyenesekre állított merőlegesek talppontjai egy egyenesen vannak, ami párhuzamos a P-hez tartozó M-en átmenő egyenessel. A szerkesztés: ① M-en át párhuzamos az adott iránnyal: e. ② e-t tükrözzük a c oldalegyenesre: e_c. ③ $e_c \cap k = P$. ④ P-ből merőlegest állítunk CB-re $\rightarrow T_a$. ⑤ T_a-n át párhuzamos e-vel: s. A fentiek miatt s az $ABC\triangle$ adott irányú Simson egyenese.

1310. Tegyük fel, hogy a P pont megfelel a feltételeknek: $PA : PB = \frac{b}{a}$, ami egy 1-től különböző állandó. A belső szögfelezőre vonatkozó tétel miatt $AE : EB = b : a$, a külső szögfelezőre vonatkozó tétel miatt $AD : DB = b : a$. Az egy csúcsból induló belső és külső szögfelező merőleges egymásra, tehát $EPD\sphericalangle = 90° \Rightarrow P$ rajta van az ED szakasz Thalész körén. Az ED átmérőjű kör minden pontja megfelelő. Legyen Q a Thalész-kör egy tetszőleges pontja. Szerkesszük meg az $XY = \frac{a}{b} \cdot AQ$ szakaszt. Ha AB, AQ és XY szakaszokból lehet háromszöget szerkeszteni,

1310/I.



1310/II.



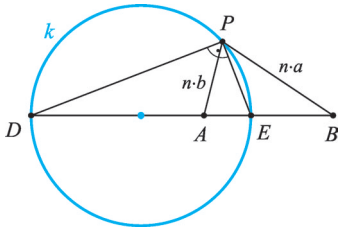
akkor készen vagyunk, mert vagy az $AQB\triangle$-ről, vagy ennek AB-re vonatkozó tengelyes tükörképéről van szó. Meg kell tehát mutatni, hogy $\frac{a}{b}\cdot AQ + AQ > AB$ és $\left|\frac{a}{b}\cdot AQ - AQ\right| < AB$. Az A középpontú, AE sugarú kör E-ben érinti a Thalész-kört, ezért a Thalész-kör minden pontja külső pont az A középpontú, AE sugarú körben. Tehát $AQ > AE$ és $XY > \frac{a}{b}\cdot AE = BE$. Így $AQ + XY > AE + EB = AB$. Az A középpontú, AD sugarú kört a Thalész-kör belülről érinti. Így $AQ < AD$ és $XY < \frac{a}{b}\cdot AD = BD$, ezért $XY - AQ < |BD - AD| = AB$. Az E és D pontok megszerkeszthetők AB és $\frac{a}{b}$ ismeretében: $AA_1 \downdownarrows BB_1$ (párhuzamos szelőszakaszok tétele az $A_1DA\sphericalangle$-re) $\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{AD}{DB} \to D$. $AA_1 \downuparrows BB_2$ (párhuzamos szelőszakaszok tétele az $A_1EA\sphericalangle$-re) $\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{AE}{EB} \to E$.

1311. Legyen a két adott szakasz hossza a és b. **1. eset:** $a \neq b$. Felhasználjuk: A keresett pontok az AB szakasz $\frac{b}{a}$ arányú Apollonius körén vannak, melynek átmérője a DE szakasz (D az AB szakasz $b:a$ arányú külső osztópontja, E az AB szakasz $b:a$ arányú belső osztópontja) (lásd 1310. feladat). ① Szerkesszünk háromszöget AB, $n\cdot a$, $n\cdot b$ szakaszokból, ahol n olyan alkalmas pozitív valós szám, hogy a három szakaszra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség $\to ABP\triangle$. ② $ABP\triangle$ P-hez tartozó belső és külső szögfelezője. ③ A két szögfelező és az AB egyenes metszéspontja: D és E. ④ DE átmérőjű kör: k. Bármely $P \in k$ esetén $PA:PB = b:a$. **2. eset:** Ha $a = b$, akkor az AB szakasz felezőmerőlegese a megoldás.

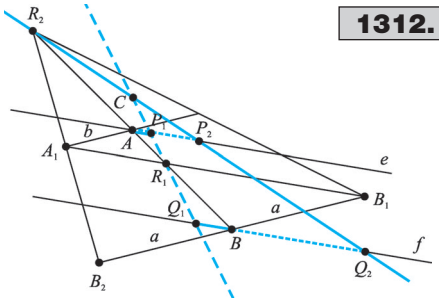
1312. Tegyük fel, hogy az e egyenes elválasztja C-t és B-t! $AP:BQ = b:a$ kell legyen a feltétel szerint. **1. eset:** $e(C;P_1) \cap e(A;B) = R_1$. $AR_1P_1\triangle \sim BR_1Q_1\triangle$, mert szögeik csúcsszögek, illetve váltószögek. $\lambda = \frac{AP_1}{Q_1B} = \frac{AR_1}{R_1B} = \frac{b}{a} \Rightarrow R_1$ az AB szakasz $b:a$ arányú osztópontja és CR_1 a szerkesztendő egyenes.

2. eset: $e(C;P_2) \cap e(A;B) = R_2$. $AR_2P_2\triangle \sim BR_2Q_2\triangle$, mert egy szögük közös, a másik egyállású. $\lambda = \frac{AP_2}{Q_2B} = \frac{AR_2}{R_2B} = \frac{b}{a} \Rightarrow R_2$ az AB szakasz $b:a$ arányú külső osztópontja és CR_2 a szerkesztendő egyenes. A szerkesztés: ① A-n át $AA_1 = b$. ② B-n át párhuzamos AA_1-gyel és ezen ellentétes irányban $BB_1 = a$, $BB_2 = a$. $e(A_1;B_1) \cap e(A;B) = R_1$ és $e(A_1;B_2) \cap e(A;B) = R_2$. ③ $e(C;R_i) \cap e = P_i$ és $e(C;R_i) \cap f = Q_i$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

1311.

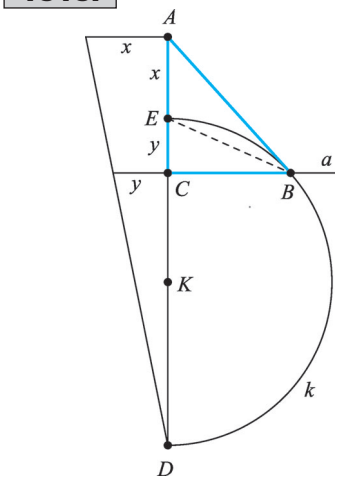


1312.

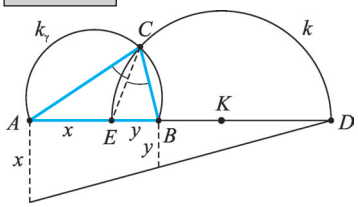


I

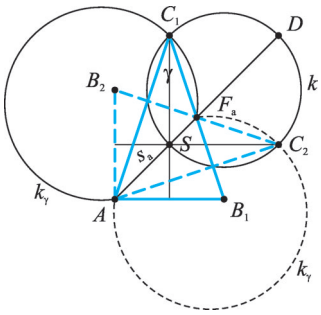
1313.



1314.



1315.



1313. Adottak az x; y szeletek, amelyeket β szögfelezője vág ki az AC befogóból. A szerkesztés: ① $AC = x + y$ hosszú szakasz E osztóponttal, AC szakasz $x : y$ arányú Apollonius köre: k (lásd az ábrán, illetve az 1311. feladatnál). ② C-ben merőleges AC-re: a. ③ $a \cap k = B$. Ha $x \neq y$, akkor két, az AC egyenesre tengelyesen szimmetrikus megoldás van. Ha $x =$ y, akkor nincs megoldás.

1314. A szerkesztés: **1. eset:** $x \neq y$. ① AB γ szögű látószögköríve: k_γ. ② AB szakasz $x : y$ arányú Apollonius köre: k. (lásd az ábrán, illetve az 1311. feladatnál). ③ $k_\gamma \cap k = C$. **2. eset:** $x = y$. ① AB γ szögű látószögköríve: k_γ. ② AB szakasz felezőmerőlegese: f_{AB}. ③ $k_\gamma \cap f_{AB} = C$. Két, az AB egyenesre tengelyesen szimmetrikus megoldás van.

1315. Felhasználjuk: S a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja. CS szögfelező az $AF_aC\triangle$-ben, ezért C rajta van az AF_a szakasz 2 : 1 arányú Apollonius körén. A szerkesztés: ① $AF_a = s_a$ hosszú szakasz felvétele. ② AF_a szakasz 2 : 1 arányú Apollonius köre: k. ③ AF_a szakasz γ szögű látószögköríve: k_γ. ④ $k_\gamma \cap k = C$. ⑤ C-t tükrözzük F_a-ra: B. Két, az AF_a egyenesre tengelyesen szimmetrikus megoldás van.

1316. A szerkesztés: ① $AB = c$ hosszú szakasz. Ha $b \neq a$, akkor AB szakasz $b : a$ arányú Apollonius köre: k (lásd az 1311. feladatnál). Ha $b = a$, akkor AB felezőmerőlegese: f_{AB}. ② Párhuzamos AB-vel m_c távolságra: e. ③ $e \cap k = C$, illetve $f_{AB} \cap e = C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

1317. Adott: BD; AD; γ. A szerkesztés: ① AD és BD szakaszok felvétele úgy, hogy AD tartalmazza BD-t. ② AB szakasz $AD : BD$ arányú Apollonius köre: k. ③ AB szakasz γ szögű látószögköríve: k_γ. ④ $k_\gamma \cap k = C$. Két, az AB egyenesre tengelyesen szimmetrikus megoldás van.

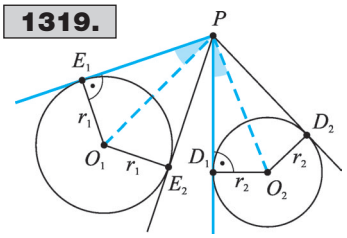
1318. *a)* Adott: f_γ; m_c; $\frac{a}{b}$. A szerkesztés: ① $CC_1 = m_c$ hosszú szakasz felvétele. ② C_1-ben merőleges CC_1-re: e. ③ C középpontú, f_γ sugarú kör: k_C. ④ $k_C \cap e = E$ (a belső szögfelezőnek a szemközti oldallal való metszéspontja). ⑤ C-ben merőleges f_γ-ra, ennek e-vel való metszéspontja D (a külső szögfelezőnek a szemközti oldalegyenessel való metszéspontja). ⑥ Szögfelezőtételek miatt $AE : EB = b : a$ és $AD : DB = b : a$. Legyen $AE = bx$, $EB = ax$, $AD = by$, $BD = ay$. $AD = AB + BD$-t felhasználva $by = bx + ax + ay \Rightarrow y =$

$$= \frac{b+a}{b-a} \cdot x \Rightarrow BD = ax\,\frac{b+a}{b-a} \Rightarrow \frac{EB}{BD} = \frac{b-a}{b+a} = \frac{1-\frac{a}{b}}{1+\frac{a}{b}}.$$

⑦ ED szakasz $\dfrac{1-\frac{a}{b}}{1+\frac{a}{b}}$ arányú felosztása $\rightarrow B$. ⑧ B tükrözése f_γ egyenesére: B^*. ⑨ $CB^* \cap e =$ $= A$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

b) Adott: $f_{\gamma'}; m_c; \frac{a}{b}$. A szerkesztés: ① $CC_1 = m_c$ hosszú szakasz felvétele. ② C_1-ben merőleges CC_1-re: e. ③ C középpontú, $f_{\gamma'}$ sugarú kör: k_C. ④ $k_C \cap e = D$ (a külső szögfelezőnek a szemközti oldalegyenessel való metszéspontja). ⑤ C-ben merőleges CD-re, ennek e-vel való metszéspontja E (a belső szögfelezőnek a szemközti oldallal való metszéspontja). A feladat megoldása a 6. ponttól kezdve megegyezik az *a)* rész megoldásával. 0 vagy 1 megoldás lehet.

1319.



1319. Ha P eleget tesz a feltételnek, akkor $E_1PE_2\sphericalangle = D_1PD_2\sphericalangle \Rightarrow \underline{E_1PO_1\sphericalangle = D_1PO_2\sphericalangle}$. $O_1E_1P\triangle \sim O_2D_1P\triangle$, mert mindkettő derékszögű, és P-nél lévő hegyesszögük az aláhúzott állítás miatt egyenlő. $\lambda = \frac{E_1O_1}{D_1O_2} = \frac{O_1P}{O_2P} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{O_1P}{O_2P}$. ① Ha $r_1 \neq r_2$, akkor a P pont rajta van az O_1O_2 szakasz $r_1 : r_2$ arányú Apollonius körén. Az Apollonius-kör O_1O_2 egyenesére eső átmérőjének két végpontja a k_1 és k_2 kör belső és külső hasonlósági pontja. Ha $k_1 \cap k_2 = \emptyset$, akkor az Apollonius-kör minden pontja megfelelő tulajdonságú. Ha k_1 és k_2 metszik egymást, akkor az Apollonius-körnek csak a k_1-en és k_2-n kívüli pontjaiból húzhatók érintők k_1-hez és k_2-höz. ② Ha $r_1 = r_2$, akkor a P pont rajta van O_1O_2 szakasz felezőmerőlegesén. Ha $k_1 \cap k_2 = \emptyset$, akkor a felezőmerőleges minden pontja megfelelő tulajdonságú. Ha k_1 és k_2 metszik egymást, akkor a felezőmerőlegesnek csak a k_1-en és k_2-n kívüli pontjaiból húzhatók érintők k_1-hez és k_2-höz.

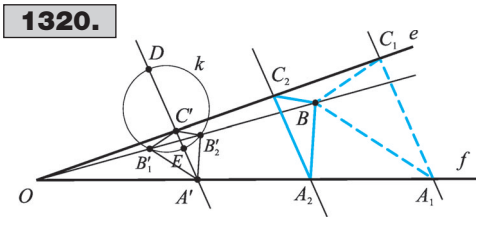
1320. A szerkesztés: ① Vegyünk fel az adott iránnyal párhuzamos egyenest $\rightarrow A'; C'$. ② Ha $c \neq a$, akkor adjuk meg $A'C'$ szakasz $c : a$ arányú Apollonius körét: k. Ha $c = a$, akkor adjuk meg $A'C'$ szakasz felezőmerőlegesét: $f_{A'C'}$. ③ $k \cap OB = B'$, illetve $f_{A'C'} \cap OB = B'$. ④ O középpontú középpontos hasonlóságot alkalmazunk az $A'B'C'\triangle$-re úgy, hogy B' képe B legyen. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet. Indoklás: A szerkesztett háromszög megfelel az elvárásoknak, mert a középpontos hasonlóságnál a középponton át nem menő egyenes képe vele párhuzamos egyenes, tehát $A'C' \parallel AC$. A középpontos hasonlóság aránytartó, tehát $\frac{AB}{CB} = \frac{A'B'}{C'B'} = \frac{c}{a}$. $C' \in e$ és $O \in e \Rightarrow C \in e$, valamint $A' \in f$ és $O \in f \Rightarrow A \in f$.

1321. Adott: AC; BD; α; β. Felhasználjuk: Az átlók metszéspontját a kiegészítő háromszög csúcsával összekötő egyenes az $ABE\triangle$ súlyvonala (lásd az 1197. feladatot). A DB és AC egyenesek által meghatározott csúcsszögek AB és DC párhuzamos szelőire alkalmazva a párhuzamos szelők tételét: $\frac{AC}{BD} = \frac{AM}{BM}$.

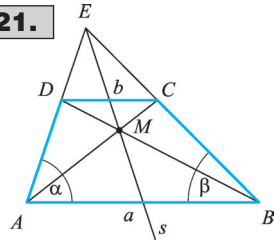
1. eset: $AC \neq BD$. A szerkesztés: ① α; $\beta \rightarrow A'B'E'\triangle$. ② $A'B'$ szakasz $AC : BD$ arányú Apollonius köre: k'. ③ $A'B'E'\triangle$ E'-ből induló súlyvonala: s'. ④ $s' \cap k' = M'$. ⑤ $e(A'; M') \cap e(B'; E') = C'$ és $e(B'; M') \cap e(A'; E') = D'$. ⑥ Alkalmazzunk $\frac{AC}{A'C'}$ arányú hasonlóságot az $A'B'C'D'$ trapézra $\rightarrow ABCD$ trapéz.

2. eset: $AC = BD$. $\alpha \neq \beta$ esetén nincs megoldás, $\alpha = \beta$ esetén végtelen sok megoldás van.

1320.



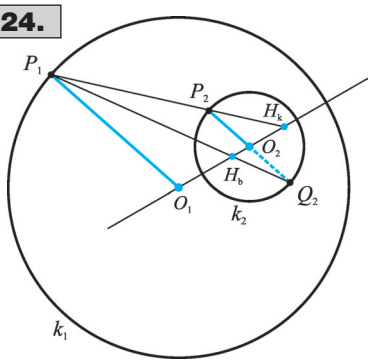
1321.



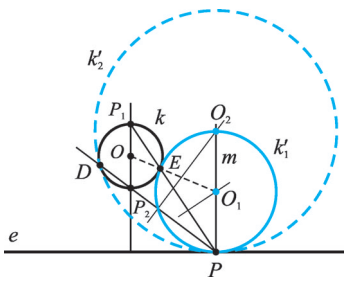
I

1322. *a)* Ha a két kör sugara egyenlő, akkor $O_1O_2 \parallel P_1P_2$, ezért nincs metszéspontjuk. Különböző sugarak esetén $O_1P_1 \parallel O_2P_2$, ezért a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt $O_1P_1 : O_2P_2 = O_1H_k : O_2H_k =$ állandó $\Rightarrow H_k$ helye a centrálison csak a sugarak arányától függ.
b) **1. eset:** A két kör sugara egyenlő. O_1-ben és O_2-ben merőlegest állítunk a körök centrálisára. Ezeknek a körökkel való E_1, F_1, ill. E_2, F_2 metszéspontjai lesznek az érintési pontok. E_1E_2 egyenese az egyik, F_1F_2 egyenese a másik érintő.
2. eset: A két kör sugara különböző. ① Felveszünk mindkét körben egy-egy sugarat, amelyek párhuzamosak és egyirányúak $\rightarrow P_1$, P_2. ② $e(O_1; O_2) \cap e(P_1; P_2) = H_k$ a két kör külső hasonlósági pontja. ③ A H_k-ból k_2-höz húzott érintő a két kör közös érintője, hiszen a k_2-höz húzott érintő képe a k_1-et kell, hogy érintse, ez az egyenes pedig átmegy H_k-n, tehát invariáns, képe önmaga.
1323. *a)* $O_1P_1 \parallel O_2P_2$, ezért a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt $O_1P_1 : O_2P_2 = O_1H_b : O_2H_b =$ állandó $\Rightarrow H_b$ helye a centrálison csak a sugarak arányától függ.
b) ① Felveszünk mindkét körben egy-egy sugarat, amelyek párhuzamosak és ellentétes irányúak $\rightarrow P_1$, P_2. ② $e(O_1; O_2) \cap e(P_1; P_2) = H_b$ a két kör belső hasonlósági pontja. ③ A H_b-ból k_2-höz húzott érintő a két kör közös érintője, hiszen a k_2-höz húzott érintő képe a k_1-et kell, hogy érintse, ez az egyenes pedig átmegy H_b-n, tehát invariáns, képe önmaga. Megjegyzés: két körnek akkor létezik közös belső érintője, ha $r_1 + r_2 \geq O_1O_2$. Egyenlőség esetén egy közös belső érintő van.
1324. A szerkesztés: ① Legyen $P_1O_1 \parallel P_2O_2$ a k_1, illetve k_2 kör egyirányú párhuzamos sugara! $P_1P_2 \cap O_1O_2 = H_k$ külső hasonlósági pont. ② Legyen $P_1O_1 \parallel O_2Q_2$ a k_1, illetve k_2 kör ellentétes irányú párhuzamos sugara! $P_1Q_2 \cap O_1O_2 = H_b$ belső hasonlósági pont. Koncentrikus körök belső, illetve külső hasonlósági pontja azonos a két kör közös középpontjával.
1325. *a)* A két kör kívülről érinti egymást: A külső hasonlósági pont a körökön kívül a kisebb kör oldalán a centrálison van úgy, hogy O_2 az O_1H_k szakasz $r_1 : r_2$ arányú osztópontja (egyenlő sugarú körök esetében nem létezik). A belső hasonlósági pont a két kör érintési pontja.
b) A két kör egyike belülről érinti a másikat: A külső hasonlósági pont a két kör érintési pontja. A belső hasonlósági pont az O_1O_2 szakasz $r_1 : r_2$ arányú osztópontja. A hasonlósági pontok szerkesztéséről l. az 1324. feladatot.
1326. A szerkesztés: ① $P_1O_1 \parallel P_2O_2$ *a* k_1, illetve k_2 kör egyirányú párhuzamos sugara; $e(P_1; P_2) \cap e(O_1; O_2) = H_k$ külső hasonlósági pont, mivel $P_2O_2H_k\triangle \sim P_1O_1H_k\triangle$ és $r_1 : r_2 = H_kO_1 : H_kO_2$. Egyenlő sugarú köröknek nincs külső hasonlósági pontja. ② $P_1O_1 \parallel Q_2O_2$ a k_1, illetve k_2 kör ellentétes irányú párhuzamos sugara; $e(P_1; Q_2) \cap e(O_1; O_2) = H_b$ belső hasonlósági pont, mivel $Q_2O_2H_b\triangle \sim P_1O_1H_b\triangle$ és $r_1 : r_2 = H_bO_1 : H_bO_2$.
1327. A szerkesztés: ① Keressük meg a k kör és a szerkesztendő kör hasonlósági pontját! {Az érintési pont a belső hasonlósági pontja az egymást kívülről érintő köröknek, külső hasonlósági pontja a két körnek, ha az egyik belülről érinti a másikat.}. ② A P-ben e-re állított m me-

1324.



1327.



rőleges lesz a k' kör sugarának egyenese, az O-ból e-re állított merőleges pedig a k kör sugarának egyenese → P_1; $P_2 \in k$. ③ $e(P_1; P) \cap k = E$ az egymást kívülről érintő körök belső hasonlósági pontja, tehát az érintési pont. EP felezőmerőlegesének és m-nek a metszéspontja O_1. ④ O_1 középpontú, O_1P sugarú kör: k_1'. ⑤ $e(P_2; P) \cap k = D$ a belülről érintő körök külső hasonlósági pontja, tehát az érintési pont. DP felezőmerőlegesének és m-nek a metszéspontja O_2. ⑥ O_2 középpontú, O_2P sugarú kör: k_2'. 2 megoldás van.

1328. **1. eset:** OE nem merőleges f-re. A szerkesztés: ① A k kört E-ben érintő k' körnek és k-nak E-ben közös az érintő egyenese, az OE-re E-ben állított merőleges: e. ② $e \cap f = P$. ③ A P csúcsú, e és f szárú szög szárait érintő körök középpontjai a szögfelezőkön vannak: g_1; g_2. ④ $g_1 \cap e(O; E) = O_1'$ és $g_2 \cap e(O; E) = O_2'$. ⑤ O_1' középpontú, $O_1'E$ sugarú kör: k_1' és O_2' középpontú, $O_2'E$ sugarú kör: k_2'. 2 megoldás van.

2. eset: Ha $OE \perp f$, akkor $e \parallel f$, tehát nem használhatjuk a vázolt gondolatmenetet. Ekkor kaphatunk 0 megoldást, 1 megoldást vagy végtelen sok megoldást.

1329. ① A szerkesztendő k' kör belülről érinti a k kört. Az 1325. feladatban láttuk, hogy a közös érintési pont a két kör külső hasonlósági pontja. ② A k' kör egyik sugáregyenese az e-re E pontban állított m merőleges. A k kör vele párhuzamos és egyirányú sugara OP. ③ $e(E; P) \cap k = D$ a külső hasonlósági pont, vagyis az érintési pont. ④ $e(O; D) \cap m = O'$; O' középpontú $O'D$ sugarú kör ⇒ k'. 2 megoldás van.

Pitagorasz tételének alkalmazása

1330. $x \approx 31{,}63$ m. (Még egy tízszintes toronyház is elférne.)

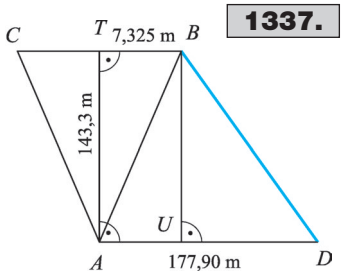
1331. $h \approx 6$, 11 m hosszú a rúd. **1332.** $BD \approx 4{,}97$ m. **1333.** Körülbelül 20,04 m hosszú.

1334. $l \approx 2{,}25$ m az átlóvas hossza. **1335.** $x \approx 10{,}77$ m a csúszda hossza.

1336. P-ből a szárakra állított merőlegesek talppontjai T, U, a derékszög csúcsa C. $d(P; T) = a$, $d(P; U) = b$ ⇒ $CTPU$ négyszög téglalap ⇒ $CT = b$. Pitagorasz-tétel szerint CTP derékszögű háromszögben $a^2 + b^2 = d^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2} = d(P; C)$.

1337. T felezi CB szakaszt ⇒ $ADBT$ négyszög derékszögű trapéz. BU merőleges AD-re ⇒ BUD háromszög derékszögű, befogói 143,3 m és 170,575 m. Pitagorasz-tétel BUD derékszögű háromszögben: $BD^2 = 143{,}3^2 + 170{,}575^2 \Rightarrow BD \approx$ $\approx 222{,}78$ m hosszú a feszítő kötél.

1337.



1338. AMC derékszögű háromszögben $AM^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow AM = 12$ m. $BM = AM - AB = 7{,}8$ m. BMC derékszögű háromszögben $7{,}8^2 + 5^2 = x^2 \Rightarrow x \approx 9{,}26$ m a rúd hossza.

1339. $m = 15$ cm a magasság.

1340. Az egyenlő szárú háromszöget az alaphoz tartozó magassága két egybevágó derékszögű háromszögre bontja, melynek befogói $24x$ és 35 cm, átfogója $25x$ hosszú. $(24x)^2 + 35^2 = (25x)^2 \Rightarrow x = 5$ cm ⇒ $48x =$ $= 240$ cm az alap, $25x = 125$ cm a szár.

1341. Szabályos háromszög oldalfelező merőlegese és magassága megegyezik. Beírt és köré írt körének középpontja a súlypont, ami a magasság csúcstól távolabbi harmadolópontja. AFC derékszögű háromszögben $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + CF^2 = a^2 \Rightarrow CF = \frac{a\sqrt{3}}{2} = m$ a magasság, $CS = \frac{2}{3}m =$ $= \frac{a\sqrt{3}}{3} = R$ a körülírt kör sugara, $SF = \frac{1}{3}m = \frac{a\sqrt{3}}{6} = r$ a beírt kör sugara.

I

1342. Szabályos háromszög köré írt körének sugara $\frac{2}{3}$-a a magasságának $\Rightarrow R=\frac{2}{3}m=$ $=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{\sqrt{3}}R=\sqrt{3}R.$

1343. Pitagorasz-tétel a magasság által lemetszett egyik derékszögű háromszögre: $h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=$ $=a^2\Rightarrow a=\frac{2}{\sqrt{3}}h=\frac{2\sqrt{3}h}{3}.$

1344. BCE szabályos háromszög magassága $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. BC felezőpontja $F\Rightarrow AFE$ háromszög derékszögű és befogóinak hossza $\frac{3}{2}a$, illetve $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. $AE^2=\left(\frac{3}{2}a\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\Rightarrow AE=$ $=\sqrt{3}a=ED$. A két gerenda hossza $\sqrt{3}\cdot 3{,}6\,\text{m}\approx 6{,}24\,\text{m}$.

1345. A hálózat egyeneseinek távolsága 14 mm, illetve 24,25 mm.

1346. A háromszög egy szabályos háromszög „fele”: $a^2+b^2=(2a)^2\Rightarrow b=a\sqrt{3}$.

1347. A háromszög egy szabályos háromszög „fele”: $a^2+b^2=(2a)^2\Rightarrow a=\frac{b}{\sqrt{3}}=\frac{b\sqrt{3}}{3}.$

1348. Szabályos háromszögben $m=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. A feladat szerint $m=a-d\Rightarrow a-d=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow a=\frac{2d}{2-\sqrt{3}}=\left(4+2\sqrt{3}\right)d.$

1349. A befogó $\approx 3{,}46$ m, az átfogó $\approx 6{,}93$ m.

1350. Az α szárszögű $ABC\triangle$ és $A'B'C\triangle$ szabályos háromszög $\Rightarrow ABC\triangle\sim A'B'C\triangle$; $m_{ABC}=\frac{D\sqrt{3}}{2}$; $m_{A'B'C'}=\frac{d\sqrt{3}}{2}$; $ABB'A'$ trapéz magassága $h\Rightarrow m_{A'B'C}+h=m_{ABC}$.

a) $d=16{,}5$ cm, $h=7{,}5$ cm, $\frac{d\sqrt{3}}{2}+h=\frac{D\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{16{,}5\sqrt{3}}{2}+7{,}5=\frac{D\sqrt{3}}{2}\Rightarrow D=16{,}5+\frac{15}{\sqrt{3}}\approx$ $\approx 25{,}16\,\text{cm}$. *b)* $D=30$ cm, $h=9{,}5$ cm, $\frac{d\sqrt{3}}{2}+h=\frac{D\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{d\sqrt{3}}{2}+9{,}5=\frac{30\sqrt{3}}{2}\Rightarrow d=30-$ $-\frac{19}{\sqrt{3}}\approx 19{,}03\,\text{cm}$. *c)* $D=35$ cm, $d=22$ cm, $\frac{d\sqrt{3}}{2}+h=\frac{D\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{22\sqrt{3}}{2}+h=\frac{35\sqrt{3}}{2}\Rightarrow h=$ $=\frac{13\sqrt{3}}{2}\approx 11{,}26\,\text{cm}$.

1351. A szárak hossza $\approx 2{,}83$ cm.

1352. $AC=29$ cm.

1353. **1. eset:** $AB=25$ cm. **2. eset:** $AB=11$ cm.

1354. *a)* $d = a\sqrt{2}$. *b)* $a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$.

1355. a oldalú négyzet átlója $a\sqrt{2}$. Ha $a\sqrt{2} = a + 2$, akkor $a = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} \approx 4,83\,\text{cm}$.

1356. A négyzet átlója a köré írt kör átmérője. Az a oldalú négyzet átlója $a\sqrt{2} \Rightarrow a = r\sqrt{2}$.

1357. $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

1358. Thalész-tétel szerint a téglalap átlója egyenlő a köré írt kör átmérőjével. Pitagorasz-tételt alkalmazva: $d^2 \geq 35^2 + 20^2 \Rightarrow d \geq 40{,}31$ cm.

1359. Thalész- és Pitagorasz-tételt alkalmazva $d^2 \geq 32^2 + 32^2 \Rightarrow d \geq 45{,}25$ mm.

1360. $d^2 \geq 10^2 + 10^2 \Rightarrow d \geq 14{,}14$ cm. Nem lehet belőle 10 cm alapélű gerendát készíteni.

1361. $68^2 = (8x)^2 + (15x)^2 \Rightarrow x = 4$ cm. Az oldalak 32 cm, 60 cm hosszúak.

1362. Thalész-tétel szerint a derékszögű háromszög átfogója egyenlő a háromszög köré írt körének átmérőjével. Pitagorasz-tételt alkalmazva $(2r)^2 = 8^2 + 18^2 \Rightarrow \sqrt{97}$. A köré írt kör sugara kerekítve 9,85 cm.

1363. A derékszögű háromszög átfogójához tartozó súlyvonala egyenlő a háromszög köré írt kör sugarával. Alkalmazva Pitagorasz-tételt $(2r)^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow r = 10$ cm. A súlyvonal hossza 10 cm.

1364. $a = 37$ cm.

1365. $k = 1$ m $\Rightarrow a = 25$ cm a rombusz oldala. Az átlók a rombuszt négy egybevágó derékszögű háromszögre bontják. Ha az átlók aránya 3 : 4, akkor a félátlók aránya is ennyi. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt: $25^2 = (3x)^2 + (4x)^2 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow$ 15 cm és 20 cm a befogók hossza $\Rightarrow$ az átlók hossza 30 cm és 40 cm.

1366. A rombusz területe kétféleképpen: $t = \frac{e \cdot f}{2} = a \cdot m_a$. A félátlók által meghatározott derékszögű háromszögben $a^2 = 7^2 + 24^2 \Rightarrow a = 25$ cm $\Rightarrow m_a = \frac{e \cdot f}{2a} = \frac{14 \cdot 48}{2 \cdot 25} = \frac{336}{25} \approx 13{,}44$ cm.

1367. A másik átló $2 \cdot 13{,}75 = 27{,}5$ cm hosszú.

1368. $m = 2$ cm a trapéz magassága.

1369. ATD derékszögű háromszögben $AT^2 + 40^2 = 41^2 \Rightarrow AT = 9$ cm. $k = \frac{AB + CD}{2} = 45$ és $AT = \frac{AB - CD}{2} = 9 \Rightarrow AB = 54$ cm és $CD = 36$ cm az alapok hossza.

1370. Legyenek az érintési pontok E, F, G és H. A trapéz magassága a kör átmérője, azaz 6 cm. Külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $AE = AH = 5$ cm $= BE = BF$ és $DH = DG = CG = CF = x$. ATD derékszögű háromszögben $AT = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x$, $DT = 6$ cm és $AD = 5 + x$. Pitagorasz-tétel szerint: $(5 - x)^2 + 6^2 = (5 + x)^2 \Rightarrow x = 1{,}8$ cm. A trapéz szárai 6,8 cm, alapja 3,6 cm és 10 cm hosszúak.

1371. $AB = 36$ cm, $CD = 10$ cm, $DT = 2r$, $AT = \frac{36 - 10}{2} = 13$ cm, $AD = \frac{AB + CD}{2} = \frac{36 + 10}{2} = 23$ cm. ATD derékszögű háromszögben: $13^2 + (2r)^2 = 23^2 \Rightarrow r = 3\sqrt{10}$ cm. A beírt kör sugara közelítőleg 9,49 cm.

I

1372. Legyen O_0 a beírt kör középpontja, E_1, E_2, E_3 és E_4 a négy érintési pont. $O_0AD\triangle$ derékszögű, mivel a trapéz egy száron levő szögeinek összege $\alpha+\delta=180°$. $O_0E_4\perp AD$. Az érintőszakaszok egyenlősége miatt $DE_4=\frac{c}{2}$; $AE_4=\frac{a}{2}$. Alkalmazzuk a magasságtételt az O_0AD-re: $r^2=\frac{c}{2}\cdot\frac{a}{2}\Rightarrow 4r^2=c\cdot a\Rightarrow A$ beírt kör átmérője az alapok mértani közepe.

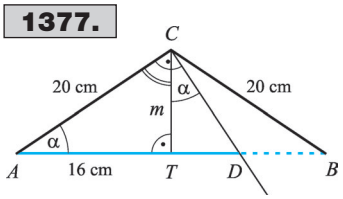
1373. Az átlók hossza 7 m.

1374. Legyen U pont a C-ből AB-re bocsátott merőleges talppontja. $DU=AC<BD$. $BU=b-a$. BUC derékszögű háromszögben: $CU^2+(b-a)^2=a^2\Rightarrow CU^2=b(2a-b)=DA^2$. ABD derékszögű háromszögben: $DB^2=DA^2+AB^2\Rightarrow DB^2=b(2a-b)+b^2=2ab$. $DB=\sqrt{2ab}$ a hosszabb átló hossza.

1375. $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$, $BD=e$, $AC=f$. ABD derékszögű háromszögben $a^2+d^2=e^2$ és ACD derékszögű háromszögben $d^2+c^2=f^2$, így $e^2-f^2=a^2-c^2$.

1376. $AT:BT=3:10$. ATP derékszögű háromszögben $(3x)^2+m^2=41^2$ és BTP derékszögű háromszögben $(10x)^2+m^2=50^2\Rightarrow m=\underline{\underline{40\text{ cm}}}$.

1377.



1377. ATC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel szerint: $m^2+16^2=20^2\Rightarrow m=12$ cm. $TCD\sphericalangle=TAC\sphericalangle=\alpha$, mert merőleges szárú hegyesszögek; $ATC\triangle\sim CTD\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow$ megfelelő oldalaik aránya is egyenlő: $\frac{TD}{m}=\frac{m}{AT}\Rightarrow\frac{TD}{12}=\frac{12}{16}\Rightarrow$ $TD=9$ cm $\Rightarrow$ $\underline{\underline{AD}}=$ $=AT+TD=\underline{\underline{25\text{ cm}}}$, $\underline{\underline{BD}}=AB-AD=\underline{\underline{7\text{ cm}}}$.

1378. $AD=98$ cm; $BD=527$ cm. D az AB szakasz belső pontja, mert $AC<BC\Rightarrow AB=$ $=AD+BD=625$ cm. $AC=DC$, ezért a CT magasság az AD felezőmerőlegese $\Rightarrow AT=\frac{AD}{2}=$ $=49$ cm és $BT=AB-AT=576$ cm. A magasságtétel szerint ACB derékszögű háromszögben: $CT^2=AT\cdot BT=49\cdot 576=28\,224$. A Pitagorasz-tétel szerint ATC és CTB derékszögű háromszögekben: $CA^2=AT^2+CT^2=49^2+28\,224=30\,625\Rightarrow CA=\sqrt{30\,525}=175$. $CB^2=BT^2+CT^2=$ $=576^2+28\,224=360\,000\Rightarrow CB=600$. A befogók hossza $\underline{\underline{175\text{ cm és }600\text{ cm}}}$.

1379. A szögfelezőtétel szerint $CB:CA=2\frac{6}{7}:2\frac{1}{7}=\frac{20}{7}:\frac{15}{7}=4:3$. A Pitagorasz-tétel miatt az ABC derékszögű háromszögben $(4x)^2+(3x)^2=5^2\Rightarrow x=1$. A befogók hossza $\underline{\underline{CB=4\text{ cm}}}$, $\underline{\underline{CA=3\text{ cm}}}$.

1380. Legyen $D\in AC$ a szögfelezőnek az AC befogóval való metszéspontja. A szögfelezőtétel szerint $CD:DA=a:a\sqrt{2}$, valamint $CD+DA=a\Rightarrow\underline{\underline{DA}}=\frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}=\underline{\underline{a\left(2-\sqrt{2}\right)}}$ és $\underline{\underline{CD=a\left(\sqrt{2}-1\right)}}$.

1381. A szögfelezőtétel szerint $AB:AC=m:n$. A Pitagorasz-tétel szerint $(m+n)^2+(nx)^2=(mx)^2 \Rightarrow x^2=\frac{(m+n)^2}{m^2-n^2}=\frac{m+n}{m-n}$. Az átfogó hossza $AB=m\cdot\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$, a keresett befogó hossza $AC=n\cdot\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$.

1382. Pitagorasz-tétel az ABC derékszögű háromszögben: $AB^2=15^2+20^2 \Rightarrow AB=25$ cm. Az ABC háromszög területe kétféleképpen felírva: $T_{\triangle}=\frac{20\cdot 15}{2}=\frac{25\cdot CT}{2} \Rightarrow CT=12$ cm. Magasságtétel az ABC derékszögű háromszögben: $12^2=AT(25-AT) \Rightarrow AT^2-25AT+144=0$. A másodfokú egyenlet megoldásai $(AT)_1=16$ cm és $(AT)_2=9$ cm. $AT>BT \Rightarrow$ az átfogó szeleteinek hossza: $AT=16$ cm, $BT=9$ cm.

1383. A szögfelezőtétel szerint: $AD:DB=AC:CB=7:9$. A befogótétel szerint: $AT\cdot AB=(7x)^2$ és $BT\cdot AB=(9x)^2 \Rightarrow AT:BT=7^2:9^2=49:81$.

1384. Pitagorasz-tétel szerint az ABC derékszögű háromszögben: $AB^2=15^2+20^2 \Rightarrow AB=25$ cm. Az ABC háromszög területét kétféleképp felírva: $T_{ABC}=\frac{15\cdot 20}{2}=\frac{25\cdot m_c}{2} \Rightarrow m_c=12$ cm. Befogótétel az ABC háromszögben: $AT\cdot AB=AC^2 \Rightarrow AT=9$ cm, $BT=16$ cm. Szögfelezőtétel az ATC háromszögben: $AD:DT=15:12$, azaz $(9-DT):DT=15:12 \Rightarrow DT=4$ cm. Szögfelezőtétel a BTC háromszögben: $BE:ET=20:12$, azaz $(16-ET):ET=20:12 \Rightarrow ET=6$ cm. $DE=DT+ET=10$ cm hosszú szakaszt metsz ki az átfogóból a két szögfelező.

1385. Pitagorasz-tétel szerint a BFC derékszögű háromszögben $\Rightarrow CF^2+6^2=10^2 \Rightarrow CF=8$ cm. Szögfelezőtétel a BFC háromszögben $\Rightarrow CD:(CF-CD)=10:6$, azaz $CD:(8-CD)=10:6 \Rightarrow CD=5$ cm.

1386. $OF=39$ mm.

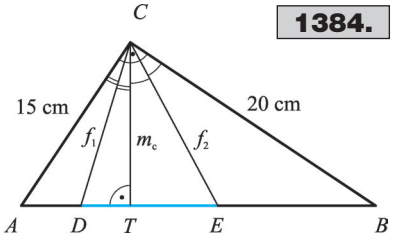
1387. $OF=\sqrt{9{,}75}\text{ cm}\approx 3{,}12$ cm.

1388. $AB\cap O_1O_2=F$. Pitagorasz-tétel az O_1FA derékszögű háromszögben: $O_1F^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=r_1^2$, azaz $O_1F^2+12^2=13^2 \Rightarrow O_1F=5$ cm. Pitagorasz-tétel az O_2FA derékszögű háromszögben: $O_2F^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=r_2^2$, azaz $O_2F^2+12^2=15^2 \Rightarrow O_2F=9$ cm.

1. eset: AB húr elválasztja a két kör középpontját $\Rightarrow$ $\Rightarrow O_1O_2=O_1F+O_2F=14$ cm.

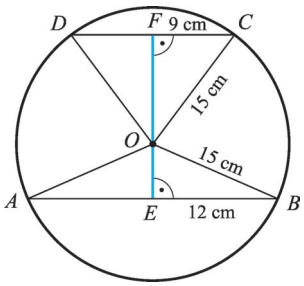
2. eset: AB húr nem választja el a két kör középpontját $\Rightarrow$ $\Rightarrow O_1O_2=O_2F-O_1F=4$ cm.

1384.



I

1389.



1389. Pitagorasz-tétel az OEB, illetve az OFC derékszögű háromszögekben: $OE^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow OE = 9$ cm, illetve $OF^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow OF = 12$ cm $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\mathrm{d}(AB;\ CD) = EF = OE + OF = 21\,\text{cm}}}$.

1390. $OE = 18$ cm, illetve $OF = 24$ cm. $\underline{\underline{\mathrm{d}(AB;\ CD) = EF = OF - OE = 6\,\text{cm}}}$.

1391. Felhasználjuk, hogy a Pitagorasz-tétel szerint $\mathrm{d}^2(O;\ AB) + \mathrm{d}^2(O;\ AB) + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2$. $OE^2 + 20^2 = 25^2 \Rightarrow OE = 15$ cm, illetve $OF^2 + 7^2 = 25^2 \Rightarrow OF = 24$ cm.

1. eset: a középpont a két húr között van $\Rightarrow EF = OE + OF = 39$ cm.

2. eset: a középpont a két húr sávján kívül van $\Rightarrow EF = OF - OE = 9$ cm. $\underline{\underline{\text{A két húr távolsága 39 cm vagy 9 cm.}}}$

1392. $EB = 24$ cm, $FC = 20$ cm. A Pitagorasz-tétel szerint: $OE^2 + 24^2 = r^2$ és $OF^2 + 20^2 = r^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow OF^2 - OE^2 = (OF - OE)\,(OF + OE) = 176$.

1. eset: az O pont az AB és a CD húr között van $\Rightarrow OE_1 + OF_1 = 22$ cm. $OF_1 - OE_1 = \frac{176}{22} =$ $= 8$ cm $\Rightarrow OF_1 = 15$ cm $\Rightarrow r_1^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow \underline{\underline{r_1 = 25\,\text{cm}}}$.

2. eset: az O pont az AB és a CD húr sávján kívül van $\Rightarrow OF_2 - OE_2 = 22$ cm. $OF_2 + OE_2 =$ $= \frac{176}{22} = 8$ cm $\Rightarrow OE_1 = -7$, ami lehetetlen.

1393. **1. eset:** a körszelet nem tartalmazza a középpontot $\Rightarrow OE = r - h$.

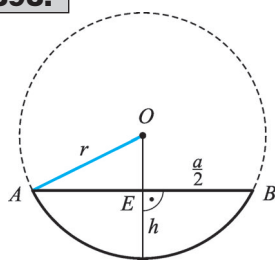
2. eset: a körszelet tartalmazza a középpontot $\Rightarrow OE = h - r$. Mindkét esetben $OE \perp AB \Rightarrow OE$ felezi az AB szakaszt $\Rightarrow$ az OEB háromszög derékszögű: átfogója r, befogói $\frac{a}{2}$ és $OE = |r - h|$.

A Pitagorasz-tétel szerint $r^2 = (|r - h|)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, azaz $r^2 = r^2 - 2rh + h^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \underline{\underline{r = \frac{h}{2} + \frac{a^2}{8h}}}$.

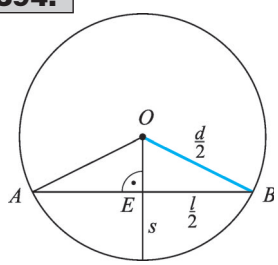
1394. Az OEB derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel szerint $\left(\frac{d}{2} - s\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$, azaz $\frac{d^2}{4} - ds + s^2 + \frac{l^2}{4} = \frac{d^2}{4} \Rightarrow d = s + \frac{l^2}{4s}$. *a)* $d = 25 + \frac{200^2}{4 \cdot 25} = 425 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Az átmérő 425 mm.}}}$

b) Az átmérő hossza $\underline{\underline{d = s + \frac{l^2}{4s}}}$.

1393.



1394.



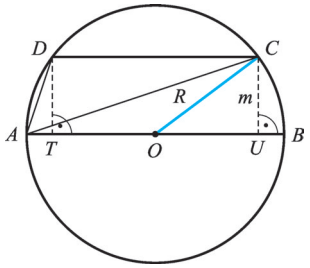
1395. $AT = UB = x$. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az OUC, az AUC és az ATD derékszögű háromszögekben!

I. $(R-x)^2+m^2=R^2 \Rightarrow R^2-2Rx+x^2+m^2=R^2 \Rightarrow x^2+m^2=2Rx$.

II. $(2R-x)^2+m^2=84^2 \Rightarrow 4R^2-4Rx+x^2+m^2=84^2 \Rightarrow 4R^2-2(x^2+m^2)+x^2+m^2=84^2 \Rightarrow 4R^2-(x^2+m^2)=84^2$.

III. $x^2+m^2=18^2$. II. és III. $\Rightarrow 4R^2=84^2+18^2 \Rightarrow \underline{\underline{R \approx 43\text{ cm}}}$.

1395.



1396. $\underline{\underline{PE = 77\text{ cm}}}$. **1397.** $\underline{\underline{PO = 61\text{ cm}}}$.

1398. A Pitagorasz-tétel az OE_1P derékszögű háromszögben: $7^2+E_1P^2=25^2 \Rightarrow E_1P=24$ cm.

Az OE_1P háromszög területe: $t_{OE_1P}=\dfrac{7\cdot 24}{2}=\dfrac{25\cdot E_1T}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_1T=6{,}72 \Rightarrow \underline{\underline{E_1E_2=13{,}44\text{ cm}}}$.

1399. $E_1E_2=120$ cm $\Rightarrow E_1T=60$ cm. $PE_1=PE_2=156$ cm. A PE_1O háromszög területét kétféleképpen felírva: $\dfrac{PO\cdot 60}{2}=\dfrac{156\cdot OE_1}{2} \Rightarrow PO=\dfrac{156\cdot OE_1}{60}$. A Pitagorasz-tétel a PE_1O derékszögű háromszögben: $PO^2=156^2+OE_1^2$. PO-t behelyettesítve a megfelelő algebrai átalakítások után: $\underline{\underline{OE_1=65\text{ cm}}}$.

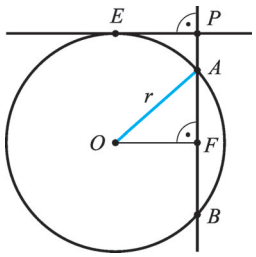
1400. A Thalész-tétel miatt D-nél derékszög van $\Rightarrow BD$ az ABC háromszög átfogóhoz tartozó magassága $\Rightarrow$ alkalmazható rá a magasságtétel: $BD^2=AD\cdot DC=32\cdot 18=16\cdot 36$. A Pitagorasz-tétel az $ABD\triangle$-re: $AB^2=32^2+16\cdot 36 \Rightarrow AB=40$ cm $\Rightarrow \underline{\underline{r=20\text{ cm}}}$.

1401. A Thalész-tétel szerint $ADB\sphericalangle=90°$. $ADB\triangle \sim ABC\triangle \sim BDC\triangle$, mert szögeik egyenlők. $AB=2r$; $BC=r \Rightarrow AB:BC=2:1 \Rightarrow AD:DB=2:1$ és $BD:DC=2:1$. $\Rightarrow AD:DB:DC=4:2:1 \Rightarrow \underline{\underline{AD:DC=4:1}}$.

1402. Alkalmazzuk a szelődarabok tételét: $PA\cdot PB=PE^2 \Rightarrow 10PB=12^2 \Rightarrow PB=14{,}4$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow AB=4{,}4$ cm. Mivel $EP\perp PA$, $d(E;P)=d(O;F)=12$ cm. Pitagorasz-tétel az OFA derékszögű háromszögben: $OA^2=OF^2+AF^2 \Rightarrow r^2=12^2+2{,}2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{r=12{,}2\text{ cm}}}$.

1402.



1403. Legyenek E_1 és E_2 az érintési pontok, T az O_2E_2-re O_1-ből bocsátott merőleges talppontja. $e(E_1;E_2) \parallel e(O_1;T) \Rightarrow E_1E_2=O_1T$. O_1TO_2 derékszögű háromszögben: $O_1T^2+O_2T^2=O_1O_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow E_1E_2^2+O_2T^2=O_1O_2^2$. *a)* $O_2T=r_2-r_1=2$ cm $\Rightarrow E_1E_2=\underline{\underline{\sqrt{60} \approx}}$

$\underline{\underline{\approx 7{,}75\text{ cm}}}$.

b) $O_2T=r_2+r_1=4$ cm $\Rightarrow E_1E_2=\underline{\underline{\sqrt{48} \approx 6{,}93\text{ cm}}}$.

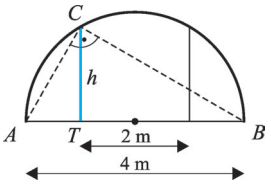
1404. *a)* $\underline{\underline{E_1E_2=48\text{ cm}}}$. *b)* $\underline{\underline{E_1E_2=30\text{ cm}}}$. **1405.** $\underline{\underline{E_1E_2=40\text{ cm}}}$.

1406. Pitagorasz-tétel az $O_1E_1O_2$ derékszögű háromszögben: $E_1O_2^2+r_1^2=(r_1+r_2)^2$. Pitagorasz-tétel az $E_1E_2O_2$ derékszögű háromszögben: $E_1E_2^2+r_2^2=E_1O_2^2=(r_1+r_2)^2-r_1^2 \Rightarrow E_1E_2=$

$=\underline{\underline{\sqrt{2r_1r_2}}}$.

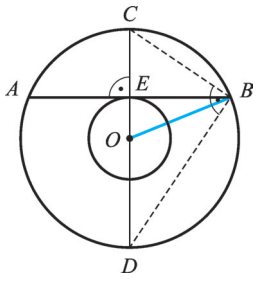
1407. A Thalész-tétel szerint $ACB\sphericalangle=90°$. Az adatokból $AT=1$ m, $TB=3$ m. Alkalmazzuk az ACB derékszögű háromszögre a magasságtételt: $CT^2=AT\cdot TB$. Az adatokat behelyettesítve: $CT=\underline{\underline{\sqrt{3}\text{ m} \approx 1{,}73\text{ m}}}$ magas az állvány.

1407.

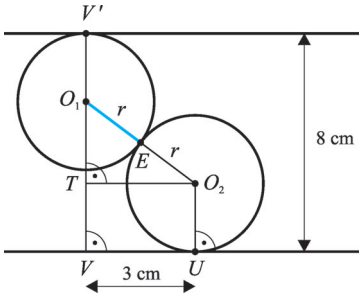


I

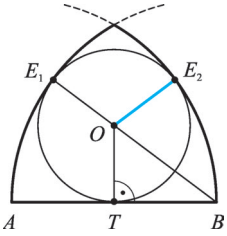
1408.



1409.



1410.



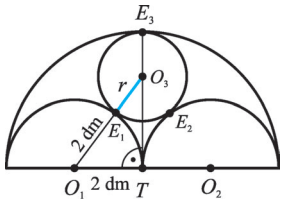
1408. $AE = EB = 2$ m; $EC = 0{,}8$ m. A Thalész-tétel szerint $CBD\triangle$ derékszögű $\Rightarrow$ alkalmazható a magasságtétel: $BE^2 = CE \cdot ED$. Az adatokat behelyettesítve: $2^2 = 0{,}8(r_1 + r_2) \Rightarrow r_2 = 5 - r_1$. A Pitagorasz-tétel az OEB derékszögű háromszögben: $2^2 + r_1^2 = r_2^2$. A két összefüggésből: $r_1 = 2{,}1$ m és $r_2 = 2{,}9$ m.

1409. O_1TO_2 derékszögű háromszögben: $O_2T = 3$ cm; $O_1T = 8 - 2r$; $O_1O_2 = 2r$. A Pitagorasz-tétel: $3^2 + (8 - 2r)^2 = (2r)^2 \Rightarrow r \approx 2{,}28$ cm.

1410. Felhasználjuk: Érintő körök középpontjai és érintési pontja egy egyenesen vannak. Egyenest érintő kör érintési pontba húzott sugara merőleges az egyenesre. OTB derékszögű háromszögben: $OT = r$; $OB = 60 - r$; $TB = 30$. Pitagorasz-tétel az OTB-ben: $30^2 + r^2 = (60 - r)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow r = 22{,}5$ cm.

1411. Felhasználjuk: Érintő körök érintési pontja és középpontjaik egy egyenesen vannak. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintő egyenesre. O_1TO_3 derékszögű háromszögben: $O_1T = 2$ dm; $O_3T = 4$ dm $- r$; $O_1O_3 = 2$ dm $+ r$. A Pitagorasz-tétel: $2^2 + (4 - r)^2 = (2 + r)^2 \Rightarrow r = \frac{4}{3}\text{dm} \approx 1{,}33\,\text{dm}$.

1411.



1412. Felhasználjuk: Érintő körök érintési pontja és középpontjaik egy egyenesen vannak. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintő egyenesre.

AO_3T derékszögű háromszögben: $AO_3 = R - r$; $AT = \frac{R}{2}$.

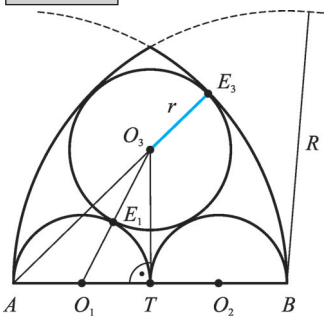
A Pitagorasz-tétel: $O_3T^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = (R - r)^2$. O_1O_3T derékszögű háromszögben: $O_1O_3 = r + \frac{R}{4}$; $O_1T = \frac{R}{4}$.

A Pitagorasz-tétel: $O_3T^2 + \left(\frac{R}{4}\right)^2 = \left(r + \frac{R}{4}\right)^2$.

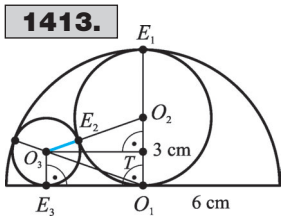
A két összefüggésből: $(R - r)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(r + \frac{R}{4}\right)^2 - \left(\frac{R}{4}\right)^2$.

A megfelelő algebrai átalakítások után: $r = \frac{3R}{10}$.

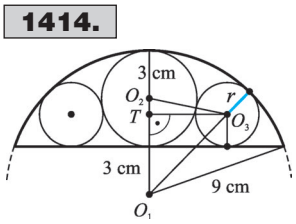
1412.



1413.



1414.



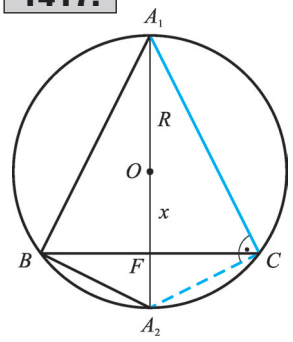
1413. Felhasználjuk: Érintő körök érintési pontja és középpontjaik egy egyenesen vannak. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintő egyenesre. Legyen O_3T merőleges O_1E_1-re. $O_1E_3O_3$ derékszögű háromszögben: $O_3E_3 = r$; $O_1O_3 = 6 - r$. A Pitagorasz-tétel: $O_1E_3^2 + r^2 = (6 - r)^2$. O_3TO_2 derékszögű háromszögben: $O_3T = O_1E_3$; $O_2T = 3 - r$; $O_2O_3 = 3 + r$. A Pitagorasz-tétel: $O_3T^2 + (3 - r)^2 = (3 + r)^2 \Rightarrow O_1E_3^2 + (3 - r)^2 = (3 + r)^2$. A két összefüggésből: $(6 - r)^2 - r^2 = (3 + r)^2 - (3 - r)^2$. A megfelelő algebrai átalakítások után: $\underline{\underline{r = 1{,}5\,\text{cm}}}$.

1414. Felhasználjuk: Érintő körök érintési pontja és középpontjaik egy egyenesen vannak. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintő egyenesre. O_1TO_3 derékszögű háromszögben: $O_1O_3 = 9 - r$; $O_1T = 3 + r$. A Pitagorasz-tétel: $O_3T^2 + (3 + r)^2 = (9 - r)^2$. O_2TO_3 derékszögű háromszögben: $O_2O_3 = 3 + r$; $O_2T = 3 - r$. A Pitagorasz-tétel: $O_3T^2 + (3 - r)^2 = (3 + r)^2$. A két összefüggésből: $(9 - r)^2 - (3 + r)^2 = (3 + r)^2 - (3 - r)^2$. A megfelelő algebrai átalakítások után: $\underline{\underline{r = 2\,\text{cm}}}$. Két ilyen kör van.

1415. A háromszög területe: $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2}$. Az adatokat a terület összefüggésben felhasználva: $\underline{3a = 4b}$. Pitagorasz-tétel az AFC derékszögű háromszögben: $3^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$. Az alábbi összefüggést felhasználva: $3^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}a\right)^2$. A megfelelő algebrai átalakítások után: $a = \underline{\underline{\sqrt{28{,}8} \approx 5{,}37\,\text{cm}}}$ az alap. $b = \frac{3}{4}a = \underline{\underline{\frac{3}{4}\sqrt{28{,}8} \approx 4{,}02\,\text{cm}}}$ a szár.

1416. A Pitagorasz-tétel az AFC derékszögű háromszögben: $m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$. Az adatokat behelyettesítve: $b = 25$ cm. A háromszög területe: $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2}$. Az adatokkal: $\frac{30 \cdot 20}{2} = \frac{25 \cdot m_b}{2} \Rightarrow \underline{\underline{m_b = 24\,\text{cm}}}$ a szárhoz tartozó magasság.

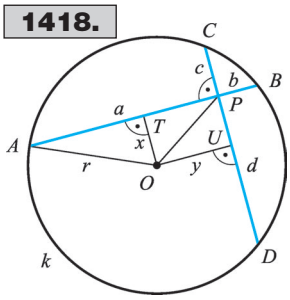
1417.



1417. A Thalész-tételt felhasználva: $A_1CA_2\sphericalangle = 90°$. Magasságtétel az $A_1CA_2\triangle$-re: $CF_2^2 = A_1F \cdot FA_2$. Számadatokkal: $4^2 = (5 + x)(5 - x) \Rightarrow x = 3$ cm. Két háromszög felel meg a feltételeknek: $A_1BC\triangle$-ben $A_1F = R + x = 8$ cm. A Pitagorasz-tétel az A_1FC derékszögű háromszögre: $A_1C^2 = 8^2 + 4^2 \Rightarrow A_1C = \underline{\underline{\sqrt{80} \approx 8{,}94\,\text{cm}}}$. $A_2BC\triangle$-ben $A_2F = R - x = 2$ cm. A Pitagorasz-tétel az A_2FC derékszögű háromszögre: $A_2C^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow A_2C = \underline{\underline{\sqrt{20} \approx 4{,}47\,\text{cm}}}$.

I

1418.



1418. Állítás: $a^2+b^2+c^2+d^2=$ állandó. Bizonyítás: $d(O;AB)=$ $=d(O;T)=x$ és $d(O;CD)=d(O;U)=y$. Pitagorasz tétele az $AOT\triangle$-re: $r^2=AT^2+TO^2$ és $AT=\frac{a+b}{2}$; $TO=x\Rightarrow r^2=\frac{(a+b)^2}{4}+x^2\otimes$. Pitagorasz tétele az $OUD\triangle$-re: $r^2=OU^2+UD^2$ és $UD=\frac{d+c}{2}$; $OU=y\Rightarrow r^2=\frac{(d+c)^2}{4}+y^2\oplus$. $\otimes+\oplus$: $2r^2=\frac{(a+b)^2+(c+d)^2}{4}+x^2+$ $+y^2\Rightarrow 8r^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+dc)+4x^2+4y^2$. A szelődarabok szorzatára tanult tétel szerint $cd=ab=(r-OP)(r+PO)=$ $=r^2-OP^2$. Ezt felhasználva: $8r^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2\cdot 2\cdot(r^2-OP^2)+4x^2+4y^2=a^2+b^2+c^2+$ $+d^2+4r^2-4OP^2+4OP^2\Rightarrow 4r^2=a^2+b^2+c^2+d^2$, tehát $a^2+b^2+c^2+d^2=$ állandó.

1419. $BC=AF\Rightarrow BAC\sphericalangle$ hegyesszög $\Rightarrow O$ az $ABC\sphericalangle$ belső pontja. OFC derékszögű háromszögben: $OF=6-r$; $FC=3$; $OC=r$. A Pitagorasz-tétel: $(6-r)^2+3^2=r^2$. A megfelelő algebrai átalakítások után: $\underline{\underline{r=3{,}75\text{ cm}}}$.

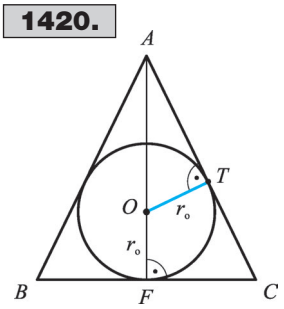
1420. Felhasználjuk: $T_\triangle=r_o s$, ahol s a félkerület. Külső pontból a körhöz húzott érintő szakaszok egyenlők: $CF=CT=15$ cm $\Rightarrow AT=AC-CT=39-15=24$ cm. A Pitagorasz-tétel az AFC derékszögű háromszögre: $AF^2+15^2=39^2\Rightarrow AF=36$ cm. A háromszög területe: $T_\triangle=\frac{30\cdot 36}{2}=\frac{30+2\cdot 39}{2}r_0\Rightarrow \underline{\underline{r_0=10\text{ cm}}}$.

1421. Az 1420. ábra jelöléseit használjuk. Külső pontból a körhöz húzott érintő szakaszok: $CF=CT=30$ cm. $AO>OF\Rightarrow AO:OF=17:15\Rightarrow AO=17x$; $OF=OT=r_0=15x$.

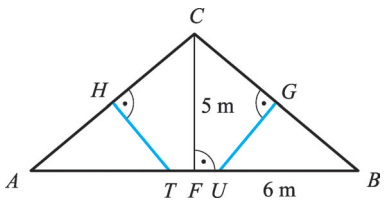
$OTA\triangle\sim CFA\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow\lambda=\frac{OT}{FC}=\frac{OA}{AC}\Rightarrow\frac{15x}{30}=\frac{17x}{AC}\Rightarrow AC=$ $=34$ cm $\Rightarrow AT=4$ cm. A Pitagorasz-tétel az OTA derékszögű háromszögre: $(17x)^2=(15x)^2+4^2\Rightarrow$ $\Rightarrow x=0{,}5$ cm. $r_0=15x=\underline{\underline{7{,}5\text{ cm}}}$ a beírt kör sugara.

1422. A Pitagorasz-tétel a BFC derékszögű háromszögben: $BC^2=5^2+6^2\Rightarrow BC=\sqrt{61}$ m $\Rightarrow$ $\Rightarrow CG=GB=0{,}5\sqrt{61}$ m. $BFC\triangle\sim BGU\triangle$, mert egy szögük közös, egy szögük 90^0: $\frac{GU}{GB}=\frac{CF}{BF}\Rightarrow$ $\Rightarrow GU=\underline{\underline{\frac{5\sqrt{61}}{12}\approx 3{,}25\text{ m}}}$.

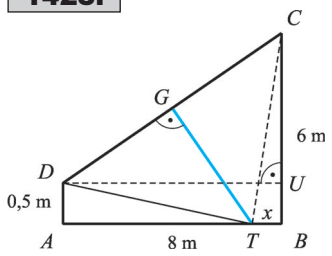
1420.



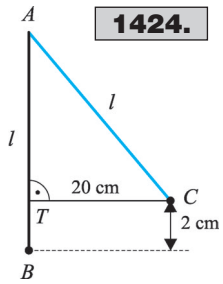
1422.



1423.



1424.



1423. Legyen DU párhuzamos AB-vel. DUC derékszögű háromszögben: $DU = 8$ m; $UC = BC - AD = 5{,}5$ m. A Pitagorasz-tétel a $DUC\triangle$-ben: $8^2 + 5{,}5^2 = DC^2 \Rightarrow DC \approx 9{,}71$ m $\Rightarrow DG = GC = 4{,}86$ m. A Pitagorasz-tétel a $TBC\triangle$-ben: $x^2 + 6^2 = TC^2$. A Pitagorasz-tétel a $TAD\triangle$-ben: $(8 - x)^2 + 0{,}5^2 = TD^2 = TC^2$. A két összefüggésből: $x \approx 1{,}77$ m $\Rightarrow TC^2 = 39{,}12$. A Pitagorasz-tétel a CGT derékszögű háromszögben: $GC^2 + GT^2 = CT^2$. A fent kiszámolt adatokat felhasználva: $\underline{\underline{GT \approx 3{,}94\text{ m}}}$.

1424. ATC derékszögű háromszögben: $AT = l - 2$ cm; $TC = 20$ cm; $AC = l$. Pitagorasz-tétel: $(l - 2)^2 + 20^2 = l^2 \Rightarrow \underline{\underline{l = 101\text{ cm}}}$.

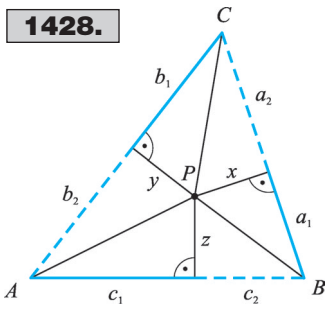
1425. Mivel $AB > AC, BC$, az m_c magasság talppontja az AB szakasz belső pontja. A Pitagorasz-tétel az ATC derékszögű háromszögre: $x^2 + m_c^2 = 25^2$. A Pitagorasz-tétel a BTC derékszögű háromszögre: $(63 - x)^2 + m_c^2 = 52^2$. A két összefüggésből: $25^2 - x^2 = 52^2 - (63 - x)^2 \Rightarrow x = 15$ cm $\Rightarrow \underline{\underline{m_c = 20\text{ cm}}}$.

1426. A leghosszabb oldalhoz tartozó magasság talppontja az oldal belső pontja. A Pitagorasz-tétel az ATB és az ATC derékszögű háromszögekre: $x^2 + m_a^2 = c^2$, illetve $(a - x)^2 + m_a^2 = b^2 \Rightarrow x = \dfrac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}$ és $m_a^2 = c^2 - \left(\dfrac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}\right)^2$. A háromszög területe: $T_\triangle = \dfrac{a \cdot m_a}{2} = \dfrac{b \cdot m_b}{2} = \dfrac{c \cdot m_c}{2} \Rightarrow m_b = \dfrac{a}{b} \cdot m_a$ és $m_c = \dfrac{a}{c} \cdot m_a$. Az adatok behelyettesítése után: $\underline{\underline{m_a = 12\text{ cm}}}$; $\underline{\underline{m_b = 12{,}6\text{ cm}}}$; $\underline{\underline{m_c = 19{,}38\text{ cm}}}$.

1427. Legyen a trapéz hosszabb alapja AB, rövidebb alapja DC, a D-ből induló magasság talppontja T. Legyen DB' párhuzamos a BC szárral $\Rightarrow AB' = 10$ cm. A Pitagorasz-tétel az ATD és a $B'TD$ derékszögű háromszögekre: $x^2 + m^2 = 9^2$, illetve $(10 + x)^2 + m^2 = 17^2 \Rightarrow x = 5{,}4$ cm és $\underline{\underline{m = 7{,}2\text{ cm}}}$.

1428. Pitagorasz tételének többszöri alkalmazásával: $a_1^2 = BP^2 - x^2$; $a_2^2 = CP^2 - x^2$; $b_1^2 = CP^2 - y^2$; $b_2^2 = AP^2 - y^2$; $c_1^2 = AP^2 - z^2$; $c_2^2 = BP^2 - z^2$. A fentiekből következik, hogy $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = AP^2 + BP^2 + CP^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$.

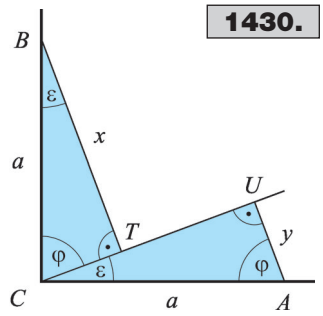
1428.



1429. A derékszögű háromszög oldalaira Pitagorasz tételét felírva: $a^2 + b^2 = c^2$.

A derékszögű háromszög területét kétféleképpen felírva: $\dfrac{ab}{2} = \dfrac{cm_c}{2} \Rightarrow 2ab = 2\text{ cm}_c$.

I



1430. A fentiekből következik, hogy $a^2+b^2+2ab+m_c^2=c^2+2\ \mathrm{cm}_c$ $++m_c^2 \Rightarrow (a+b)^2+m_c^2=(c+m_c)^2$, azaz $a+b$; m_c és $c+m_c$ szakaszok derékszögű háromszöget alkotnak, Pitagorasz tételének megfordítása miatt.

1430. $\varepsilon+\varphi=90°$. $AUC\triangle \cong CTB\triangle$, mert szögeik ε, φ, 90° és átfogójuk $a \Rightarrow CT=y$ és $CU=x$. Pitagorasz tételét alkalmazva az egybevágó derékszögű háromszögekre: $x^2+y^2=a^2$, tehát x^2+y^2 csak a-tól függ.

1431. Legyen $T \in BC$ a magasság talppontja. ABT derékszögű háromszögben $a^2=m^2+c^2$ és ACT derékszögű háromszögben $b^2=m^2+d^2 \Rightarrow a^2+2b^2=m^2+c^2+2(m^2+d^2)=3m^2+2d^2+c^2$, tehát igaz az állítás.

1432. CDO derékszögű háromszögben a hegyesszögek 30° és 60°, ezért $CD=\dfrac{r}{\sqrt{3}} \Rightarrow BD=$ $=BC-CD=3r-\dfrac{r}{\sqrt{3}}$. Pitagorasz tétele az ADB derékszögű háromszögre:

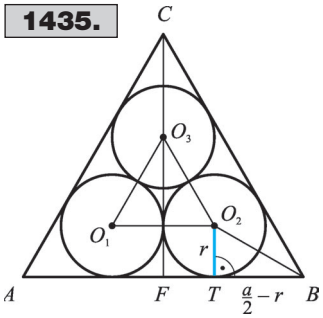
$$(2r)^2+\left(3r-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2=AB^2 \Rightarrow AB=\sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}}\cdot r \approx \underline{\underline{3{,}1415r \approx k_{\text{félkör}}}}.$$

1433. Legyen O a kör középpontja, A az egyik külső négyzet csúcsa, T az O-ból a négyzet oldalegyenesére bocsátott merőleges talppontja. OTA derékszögű háromszögben: $OT=\dfrac{a}{2}$; $AT=\dfrac{3}{2}a$; $OA=r$. A Pitagorasz-tétel: $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}a\right)^2=r^2 \Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{10}}{5}r$.

1434. Felhasználjuk: Érintő körök érintési pontja és középpontjaik egy egyenesen vannak. $\Rightarrow O_3O=r-r'$. A 120°-os forgásszimmetria miatt $O_1O_2O_3\triangle$ szabályos, középpontja O, ami súlypont is. $\Rightarrow O_3E_3=1{,}5O_3O=1{,}5(r-r')$. A Pitagorasz-tétel az $O_1E_3O_3$ derékszögű háromszögben: $(r')^2+(1{,}5(r-r'))^2=(2r')^2$. $\Rightarrow r'=\left(2\sqrt{3}-3\right)r$.

1435. ABC szabályos háromszögben $CF=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. A szögszárakkal való érintkezés miatt BO_2 szögfelező $\Rightarrow TBO_2\sphericalangle=30°$. $O_2TB\triangle \sim BFC\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow \dfrac{\frac{a}{2}-r}{r}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \underline{\underline{r=\dfrac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}}}$.

1435.



1436. Legyenek a szabályos nyolcszög szomszédos csúcsai A_1, A_2, A_3; $A_1A_3 \perp A_2O$ és $A_1A_3 \cap A_2O=F \Rightarrow A_1OA_3\sphericalangle=90°$. $A_1A_3=r\sqrt{2} \Rightarrow A_1F=A_3F=OF=\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$. A_1FA_2 derékszögű

háromszögben $A_2F = r - \frac{r\sqrt{2}}{2}$ és $A_1F = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. A Pitagorasz-tétel: $A_1A_2^2 = \left(r - \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 +$

$+\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow A_1A_2 = \underline{\underline{r\sqrt{2-\sqrt{2}}}}$ a szabályos nyolcszög oldala.

1437. Legyenek a szabályos tizenkétszög szomszédos csúcsai A_1, A_2, A_3; $A_1A_3 \perp OA_2$ és $A_1A_3 \cap OA_2 = F \Rightarrow A_1OA_3\sphericalangle = 60°$. $A_1A_3 = r \Rightarrow OF = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. A_1FA_2 derékszögű háromszögben $A_2F = r - \frac{r\sqrt{3}}{2}$ és $A_1F = \frac{r}{2}$. A Pitagorasz-tétel: $A_1A_2^2 = \left(r - \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow A_1A_2 =$

$= r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ a szabályos tizenkétszög oldala.

1438. Szabályos hatszögben $AOB\triangle$ szabályos. Legyen F a BO szakasz felezőpontja. $\Rightarrow AF =$

$= AB\frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$; $2AF = x' = 2{,}5 \cdot \sqrt{3} \approx 4{,}33\,\text{cm} \Rightarrow x = x' + 2 \cdot 0{,}05 \approx \underline{\underline{4{,}43\,\text{cm}}}$.

1439. Legyen a négyzet középpontja K, P-ből az AC átlóra bocsátott merőleges talppontja T, a BD-re bocsátott merőleges talppontja U. $ABCD$ négyzetben $BK = \frac{a}{\sqrt{2}}$. $APT\triangle \sim ABK\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow \underline{\underline{PT = \frac{b}{\sqrt{2}}}}$. $BUP\triangle \sim BKA\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{PU = \frac{a-b}{\sqrt{2}}}}$.

1440. $ABD\triangle$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow AD = a\sqrt{2}$. Az 1437. feladatban láttuk: az r sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög oldala $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$. CD egy a sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög oldala, mert $CB = DB = a$ és $CDB\sphericalangle = 30° \Rightarrow CD = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

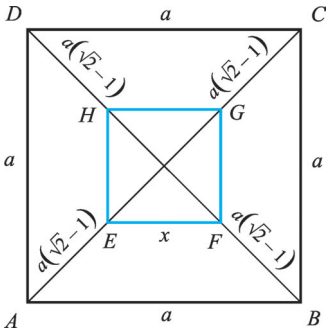
1441. *a)* A belső $EFGH$ négyszögben az átlók merőlegesen felezik egymást és egyenlő hosszúak, tehát az $EFGH$ négyszög négyzet.

b) Legyen $EH = x$! Az átló az oldal $\sqrt{2}$-szerese:

$EG = a\sqrt{2} - 2a\left(\sqrt{2} - 1\right) = a \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right) = \sqrt{2} \cdot x \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{x = a \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)}}$.

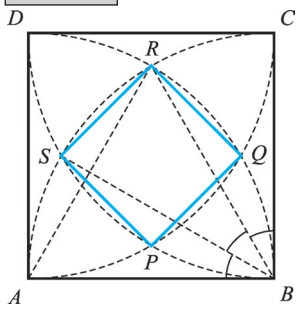
1441.



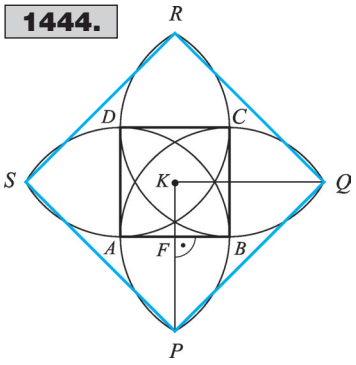
1442. **1. eset:** a metszéspont belső pont. $ABE\triangle$ szabályos, azaz $EB = AE = a$. $EB = BC$ és $EBC\sphericalangle = 30° \Rightarrow EC$ egy a sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög oldala. Az 1437. feladat alapján $EC = DE = \underline{\underline{a\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$.

I

1443.



1444.



2. eset: a metszéspont külső pont. $ABE'\triangle$ szabályos, azaz $E'B = AE' = a$. CFE' derékszögű háromszögben $CF = \frac{a}{2}$ és $FE' = a + \frac{a\sqrt{3}}{2}$. A Pitagorasz-tétel: $E'C^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow E'C = DE' = \underline{\underline{a\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

1443. A 90°-os forgásszimmetria miatt $SP = PQ = QR = SR \Rightarrow PQRS$ négyszög négyzet. $ABR\triangle$ a oldalú szabályos háromszög $\Rightarrow ABR\sphericalangle = 60° \Rightarrow RBC\sphericalangle = 30°$. $SBC\triangle$ a oldalú szabályos háromszög $\Rightarrow SBC\sphericalangle = 60° \Rightarrow ABS\sphericalangle = 30° \Rightarrow SBR\sphericalangle = 30°$. SR egy a sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög oldala. Az 1437. feladat szerint $SR = \underline{\underline{a\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$.

1444. A 90°-os forgásszimmetria miatt $SP = PQ = QR = SR \Rightarrow PQRS$ négyszög négyzet. $ABP\triangle$ szabályos $\Rightarrow PF = a\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow KP = \frac{a}{2} + a\frac{\sqrt{3}}{2}$. $KPQ\triangle$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow PQ =$

$= KP \cdot \sqrt{2} = \left(\frac{a}{2} + a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{2} = \underline{\underline{a\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

1445. A megadott adatokkal m_c magasság T talppontja az AB szakasz belső pontja. Legyen F az AB szakasz felezéspontja. CTF derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $TF^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow$

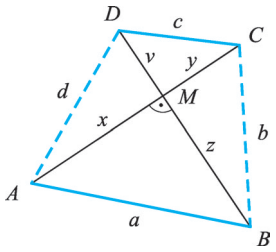
$\Rightarrow TF = 5$ cm $\Rightarrow AT = AF - TF = 25$ cm és $BT = BF + TF = 35$ cm. ATC derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $25^2 + 12^2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{769} \approx \underline{\underline{27{,}73\text{ cm}}}$. BTC derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $35^2 + 12^2 = c^2 \Rightarrow c = \underline{\underline{37\text{ cm}}}$.

1446. Legyenek $F \in BC$, $G \in AC$ és $H \in AB$ az oldalfelező pontok. Az ABC derékszögű háromszögben $a^2 + b^2 = c^2$ és a CH súlyvonalra $s_c = \frac{c}{2}$ Thalész tétele szerint. A CGB derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $s_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2$. Az AFC derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $s_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$. $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}\left(a^2+b^2\right) + \frac{c^2}{4} = \frac{5}{4}c^2 +$

$+ \frac{c^2}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{2}c^2}}$ bármely c átfogójú derékszögű háromszögben.

1447. Pitagorasz tételét alkalmazva a derékszögű háromszögekre: $AMB\triangle$-ben $a^2 = x^2 + z^2$; $BMC\triangle$-ben $b^2 = z^2 + y^2$; $CMD\triangle$-ben $c^2 = y^2 + v^2$; $DMA\triangle$-ben $d^2 = v^2 + x^2$. A fentiekből következik, hogy $a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + v^2 + z^2 = b^2 + d^2$, tehát igaz az állítás.

1447.



1448. **1. eset:** a négyszög nem téglalap. Legyen DT és CU az AB egyenesre merőleges.
$DT = CU$; $AT = BU$; $AU = AB + BU$; $BT = |AB - AT|$. A Pitagorasz-tétel az ATD derékszögű háromszögre: $AT^2 + DT^2 = AD^2$ (I.). A Pitagorasz-tétel az AUC derékszögű háromszögre: $AU^2 + CU^2 = AC^2$, ami a feltételek felhasználásával: $(AB + AT)^2 + DT^2 = AC^2$ (II.). A Pitagorasz-tétel a BTD derékszögű háromszögre: $|AB - AT|^2 + DT^2 = BD^2$ (III.). II. + III. $\Rightarrow AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AT^2 + DT^2) = 2(AB^2 + AD^2)$, ami azt jelenti, hogy $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.
2. eset: a négyszög téglalap. Közvetlenül adódik, hogy $e^2 = f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.

1449. Felhasználjuk, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével, azaz $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$. *a)* $e^2 + 7^2 = 2(6^2 + 10^2) \Rightarrow e = \sqrt{223} \approx \underline{\underline{14{,}93\text{ cm}}}$. *b)* $12^2 + 18^2 = 2(a^2 + 9^2) \Rightarrow a = \sqrt{153} \approx \underline{\underline{12{,}37\text{ cm}}}$. *c)* $40^2 + 74^2 = 2(a^2 + 51^2) \Rightarrow a = \sqrt{937}$. Legyen $DT \perp AB$. Pitagorasz tétele az ATD és a BTD derékszögű háromszögekre:
$AT^2 + m_b^2 = 937$ és $(51 - AT)^2 + m_b^2 = 40^2 \Rightarrow AT = 19 \Rightarrow \underline{\underline{m_b = 24\text{ cm}}}$.

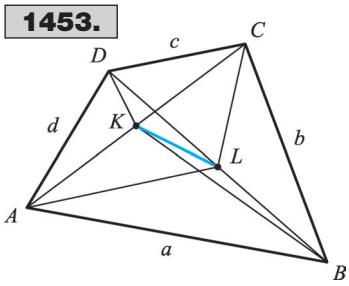
1450. Legyenek EG és HF a középvonalak. Felhasználjuk, hogy a négyszög oldalfelező pontjai olyan paralelogrammát határoznak meg, aminek átlói a négyszög középvonalai, oldalai pedig a négyszög átlóinak felével egyenlők. A paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével, azaz $EG^2 + HF^2 = 2HE^2 + 2EF^2 = 2\left(\frac{BD}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{BD^2}{2} + \frac{AC^2}{2} \Rightarrow \underline{\underline{BD^2 + AC^2 = 2\left(EG^2 + HF^2\right)}}$. Megjegyzés: az állítás konkáv négyszögre is igaz.

1451. Legyen AB felezéspontja F, C középpontos tükörképe F-re C'.
Az $AC'BC$ paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével, azaz $c^2 + (2s_c)^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$. *a)* $s_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$; $s_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$; $s_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$. *b)* $a = 7$ cm; $b = 11$ cm; $s_c = 6$ cm. $c^2 + (2s_c)^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow c = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4s_c^2} = \underline{\underline{14\text{ cm}}}$.

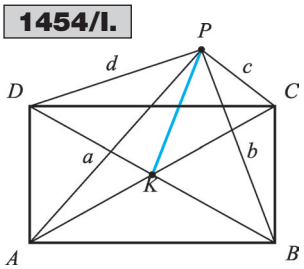
1452. Legyen AB felezéspontja F, C középpontos tükörképe F-re C'. Az $AC'BC$ paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével, azaz $c^2 + (2s_c)^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$. Hasonlóan kaphatjuk, hogy $s_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$ és $s_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$. $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} =$
$= \underline{\underline{\frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}}$.

I

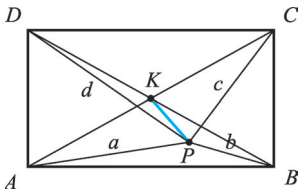
1453.



1454/I.



1454/II.



1453. Felhasználjuk, hogy az a, b, c oldalú háromszögben $c^2 + (2s_c)^2 = 2(a^2 + b^2)$. KL súlyvonal az $ALC\triangle$-ben és a $BDK\triangle$-ben, ezért $2(KD^2 + KB^2) = BD^2 + (2KL)^2$ és $2(LA^2 + LC^2) = AC^2 + (2KL)^2 \Rightarrow 2(KD^2 + KB^2 + LA^2 + LC^2) = BD^2 + AC^2 + 8KL^2$. DK súlyvonal az $ACD\triangle$-ben, BK az $ABC\triangle$-ben, CL a BCD-ben, AL pedig az $ABD\triangle$-ben. $\Rightarrow 2(c^2 + d^2) = AC^2 + (2KD)^2$; $2(a^2 + b^2) = AC^2 + (2KB)^2$; $2(b^2 + c^2) = BD^2 + (2CL)^2$; $2(a^2 + d^2) = BD^2 + (2AL)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 2(AC^2 + BD^2) + 4(KD^2 + KB^2 + AL^2 + CL^2) = 2(AC^2 + BD^2) +$ $+ 2(AC^2 + BD^2) + 16KL^2 \Rightarrow \underline{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = AC^2 + BD^2 + 4KL^2}$.

1454. A téglalap átlói felezik egymást, ezért PK súlyvonala az $ACP\triangle$-nek és a $BPD\triangle$-nek is. Ezért az 1451. feladatban bizonyított összefüggés szerint $2(a^2 + c^2) = AC^2 + (2PK)^2$, illetve $2(b^2 + d^2) = BD^2 + (2PK)^2$. $AC = BD$, mert az $ABCD$ téglalap átlói, így $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

1455. Az 1451. feladatban láttuk, hogy $2(PA^2 + PB^2) = AB^2 + (2PK)^2$, ha K az AB felezőpontja. $PA^2 + PB^2 = d^2 \Rightarrow AB^2 + (2PK)^2 = 2d^2 \Rightarrow PK^2 = \dfrac{2d^2 - AB^2}{4} \Rightarrow \mathrm{d}(P; K) = \dfrac{\sqrt{2d^2 - AB^2}}{2}$ állandó megadható. A keresett pontok rajta vannak a K középpontú, $\dfrac{\sqrt{2d^2 - AB^2}}{2}$ sugarú k körön. A k kör minden pontja megoldás. A keresett ponthalmaz a k kör, ha $d > \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$; az AB szakasz felezőpontja, ha $d = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$ és nincs megoldás, ha $d < \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$.

Területszámítás, területátalakítás és alkalmazásai

1456. $t = \underline{60\ \mathrm{m}^2}$. **1457.** $a = \underline{2\sqrt{34}\ \mathrm{cm}}$. **1458.** <u>Kilencszeresére</u> nő a terület.

1459. <u>Tizenötszörösére</u> nőtt a terület. **1460.** $\underline{\sqrt{5} = \lambda}$. **1461.** $t = \underline{2{,}25\ \mathrm{km}^2}$.

1462. $m_b = \underline{7{,}5\ \mathrm{cm}}$.

1463. $K_{\text{paralelogramma}} = 2(a + b) = 48$ cm, $m_a : m_b = 5 : 7$, $T_{\text{paralelogramma}} = a \cdot m_a = b \cdot m_b \Rightarrow b = 24 -$ $- a$, $m_b = \dfrac{7}{5} m_a \Rightarrow a \cdot m_a = (24 - a) \cdot \dfrac{7}{5} m_a \Rightarrow \underline{a = 14\ \mathrm{cm} \text{ és } b = 10\ \mathrm{cm}}$.

1464. $0{,}5t_t = t_p \Rightarrow 0{,}5ab = am_a \Rightarrow 0{,}5b = m_a \Rightarrow$ A magasság által levágott derékszögű háromszögben az átfogó kétszerese az α-val szemközti befogónak, tehát $\underline{\alpha = 30° \text{ és } \beta = 150°}$ a paralelogramma szögei.

1465. $\underline{t = 28\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2}$. *b)* $\underline{t = 28\ \mathrm{cm}^2}$. *c)* $\underline{t = 28\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2}$.

1466. Ha $0° < \alpha < 90°$, akkor $m_a < b$ a magasság által levágott derékszögű háromszögben. $\Rightarrow t = am_a < ab$. Ha $\alpha = 90°$, akkor $m_a = b \Rightarrow t = ab$. Tehát a téglalap területe a legnagyobb. **1467.** A rombuszt e és f átlói négy egybevágó derékszögű háromszögre bontják, ezért $t = 4t_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} = \frac{1}{2} ef$.

1468. $t = 40\ \text{cm}^2$. **1469.** $m = 9{,}6$ cm. **1470.** $t = 17{,}5 \cdot \sqrt{11}\ \text{cm}^2$. **1471.** $t = 42\ \text{cm}^2$.

1472. $t = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$. **1473.** $a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ egység. **1474.** $t = \frac{m^2}{\sqrt{3}}$. **1475.** $c = 2\sqrt{t}$.

1476. *a)* $t = 63\sqrt{527}\ \text{cm}^2$. *b)* $t = 36\sqrt{145}\ \text{cm}^2$. *c)* $t = 13\sqrt{155}\ \text{cm}^2$.

1477. $\gamma = 30° \Rightarrow b = 2m$; $\beta = 45° \Rightarrow$ az A-ból induló magasság talppontja $(a - m)$ és m szakaszokra bontja a-t. Pitagorasz tétele: $b^2 = m^2 + (a - m)^2$, azaz $2m^2 = m^2 + (a - m)^2 \Rightarrow 2m^2 + 2am - a^2 = 0 \Rightarrow m_{1;2} = \frac{-2a \pm 2\sqrt{3}\, a}{4} \Rightarrow m_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} a$ és $m_2 = \frac{-\sqrt{3} - 1}{2} a$, amelyek közül $m_2 < 0$, ezért nem megoldás. $t = \frac{1}{2} am = \frac{\sqrt{3} - 1}{4} a^2$.

1478. A kapott terület megegyezik az a oldalú szabályos háromszög területével, $\left(t = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$, ami átdarabolással is megmutatható.

1479. $t = t_1 + 3t_2 + 3t_3$, ahol $t_1 = t_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ és $t_2 = a^2$; $t = 4t_1 + 3t_2 = \sqrt{3}a^2 + 3a^2 = \left(\sqrt{3} + 3\right) a^2$.

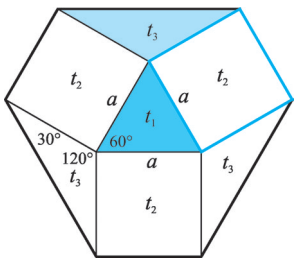
1480. $\gamma = 60° \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} b$; $t = \frac{1}{2} am_a = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} b = \frac{\sqrt{3}}{4} ab$.

1481. $\gamma = 120° \Rightarrow \gamma' = 60° \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} b$; $t = \frac{1}{2} a \cdot m_a = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} b = \frac{\sqrt{3}}{4} ab$.

1482. $T_{\text{háromszög}} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} \Rightarrow m_b = \frac{a}{b} \cdot m_a \Rightarrow m_b = \frac{5}{2}\ \text{cm}$.

1483. $T_{\text{háromszög}} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2}$; $m_a + m_b = 14\ \text{cm} \Rightarrow 16 \cdot \text{m}_a = 12 \cdot (14 - m_a) \Rightarrow m_a = 6\ \text{cm}$ és $m_b = 8\ \text{cm}$.

1479.



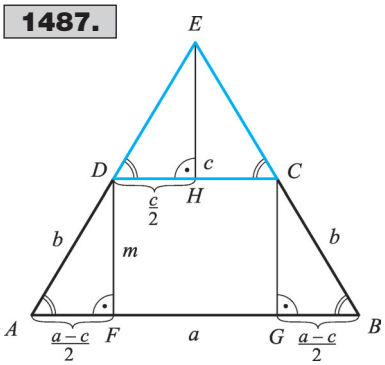
1484. Ha $\alpha' = 180° - \alpha$, akkor a két háromszög az A csúcsával egymás mellé tehető úgy, hogy AB oldaluk közös, C_1A, ill. C_2A oldaluk pedig A-ban egymáshoz csatlakozik. $t_{C_1AB\triangle} = \frac{1}{2} b \cdot m_b = t_{C_2AB\triangle}$. Ha $\alpha = \alpha'$, akkor a két háromszög egybevágó, tehát egyenlő területű.

1485. $t = 80\ \text{cm}^2$.

1486. $t = 16\sqrt{6}\ \text{cm}^2$.

I

1487.



1487. $\frac{c}{2}=1\text{ cm}=\underline{\underline{\frac{a-c}{2}}} \Rightarrow AFD\triangle \cong DHE\triangle \cong CHE\triangle \cong$
$\cong BGC\triangle \Rightarrow EH=DF=m.$

Pitagorasz tétele: $b^2=m^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \Rightarrow m=2\sqrt{2}$ cm;

$t_{DEC\triangle}=\frac{1}{2}c\cdot m=\underline{\underline{2\sqrt{2}\text{ cm}^2}}.$

1488. $\alpha=45°$, ezért $AB=2m+DC \Rightarrow m=$
$=\frac{AB-DC}{2}=6\text{ cm};\ t=\frac{(AB+CD)m}{2}=\underline{\underline{288\text{ cm}^2}}.$

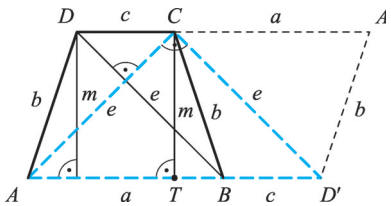
1489. Legyen $x=\frac{a-c}{2}$, a hosszabbik alap magasság által levágott szelete. Pitagorasz tétele $\Rightarrow e^2-(a-x)^2=b^2-x^2$, azaz $39^2-(44-x)^2=17^2-x^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=8$ m és $c=28$ m; $t=\frac{(a+c)m}{2}=\underline{\underline{540\text{ m}^2}}.$

1490. $ACD'\triangle$ egyenlő szárú derékszögű háromszög $\Rightarrow CT$ magasság felezi AD'-t és $ACD'\sphericalangle$-et is $\Rightarrow AT=CT=TD';\ t=\frac{(a+c)m}{2}=\frac{2m\cdot m}{2}=\underline{\underline{m^2}}.$

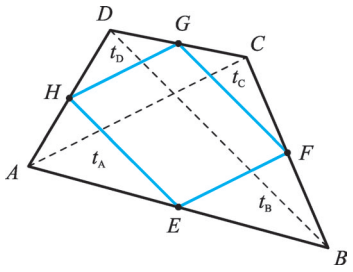
1491. A rövidebb alap egyik csúcsából induló magasság talppontja $\frac{a-c}{2}$ és $\left(a-\frac{a-c}{2}\right)$ szakaszokra bontja a hosszabb alapot. Az átló és a szár merőlegessége miatt a magasságtétel $\Rightarrow$
$\Rightarrow m^2=\frac{a-c}{2}\cdot\left(a-\frac{a-c}{2}\right)=144\text{ cm}^2 \Rightarrow m=12\text{ cm};\ t=\frac{(a+c)m}{2}=\underline{\underline{216\text{ cm}^2}}.$

1492. HE középvonal az $ABD\triangle$-ben $\Rightarrow t_A=\frac{1}{4}t_{ADB}$ és FG középvonal a $DCB\triangle$-ben $\Rightarrow$
$\Rightarrow t_C=\frac{1}{4}t_{DCB} \Rightarrow t_A+t_C=\frac{1}{4}\cdot(t_{ADB}+\Rightarrow t_{DCB})=\frac{1}{4}t.$ Hasonlóan belátható, hogy $t_B+t_D=$
$=\frac{1}{4}(t_{DAC}+t_{ABC})=\frac{1}{4}t. \Rightarrow t_{EFGH}=t-(t_A+t_B+t_C+t_D)=t-\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}t.$

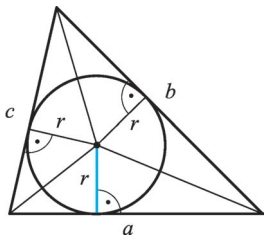
1490.



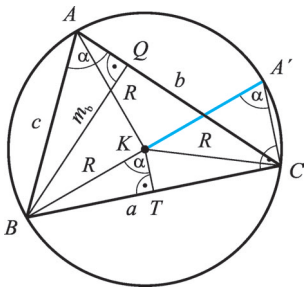
1492.



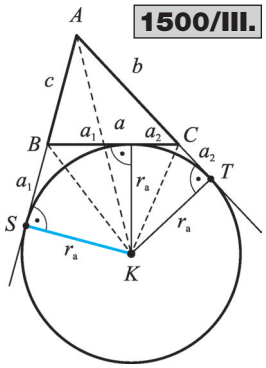
1500/I.



1500/II.



1500/III.



1493. Vegyünk fel az $ABCD$ négyszög csúcsain át az átlókkal párhuzamos egyeneseket. Ezek metszéspontjait jelöljük rendre K-, L-, M- és N-nel.
$MN \parallel AC \parallel KL$ és $NK \parallel DB \parallel ML \Rightarrow KLMN$; $PDNA$; $PDMC$; $PCLB$; $PBKA$ paralelogrammák $\Rightarrow$
$\Rightarrow t_{ADP} = t_{ADN}$; $t_{PDC} = t_{DMC}$; $t_{PCB} = t_{CBL}$; $t_{PAB} = t_{ABK} \Rightarrow t_{ABCD} = \frac{1}{2} t_{KLMN}$ és a paralelogramma területe csak oldalaitól (az eredeti négyszög átlóitól) és ezek szögétől függ.

1494. A négyszög csúcsain át az átlókkal húzott párhuzamosok egy téglalapot határoznak meg. $t = \frac{1}{2} t_{\text{téglalap}} = \frac{1}{2} ef = \underline{\underline{48\,\text{cm}^2}}$.

1495. Az $ABCD$ négyszög csúcsain át az átlókkal húzott párhuzamosok a $KLMN$ négyszöget határozzák meg. $t_{ABCD} = \frac{1}{2} t_{KLMN}$, ahol $KLMN$ az $AC \parallel MN \parallel KL$ és $BD \parallel NK \parallel ML$ és $AC \perp BD$ miatt téglalap $\Rightarrow t_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot LM = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

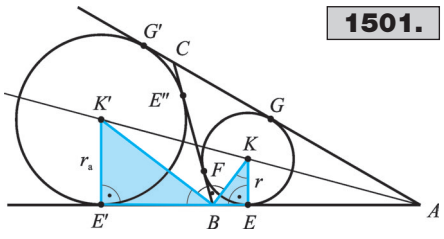
1496. $t = \underline{\underline{428\,\text{cm}^2}}$. **1497.** $t = \underline{\underline{741\,\text{m}^2}}$. **1498.** *a)* $t = \underline{\underline{48\,\text{cm}^2}}$; *b)* $t = \underline{\underline{30\,\text{cm}^2}}$; *c)* $t = \underline{\underline{36\,\text{cm}^2}}$.

1499. $t = \underline{\underline{14{,}24\ \text{m}^2}}$.

1500. *a)* $t = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr = \frac{1}{2} r(a+b+c) \Rightarrow r = \underline{\underline{\frac{2t}{a+b+c}}} \left(= \frac{t}{s} \right)$. *b)* $BQA\triangle \sim BCA'\triangle$, mert szögeik egyenlők a kerületi szögek tétele miatt. $\frac{BA'}{BC} = \frac{BA}{BQ}$, azaz $\frac{2R}{a} = \frac{c}{m_b}$ és $t = \frac{1}{2} bm_b \Rightarrow m_b = \frac{2t}{b} \Rightarrow \frac{2R}{a} = \frac{cb}{2t} \Rightarrow R = \frac{abc}{4t}$. *c)* $t = t_{AKS} + t_{AKT} - 2t_{KBC} = \frac{1}{2} r_a(c + a_1) +$
$+ \frac{1}{2} r_a(b + a_2) - 2 \cdot \frac{1}{2} ar_a = \frac{1}{2} r_a(c + b - a) \Rightarrow r_a = \underline{\underline{\frac{2t}{c+b-a}}}$.

1501. $KB \perp K'B$, mert a B-nél lévő belső és külső szög szögfelezői. Emiatt: $KBE\sphericalangle + K'BE'\sphericalangle = 90°$ és $KBE\sphericalangle + BKE\sphericalangle = 90° \Rightarrow \underline{K'BE'\sphericalangle = BKE\sphericalangle}$.
$\underline{K'E' \perp E'B}$ és $\underline{KE \perp BE}$, mert érintési pontba húzott sugarak. Az aláhúzottakból következik, hogy $K'E'B\triangle$ szögei megegyeznek $KEB\triangle$ szögeivel, azaz $K'E'B\triangle \sim KEB\triangle$.

1501.



I

1502. Az 1501. ábra jelöléseit használjuk. Az 1501. feladatból tudjuk, hogy $K'E'B\triangle \sim KEB\triangle$, ezért $r : BE \Rightarrow E'B : r_a$, vagyis $\underline{r \cdot r_a = EB \cdot E'B}$. $E'B = E''B$ és $E''C = CG' \Rightarrow E'A + G'A = AB + BC + CA = 2s \Rightarrow E'A = s \Rightarrow \underline{E'B = s - c}$. $BE = BF$ és $FC = CG$ és $GA = AE \Rightarrow BE + CG + GA = s \Rightarrow \underline{BE = s - b}$. Az aláhúzottakból és az 1500. feladatból következik, hogy $\frac{t}{s} \cdot \frac{t}{s-a} = (s-b)(s-c)$, amiből $\underline{\underline{t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}}$.

1503. $s = (a+b+c) : 2$ és $\underline{\underline{t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}}$. *a)* $t = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1} = \underline{\underline{10\sqrt{2}\,\text{cm}^2}}$; *b)* $t = \sqrt{30 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 24} = \underline{\underline{60\,\text{cm}^2}}$; *c)* $t = \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 18 \cdot 9} = \underline{\underline{486\,\text{cm}^2}}$.

1504. $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{45 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9} = 360\,\text{cm}^2$. $t = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2} \Rightarrow$ A leghosszabb oldalhoz tartozik a legrövidebb magasság, így m_c a legkisebb: $m_c = \frac{2t}{c} = \underline{\underline{20\,\text{cm}}}$.

1505. $t_{\text{paralelogramma}} = 2t_{\text{háromszög}} = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 2\sqrt{13 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 7} = \underline{\underline{2\sqrt{455}\ \text{cm}^2}}$.

1506. A négyszög területét a két háromszög területének összegeként kaphatjuk meg. $t = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} + \sqrt{20 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 12} = \underline{\underline{144\,\text{cm}^2}}$.

1507. $t_{K_1K_2B} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{50 \cdot 33 \cdot 11 \cdot 6} = 330\,\text{cm}^2$. Szimmetria miatt K_1K_2 felezi AB-t; $t_{K_1K_2B} = \frac{1}{2} K_1K_2 \cdot \frac{1}{2} AB \Rightarrow AB = \frac{4t_{K_1K_2B}}{K_1K_2} = \underline{\underline{30\,\text{cm}}}$.

1508. A paralelogrammát az átlói négy egyenlő területű háromszögre bontják. $t_{ABCD} = 4t_{AB\text{M}} = 4\sqrt{s(s-a)\left(s-\frac{e}{2}\right)\left(s-\frac{f}{2}\right)}$, ahol $s = \frac{1}{2}\left(a + \frac{e}{2} + \frac{f}{2}\right) = 54 \Rightarrow t_{ABCD} = 4\sqrt{54 \cdot 3 \cdot 34 \cdot 17} = \underline{\underline{1224\,\text{cm}^2}}$.

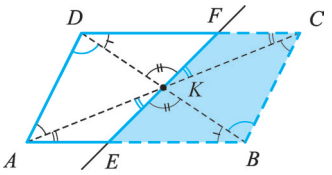
1509. Alkalmazzuk a Heron-képletet az átló által létrehozott két háromszögre! $t_{ABCD} = t_{ABC} + t_{ACD} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 12 \cdot 14} + \sqrt{35 \cdot 7 \cdot 18 \cdot 10} = \underline{\underline{546\,\text{cm}^2}}$.

1510. Jelöljük x-szel a hosszabb alapnak azt a szeletét, amit a d szár végpontjából induló magasság levág belőle. Így a b szár végpontjából induló magasság által levágott szelet $(a - c - x)$. Pitagorasz tételéből következik, hogy $d^2 - x^2 = m^2 = b^2 - (a - c - x)^2$, azaz $169 - x^2 = 1369 - (40 - x)^2 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow m^2 = d^2 - x^2 \Rightarrow m = 12$ cm; $t = \frac{(a+c)m}{2} = \underline{\underline{480\,\text{cm}^2}}$.

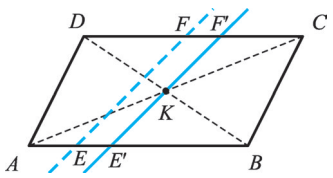
1511. $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $c = 7$ cm és $a + c = b + d \Rightarrow d = 4$ cm; $t = \frac{1}{2} r\,(a + b + c + d) \Rightarrow r = \frac{2t}{a+b+c+d} = \underline{\underline{3\,\text{cm}}}$.

1512. $t_1 = \frac{1}{2} AF \cdot m_1$ és $t_2 = \frac{1}{2} BF \cdot m_2$; $AF = BF$, mert CF súlyvonal és $m_1 = m_2 = \text{d}(C; \text{e}(A; B))$, ezért $t_1 = t_2$.

1513.



1514.



1513. $AEK\triangle \cong CFK\triangle$ és $ADK\triangle \cong CBK\triangle$ és $DFK\triangle \cong BEK\triangle$, mert oldalaik és szögeik páronként egyenlők (váltószögek, illetve csúcsszögek) $\Rightarrow t_{AEK} = t_{CFK}$ és $t_{ADK} = t_{CBK}$ és $t_{DFK} = t_{BEK} \Rightarrow t_{AEFD} = t_{CBEF}$.

1514. Húzzunk az átlók metszéspontján át párhuzamost EF-fel, nyerjük az E' és F' pontokat. $t_{AEFD} = t_{CBEF}$, míg az 1513. feladatból tudjuk, hogy $t_{AE'F'D} = t_{E'BCF'}$; $t_{AEFD} = t_{AE'F'D} - t_{EE'F'F}$ és $t_{EBCF} = t_{E'BCF'} + t_{EE'F'F} = t_{AE'F'D} + t_{EE'F'F} \Rightarrow t_{EE'F'F} = 0 \Rightarrow EF \equiv E'F' \Rightarrow EF$ átmegy K-n.

1515. $r = 2$ egység. **1516.** *a)* $r \approx 0{,}8$ cm; *b)* $r \approx 4$ cm; *c)* $r \approx 2{,}33$ dm. **1517.** $t \approx 5{,}1\ \text{cm}^2$.

1518. $k \approx 15{,}08$ cm. **1519.** $d \approx 4$ cm.

1520. C_1 átmérője 16 cm $\Rightarrow r_1 = 8$ cm és C_2 átmérője 12 cm $\Rightarrow r_2 = 6$ cm. $t_3 = t_1 + t_2 = r_1^2\,\pi + r_2^2\,\pi = (r_1^2 + r_2^2)\,\pi \Rightarrow r_3^2\,\pi = (r_1^2 + r_2^2)\,\pi \Rightarrow r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow r_3 = 10$ cm $\Rightarrow C_3$ átmérője 20 cm.

1521. A négyzet oldala egyenlő a kör átmérőjével. $t_{\text{kör}} + 4{,}3 = t_{\text{négyzet}} \Rightarrow r^2\,\pi + 4{,}3 = (2r)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow r^2 \approx 5 \Rightarrow t_{\text{kör}} \approx 5\,\pi \approx 15{,}7\ \text{cm}^2$.

1522. Legyen a külső kör sugara r_1, a belső köré r_2, a középköré r_3. $K = 12$ m és $K = 2r_3\,\pi \Rightarrow$ $\Rightarrow r_3 = 1{,}91$ m; $r_3 = (r_1 + r_2)$: $2 \Rightarrow r_1 + r_2 = 3{,}82$ m és $r_1 - r_2 = 2$ m $\Rightarrow r_1 = 2{,}91$ m és $r_2 = 0{,}91$ m. $t = r_1^2\,\pi - r_2^2\,\pi = (r_1^2 - r_2^2)\,\pi \approx 24\ \text{cm}^2$.

1523. $AB = a$ és $AF = FB$; $t = r_1^2\,\pi - r_2^2\,\pi = (r_1^2 - r_2^2)\,\pi = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi \Rightarrow t = \frac{a^2\pi}{4}$.

1524. *a)* $t = 0{,}1875r^2\pi$; *b)* $t = 0{,}043\,75r^2\pi$.

1525. *a)* $t = \frac{1}{4}r^2\pi - \frac{1}{2}r^2 = \frac{r^2}{4}(\pi - 2)$; *b)* $t = \frac{1}{6}r^2\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = r^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

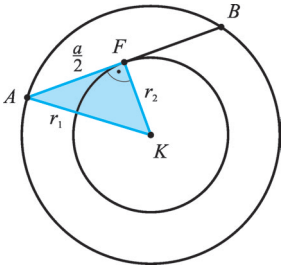
1526. *a)* $r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \frac{1}{3}r^2\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 =$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{3}\cdot\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{36}\cdot\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$. *b)* $2r^2 = a^2 \Rightarrow r =$

$= \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{1}{4}r^2\pi - \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\pi - \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{8}\cdot(\pi - 2)$.

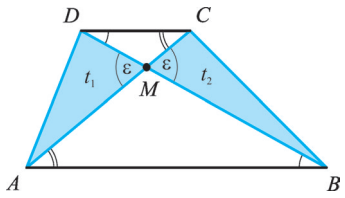
c) $t = \frac{1}{6}a^2\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{a^2}{12}\cdot\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$.

1523.



I

1528.



1527. A körívszakaszokból álló rész egy körgyűrű része, amit a közös kezdőpontból induló sugarak vágnak ki. Területe egyenesen arányos a középponti szöggel.

$t = \frac{r_1^2\widehat{\alpha}}{2} - \frac{r_2^2\alpha}{2} = \frac{(r_1^2 - r_2^2)}{2}\widehat{\alpha} = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2)\frac{\widehat{\alpha}}{2} =$

$= (r_1 - r_2)\cdot\frac{(r_1 + r_2)\widehat{\alpha}}{2} = d \cdot r_3 \cdot \widehat{\alpha}$, ahol $r_3 \cdot \widehat{\alpha}$ a középkör ívének hossza. $\Rightarrow$ Az úttest területe $10\text{ m} \cdot 310\text{ m} = \underline{\underline{3100\,\text{m}^2}}$.

1528. $t_{ADC} = \frac{DC \cdot \text{d}\left(A; \text{e}\left(D; C\right)\right)}{2} = \frac{DC \cdot \text{d}\left(B; \text{e}\left(D; C\right)\right)}{2} = t_{BDC}$; $t_{ADC} = t_{AMD} + t_{DMC}$ és $t_{BDC} =$

$= t_{BMC} + t_{DMC} \Rightarrow t_{AMD} = t_{BMC} \Rightarrow t_1 = t_2$.

1529. $DF = \frac{a}{2}$; $t_{ADF} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot m_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot m_a = \frac{1}{4} a m_a = \frac{1}{4} t_{ABCD}$.

1530. $t_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \text{d}(P; \text{e}(A;B)) = \frac{1}{2} \cdot t_{ABCD}$.

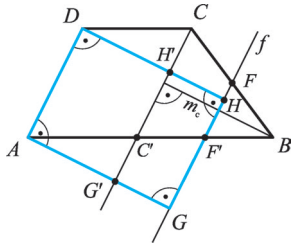
1531. $AE = EB = \frac{1}{2} AB$ és $AE \parallel DF$ és $DF = FC = \frac{1}{2} DC$ és $EB \parallel CF \Rightarrow AEFD$ és $EBCF$ egybevágó paralelogrammák $\Rightarrow t_{AEFD} = t_{EBCF} = \frac{1}{2} t_{ABCD}$. Az 1530. feladatból tudjuk, hogy $t_{EPF} =$

$= \frac{1}{2} t_{AEFD}$ és $t_{EQF} = \frac{1}{2} t_{EBCF} \Rightarrow t_{EQFP} = t_{EPF} + t_{EQF} = \frac{1}{2} t_{AEFD} + \frac{1}{2} t_{EBCF} = \frac{1}{2} t_{ABCD}$.

1532. $CF = FB$ és $f \parallel AD$. Húzzunk C-n át párhuzamost f-fel! Ez a két merőlegest H' és G'; AB-t C' pontban metszi. $\underline{t_{AG'H'D} = t_{AC'CD}}$, mert mindkettő paralelogramma, megegyezik egy-egy oldaluk és a hozzájuk tartozó magasság (AD, illetve DH'). $t_{G'GHH'} = G'H' \cdot H'H = AD \cdot H'H$ és $t_{CC'B} = \frac{1}{2} \cdot CC' \cdot m_c = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot m_c$. Mivel $f \parallel AD \parallel CC'$ és F felezi CB-t, az FF' középvonal $CC'B\triangle$-ben, ezért f felezi m_c-t: $m_c = 2HH' \Rightarrow \underline{t_{CC'B}} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot HH' \cdot 2 = \underline{t_{G'GHH'}}$. Az aláhúzottakból: $t_{ADHG} = t_{ABCD}$.

1533. Legyen E a BC szár felezőpontja. $AF = FD$ és $BE = EC \Rightarrow FE$ a trapéz középvonala, ezért felezi a trapéz magasságát, illetve $FECD$ és $ABEF$ is trapéz. $t_{FBC} = t_{FBE} + t_{FCE} = \frac{1}{2} \cdot FE \cdot \frac{m}{2} +$

1532.



$+ \frac{1}{2} \cdot FE \cdot \frac{m}{2} = \frac{1}{2} \cdot FE \cdot m = \frac{1}{2} \frac{AB + CD}{2} \cdot m = \frac{1}{2} t_{ABCD}$.

1534. Legyen M az átlók metszéspontja. $AM = MC \Rightarrow t_{ADM} =$

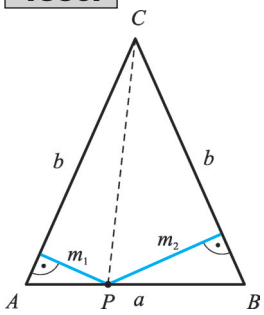
$= t_{CDM}$, illetve $t_{ABM} = t_{CBM}$, mert egy-egy oldaluk és az ahhoz tartozó magasságuk egyenlő. $\Rightarrow \underline{t_{ABD}} = t_{ADM} + t_{ABM} = t_{CDM} + t_{CBM} =$

$= \underline{t_{DBC}}$.

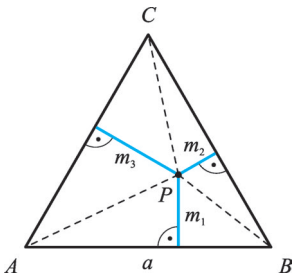
1535. $AF = FB$; CF súlyvonal $\Rightarrow t_{AFC} = t_{BFC} \Rightarrow \text{d}(A;\ \text{e}(C;F)) =$

$= \text{d}(B;\ \text{e}(C;F)) \Rightarrow t_{APC} = t_{BPC}$.

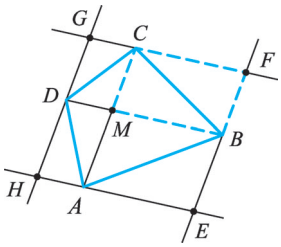
1536.



1537.



1538.



1536. Bontsuk fel az $ABC\triangle$-et a PC egyenessel két háromszögre! m_1 az $APC\triangle$ AC-hez, m_2 a $BPC\triangle$ BC-hez tartozó magassága. $T_{ABC}=\dfrac{b\cdot m_b}{2}=\dfrac{b\cdot m_1}{2}+\dfrac{b\cdot m_2}{2}\Rightarrow m_b=m_1+m_2$.

1537. Bontsuk fel a szabályos háromszöget a PA, PB, PC szakaszokkal három darab háromszögre! $T_{ABC}=T_{APB}+T_{BPC}+T_{APC}$. $\Rightarrow\dfrac{a\cdot m}{2}=\dfrac{a\cdot m_1}{2}+\dfrac{a\cdot m_2}{2}+\dfrac{a\cdot m_3}{2}\Rightarrow m=m_1+m_2+m_3$. A három távolság összege a háromszög magasságával egyenlő, ami P-től függetlenül állandó.

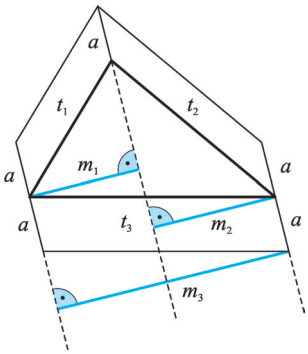
1538. $GH\|CA\|EF$ és $EH\|DB\|GF\Rightarrow DMCG$; $CMBF$; $HAMD$ és $AEBM$ paralelogramma $\Rightarrow$
$\Rightarrow t_{MCD}=\dfrac{1}{2}t_{DMCG}$; $t_{CMB}=\dfrac{1}{2}t_{MBFC}$; $t_{MDA}=\dfrac{1}{2}t_{HAMD}$; $t_{ABM}=\dfrac{1}{2}t_{AEBM}\Rightarrow t_{ABCD}=\dfrac{1}{2}t_{EFGH}$.

1539. $t_1+t_2=a\cdot m_1+a\cdot m_2=a\cdot(m_1+m_2)=a\cdot m_3=t_3$.

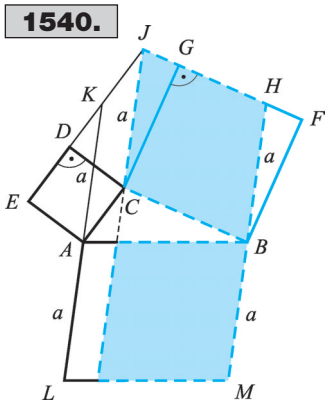
1540. $t_{ACDE}=t_{ACJK}$, illetve $t_{CBFG}=t_{CBHJ}$, mert közös egy-egy oldaluk és a hozzá tartozó magasságuk. Az 1539. feladatban láttuk, hogy $t_{ACJK}+t_{CBHJ}=t_{ABML}$. A fenti egyenlőségeket felhasználva: $t_{ACDE}+t_{CBFG}=t_{ABLM}$.

1541. $m_1+m_2=m_3+m_4\Rightarrow t_1+t_2=am_1+am_2=a(m_1+m_2)=a(m_3+m_4)=am_3+am_4=$
$=t_3+t_4$.

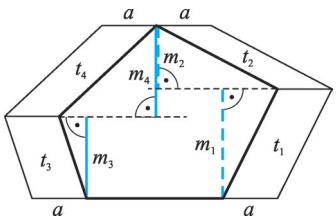
1539.



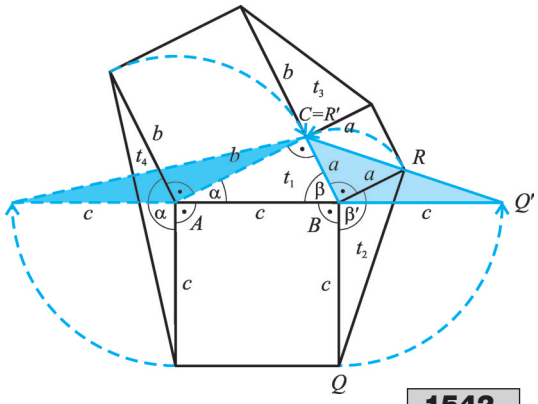
1540.



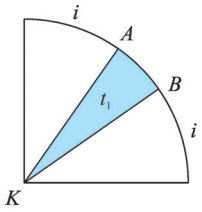
1541.

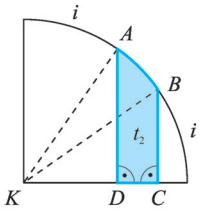


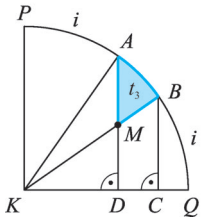
I



1542.







1543.

1542. ① $t_1 = \frac{1}{2}ab = t_3$. ② Forgassuk el a $BQR\triangle$-et B körül + 90°-kal → $BQ'R'\triangle \Rightarrow t_{BQ'R'} = t_{ABC} = t_1$, mert egy-egy oldaluk egyenlő és a hozzá tartozó magasságuk közös. ③ Hasonlóan láthatjuk be a negyedik háromszög területének az eredetivel való egyenlőségét.

1543. $PKA\sphericalangle = BKQ\sphericalangle$, mert i-hez tartozó középponti szögek és $PKA\sphericalangle = KAD\sphericalangle$, mert váltószögek. $\Rightarrow KAD\sphericalangle = BKQ\sphericalangle$, valamint $KA = KB \Rightarrow AKD\triangle \cong BKC\triangle$ (derékszögben is megegyeznek) $\Rightarrow t_{AKD} = t_{BKC}$; $t_{AKM} = t_{AKD} - t_{KMD} = t_{BKC} - t_{KDM} = t_{MDCB} \Rightarrow t_1 = t_{AKM} + t_3 = t_{MDCB} + t_3 = t_2$.

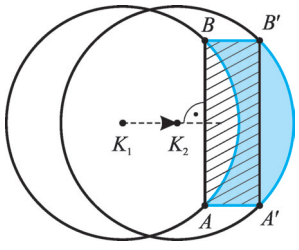
1544. Az AB húr és az AB ív határol egy körszeletet, ami egybevágó, tehát egyenlő területű az $A'B'$ húr és az $A'B'$ ív által határolt körszelettel. $\Rightarrow$ Az $AA'B'B$ téglalap területe egyenlő az AB ív által súrolt területtel.

1545. $RS = \frac{1}{2}AC = PQ$, mert RS és PQ középvonal. $t_{RDSM} + t_{QMPB} = t_{RDS} + t_{RSM} + t_{MQP} + t_{QPB} =$

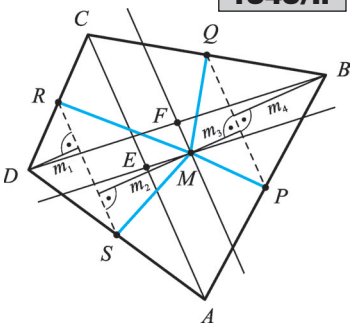
$$= \frac{1}{2}\cdot RS\cdot m_1 + \frac{1}{2}\cdot RS\cdot m_2 + \frac{1}{2}\cdot QP\cdot m_3 + \frac{1}{2}\cdot QP\cdot m_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot(m_1+m_2+m_3+m_4) =$$

$= \frac{1}{2}t_{ABCD}$; $m_1 + m_2 = m_3 + m_4$ miatt $t_{RDSM} = t_{QMPB} = \frac{1}{4}t_{ABCD}$. Hasonlóan belátható, hogy $t_{CRMQ} = t_{ASMP} = \frac{1}{4}t_{ABCD}$.

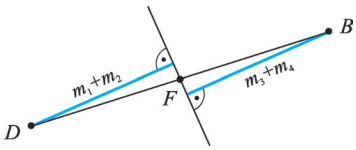
1544.



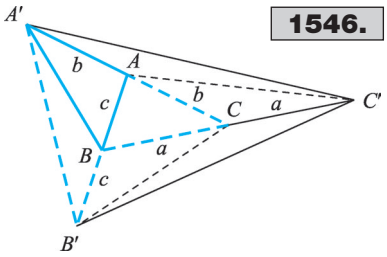
1545/I.



1545/II.

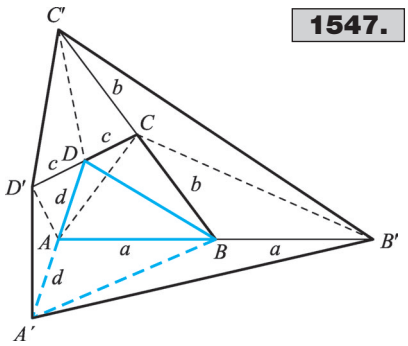


1546. AB súlyvonal $A'BC\triangle$-ben $\Rightarrow t_{A'AB} = t_{ABC}$ és $A'B$ súlyvonal $A'B'A\triangle$-ben $\Rightarrow t_{A'B'B} = t_{A'BA}$. AC súlyvonal $ABC'\triangle$-ben $\Rightarrow t_{ABC} = t_{ACC'}$ és AC' súlyvonal $A'CC'\triangle$-ben $\Rightarrow t_{A'AC'} = t_{ACC'}$. BC súlyvonal $AB'C\triangle$-ben $\Rightarrow t_{ABC} = t_{B'BC}$ és $B'C$ súlyvonal $B'BC'\triangle$-ben $\Rightarrow t_{B'BC} = t_{B'CC'}$. A fenti egyenlőségekből következik, hogy $t_{ABC} = t_{AA'B} = t_{A'B'B} = t_{BB'C} = t_{B'CC'} = t_{ACC'} = t_{A'AC'} \Rightarrow t_{A'B'C'} = \underline{\underline{7t_{ABC}}}$.



1546.

1547. AB súlyvonal $DBA'\triangle$-ben és $A'B$ súlyvonal $AA'B'\triangle$-ben $\Rightarrow t_{ADB} = t_{AA'B} = t_{A'BB'}$. CB súlyvonal $ACB'\triangle$-ben és CB' súlyvonal $BB'C'\triangle$-ben $\Rightarrow t_{ABC} = t_{BB'C} = t_{CC'B'}$. DC súlyvonal $BC'D\triangle$-ben és DC' súlyvonal $CC'D'\triangle$-ben $\Rightarrow t_{BDC} = t_{DCC'} = t_{DD'C'}$. AD súlyvonal $AD'C\triangle$-ben és AD' súlyvonal $A'D'D\triangle$-ben $\Rightarrow t_{ADC} = t_{ADD'} = t_{AA'D'}$. A fenti egyenlőségekből következik, hogy $t_{A'B'C'D'} = t_{ABCD} + t_{AA'B'} + t_{BB'C'} + t_{CC'D'} + t_{DD'A'} = t_{ABCD} + 2t_{ADB} + 2t_{ABC} + 2t_{BDC} + 2t_{ADC} = t_{ABCD} + 2t_{ABCD} + 2t_{ABCD} = \underline{\underline{5t_{ABCD}}}$.



1547.

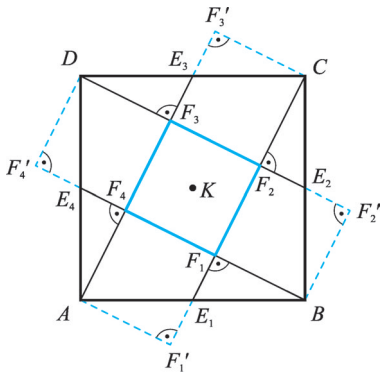
1548. $PQ = QR = RC$. AQ súlyvonal $APR\triangle$-ben és AR súlyvonal $AQC\triangle$-ben $\Rightarrow t_{APQ} = t_{AQR} = t_{ARC}$. BQ súlyvonal $BPR\triangle$-ben és BR súlyvonal $BQC\triangle$-ben $\Rightarrow t_{BPQ} = t_{BQR} = t_{BRC}$. A fenti egyenlőségekből következik, hogy $t_{ABQ} = t_{APQ} + t_{PBQ} = \frac{1}{3}t_{APC} + \frac{1}{3}t_{BPC} = \underline{\underline{\frac{1}{3}t_{ABC}}}$.

1549. Legyen M az átlók metszéspontja. $t_1 = t_2 \Rightarrow \underline{AM = MC}$, mert $ABM\triangle$ AM-hez tartozó magassága egyenlő $CBM\triangle$ CM-hez tartozó magasságával. Hasonlóan belátható, hogy $t_2 = t_3 \Rightarrow \underline{BM = MD}$. Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor a négyszög paralelogramma.

1550. A négyzet tengelyesen szimmetrikus AC-re, így tetszőleges $P \in AC$ esetén $PD = PB. \Rightarrow t_{PDC} = t_{BPC}$; $t_{ABPD} = 2t_{APB}$ szintén a szimmetria miatt. A szerkesztendő P pontra: $2t_{APB} = t_{PBC} \Rightarrow 2AP = PC$, mert a magasság egyenlő $\Rightarrow P$ az AC átló A-hoz közelebbi harmadolópontja.

1551. $AE_1C\triangle$-nek, $E_1E_2C\triangle$-nek és $E_2BC\triangle$-nek közös a C-ből induló magassága és egyenlő a C-vel szemközti oldala, ezért területük is egyenlő. $\Rightarrow t_{AE_1C} = \frac{1}{3}t_{ABC}$. E_1F súlyvonal az $AE_1C\triangle$-ben $\Rightarrow t_{AE_1F} = \frac{1}{2}t_{AE_1C} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot t_{ABC} = \underline{\underline{\frac{1}{6}t_{ABC}}}$.

1552. Tükrözzük F_i-t E_i-re $\Rightarrow F_i'$. K középpont körüli 90°-os forgásszimmetria miatt $F_1F_2F_3F_4$ négyzet, és egybevágó a többi kis négyzettel. $\Rightarrow t_{ABCD} = t_{AF_1'F_1BF_2'F_2CF_3'F_3DF_4'F_4} = 5t_{F_1F_2F_3F_4} \Rightarrow t_{F_1F_2F_3F_4} = \underline{\underline{\frac{1}{5}t_{ABCD}}}$.



1552.

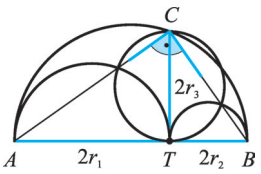
1553. Felhasználjuk, hogy az ABC derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint $a^2 + b^2 - c^2 = 0$.

$$t_1 + t_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{c}{2}\right)^2\pi =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 - c^2\right) + \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab = t_{ABC}.$$

I

1554.



1554. Thalész tétele szerint $ACB\sphericalangle = 90°$. Az ABC derékszögű háromszögben a magasságtétel miatt: $(2r_3)^2 = 2r_1 \cdot 2r_2 \Rightarrow r_3^2 = r_1 \cdot r_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2}r_1^2\,\pi - \frac{1}{2}r_2^2\,\pi = \frac{1}{2}\,\pi \cdot 2r_1r_2 = \pi \cdot r_3^2 = t_2$.

1555. Az a, b, c oldalak fölé írt hasonló sokszögek területe t_a; t_b; t_c. A derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint: $\frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$.

A hasonlóság miatt: $t_a : t_b : t_c = a^2 : b^2 : c^2 \Rightarrow t_a = t_c \cdot \frac{a^2}{c^2}$ és $t_b = t_c \cdot \frac{b^2}{c^2} \Rightarrow t_a + t_b = \frac{a^2+b^2}{c^2} = t_c$.

1556. Az 1555. feladatból tudjuk, hogy ha a két adott szabályos háromszög oldala egy derékszögű háromszög két befogója, akkor az átfogóra emelt szabályos háromszög területe egyenlő lesz a két adott háromszög területének összegével.

1557. Jelöljük a harmadik oldalhoz tartozó magasságot m-mel. A keletkezett derékszögű háromszögekre az 1555. feladatból következik: $t_1 = t_3 + m^2$ és $t_2 = t_4 + m^2 \Rightarrow t_1 - t_3 = m^2 = t_2 - t_4$. Ha a háromszög derékszögű, akkor t_3 vagy t_4 0 is lehet, az állítás ekkor is igaz.

1558. A szögek egyenlősége miatt $AT_cC\triangle \sim BT_bA\triangle \Rightarrow AC : AT_c = BA : AT_b \Rightarrow b : c_2 = c : b_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow bb_2 = cc_2 \Rightarrow$ A színezett téglalapok területe egyenlő.

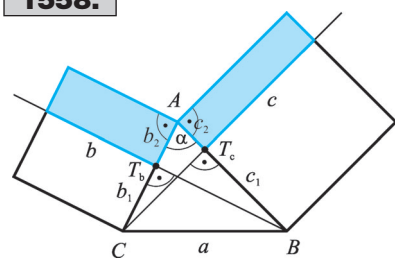
1559. Legyen a négyzet oldala $2a$, ekkor területe $4a^2$. A t_2 területet a $2a$ sugarú negyedkör és az a sugarú félkör területével fejezzük ki: $t_2 = \frac{1}{4} \cdot (2a)^2\pi - 2 \cdot \frac{1}{2}a^2\pi + t_1 = t_1$. Az ábrán a színezett síkidomok egybevágók. $\Rightarrow t_3 = a^2 = \frac{1}{4}t_{\text{négyzet}}$.

1560. Legyen az AB oldallal párhuzamos e egyenesre $AC \cap e = A_1$ és $BC \cap e = B_1$. $AB \parallel e \Rightarrow$
$\Rightarrow CA_1B_1\triangle \sim CAB\triangle \Rightarrow t_{CA_1B_1} = \lambda^2 \cdot t_{ABC} = \frac{1}{2}t_{ABC} \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CA_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}CA$ és
$CB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}CB$ (CA_1 egy olyan derékszögű háromszög befogója, aminek átfogója CA.).

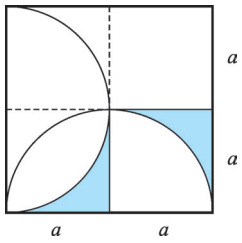
1561. Pitagorasz tétele alapján az adott négyzetek oldalaiból derékszögű háromszöget szerkesztünk, amelynek átfogója a nagyobb négyzet oldala, egyik befogója a kisebb négyzet oldala. A keresett négyzet oldala a derékszögű háromszög másik befogója.

1562. A szerkesztendő négyzet oldala b; $t_1 = a^2$ és $t_2 = b^2 = \frac{1}{3}a^2 = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a$. A magasságtétel alapján b szakasz hossza megszerkeszthető egy $\left(a + \frac{1}{3}a\right)$ átfogójú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságaként.

1558.



1559.



1563. Az adott négyzet oldala a; területe $t_1 = a^2$; $t_2 + t_3 = t_1 \Rightarrow (b-x)^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow$ Pitagorasz tétele alapján derékszögű háromszöget keresünk, aminek átfogója a, befogóinak összege pedig b. Forgassuk le a szerkesztendő $ABC\triangle$ $AC = x$ befogóját az AB befogó egyenesére $\Rightarrow D$ pont, és $DB = DA + AB = x + b - x = b$. $AC = AD \Rightarrow ADC\sphericalangle = 45°$; $b > a$. A szerkesztés: ① $DB = b$. ② D-ben 45° DB-re. ③ B középpontú, a sugarú kör. ④ A kör és a szög szárának metszéspontja C. ⑤ C merőleges vetülete DB-re A. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

1564. Bármely két kör hasonló, ezért $\frac{t'}{t} = 2 = \lambda^2$ miatt $\frac{r'}{r} = \lambda = \sqrt{2} \Rightarrow r' = \sqrt{2}\ r$ alapján r' szerkeszthető.

1565. Ha a körgyűrű területe egyenlő a belső kör területével, akkor $\frac{t'}{t} = \frac{1}{2}$. A körök hasonlósága miatt $\lambda^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{r'}{r} \Rightarrow r' = \frac{r}{\sqrt{2}}$ alapján r' szerkeszthető.

1566. Az adott csúccsal szemközti oldalt n darab egyenlő hosszúságú szakaszra osztjuk, és az osztópontokat összekötjük C-vel. Az így kapott kis háromszögek egy-egy oldala és az ehhez tartozó magassága egyenlő, így területük is egyenlő.

1567. AC átló felezi az $ABCD$ paralelogramma területét. Osszuk n darab egyenlő hosszúságú szakaszra BC-t és DC-t, az osztópontokat kössük össze A-val (C-t is). Így $2n$ darab egyenlő területű kis háromszöget kapunk. B-ből indulva minden második osztópontot tartsunk meg, így n darab egyenlő területű síkidomot kapunk. (Ha n páros, akkor háromszögek, ha n páratlan, akkor $(n-1)$ darab háromszög és egy négyszög.)

1568. CF súlyvonal, ezért $t_{AFC} = t_{BFC}$. Osszuk AC-t, illetve BC-t három-három egyenlő hosszú szakaszra! FP_1; FP_2; FC; FQ_2; FQ_1 az $ABC\triangle$-et hat egyenlő területű háromszögre bontja. $\Rightarrow$ $\Rightarrow t_{AFP_2} = t_{P_2FQ_2C} = t_{Q_2FB}$.

1569. AE súlyvonal felezi az $ABC\triangle$ területét. AE E-hez közelebbi P harmadolópontját B-vel, illetve C-vel összekötő szakaszok az $ABE\triangle$, illetve az $AEC\triangle$ területét 2 : 1 arányban osztják. $\Rightarrow$ $\Rightarrow t_{APC} = t_{ABP} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} t_{ABC} = \frac{1}{3} t_{ABC} \Rightarrow t_{PBC} = \frac{1}{3} t_{ABC}$. A megoldás a háromszög súlypontja.

1570. Legyen a háromszög átfogója $2b$, befogója a. Pitagorasz tételét alkalmazva: $a^2 = 2b^2$; $t_2 = \frac{1}{2} b^2 \pi + t_1 - \frac{1}{4} a^2 \pi = \frac{1}{2} b^2 \pi + t_1 - \frac{1}{4} \cdot 2b^2 \pi = t_1$.

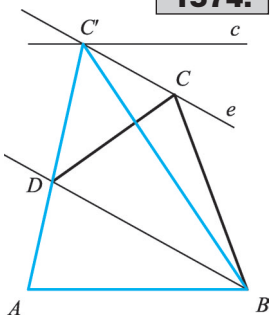
1571. A szerkesztés: ① AB-vel párhuzamos C-n át: e. ② AB-re A-ban adott α' szög $\rightarrow b'$. ③ $b' \cap e = C'$. $t_{ABC'} = t_{ABC}$, mert AB és a hozzá tartozó magasság közös.

1572. Legyen DB a paralelogramma és a rombusz egyenlő átlója. Legyen $c \parallel e(D; B)$. Tetszőleges $C' \in c$ esetén $t_{DBC} = t_{DBC'} \Rightarrow t_{ABCD} = t_{A'BC'D}$. A szerkesztés: ① DB felezőmerőlegese: f. ② DB-vel párhuzamos C-n át: c. ③ DB-vel párhuzamos A-n át: a. ④ $f \cap c = C'$ és $f \cap a = A' \rightarrow$ $\rightarrow A'BC'D$ rombusz. ⑤ Ha az 1–4. lépéseket AC átlóból kiindulva végrehajtjuk, $AB'CD'$ rombuszhoz jutunk. 1 vagy 2 megoldás lehet.

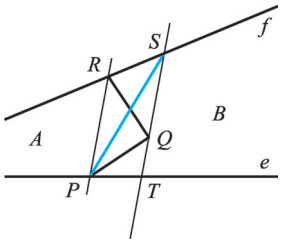
1573. Ha két paralelogramma egyik oldala és az ahhoz tartozó magassága egyenlő, akkor területük egyenlő. A szerkesztés: ① A középpontú, AB sugarú kör: k. ② $k \cap e(D; C) = D'$. ③ A-t tükrözzük BD' felezőpontjára: $C' \rightarrow ABC'D'$ rombusz. ④ A középpontú, AD sugarú kör: l. ⑤ $l \cap e(B; C) = B''$. ⑥ A-t tükrözzük $B''D$ felezőpontjára: $C'' \rightarrow ABC''D''$ rombusz. 2, 3 vagy 4 megoldás lehet.

I

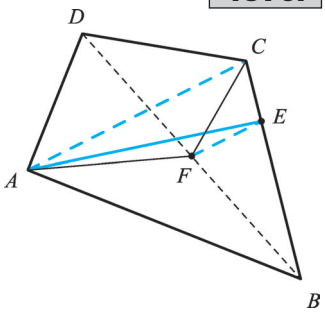
1574.



1575.



1576.

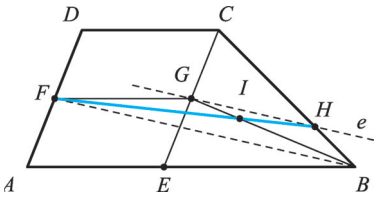


1574. Felhasználjuk, hogy $BCC'D$ trapézban $t_{BDC} = t_{BDC'}$. A szerkesztés: ① BD-vel párhuzamos C-n át: e. ② $e \cap \mathrm{e}(A; D) = C' \to ABC'\triangle$ ($t_{ABC'} = t_{ABCD}$). ③ C'-n át párhuzamos AB-vel: c. ④ Bármely $C'' \in c$ esetén $ABC''\triangle$ is megoldás. A négyszög bármely oldalából indulunk ki, végtelen sok megoldás van.

1575. Felhasználjuk, hogy $PRST$ trapézban $PQR\triangle$ területe egyenlő $PRS\triangle$ területével. $\Rightarrow t_A$ nem változik, ha $PQR\triangle$ helyett $PRS\triangle$ tartozik az A síkidomhoz. Hasonlóan: $t_{TSP} = t_{TPQ} + t_{QPS} = t_{TPQ} + t_{QRS} \Rightarrow t_B$ nem változik, ha $TPQ\triangle$ és $QRS\triangle$ helyett $TSP\triangle$ tartozik a B síkidomhoz.

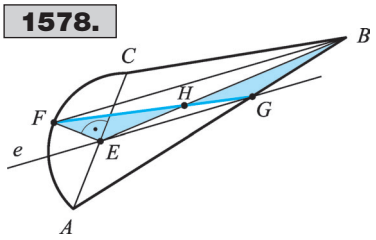
A szerkesztés: ① Q ponton át párhuzamos PR egyenessel: t. ② $t \cap e = T$ és $t \cap f = S$. ③ PS vagy RT egyenese jelöli ki az új határvonalat. 2 megoldás van.

1577.



1576. Az $ABCD$ négyszög DB átlójának F felezőpontját A-val és C-vel összekötő szakaszok súlyvonalak. $\Rightarrow t_{ADF} = t_{ABF}$ és $t_{CDF} = t_{CBF} \Rightarrow t_{ADCF} = t_{AFCB}$. Legyen $FE \| AC$! $t_{AFC} = t_{AEC} \Rightarrow t_{ADCF} = t_{ADCE} \Rightarrow AE$ két egyenlő területű darabra vágja az $ABCD$-t. Ha $F \in AC$, akkor $ABCD$ deltoid, ezért az AC átló lehet a megoldás.

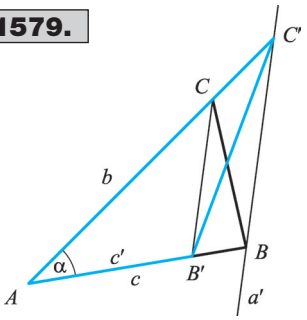
1578.



1577. 1. eset: $AB > CD$. Felhasználjuk: Ha $CE \| AD$, illetve $CG = GE$, akkor $AECD$ paralelogramma és az FG középvonal felezi a paralelogramma területét, illetve GB súlyvonal és felezi az $EBC\triangle$ területét. $\Rightarrow t_{AFGB} = t_{FDCBG}$. Ha $GH \| FB$, akkor $t_{FBG} = t_{FBH} \Rightarrow t_{FIG} = t_{GIH} \Rightarrow t_{FABH} = t_{FHCD} \Rightarrow FH$ a keresett egyenes. A szerkesztés: ① C-n át párhuzamos DA-val $\to E \in AB$. ② CE felezőpontja: G. ③ G-n át párhuzamos FB-vel: e. ④ $e \cap BC = H \to FH$ a megoldás.

2. eset: Ha $AB = CD$, akkor $ABCD$ trapéz paralelogramma. $\Rightarrow$ A középvonal egyenese a megoldás.

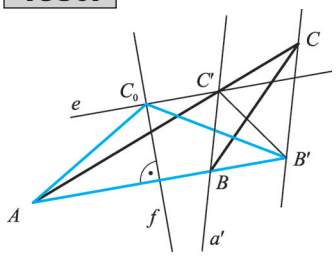
1579.



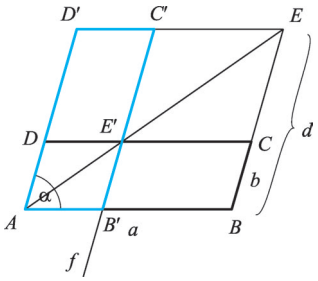
1578. $AE = EC \Rightarrow FE \perp AC \Rightarrow FE$ felezi az ACF körszelet területét. BE súlyvonal, ezért felezi az $ABC\triangle$ területét. Legyen $FB \| EG$! $\Rightarrow t_{FEB} = t_{FGB}$, valamint $t_{FEH} = t_{HBG} \Rightarrow \Rightarrow FG$ a keresett egyenes. A szerkesztés: ① AC húr felezőpontja: E. ② AC ív felezőpontja: F. ③ E-n át párhuzamos BF-fel: e. ④ $e \cap \mathrm{e}(A; B) = G \to FG$ a megoldás.

1579. A szerkesztés: ① $AB' = c'$. ② CB'-vel párhuzamos B-n át: a'. ③ $a' \cap \mathrm{e}(A; C) = C'$. A szerkesztésből adódik, hogy a $B'BC'C$ négyszög trapéz $\Rightarrow t_{B'C'C} = t_{B'BC}$ ($B'C$ oldaluk és az ehhez tartozó magasságuk közös) $\Rightarrow \Rightarrow t_{AB'C'} = t_{AB'C} + t_{B'C'C} = t_{AB'C} + t_{B'BC} = t_{ABC}$. Egyértelmű a megoldás.

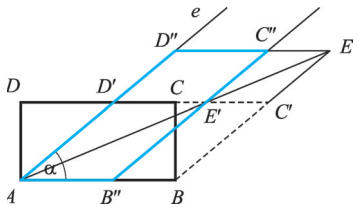
1580.



1581.



1582.



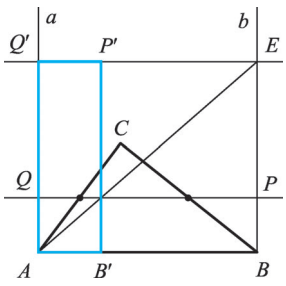
1580. Az 1579. feladatban láttuk, hogy ha $BC' \parallel B'C$, akkor $t_{AB'C'} = t_{ABC}$. Tetszőleges $P \in e$ esetén $t_{APB'} = t_{AC'B'}$. A szerkesztés: ① e(A; B)-re adott c' alap: AB'. ② $B'C$-vel párhuzamos B ponton át: a'. ③ $a' \cap$ e(A; C) = C'. ④ C'-n át párhuzamos AB-vel: e. ⑤ AB' felezőmerőlegese: f. ⑥ $f \cap e = C_o \Rightarrow AB'C_o\triangle$ a megoldás. Egyértelmű a megoldás.

1581. ① Szerkesszük meg az a, b oldalú α szögű $ABCD$ paralelogrammához az a, d oldalú α szögű $ABED'$ paralelogrammát. ② e(A;E) $\cap$ e(C;D) = E'. ③ Az E' ponton át AD-vel húzott párhuzamos: f. ④ $f \cap$ e(A;B) = B' és $f \cap$ e(D';E) = C'. A szerkesztésből adódik, hogy $AB'E'D$; $B'BCE'$; $E'CEC'$; $DE'C'D'$ négyszögek paralelogrammák. Felhasználva, hogy a paralelogramma átlója felezi a területet: $t_{B'BCE'} = t_{ABE} - t_{AB'E'} - t_{E'CE} = t_{AD'E} - t_{ADE'} - t_{E'C'E} = t_{DE'C'D'}$. A fenti egyenlőséget felhasználva: $t_{AB'C'D'} = t_{AB'E'D} + t_{DE'C'D'} = t_{AB'E'D} + t_{B'BCE'} = t_{ABCD}$. Tehát az $AB'C'D'$ paralelogramma a megoldás. A b, d oldalú α szögű paralelogrammából kiindulva $AB'C'D'$-vel egybevágó megoldáshoz jutunk.

1582. A szerkesztés: ① AB-re A-ban α szög → szára e. ② $e \cap DC$ = = $D' \rightarrow ABC'D'$ paralelogramma ($t_{ABCD} = t_{ABC'D'}$). ③ adott szögű és oldalú $ABC'D'$-vel egyenlő területű paralelogramma: $AB''C''D''$ (lásd az 1581. feladat megoldásában látott eljárást).

1583. A szerkesztés: ① $ABC\triangle$ AB-vel párhuzamos középvonalának egyenese: k. ② A-ban merőleges AB-re: a. ③ B-ben merőleges AB-re: b. ④ $a \cap k = Q$ és $b \cap k = P \Rightarrow ABPQ$ téglalap ($t_{ABPQ} = t_{ABC}$). ⑤ adott oldalú $ABPQ$-val egyenlő területű téglalap → $AB'P'Q'$ (lásd az 1581. feladat megoldásában látott eljárást).

1583.



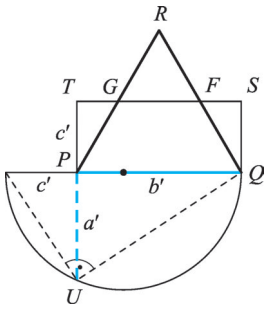
1584. Felhasználjuk: Bármely két szabályos háromszög, illetve bármely két négyzet hasonló.

Induljunk ki egy tetszőleges (b' oldalú) szabályos háromszögből és szerkesszünk egy vele egyenlő területű (a' oldalú) négyzetet. A szerkesztés: ① A $PQR\triangle$-gel egyenlő területű $PQST$ téglalap szerkesztése: *a)* $PQR\triangle$ PQ-val párhuzamos középvonalának egyenese → e(F; G). *b)* P-ben, illetve Q-ban PQ-ra állított merőlegesek kimetszik e(F; G)-ből a T és S pontokat ($t_{PQR} = 1/2 \cdot b' \cdot 2c' = b' \cdot c' =$ = t_{PQST}). ② A $PQST$ téglalappal egyenlő területű négyzet szerkesztése:

a) $t_{PQST} = b' \cdot c' = (a')^2 = t_{\text{négyzet}} \Rightarrow a'$ szakasz a b' és c' szakaszok mértani közepe.

b) a' a magasságtétel segítségével szerkeszthető (lásd az ábrát). Amilyen arányú hasonlóság viszi az a' oldalú négyzetet az adott négyzetbe, olyan arányú hasonlóságot alkalmazunk a b' oldalú szabályos háromszögre, és így a keresett háromszöget kapjuk.

1584.



II. Térgeometria

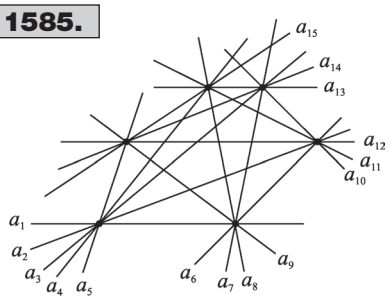
II

Térelemek

Illeszkedési feladatok

1585. *a)* 4 pont 6 egyenest határoz meg. *b)* 5 pont 10 egyenest határoz meg. *c)* 6 pont 15 egyenest határoz meg. *d)* n pont $n \cdot \frac{n-1}{2}$ egyenest határoz meg.

1585.



1586. Összesen $\underline{\underline{14}}$ egyenest.

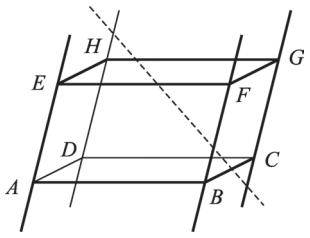
1587. Jelöljük az a pont egyenesét e-vel, a b pont egyenesét f-fel. e egyenes pontjai egymással $\Rightarrow 1$ egyenes. f egyenes pontjai egymással $\Rightarrow 1$ egyenes. 1 pont az e egyenesről az f egyenes pontjaival $\Rightarrow b$ darab egyenes. a darab pont az e egyenesről az f egyenes pontjaival $\Rightarrow ab$ darab egyenes. Összesen: $\underline{\underline{(a \cdot b + 2)}}$ darab egyenes.

1588. *a)* Az A, B, C, D pontok $\underline{\underline{4}}$ síkot határoznak meg: $[ABC]$; $[ABD]$; $[BCD]$; $[ACD]$. *b)* Az A, B, C, D, E pontok $\underline{\underline{10}}$ síkot határoznak meg: $[ABC]$; $[ABD]$; $[BCD]$; $[ACD]$; $[ABE]$; $[BCE]$; $[ACE]$; $[ADE]$; $[BDE]$; $[CDE]$. *c)* Az első pontot 6-féleképpen, a másodikat 5-féleképpen, a harmadikat 4-féleképpen választhatom. $6 \cdot 5 \cdot 4$-féle sorrend szerint választhatunk. A pontok sorrendje nem számít a sík meghatározása szempontjából, így a fenti lehetőségek számát osztjuk a három pont egymás közti lehetséges sorrendjeinek számával. $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{\underline{20}}$-féle sík lehetséges. *d)* n pontból $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ a lehetséges kiválasztási sorrend. $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ a három pont egymás közti sorrendje. $\underline{\underline{\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}}}$-féle sík lehetséges.

1589. n darab pont az m darab egyenessel legfeljebb $\underline{\underline{m \cdot n}}$ különböző síkot feszít ki.

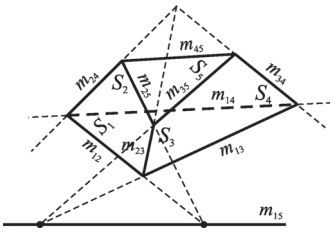
1590. Jelölje a párhuzamos egyeneseket a, b, c, d, és messe az e egyenes a c-t és d-t. 6 síkot határoznak meg: $[a;b]$; $[a;c]$; $[a;d]$; $[b;c]$; $[b;d]$; $[c;d]$. e az a és b egyenesekkel kitérő, így nincs közös síkjuk. $e \in [c;d]$. A feladatnak megfelelő elrendezést szemléltethetünk az $ABCDEFGH$ paralelepipedon segítségével: $e(A;E) = a$, $e(B;F) = b$, $e(C;G) = c$, $e(D;H) = d$, a szaggatott vonal jelöli az e egyenest.

1590.



II

1592.



1591. *a)* 3 síkot határoznak meg: $[a;b]$; $[a;c]$; $[b;c]$. *b)* 6 síkot határoznak meg: $[a;b]$; $[a;c]$; $[a;d]$; $[b;c]$; $[b;d]$; $[c;d]$. *c)* Egy kiválasztott egyenessel bármelyik a négy többi közül egy-egy síkot ad $\Rightarrow$ 4 sík. 5 egyeneshez $5 \cdot 4 = 20$ sík tartozna. Minden síkot kétszer számoltunk, így valójában 5 egyenes $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ síkot határoz meg. *d)* 6 egyenes $\frac{6 \cdot 5}{2} = \underline{\underline{15}}$ síkot határoz meg. *e)* n egyenes $\underline{\underline{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}}$ síkot határoz meg.

1592. A metszésvonalak száma akkor maximális, ha a síkok közül semelyik kettő nem párhuzamos. *a)* $\underline{3}$ metszésvonal. *b)* $\underline{6}$ metszésvonal. *c)* $\underline{\underline{10}}$ metszésvonal. *d)* Bármely két sík metszi egymást $\Rightarrow$ egy tetszőleges síkon 5 metszésvonal van, ami a többi síktól származik. 6 síkon $6 \cdot 5 = 30$ metszésvonal lenne, de minden metszésvonalat két síkon vettünk számításba, így $\frac{30}{2} = \underline{\underline{15}}$ a metszésvonalak száma. *e)* $\underline{\underline{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}}$ a metszésvonalak száma.

1593. Jelölje a párhuzamos síkokat $S_1, S_2, \dots S_a$, a közös m metszésvonalú síkokat $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots \Sigma_b$. Bármely Σ, sík az S síkokkal a darab metszésvonalat eredményez. b darab Σ síknak az a darab S síkkal $(a \cdot b)$ darab metszésvonala van. A Σ síkoknak 1 közös metszésvonala van. Összesen: $\underline{\underline{a \cdot b + 1}}$ a metszésvonalak száma.

1594. Legyen a két kitérő egyenes az a és a b egyenes. Húzzunk párhuzamost $M \in a$ ponton át b-vel $\Rightarrow b'$. *a és b'* metsző egyenesek $\Rightarrow [a; b']$ sík. b párhuzamos $[a, b']$-vel, mert ha b döfné az $[a, b']$ síkot, akkor ez a döféspont rajta lenne $[b, b'] \cap [a, b']$ metszésvonalon, ami nem más, mint b'. Ez b és b' párhuzamossága miatt lehetetlen. b-n át hasonlóan vehetünk fel a-val párhuzamos síkot.

1595. Vegyük az a és b egyenes által kifeszített Σ síkot. $S_1 \cap \Sigma = a$; $S_2 \cap \Sigma = b$. Tegyük fel, hogy a egyenes P pontban metszi az $S_1 \cap S_2 = m$ metszésvonalat. $P \in S_2$ és $P \in \Sigma$ miatt $P \in S_2 \cap \Sigma = b$, ami ellentmond a és b párhuzamosságának.

1596. Legyen a párhuzamos az S_1 és S_2 síkokkal. Jelöljük a két sík metszésvonalát m-mel. A bizonyításunk indirekt. **1. eset:** Tegyük fel, hogy a metszi m-et! $a \cap m \in S_1$ miatt ez ellentmond a és S_1 párhuzamosságának.
2. eset: Tegyük fel, hogy a és m kitérők! Fektessünk a-n át m-mel párhuzamos síkot $\Rightarrow [a; m']$, ahol m' párhuzamos m-mel és metszi a-t. $[a; m']$ nem lehet S_1-gyel is és S_2-vel is párhuzamos, így feltehető, hogy $[a; m']$ nem párhuzamos S_1-gyel. Legyen $[a; m'] \cap S_1 = e$. $m' \in [a; m']$, $m \in S_1$ és m, m' párhuzamossága miatt teljesülnek az 1595. feladat feltételei, így m' párhuzamos e-vel. a és m' metsző egyenesek, m' és e párhuzamosak, a, m' és e egy síkban vannak $\Rightarrow a \cap e \neq \emptyset \Rightarrow$ $\Rightarrow a \cap S_1 \neq \emptyset$, ez pedig ellentmond a és S_1 párhuzamosságának.

1597. Jelöljük az S síkot metsző e egyenes döféspontját D-vel. Legyen Σ egy e-re fektetett tetszőleges sík és $S \cap \Sigma = m$. $D \in \Sigma$, mert $D \in e$; $D \in S$, mert $D = e \cap S \Rightarrow D \in \Sigma \cap S = m \Rightarrow D$ rajta van a metszésvonalon.

1598. Legyen $S_1 \cap S_2 = m_{12}$, $S_2 \cap S_3 = m_{23}$ és $S_3 \cap S_1 = m_{13}$. Legyen $m_{12} \cap m_{13} = M$. $M \in m_{12} \Rightarrow$ $\Rightarrow M \in S_1$ és $\underline{M \in S_2}$; $M \in m_{13} \Rightarrow M \in S_1$ és $\underline{M \in S_3}$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow M \in S_2 \cap S_3 =$ $= m_{23} \Rightarrow$ a harmadik metszésvonal is átmegy M-en.

1599. Legyen $S_1 \parallel S_2 \nparallel S_3$. Legyen $S_3 \cap S_1 = m_{13}$ és $S_2 \cap S_3 = m_{23}$. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy m_{13} és m_{23} nem párhuzamosak. Mivel egy síkban vannak, ezért létezik a P metszés-

pontjuk. $P \in m_{13} \Rightarrow \underline{P \in S_1}$ és $P \in S_3$; $P \in m_{23} \Rightarrow \underline{P \in S_2}$ és $P \in S_3$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow P \in S_1 \cap S_2$, ami ellentmondás, mivel $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Tehát m_{13} és m_{23} párhuzamosak.

1600. Legyen S a P és b által kifeszített sík. Legyen $a \cap S = M$. MP egyenes megfelel az elvárásnak, ha MP nem párhuzamos b-vel; ugyanis $e(M; P)$ metszi a-t is, b-t is és átmegy P-n. Ha MP párhuzamos b-vel vagy $a \cap S = \emptyset$, akkor nincs megoldás, ahogy ezt az 1590. ábrán is szemléltethetjük: $e[E; H] = a$, $e[B; F] = b$ és P pont az A vagy a G csúcs.

1601. Jelöljük a kitérő egyeneseket a-val, b-vel, a harmadik egyenest c-vel. Húzzunk párhuzamost b egy tetszőleges pontján át c-vel $\Rightarrow c'$. Legyen $[c'; b] = S$ és $a \cap S = M$. Húzzunk párhuzamost M-en át c'-vel $\Rightarrow e$. e megfelelő, mert metszi a-t is, b-t is, és $c \parallel c' \parallel e \Rightarrow c \parallel e$. Nincs megoldás, ha $c \parallel b$ vagy $a \parallel S$.

1602. Legyenek a és b metsző egyenesek, a és c, a és d, b és c, b és d, c és d kitérő egyenesek. Legyen $S = [a; b]$, $S \cap c = C$ és $S \cap d = D$. $e(C; D) = e$ megfelelő egyenes. Nincs megoldás, ha $c \parallel S$ vagy $d \parallel S$ vagy $CD \parallel a$ vagy $CD \parallel b$.

1603. Az 1600. feladatban láttuk, hogy néhány kivételtől eltekintve bármely P pont és rá nem illeszkedő a, b kitérő egyenespár esetén van olyan egyenes, amely átmegy P-n és metszi a-t és b-t. A harmadik kitérő egyenesnek nincs közös pontja a-val és b-vel, így a kivételektől eltekintve bármely pontjához szerkeszthető a-t, b-t metsző egyenes. Tehát végtelen sok ilyen egyenes létezik.

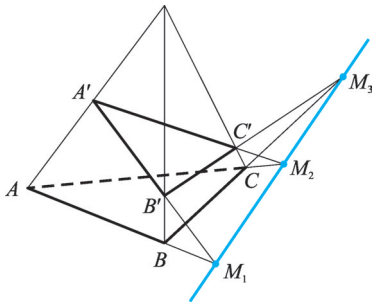
1604. Legyen a síkok metszésvonala m, a kitérő egyenesek legyenek a és b. Ha a szerkesztendő egyenes párhuzamos S_1-gyel és S_2-vel , akkor párhuzamos m-mel és viszont. Az 1601. feladat módszerével szerkesszünk olyan e egyenest, ami párhuzamos m-mel, és metszi a-t és b-t.

1605. Ha két egyenes metszéspontján nem megy át egy harmadik egyenes, de mindkét egyenest metszi, akkor illeszkedik azok síkjára, hiszen ha az egyenesnek egy síkkal két közös pontja van, akkor minden pontjuk közös. Ez a gondolatmenet folytatható minden további egyenes és a síkban lévő kettő felhasználásával. Ha a fenti eset nem áll fenn, akkor az egyenesek egy pontban metszik egymást.

1606. *a)* Legyen az $ABC\triangle$ síkja S, az $A'B'C'\triangle$ síkja S'. S nem párhuzamos S'-vel, mivel $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ és $AC \cap A'C'$ nem üres. $e(A; B) \cap e(A'; B') = M_1$; $M_1 \in S \cap S'$. $e(B; C) \cap e(B'; C') = M_3$; $M_3 \in S \cap S'$. $e(A; C) \cap e(A'; C') = M_2$; $M_2 \in S \cap S'$. A két sík metszésvonala egyenes, tehát a metszéspontok egy egyenesen vannak.

b) Ha AA' és BB' metszik egymást, akkor metszéspontjukon CC' is átmegy. Nem fordulhat elő ugyanis, hogy AA' és BB' metszik egymást, CC' pedig párhuzamos pl. AA'-vel. Ekkor CC' és BB' kitérők lennének (metszők nem lehetnek, mert akkor mindhárman egy síkban lennének), ami ellentmond annak, hogy B, C, C' és B' egy síkban vannak. Ha viszont páronként metszik egymást, akkor az 1605. feladat állítása szerint csak egy pontban metszhetik egymást, mivel nincsenek egy síkban. Ha van köztük két párhuzamos, akkor a harmadik is párhuzamos lesz velük.

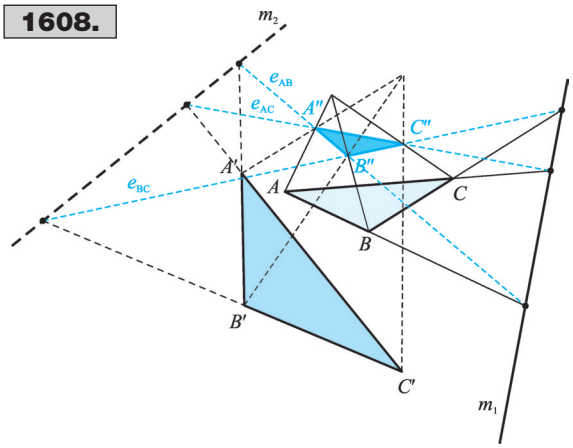
1606.



1607. Tegyük fel, hogy AA' metszi BB'-t és AA' párhuzamos CC'-vel $\Rightarrow$ (1) CC' metszi BB'-t vagy (2) CC' és BB' kitérők. **(1) esetben** a három egyenes egy síkban lenne, ami ellentmondás. **(2) esetben** $BC \parallel B'C'$ miatt $BCC'B'$ trapéz $\Rightarrow B, C, B', C'$ egy síkban vannak, tehát CC', BB' nem lehetnek kitérők. Ha tehát AA' és BB' metszők, akkor CC' is metszi mindkettőt. Térbeli egyenesekről lévén szó, az 1605. feladat állítása miatt egy ponton mennek át. Az adott pontok egy háromszög alapú csonka gúla csúcsai. Ha van köztük két párhuzamos, akkor a harmadik is párhuzamos velük. Az adott pontok egy háromszög alapú hasáb csúcsai.

II

1608.



1608. Legyen $S \cap [ABC] = m_1$ és $S \cap [A'B'C'] = m_2$. Az 1606. feladatban láttuk, hogy a szerkesztendő $A''B''C''\triangle$ megfelelő oldalegyeneseire: $A''B'' \cap AB \in m_1$, $A''C'' \cap AC \in m_1$ és $B''C'' \cap BC \in m_1$.
Hasonlóan $A''B'' \cap A'B' \in m_2$, $A''C'' \cap A'C' \in m_2$ és $B''C'' \cap B'C' \in m_2$.
A szerkesztés: ① $A'B' \cap m_2$ és $AB \cap m_1$ összekötő egyenese e_{AB}.
② $A'C' \cap m_2$ és $AC \cap m_1$ összekötő egyenese e_{AC}.
③ $B'C' \cap m_2$ és $BC \cap m_1$ összekötő egyenese e_{BC}.
④ $e_{AB} \cap e_{AC} = A''$; $e_{AB} \cap e_{BC} = B''$; $e_{AC} \cap e_{BC} = C'' \Rightarrow A''B''C''\triangle$.

Térelemek távolsága és hajlásszöge

1609. Jelöljük a síkot S-sel és egy tetszőleges pontját P-vel. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy két olyan egyenes van P-ben, ami merőleges S-re $\Rightarrow m_1, m_2$. Vegyük m_1 és m_2 metsző egyenesek síkját $\Rightarrow \Sigma$. Legyen $\Sigma \cap S = m$. $m, m_1, m_2 \in \Sigma$, m egyenes P pontjában két merőleges nem lehet egy síkban, tehát hibás a feltevés $\Rightarrow$ csak egy egyenes van, ami P-ben merőleges S-re.

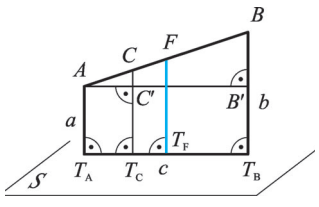
1610. Jelöljük a síkot S-sel és a síkra nem illeszkedő pontot P-vel. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy két P-re illeszkedő egyenes van, ami merőleges S-re $\Rightarrow m_1, m_2$. m_1, m_2 metsző egyenesek síkja legyen Σ. A Σ síkban fekvő $PT_1T_2\triangle$-ben két derékszög van, ami ellentmondás. Tehát hibás a feltevés $\Rightarrow$ P-ből csak egy merőleges állítható S-re.

1611. *a)* **1. eset:** a sík nem választja el A-t és B-t. A-ból merőlegest állítunk BT_B-re $\Rightarrow B'. \Rightarrow$ $\Rightarrow ABB'\triangle$-ben $AB'B\sphericalangle = 90°$, $AB' = T_AT_B = 4{,}2$ m, $BB' = 5{,}8$ m $- 3{,}7$ m $= 2{,}1$ m. Pitagorasz-tételből $AB \approx \underline{\underline{4{,}7\text{ m}}}$.

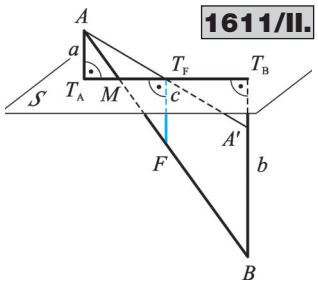
2. eset: a sík elválasztja A-t és B-t. $AT_AM\triangle \sim BT_BM\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow$ a megfelelő oldalak aránya egyenlő $\Rightarrow \dfrac{AT_A}{BT_B} = \dfrac{T_AM}{T_BM} \Rightarrow \dfrac{3{,}7}{5{,}8} = \dfrac{T_AM}{4{,}2 - T_AM} \Rightarrow T_AM \approx 1{,}64$ m és $T_BM \approx 2{,}56$ m. A Pitagorasz-tételből: $AM \approx 4{,}05$ m és $BM \approx 6{,}34$ m. $AB = AM + BM \approx \underline{\underline{10{,}39\text{ m}}}$.

b) A Pitagorasz-tétel az $A'AT\triangle$-re: $x^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow x = \underline{\underline{\sqrt{a^2 - b^2}}}$. Ha $a = 11{,}38$ m és $b = 4{,}62$ m, akkor $x = \underline{\underline{10{,}4\text{ m}}}$.

1611/I.



1611/II.



c) **1. eset:** a sík nem választja el A-t és B-t. FT_F középvonal az AT_AT_BB trapézban $\Rightarrow FT_F = \underline{\underline{\dfrac{a+b}{2}}}$.

2. eset: a sík elválasztja A-t és B-t. Ha $a = b$, akkor $AB \cap S = F$, így $F \in S$ miatt a távolság $\underline{\underline{\text{nulla}}}$. Ha $b > a$, akkor tükrözzük A-t T_F-re $\Rightarrow A'$. T_FF középvonal az $ABA'\triangle$-ben: $T_FF = \dfrac{A'B}{2} = \underline{\underline{\dfrac{b-a}{2}}}$.

d) Legyen B' az A pont BT_B-re vetett merőleges vetülete. Legyen $AB' \cap CT_C = C'$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a $B'AB \sphericalangle CC'$ és BB' párhuzamos szelőire: $CC' : BB' = p : (p+q) \Rightarrow CC' = \dfrac{p}{p+q}(b-a)$. $CT_C = CC' + C'T_C = \dfrac{p}{p+q}(b-a) + a = \underline{\underline{\dfrac{pb+qa}{p+q}}}$.

1612. $d(S;\Sigma) = \underline{\underline{\dfrac{a+b+c}{3}}}$.

1613. Az 1611. *c)* feladatban láttuk: F felezi AC-t $\Rightarrow FT_F = \dfrac{a+c}{2}$. F felezi BD-t $\Rightarrow FT_F = \dfrac{b+d}{2}$. A két állításból $\Rightarrow \dfrac{a+c}{2} = \dfrac{b+d}{2} \Rightarrow a+c = b+d \Rightarrow \underline{\underline{a-b = d-c}}$.

1614. Jelöljük az S síkra nem illeszkedő pontot P-vel, a P ponton átmenő egyenesek közül a síkra merőlegesnek a talppontját T_P-vel, a nem merőlegesek döféspontját A_1, A_2, … A_i-vel.

a) $PA_i > PT_P$ bármely $A_i \in S$, $A_i \neq T_P$ esetén, mert PA_i átfogó, PT_P befogó az $A_iT_PP\triangle$-ben.

b) $PA_i = PA_j \Leftrightarrow \sqrt{PT_p^2 + A_iT_p^2} = \sqrt{PT_p^2 + A_jT_p^2} \Leftrightarrow A_iT_P = A_jT_P$.

c) $PA_i > PA_j \Leftrightarrow \sqrt{PT_p^2 + A_iT_p^2} > \sqrt{PT_p^2 + A_jT_p^2} \Leftrightarrow A_iT_P > A_jT_P$.

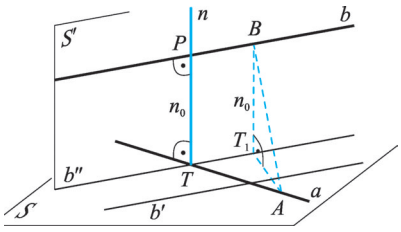
1615. Legyen $PD = d$, $AB = x$, $AD = y$. $PA \perp [ABCD] \Rightarrow PA \perp AB \Rightarrow PAB\triangle$ derékszögű. A Pitagorasz-tételből $x = \underline{\underline{\sqrt{b^2 - a^2}}}$. $PA \perp [ABCD] \Rightarrow PA \perp AC \Rightarrow PAC\triangle$ derékszögű. A Pitagorasz-tételből $AC = \sqrt{c^2 - a^2}$. $ABCD$ téglalap $\Rightarrow ABC\triangle$ derékszögű. A Pitagorasz-tételből $\Rightarrow$ $\Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + y^2}$. Az AC-re kapott két állítást összevetve: $c^2 - a^2 = b^2 - a^2 + y^2 \Rightarrow y = \underline{\underline{\sqrt{c^2 - b^2}}}$. $PA \perp [ABCD] \Rightarrow PA \perp AD \Rightarrow PAD\triangle$ derékszögű. Pitagorasz-tétel a $PAD\triangle$-re: $d = \sqrt{a^2 + y^2} = \underline{\underline{\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}}}$.

1616. $b = PA = PB = PC$, így P-ből $[ABC]$ síkra állított merőleges talppontja az $ABC\triangle$ körülírt körének középpontja. $ABC\triangle$ szabályos, így a körülírt kör középpontja a súlypont $\Rightarrow$ a fenti merőleges talppontja S. Legyen F a BC szakasz felező pontja. $AS : SF = 2 : 1 \Rightarrow AS = \dfrac{2}{3}AF = \dfrac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$. $PS \perp AS \Rightarrow ASP\triangle$ derékszögű. Pitagorasz-tétel az $ASP\triangle$-re $\Rightarrow PS = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}}}$.

1617. Jelöljük a két metsző síkot S_1-gyel, S_2-vel, a rájuk nem illeszkedő pontot P-vel. Legyen $S_1 \cap S_2 = m$, a P-ből S_1-re állított merőleges talppontja P_1, az S_2-re állított merőleges talppontja pedig P_2. $PP_2 \perp S_2 \Rightarrow PP_2$ merőleges S_2 minden egyenesére $\Rightarrow \underline{PP_2 \perp m}$. $PP_1 \perp S_1 \Rightarrow PP_1$ merőleges S_1 minden egyenesére $\Rightarrow \underline{PP_1 \perp m}$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow m \perp [PP_1P_2]$, mert merőleges annak PP_1 és PP_2 metsző egyeneseire $\Rightarrow m$ merőleges $[PP_1P_2]$ minden egyenesére $\Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{\underline{m \perp e(P_1;P_2)}}$.

II

1618.



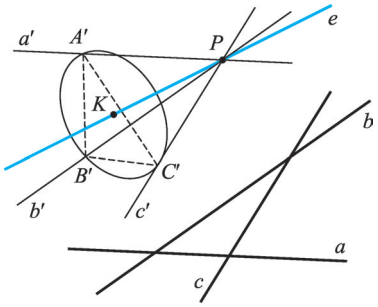
1618. a és b kitérő egyenesek. Húzzunk párhuzamost b-vel a tetszőleges pontján át $\Rightarrow b'$. $[b'; a]$ sík legyen S. Fektessünk b-n át S-re merőleges síkot $\Rightarrow S'$. $S' \cap S = b''$; $b'' \cap a = T$. Állítsunk merőlegest T-ben S-re $\Rightarrow n$. $n \perp a$, mert $n \perp S$; $n \perp b$, mert $n \perp b''$ és $b'' \parallel b$; n metszi a-t, mert $T \in a$; n metszi b-t, mert $n \in S'$, $b \in S'$ és n nem párhuzamos b-vel. n a keresett normáltranszverzális. Tegyük fel, hogy van egy $n_1 \neq n$ normáltranszverzális. n_1 benne van egy, az a-ra merőleges, tehát n-nel párhuzamos Σ_1 síkban, valamint egy, a b-re merőleges, tehát n-nel párhuzamos Σ_2 síkban. $\Rightarrow n_1 = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow n_1 \parallel n \Rightarrow n_1$ és n metszéspontjai a-val és b-vel olyan trapézt alkotnak, amelynek száregyenesei a és b. Ez ellentmond annak, hogy a és b kitérők. $\Rightarrow$ Csak egy normáltranszverzális van.

1619. Tekintsük az 1618. ábrát. Húzzunk a normáltranszverzális a-val való T metszéspontján át párhuzamost b-vel $\Rightarrow b''$. Legyen $B \in b$, $A \in a$ két tetszőleges pont a két kitérő egyenesen. B-n át párhuzamost húzunk n-nel $\Rightarrow T_1 \Rightarrow BT_1 = n_0$. $n \perp S$ miatt $BT_1 \perp S \Rightarrow BT_1 \perp T_1A \Rightarrow BT_1A\triangle$ derékszögű, átfogója BA, egyik befogója $BT_1 \Rightarrow BT_1 < BA \Rightarrow \underline{\underline{n_0 < BA}}$.

1620. Tekintsük az 1618. ábrát. Az S sík bármely b-vel nem párhuzamos a egyenese kitérő b-vel. b és a normáltranszverzálisa a b-re illeszkedő, S-re merőleges S' sík b'' metszésvonalának a-val való metszéspontjában b-re állított merőleges b és b'' közti szakasza $\Rightarrow PT$. b és b'' párhuzamossága miatt $d(b; b'') =$ állandó.

1621. Adott a, b, c és P. Húzzunk párhuzamost P-n át az adott egyenesekkel $\Rightarrow a'$, b' és c'. Mérjünk P-ből egy irányban egyenlő szakaszokat az a', b' és c' egyenesekre $\Rightarrow A'$, B' és C'. PA', PB' és PC' felfoghatók egy forgáskúp alkotóinak $\Rightarrow$ a keresett egyenes a forgáskúp tengelye. $A'B'C'\triangle$ körülírt körének középpontja K. $KPA' \sphericalangle = KPB' \sphericalangle = KPC' \sphericalangle$, egyenlők a kúp fél nyílásszögével. Ha a párhuzamos b-vel és c-vel, akkor a P-n át húzott összes egyenes megoldás. Ha a párhuzamos b-vel, de nem párhuzamos c-vel, akkor a' és c' szögfelezői és az ezeket tartalmazó, $[a'; c']$ síkra merőleges sík P-n átmenő egyenesei a megoldások. a', b' és c' félegyeneseinek megválasztásától függően 4 megoldás lehetséges. A választási lehetőségek száma ugyan 8, de 2-2 megoldás P-re középpontosan szimmetrikus, tehát ugyanazt az egyenest eredményezik.

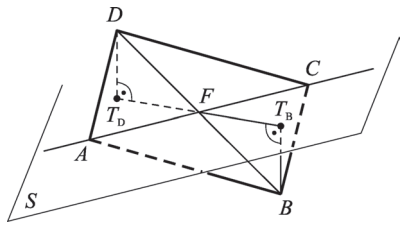
1621.



1622. Tekintsük az 1611/II. ábrát. Legyen $F \in S \Rightarrow$ $\Rightarrow F \equiv T_F$. $AT_A \perp S$ és $BT_B \perp S \Rightarrow AT_A$ párhuzamos BT_B-vel. A, T_A, B, T_B egy síkban vannak $\Rightarrow S'$. T_A, $T_B \in S$, és T_A, $T_B \in S' \Rightarrow T_AT_B$ egyenes a két sík metszésvonala. A, $B \in S'$, így AB egyenese a két sík metszésvonalán döfi az S síkot $\Rightarrow F \in T_AT_B$.

$T_AFA\triangle \cong T_BFB\triangle$ ($FA = FB$; $FT_AA \sphericalangle = FT_BB \sphericalangle = 90°$; $BFT_B \sphericalangle = AFT_A \sphericalangle$, mert csúcsszögek) $\Rightarrow AT_A = BT_B$. Ha A, $B \in S$, akkor $d(A; S) = d(B; S) = 0$.

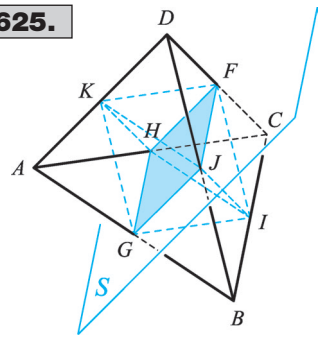
1623.



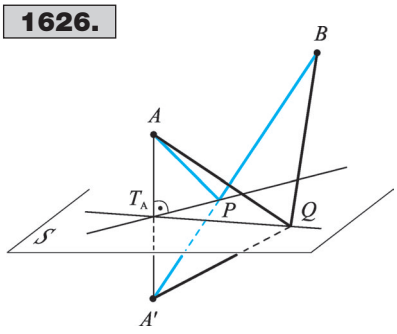
1623. A paralelogramma átlói felezik egymást $\Rightarrow$ az AC-re fektetett S sík átmegy a BD átló F felezéspontján. Az 1622. feladatban láttuk, hogy $d(D; S) = d(B; S)$.

1624. AB felezéspontja F. e és F síkja S. Az 1622. feladatban láttuk, hogy egy szakasz felezéspontján átmenő sík egyenlő távol van a szakaszvégpontoktól. S ilyen sík, tehát megfelelő. Végtelen sok megoldás van, ha $F \in e$ vagy AB párhuzamos e-vel, egy megoldás van egyébként.

1625.



1626.



1625. **1. eset:** Ha A, B, C és D nincsenek egy síkban, akkor egy tetraédert határoznak meg. Az 1622. feladatban láttuk, hogy egy szakasz felezéspontján átmenő sík egyenlő távol van a szakasz végpontjaitól. Válasszuk pl. A-t, D-t, illetve B-t, C-t a leendő sík két oldalán levő pontoknak. AB felezéspontja G; $(\mathrm{d}(A;S) = \mathrm{d}(B;S)$ kell, hogy teljesüljön). CD felezéspontja F; $(\mathrm{d}(C;S) = \mathrm{d}(D;S)$ kell, hogy teljesüljön). AC felezéspontja H; $(\mathrm{d}(A;S) = \mathrm{d}(C;S)$ kell, hogy teljesüljön). BD felezéspontja J; $(\mathrm{d}(B;S) = \mathrm{d}(D;S)$ kell, hogy teljesüljön). G, F és H pontok síkja megfelelő, mert teljesíti a kívánt távolságfeltételeket, és $GHFJ$ paralelogramma, így a DB szakasz felezéspontján, J-n is átmegy. AB, DC párral, illetve AC, BD párral újabb síkokhoz jutunk, így három megoldás van.

2. eset: Ha A, B, C és D egy síkban vannak, tengelyesen szimmetrikusan helyezkednek el, de nem illeszkednek a szimmetriatengelyre, akkor a tengelyt tartalmazó síkok a pontok síkjának kivételével mind megfelelnek.

3. eset: A fenti két esetben vázolt helyzetektől eltérő pontnégyes esetén nincs megoldás.

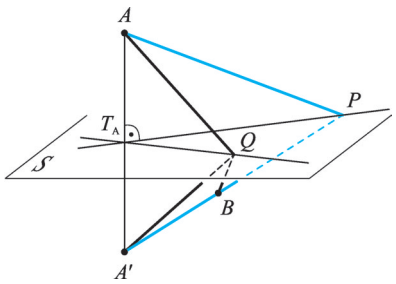
1626. Tükrözzük A-t S-re $\Rightarrow A'$; $A'B \cap S = P$; APB út a legrövidebb, mert: ① $[AA'B]$ síkban gondolkodva a tükrözés miatt $AP = A'P$. ② A' és B között a legrövidebb út az $A'B$ szakasz: $A'B = A'P + PB = AP + PB = \min$. ③ Minden más $Q \in S$ esetén az $A'BQ\triangle$-ben $A'Q + QB > A'B$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt. $A'Q = AQ$ miatt $AQ + QB > A'B = AP + PB$.

1627. Tükrözzük A-t S-re $\Rightarrow A'$; $A'B \cap S = P$; $(AP - PB)$ út a leghosszabb, mert: ① $[AA'B]$ síkban gondolkodva a tükrözés miatt $AP = A'P$. ② $AP = A'P = A'B + BP \Rightarrow AP - BP = A'B$. ③ Minden más $Q \in S$ esetén az $A'BQ\triangle$-ben $A'Q - QB < A'B$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt. $A'Q = AQ$ összefüggést felhasználva $AQ - QB < A'B = AP - PB$, tehát valóban a P pont esetében maximális a különbség.

1628. Legyen AB felezőpontja F. Vegyük fel AB felezőmerőleges síkját $\Rightarrow S$. S bármely X pontjára $XA = XB$, mert $AB \perp S$ miatt $AB \perp XF$, és $FA = FB$ miatt XF egyenese az AB szakasz egy felezőmerőlegese. $e \cap S = E$ pontra $EA = EB$ teljesül. Nincs megoldás, ha e párhuzamos S-sel, azaz $AB \perp e$ és $F \notin e$. Végtelen sok megoldás van, ha e az AB szakasz felezőmerőlegese.

1629. Legyen K az $ABC\triangle$ körülírt körének középpontja $\Rightarrow AK = BK = CK$. Legyen $m \perp [ABC]$ úgy, hogy $K \in m$. Az m bármely X pontjára $XA = XB = XC$, hiszen XA-nak KA, XB-nek KB, XC-nek KC az $[ABC]$ síkra vett merőleges vetülete. $m \cap S = M$ a keresett pont. Nincs megoldás, ha m párhuzamos S-sel, azaz $[ABC] \perp S$. Végtelen sok megoldás van, ha $m \subset S$.

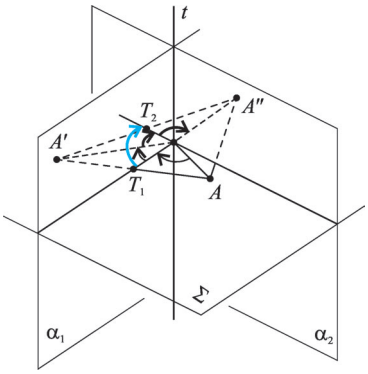
1627.



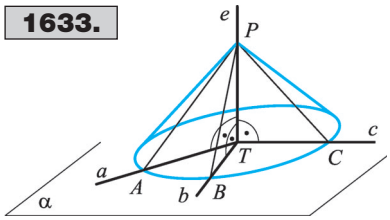
1630. Legyen a P pont α_1 síkra vonatkozó tükörképe P', a P' pont α_2 síkra vonatkozó tükörképe P''. Irányított szakaszokkal: $PT_1 = T_1P'$; $P'T_2 = T_2P''$. $PP'' = PT_1 + T_1P' + P'T_2 + T_2P'' = T_1P' + T_1P' + P'T_2 + P'T_2 = 2(T_1P' + P'T_2) = 2T_1T_2$. Tehát az állítás igaz.

II

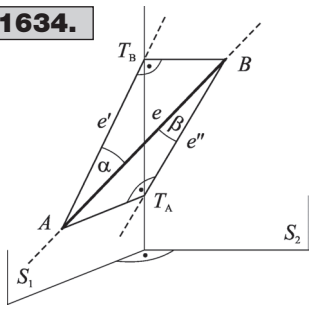
1631.



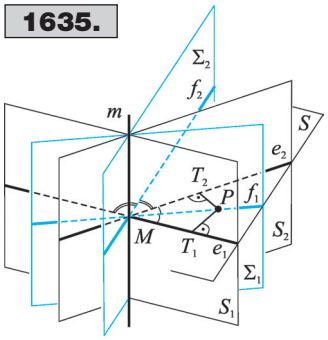
1633.



1634.



1635.



1631. $AA' \perp \alpha_1 \Rightarrow AA'$ merőleges α_1 minden egyenesére re $\underline{AA' \perp t}$. $A'A'' \perp \alpha_2 \Rightarrow A'A''$ merőleges α_2 minden egyenesére $\underline{A'A'' \perp t}$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow t \perp [AA'A''] = \Sigma$. $O = t \cap \Sigma$. α_1 az AA' szakasz felezőmerőleges síkja; $O \in \alpha_1 \Rightarrow AO = A'O$. α_2 az $A'A''$ szakasz felezőmerőleges síkja; $O \in \alpha_2 \Rightarrow A'O = A''O$. $AO = A'O = A''O$. Irányított szögeket alkalmazva: $AOT_1\sphericalangle = T_1OA'\sphericalangle$; $A'OT_2\sphericalangle = T_2OA''\sphericalangle$ a tükrözés miatt. $\underline{AOA''\sphericalangle} = AOT_1\sphericalangle + T_1OA'\sphericalangle + A'OT_2\sphericalangle + T_2OA''\sphericalangle = T_1OA'\sphericalangle + T_1OA'\sphericalangle + A'OT_2\sphericalangle + A'OT_2\sphericalangle = 2(T_1OA'\sphericalangle + A'OT_2\sphericalangle) = \underline{2T_1OT_2\sphericalangle}$. $T_1O \in \Sigma$ miatt $T_1O \perp t$ és $T_2O \in \Sigma$ miatt $T_2O \perp t \Rightarrow T_1OT_2\sphericalangle = \sphericalangle(\alpha_1; \alpha_2)$. Az aláhúzott állítás: $AOA''\sphericalangle = 2\sphericalangle(\alpha_1; \alpha_2)$. A gondolatmenet nem függ az A pont helyzetétől.
A feladat eredménye azt jelenti, hogy két metsző síkra vonatkozó tükrözés egymásutánja helyettesíthető egy, a síkok metszésvonala mint tengely körüli forgatással, aminek szöge a síkok hajlásszögének kétszerese, irányát pedig a síkok sorrendje szabja meg.

1632. Legyen α_1 az AA' szakaszfelező merőleges síkja, α_2 a BB' szakaszfelező merőleges síkja, valamint $\alpha_1 \cap \alpha_2 = t$. Legyen az AA'-re illeszkedő, t-re merőleges sík t-vel való döféspontja O_1, BB'-re illeszkedő, t-re merőleges sík t-vel való döféspontja O_2. ABO_1O_2 tetraéder egybevágó az $A'B'O_1O_2$ tetraéderrel, mert: ① $AB = A'B'$, a feltétel miatt. ② $BO_2 = B'O_2$ $O_2 \in t$ miatt. ③ $AO_2 = A'O_2$, $O_2 \in t$ miatt. ④ $AO_1 = A'O_1$, $O_1 \in t$ miatt. ⑤ $BO_1 = B'O_1$, $O_1 \in t$ miatt. ⑥ O_1O_2 közös él. Egybevágóságuk és körüljárásuk egyezése miatt t körüli forgással vihetők egymásba $\Rightarrow B$-t ugyanaz a forgás viszi B'-be, mint A-t A'-be. AB-t t körüli forgatás viszi $A'B'$-be. Nincs megoldás, ha α_1 párhuzamos α_2-vel. Ha $\alpha_1 = \alpha_2$, akkor AA' és BB' párhuzamossága miatt $ABB'A'$ húrtrapéz, a felező sík minden egyenese alkalmas forgástengelynek.

1633. Legyen $P \in e, A \in a, B \in b$ és $C \in c$ úgy, hogy $TA = TB = TC \Rightarrow ATP\triangle \cong BTP\triangle \cong CTP\triangle$, mert egy oldaluk közös, másik oldaluk és a közös oldallal bezárt szögük páronként egyenlő $\Rightarrow PA = PB = PC \Rightarrow$ egy P csúcsú, $ABC\triangle$ köré írható alapkörű forgáskúp alkotói $\Rightarrow PT$ tengely $\perp$ az alapkör síkjára $\Rightarrow e \perp \alpha$.

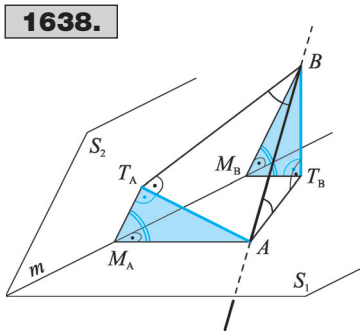
1634. $ABT_B\triangle$ derékszögű $\Rightarrow \alpha = \sphericalangle(AB; S_1)$. $BAT_A\triangle$ derékszögű $\Rightarrow \beta = \sphericalangle(AB; S_2)$. $BT_AT_B\triangle$ derékszögű. $ABT_B\triangle$ és $BAT_A\triangle$ átfogója közös. $ABT_B\triangle$-ben α-val szemben levő befogó BT_B. $ABT_A\triangle$-ben $(90° - \beta)$-val szemben levő befogó BT_A. $BT_AT_B\triangle$-ben BT_B befogó, BT_A átfogó, ezért $BT_A > BT_B \Rightarrow ABT_B\triangle$-ben kisebb oldal van α-val szemben, mint $ABT_A\triangle$-ben $(90° - \beta)$-val szemben, miközben átfogójuk közös és mindegyik derékszögű $\Rightarrow \alpha < 90° - \beta$ (kisebb oldallal szemben kisebb szög) $\Rightarrow \alpha + \beta < 90°$.

1635. Jelöljük a két adott síkot S_1-gyel, S_2-vel, a szögeket felező síkokat Σ_1-gyel és Σ_2-vel. Messük el a síkokat a közös m metszésvonalra $\perp S$ síkkal $\Rightarrow e_1, f_1, e_2, f_2$ met-

szésvonalak. $\sphericalangle(e_1; e_2) = \sphericalangle(S_1; S_2)$. Σ_1 felezi S_1 és S_2 szögét $\Rightarrow f_1$ felezi e_1, e_2 szögét. Σ_2 felezi S_1 és S_2 mellékszögét $\Rightarrow$ $\Rightarrow f_2$ felezi e_1, e_2 mellékszögét. $2\sphericalangle(e_1; f_1) + 2\sphericalangle(e_1; f_2) = 180°$. $\sphericalangle(e_1; f_1) + \sphericalangle(e_1; f_2) = 90° \Rightarrow f_1 \perp f_2 \Rightarrow \Sigma_1 \perp \Sigma_2$.

1636. Tekintsük az 1635. ábrát. Legyen a két sík S_1, S_2, a szöget felező sík Σ_1. Legyen S P-re illeszkedő, m-re merőleges sík. $S \cap S_1 = e_1$, $S \cap S_2 = e_2$, $S \cap \Sigma_1 = f_1$. Σ_1 felezi S_1, S_2 szögét $\Rightarrow f_1$ felezi e_1, e_2 szögét $\Rightarrow \underline{PT_1 = PT_2}$. $PT_1 \perp e_1$ és $m \perp PT_1$ miatt $PT_1 \perp S_1 \Rightarrow PT_1 = d(P; S_1)$. Hasonlóan belátható, hogy $PT_2 = d(P; S_2)$. Az aláhúzott állítás miatt $d(P; S_1) = d(P; S_2)$.

1638.



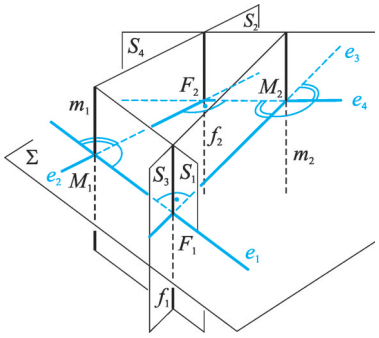
1637. Tekintsük az 1635. ábrát. Legyen a két sík S_1, S_2, a szöget felező sík Σ_1, e sík egy pontja P. A P pontban Σ_1 síkra állított merőleges P_1 és P_2 pontban metszi az S_1 és S_2 síkokat. Fektessünk m-re merőleges síkot P_1P_2-n keresztül $\Rightarrow S$. $P_1P_2M\triangle$-ben: MP felezi a $P_1MP_2\sphericalangle$-et ($P \in \Sigma$; $m \perp S$; $MP_1 \perp m$; $MP_2 \perp m$). $MP \perp P_1P_2 \Rightarrow MP_1P_2\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow \underline{\underline{PP_1 = PP_2}}$.

1638. Jelöljük az S_1, S_2 síkokkal egyenlő szöget bezáró egyenes döféspontját A-val és B-vel.
a) $AT_BB\triangle \cong BT_AA\triangle$, mert a BA oldal közös, mindkettő derékszögű és $BAT_B\sphericalangle = ABT_A\sphericalangle$ a feltétel szerint $\Rightarrow BT_B = AT_A$. Legyen AM_A az A pontnak az m metszésvonaltól, BM_B a B pontnak az m metszésvonaltól való távolsága. $AT_A \perp S_2 \Rightarrow AT_A \perp m$ és $\underline{AM_A \perp m} \Rightarrow m \perp [AT_AM_A] \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{m \perp M_AT_A}$. Az aláhúzottakból $\Rightarrow T_AM_AA\sphericalangle = \sphericalangle(S_1; S_2)$. Hasonlóan belátható, hogy $T_BM_BB\sphericalangle = \sphericalangle(S_1; S_2)$. $AT_AM_A\triangle \cong BT_BM_B\triangle$, mert mindkettő derékszögű, $T_AM_AA\sphericalangle = T_BM_BB\sphericalangle$ és $AT_A = BT_B \Rightarrow AM_A = BM_B$.
b) Az *a)*-beli gondolatmenet fordított sorrendben megismételhető. Az utolsó egybevágóságot az $AM_A = BM_B$, $M_AT_AA\sphericalangle = M_BT_BB\sphericalangle = 90°$ és $\sphericalangle(S_1; S_2) = T_AM_AA\sphericalangle = T_BM_BB\sphericalangle$ állításokkal igazoljuk.

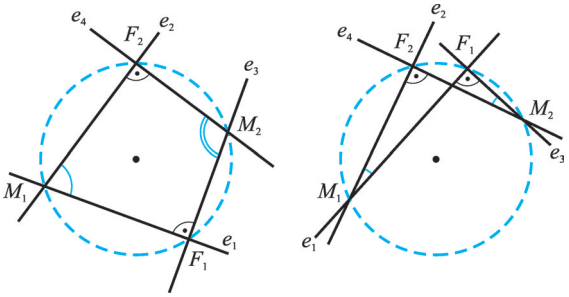
1639. Legyen Σ az m_1, m_2, f_1, f_2 párhuzamos metszésvonalakra $\perp$ sík. $\Sigma \cap S_1 = e_1 \Rightarrow e_1 \perp m_1$ és $\Sigma \cap S_2 = e_2 \Rightarrow e_2 \perp m_1 \Rightarrow \sphericalangle(e_1; e_2) = \sphericalangle(S_1; S_2)$. $\Sigma \cap S_3 = e_3 \Rightarrow e_3 \perp m_2$ és $\Sigma \cap S_4 = e_4 \Rightarrow e_4 \perp m_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle(e_3; e_4) = \sphericalangle(S_3; S_4)$. Hasonlóan $\sphericalangle(e_1; e_3) = \sphericalangle(S_1; S_3) = \text{⦜}$ és $\sphericalangle(e_2; e_4) = \sphericalangle(S_2; S_4) = \text{⦜}$. A Σ síkon a metszetek az ábrán vázoltak lehetnek. A keletkezett síkmetszeten az M_1, F_1, M_2, F_2 pontok egy körön vannak. Mivel $M_1F_1M_2\sphericalangle = M_1F_2M_2\sphericalangle = \text{⦜} \Rightarrow F_2M_1F_1\sphericalangle = F_2M_2F_1\sphericalangle$ vagy $F_2M_1F_1\sphericalangle + F_2M_2F_1\sphericalangle = 180°$, tehát M_1-nél, illetve M_2-nél a szögek vagy egyenlők vagy kiegészítők.

1640. Jelöljük az S_1, S_2 félsík által meghatározott lapszög élét e-vel. Legyen $m_1 \perp S_1$ és $m_2 \perp S_2$ félegyenes a megfelelő féltérben. Vegyük fel az m_1, m_2 merőlegesek síkját $\Rightarrow \Sigma$. $m_1 \perp S_1 \Rightarrow m_1 \perp e$

1639/I.

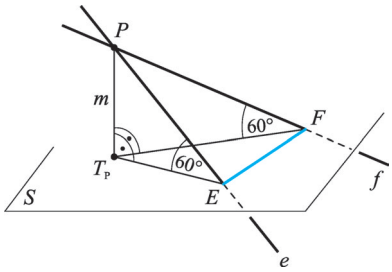


1639/II.



II

1642.



és $m_2 \perp S_2 \Rightarrow m_2 \perp e \Rightarrow e \perp \Sigma$. $\Sigma \cap S_1 = e_1$ és $\Sigma \cap S_2 = e_2 \Rightarrow e \perp e_1$ és $e \perp e_2 \Rightarrow \sphericalangle(e_1; e_2) = \sphericalangle(S_1; S_2) = \alpha$. $\sphericalangle(m_1; e_2) = 90° - \alpha$ és $\sphericalangle(m_2; e_1) = 90° - \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle(m_1; m_2) = 90° + 90° - \alpha = \underline{180° - \alpha}$. Az ellentétes féltérben levő félegyenesekre: $\sphericalangle(m_1'; m_2') = \sphericalangle(m_1; m_2) = \underline{180° - \alpha}$, mert csúcsszögek.

1641. Legyen az adott S sík adott pontja P. Fektessünk az S síkban P-n át tetszőleges egyenest $\Rightarrow$ $\Rightarrow e'$. $T \in e'$, $P \neq T$ tetszőleges. T-ben merőleges S-re $\Rightarrow f$. $[e'; f] = S'$, $S' \perp S$. S'-ben P-n át e'-vel α szöget bezáró e egyenes (S'-ben két ilyen egyenes lehetséges). P-n át végtelen sok e' egyenes húzható, így végtelen sok megoldás lehet.

1642. $PT_PE\triangle$-ben $\measuredangle$ és 60°-os szög van $\Rightarrow m = EP \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow EP = \frac{2}{\sqrt{3}} m$. $PT_PF\triangle$-ből $FP = \frac{2}{\sqrt{3}} m$. $EFP\triangle$ egyenlő szárú, szárszöge 60° $\Rightarrow EFP\triangle$ szabályos $\Rightarrow EF = \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{3}} m}}$.

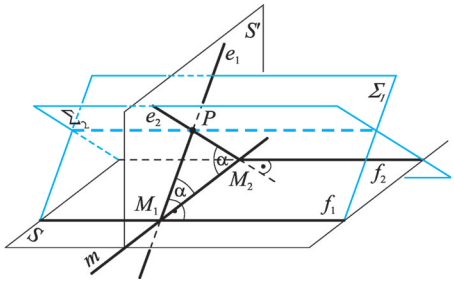
1643. Adott az S sík e egyenesének P pontja. Vegyünk fel P-ben e-re merőleges S' síkot. $S \cap S' = f'$. f'-vel α szöget bezáró egyenes P-n át az S' síkban $\Rightarrow f_1; f_2$. f_1 és f_2 megfelelők, mert $\sphericalangle(f_1; f') = \sphericalangle(f_1; S)$ és $\sphericalangle(f_2; f') = \sphericalangle(f_2; S)$, továbbá $P \in f_1$; $P \in f_2$ és $f_1 \perp e$; $f_2 \perp e$. Két megoldás van.

1644. Adott az S sík, a P pont és az α szög. Fektessünk P-n át S-re merőleges síkot $\Rightarrow S'$. $S \cap S' = m$. S'-ben P-n át m-mel α szöget bezáró egyenes $\Rightarrow e_1$; e_2. $e_1 \cap m = M_1$ és $e_2 \cap m = M_2$. M_1-ben merőleges S'-re $\Rightarrow f_1$; M_2-ben merőleges S'-re $\Rightarrow f_2$. f_1, e_1 síkja Σ_1; f_2, e_2 síkja Σ_2. Σ_i megfelelő, mert $P \in \Sigma_i$, $\sphericalangle(\Sigma_i; S) = \sphericalangle(e_i; m) = \alpha$, ugyanis $f_i \perp S' \Rightarrow f_i \perp m$ és $f_i \perp e_i$. Egy felvett S' síkhoz két megoldás van. P-n át akárhány S-re merőleges S' sík fektethető, így végtelen sok megoldás van. Mindegyik tekinthető egy P csúcsú $(180° - 2\alpha)$ nyílásszögű kúp érintősíkjának.

1645. Legyen S_1 és S_2 a két adott sík és P az adott pont. $S_1 \cap S_2 = m$. P-ből merőleges S_1-re $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ talppontja T_1 és P-ből merőleges S_2-re $\Rightarrow$ talppontja T_2. $[PT_1T_2] = S$, $S \cap m = M$. T_2M az S_2 és S sík metszésvonala. $PT_2 \perp S_2 \Rightarrow \underline{PT_2 \perp T_2M}$ és $PT_2 \perp m$. $PT_1 \perp S_1 \Rightarrow PT_1 \perp T_1M$ és $PT_1 \perp m$. A fentiekből $\Rightarrow m \perp [PT_1T_2] \Rightarrow \underline{m \perp T_2M}$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow \sphericalangle(S; S_2) = \sphericalangle(m; PT_2) = \measuredangle$. Hasonlóan belátható, hogy $\sphericalangle(S; S_1) = \sphericalangle(m; PT_1) = \measuredangle$. S a keresett sík.

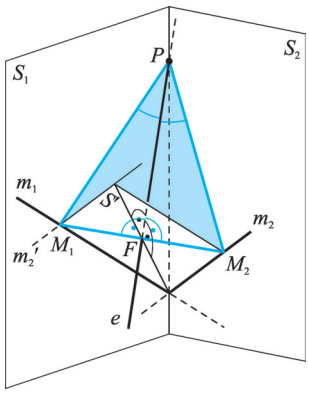
1646. Legyen P és Q a két adott pont és S az adott sík. Legyenek T_P és T_Q az S sík olyan pontjai, amelyekre: $PT_P \perp S$ és $QT_Q \perp S$. $[PT_PQ] = S'$. $S' \cap S = e(T_P; T_Q) = m$. $S' \perp S$, mert $PT_P \perp S \Rightarrow$ $\Rightarrow PT_P$ merőleges S minden egyenesére, így $PT_P \perp m$, $PT_P \perp f$ miatt $\sphericalangle(S; S') = \sphericalangle(PT_P; f) = \measuredangle$.

1644.

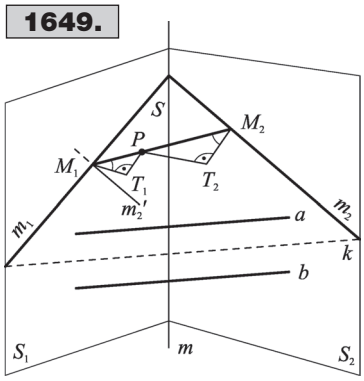


1647. Legyen az S_1 és S_2 sík metszésvonala m. Az egyik sík P pontjából a metszésvonalra, illetve a másik síkra bocsátott merőleges szakaszok további végpontjait jelöljük T_1-gyel, illetve T_2-vel. $PT_1 = 2PT_2$. $PT_1T_2\triangle$-ben $PT_2T_1\sphericalangle = \measuredangle$, az átfogó kétszerese az egyik befogónak $\Rightarrow T_1PT_2\sphericalangle = 60° \Rightarrow$ $\Rightarrow PT_1T_2\sphericalangle = 30°$ (*). $PT_2 \perp S_2 \Rightarrow PT_2 \perp T_1T_2$ és $PT_2 \perp m$. Ez utóbbihoz $\underline{PT_1 \perp m}$ állítást felhasználva $\Rightarrow m \perp [PT_1T_2] \Rightarrow \underline{T_1T_2 \perp m}$. Az aláhúzott állításokból $PT_1T_2\sphericalangle = \sphericalangle(S_1; S_2)$. A (*) állítást figyelembe véve $\underline{\underline{\sphericalangle(S_1; S_2) = 30°}}$.

1648.



1649.



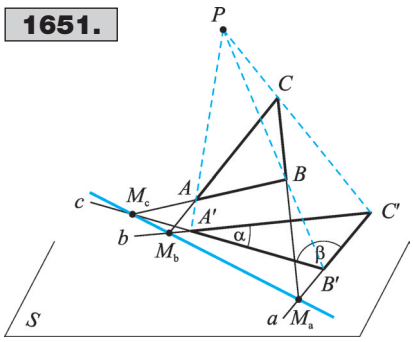
1648. Induljunk ki a kész ábrából. e felezi az $M_1PM_2\sphericalangle$-et $\Rightarrow PM_1 = PM_2$ esetén $M_1M_2P\triangle$ egyenlő szárú, és e merőlegesen felezi M_1M_2-t.
Legyen $F \in e$ tetszőleges. Fektessünk e-re merőleges S' síkot F-ben. $S' \cap S_1 = m_1$, $S' \cap S_2 = m_2$, $m_1 \cap m_2 = Q$.
Feladatunk, hogy az S' sík $\sphericalangle(m_1; m_2)$ szögtartományában levő F ponton át olyan szelőt fektessünk, hogy annak szögtartományba eső részét F felezze. m_2-t tükrözzük F-re $\Rightarrow m_2'$; $m_2' \cap m_1 = M_1$. Tükrözzük M_1-et F-re $\Rightarrow M_2$. $[M_1M_2P]$ a keresett sík, mert $e \perp S'$ miatt $e \perp M_1M_2$, F felezi M_1M_2-t $\Rightarrow PF$ felezi $M_1PM_2\sphericalangle$-et.

1649. A keresett egyenes egyenlő távol van a-tól és b-től, ha illeszkedik a és b középpárhuzamosán átmenő síkok valamelyikére.
Legyen S a P-re és k-ra illeszkedő sík. $S \cap S_1 = m_1$ és $S \cap S_2 = m_2$. Ha a keresett egyenes egyenlő szögeket zár be S_1-gyel és S_2-vel, akkor $M_1PT_1\triangle \sim M_2PT_2\triangle$, mert két-két szögük egyenlő. A hasonlóság aránya $\lambda = \dfrac{PT_1}{PT_2}$, a P pont S_1, ill. S_2 síktól mért távolságainak aránya. Feladatunk oda vezetett, hogy az S sík m_1, m_2 által meghatározott szögtartományában P-n át olyan egyenest fektessünk, amelynek szögszárak közé eső szakaszát P a fenti arányban osztja. Alkalmazzunk m_2-re P középpontú, λ arányú hasonlóságot $\Rightarrow m_2'$; $m_2' \cap m_1 = M_1$. M_1P a keresett egyenes.

1650. Toljuk az a egyenes tetszőleges M pontjába a b és a c egyenest $\Rightarrow b'$ és c'.
Legyen a keresett sík Σ. $\sphericalangle(\Sigma; c) = \sphericalangle(\Sigma; c')$ és $\sphericalangle(\Sigma; b) = \sphericalangle(\Sigma; b')$. $\sphericalangle(\Sigma; c') = \sphericalangle(\Sigma; b') = \sphericalangle(\Sigma; a)$, ha az M kezdőpont és Σ közti MC', MB' és MA szakaszok egyenlő hosszúak. Mérjünk fel M-ből az egyenesek egyik-egyik félegyenesére egyenlő szakaszokat $\Rightarrow A, B'\, C'$. Fektessünk P-n át $[AB'C']$ síkkal párhuzamos síkot $\Rightarrow \Sigma$. Σ megfelel minden feltételnek, mert: ① P-re illeszkedik. ② $\sphericalangle(\Sigma; c') = \sphericalangle(\Sigma; b') = \sphericalangle(\Sigma; a)$.

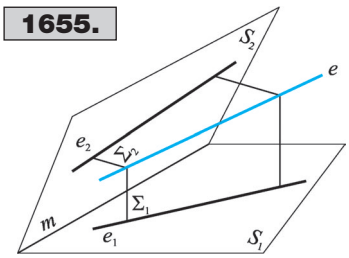
1651. A hasonló háromszög szögei $\Rightarrow \alpha$ és β. Az 1606. feladatban láttuk, hogy az $ABC\triangle$ és a szerkesztendő $A'B'C'\triangle$ megfelelő oldalpárjainak metszéspontjai (M_c, M_b, M_a) egy egyenesen vannak, a két háromszög síkjainak metszésvonalán. Ezek a metszéspontok megadhatók: $e(A; C) \cap S = M_b$; $e(A; B) \cap S = M_c$; $e(B; C) \cap S = M_a$. Vegyünk fel M_a-n át tetszőleges egyenest $\rightarrow a$. M_c-ből a-val β szöget bezáró egyenes $\rightarrow$ $\rightarrow c \Rightarrow c \cap a = B'$. M_b-ből c-vel α szöget bezáró egyenes $\rightarrow$ $\rightarrow b \Rightarrow b \cap c = A'$ és $b \cap a = C'$. Az adott szögeket bezáró egyenesek közül azok adnak megoldást, amelyeknek a metszéspontjaiból olyan háromszög keletkezik, amiben α és β belső szög. Az 1606. feladatban

1651.



II

1655.



láttuk, hogy az így megadott $A'B'C'\triangle$-re AA', BB' és CC' egyenesek egy pontban metszik egymást $\Rightarrow P$. Ha $[ABC]$ sík párhuzamos S-sel vagy $A'B'C'\triangle$ nem hasonló az $ABC\triangle$-höz, akkor nincs megoldás. Minden más esetben az a egyenes tetszőleges választása miatt végtelen sok megoldás lehet.

1652. Jelöljük az adott pontot P-vel, a metsző síkokat S_1-gyel, S_2-vel, P merőleges vetületeit rendre T_1-gyel, T_2-vel. Fektessünk síkot a P, T_1 és T_2 pontokra $\rightarrow S$; $S \cap S_1 = m_1$; $S \cap S_2 = m_2$; $m_1 \cap m_2 = M$. $PT_1 \perp S_1 \Rightarrow \underline{PT_1 \perp m}$ és $PT_1 \perp m_1$. $PT_2 \perp S_2 \Rightarrow \underline{PT_2 \perp m}$ és $PT_2 \perp m_2$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow$ $\Rightarrow m \perp [PT_1T_2] = S \Rightarrow m \perp m_1$ és $m \perp m_2 \Rightarrow m_2$ a $\underline{T_2\text{-ből}}$ m-re bocsátott merőleges; m_1 a T_1-ből m-re bocsátott merőleges $\Rightarrow m_1 \cap m_2 = M \in m$. A bizonyítás fenti gondolatmenete független attól, hogy PM elválasztja-e a T_1 és T_2 pontokat vagy sem.

1653. Jelöljük az S_1, S_2 metsző síkokon adott pontokat P_1-gyel, P_2-vel. Tekintsük az M, P_1, P_2 pontokra illeszkedő síkot $\rightarrow S$. $m \perp m_1$ és $m \perp m_2 \Rightarrow m \perp S$. Az S síkban állítsunk merőlegest P_2-ben MP_2-re, P_1-ben MP_1-re. A merőlegesek metszéspontja P. $m \perp S \Rightarrow m \perp PP_1$; P származtatása miatt $m_1 \perp PP_1 \Rightarrow PP_1 \perp S \Rightarrow P_1$ a P pont S_1-re vetett merőleges vetülete. Hasonlóan belátható, hogy P_2 a P pont S_2-re vetett merőleges vetülete.

1654. **1. eset:** Az e egyenes nem merőleges az S síkra. Legyen az e egyenes két pontja P és Q, merőleges vetületük T_P és T_Q. PT_P és QT_Q párhuzamosak $\Rightarrow PQT_QT_P$ trapéz $\Rightarrow P$, Q, T_P, T_Q egy síkban vannak $\Rightarrow T_Q \in [PQT_P] \cap S = m$. Tehát a merőleges vetületek egy egyenesen vannak.

2. eset: Az e egyenes merőleges az S síkra.

Bármely $P \in e$ esetén e egyben vetítő egyenes is, így $T_P = D$. A merőleges vetület egyetlen pont.

1655. Legyen Σ_1 az e_1-re illeszkedő S_1-re merőleges vetítősík, Σ_2 az e_2-re illeszkedő S_2-re merőleges vetítősík. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ a vetített alakzat, ami két különböző metsző sík esetén valóban egyenes. Ha $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$, akkor bennük bármilyen alakzat képe S_1-re, illetve S_2-re e_1, illetve e_2 lesz. Ez akkor fordul elő, ha $e_1 \perp m$, $e_2 \perp m$ és $e_1 \cap e_2 \in m$.

1656. Legyen a két egyenes e_1 e_2, merőleges vetületük e_1' és e_2'.

1. eset: Sem a két párhuzamos egyenes, sem azok síkja nem merőleges a vetületi síkra. e_1 vetülete e_1, e_2 vetülete e_1'; $e_1' \neq e_2'$. Tegyük fel, hogy e_1' nem párhuzamos e_2'-vel $\Rightarrow$ van metszéspontjuk: M'. M' ősе M. $M \in e_1$, mert $M' \in e_1'$ és $M \in e_2$, mert $M' \in e_2'$. Ez ellentmond e_1 és e_2 párhuzamosságának.

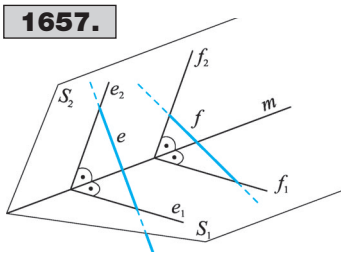
2. eset: A két párhuzamos egyenes nem merőleges a vetületi síkra, de a síkjuk igen. e_1 és e_2 vetítősíkja azonos, így vetületeik megegyeznek, egy egyenest alkotnak.

3. eset: A két párhuzamos egyenes merőleges a vetületi síkra. Mindkét egyenes merőleges a vetületi síkra, vetületük egy-egy pont.

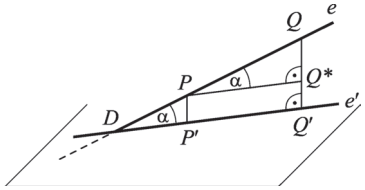
1657. Az állítás nem igaz olyan e és f kitérő egyenesek esetén, amelyek e_1, e_2, illetve f_1, f_2 vetületeire $[e_1; e_2] \perp m$ és $[f_1; f_2] \perp m$. Az állítás minden más esetre igaz.

1658. **1. eset:** $0 < \alpha < 90°$. Húzzunk párhuzamost P-n át e'-vel $\Rightarrow Q^*$. $P'Q'$ párhuzamos PQ^*-gal és PP' párhuzamos $Q'Q^*$-gal $\Rightarrow P'Q'Q^*P$ paralelogramma $\Rightarrow P'Q' = PQ^*$.

1657.



1658.



$QPQ^*\sphericalangle = \alpha$, mert $QPQ^*\sphericalangle$ és $QDQ'\sphericalangle$ egyállásúak. PQ^*Q derékszögű háromszögben $\cos\alpha = \frac{PQ^*}{PQ} \Rightarrow PQ^* = PQ \cdot \cos\alpha \Rightarrow P'Q' = PQ^* = \underline{\underline{PQ \cdot \cos\alpha}}$.

2. eset: $\alpha = 0° \Rightarrow Q \equiv Q^*$; $P'Q' = PQ^* = PQ \cdot \cos 0° = PQ$.

3. eset: $\alpha = 90° \Rightarrow D \equiv P' \equiv Q'$: $d(P'; Q') = 0 \Rightarrow P'Q' = PQ \cdot \cos 90° = 0$.

1659. Legyen a két szakasz AB és CD, merőleges vetületük az S síkon $A'B'$ és $C'D'$.

1. eset: A két szakasz síkja merőleges a vetületi síkra. A és C; B és D merőleges vetülete egybeesik, így a két szakasz vetülete ugyanaz a szakasz, vagy $A'B'$ és $C'D'$ egy egyenesre esik és $A'B' = AB \cdot \cos\alpha = CD \cdot \cos\alpha = C'D'$.

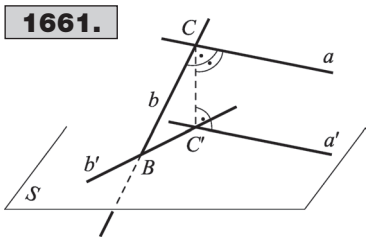
2. eset: A két szakasz síkja nem merőleges a vetületi síkra. A két szakasz S_1, illetve S_2 vetítősíkja párhuzamos $\Rightarrow S \cap S_1 = m_1$ és $S \cap S_2 = m_2$, m_1 és m_2 párhuzamosak $\Rightarrow A'B'$ és $C'D'$ párhuzamosak. Az 1658. feladatban láttuk, hogy $A'B' = AB \cdot \cos\alpha_1$ és $C'D' = CD \cdot \cos\alpha_2$. AB és CD párhuzamossága miatt $\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow A'B' = C'D'$.

1660. **1. eset:** A szakasz merőleges a vetületi síkra. Ebben az esetben a vetület egyetlen pont, nem keletkezik szakasz.

2. eset: A szakasz nem merőleges a vetületi síkra, és mindkét végpontja a vetületi sík által határolt ugyanazon féltérben van. Legyen az AB szakasz felezőpontja F, merőleges vetületeik $A'B'$ és F'. FF', AA' és BB' párhuzamos szakaszok; F felezi AB-t $\Rightarrow FF'$ az $A'B'BA$ trapéz középvonala $\Rightarrow F'$ felezi $A'B'$-t.

3. eset: A szakasz nem merőleges a vetületi síkra, és két végpontját a sík elválasztja egymástól. A vetületi síkra merőleges irányú eltolással a szakasz a 2. esetben ismertetett helyzetbe hozható. Mivel az eredeti szakasznak és az eltolt szakasznak ugyanaz a merőleges vetülete, az állítást erre az esetre is beláttuk.

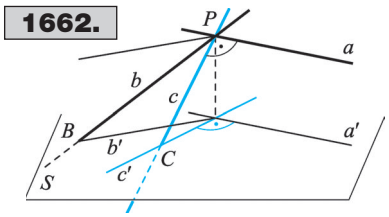
1661. **1. eset:** Az egyik szár párhuzamos a vetületi síkkal, a másik szár nem merőleges a vetületi síkra. *a)* Megmutatjuk, hogy ha $a \perp b$, akkor $a' \perp b'$. Legyen $a \parallel S$, és a vetülete a', b vetülete b'. $CC' \perp S \Rightarrow CC' \perp a' \Rightarrow \underline{CC' \perp a}$. A feltétel szerint $\underline{b \perp a}$. E kettőből $\Rightarrow a \perp [BCC'] \Rightarrow a \perp BC' \Rightarrow$ $\Rightarrow a' \perp b'$. *b)* Megmutatjuk, hogy ha $a' \perp b'$, akkor $a \perp b$. $a' \perp b'$ és $CC' \perp a' \Rightarrow a' \perp [BC'C] \Rightarrow a' \perp b \Rightarrow a \perp b$.

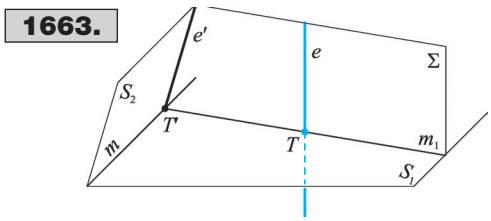


2. eset: Az egyik szár párhuzamos a vetületi síkkal, a másik szár merőleges a vetületi síkra. Ha $b \perp S$ és $a \parallel S$, akkor a vetület az a' félegyenes, rajta a C' ponttal.

1662. $a \parallel S \Rightarrow a' \parallel a$. Vegyük fel a és b síkjában a P-re illeszkedő, a-ra merőleges egyenest $\Rightarrow c$. Az 1661. feladatban láttuk, hogy ha $\sphericalangle(a; c) = \triangleleft$ és $a \parallel S$, akkor $\sphericalangle(a'; c') = \triangleleft$. Ha $\sphericalangle(b; a) > \triangleleft$, akkor c a $\sphericalangle(b; a)$ szögtartományban van $\Rightarrow c'$ a $\sphericalangle(b'; a')$ szögtartományban van $\Rightarrow \sphericalangle(b'; a') > \triangleleft$. Ha $\sphericalangle(b; a) < \triangleleft$, akkor b a $\sphericalangle(c; a)$ szögtartományban van $\Rightarrow b'$ a $\sphericalangle(c'; a')$ szögtartományban van $\Rightarrow \sphericalangle(b'; a') < \triangleleft$.

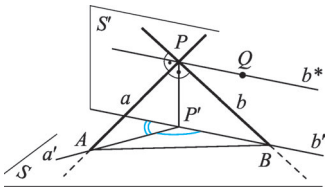
1663. Legyen az e egyenest S_2-re vetítő sík Σ. $\Sigma \cap S_1 = m_1$ és $\Sigma \cap S_2 = e'$. T képe $T' \Rightarrow$ $\Rightarrow TT' \perp S_2 \Rightarrow \underline{e(T; T') = m_1 \perp m}$. $e \perp S_1 \Rightarrow \underline{e \perp m}$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow m \perp [T, T', e] = \Sigma \Rightarrow m \perp e'$.



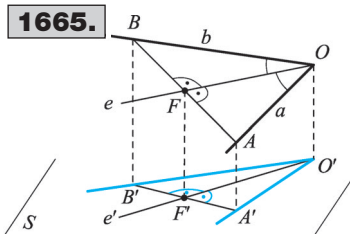


II

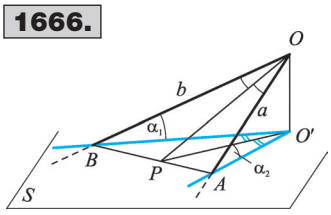
1664.



1665.



1666.



1664. Vegyük a b egyenes S-re merőleges vetítősíkját $\rightarrow S'$. Legyen $S \cap S' = b'$. Fektessünk P-n át b'-vel párhuzamos egyenest S'-ben $\rightarrow b^*$. $a \perp b$, de a nem merőleges S'-re $\Rightarrow APQ\sphericalangle$ tompaszög. $APQ\sphericalangle$ b^* szára párhuzamos S-sel, így az 1662. feladat szerint $APQ\sphericalangle$ képe is tompaszög $\Rightarrow AP'B\sphericalangle > \text{⦟}$. Ha $APB\sphericalangle$ kiegészítő szögét nézzük, annak képe az $AP'B\sphericalangle$ kiegészítő szöge lesz, ami a fentiek szerint ⦟-nél kisebb.

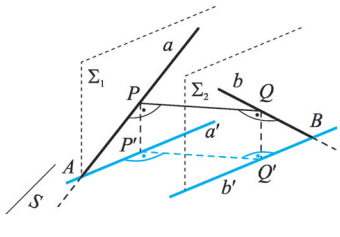
1665. Jelöljük az OC szögfelezőt e-vel, $e \parallel S$. Vegyünk fel az adott szög száraira $OB = OA$ szakaszokat. $AB \cap e = F$; F felezi AB-t és $OFB\sphericalangle = OFA\sphericalangle = \text{⦟}$, mert az $AOB\triangle$ egyenlő szárú. Az 1661. feladatban láttuk, hogy OFA derékszög képe $O'F'A'$ szintén derékszög, mivel $FO \parallel S$. Hasonlóan belátható, hogy $B'F'O'\sphericalangle = \text{⦟}$. Az 1660. feladatban láttuk, hogy az F felezéspont merőleges vetülete is felezéspont $\Rightarrow B'F' = F'A'$. $B'A'O'\triangle$ egyenlő szárú, mert alaphoz tartozó magassága felezi az alapot $\Rightarrow F'O'$ felezi a $B'O'A'\sphericalangle$-et.

1666. I. Megmutatjuk, hogy ha $OBO'\sphericalangle = OAO'\sphericalangle$, akkor $O'P$ is szögfelező.
$OBO'\triangle \cong OAO'\triangle$, mert OO' oldaluk közös, mindkettő derékszögű és $OBO'\sphericalangle = OAO'\sphericalangle \Rightarrow$ $\Rightarrow BO' = AO'$ és $BO = AO$. $AOB\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow PO$ szögfelező merőlegesen felezi az alapot. BPO derékszög képe $BPO'\sphericalangle$ szintén derékszög (1661. feladat). Hasonlóan $APO'\sphericalangle = \text{⦟} \Rightarrow PO'$ az ABO' egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága $\Rightarrow PO'$ felezi a $BO'A\sphericalangle$-et.
II. Megmutatjuk, hogy ha OP is, OP' is szögfelező, akkor $OBO'\sphericalangle = OAO'\sphericalangle$. $OB = b \Rightarrow O'B =$ $= b \cdot \cos\alpha_1$; $OA = a \Rightarrow O'A = a \cdot \cos\alpha_2$ (1658. feladat). OP szögfelező az $AOB\triangle$-ben, így a szögfelező tétel miatt $BP : PA = b : a$. $O'P$ szögfelező az $AO'B\triangle$-ben, így a szögfelező tételből $BP : PA = (b \cdot \cos\alpha_1) : (a \cdot \cos\alpha_2)$. A két összefüggésből $b : a = (b \cdot \cos\alpha_1) : (a \cdot \cos\alpha_2) \Rightarrow \cos\alpha_1 =$ $= \cos\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow OBO'\sphericalangle = OAO'\sphericalangle$.

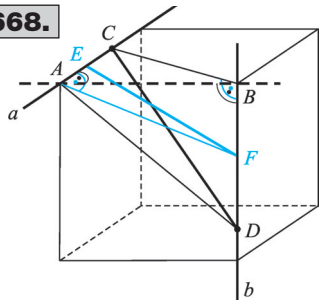
1667. P, Q a normáltranszverzális a-ra, illetve b-re illeszkedő pontja. $PQ \parallel S$, P képe P', Q képe Q'. $QPA\sphericalangle = \text{⦟}$ és $PQ \parallel S \Rightarrow Q'P'A\sphericalangle = \text{⦟}$ (1661. feladat). Hasonlóan $PQB\sphericalangle = \text{⦟}$ és $PQ \parallel S \Rightarrow$ $\Rightarrow P'Q'B\sphericalangle = \text{⦟}$. a' és b' olyan egyenesek, amelyek mindketten merőlegesek a $P'Q'$ szakaszra $\Rightarrow$ $\Rightarrow a' \parallel b'$. Ha $a \perp S$ vagy $b \perp S$, akkor képük egyetlen pont, A, illetve B.

1668. Legyen a feltételeknek eleget tevő a és b egyenes egy kocka két kitérő élének egyenese. AB a normáltranszverzális $\Rightarrow AB \perp AC$ és $AB \perp BD \Rightarrow ACB\triangle$ és $ABD\triangle$ derékszögű. $BD \perp AC$ és $BD \perp AB$ miatt $BD \perp [ABC] \Rightarrow BD \perp CB \Rightarrow CBD\triangle$ derékszögű.
Pitagorasz-tétel az $ACB\triangle$-re, az $ABD\triangle$-re és a $CBD\triangle$-re: $AC^2 + AB^2 = BC^2$; $AB^2 + BD^2 =$ $= AD^2$; $CB^2 + BD^2 = CD^2$. A vizsgált összeg: $AC^2 + AD^2 + BD^2 + BC^2 = (BC^2 - AB^2) +$ $+ (AB^2 + BD^2) + CD^2 = BC^2 + BD^2 + CD^2 = 2CD^2 =$ állandó.

1667.



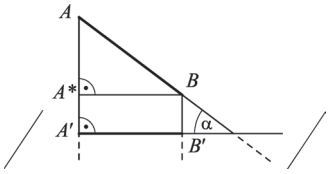
1668.



II

1669. Tekintsük az 1668. ábrát. Jelképezze a két kitérő egyenest egy kocka két kitérő élének egyenese. $BD \perp AB$ és $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp [ABC] \Rightarrow BD \perp BC \Rightarrow CBD\triangle$ derékszögű, alkalmazható rá a Pitagorasz-tétel: $CD^2 = CB^2 + BD^2$ (1). $CAB\sphericalangle = \text{⦟} \Rightarrow CAB\triangle$-re alkalmazható a Pitagorasz-tétel: $CB^2 = AC^2 + AB^2$ (2). A (2) összefüggést (1)-ben felhasználva: $CD^2 = AC^2 + AB^2 + BD^2 \Rightarrow CD^2 - AB^2 = AC^2 + BD^2$ (*). $AE \perp [ABD] \Rightarrow AE \perp AF \Rightarrow EAF\triangle$ derékszögű, alkalmazható rá a Pitagorasz-tétel: $EF^2 = EA^2 + AF^2$ (3). $ABF\triangle$ derékszögű, alkalmazható rá a Pitagorasz-tétel: $AF^2 = AB^2 + BF^2$ (4). (4) összefüggést (3)-ban felhasználva: $EF^2 = EA^2 + AB^2 + BF^2 = \frac{1}{4}AC^2 + AB^2 + \frac{1}{4}BD^2 = AB^2 + \frac{1}{4}(AC^2 + BD^2)$ (*)-ot felhasználva: $EF^2 = AB^2 + \frac{1}{4}(CD^2 - AB^2) \Rightarrow EF = \sqrt{\frac{3}{4}AB^2 + \frac{1}{4}CD^2}$ = állandó.

1670. $A'B' = AB \cdot \cos\alpha = 12 \cdot \cos 30° = \underline{\underline{6 \cdot \sqrt{3}\ \text{m}}}$.



1671. *a)* $\alpha = 60°$; *b)* $\alpha = 45°$.

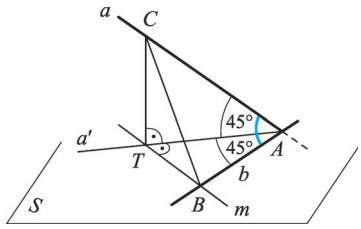
1672. Legyen P' a P pont merőleges vetülete a síkon $\Rightarrow$ $\Rightarrow AP'P\sphericalangle = BP'P\sphericalangle = \text{⦟}$. $AP' : P'B = m : n \Rightarrow AP' = mx$ és $P'B = nx$. Pitagorasz-tétel az $AP'P\triangle$-re: $PP'^2 = a^2 - m^2x^2$ (1). Pitagorasz-tétel az $BP'P\triangle$-re: $PP'^2 = b^2 - n^2x^2$ (2). (1)- és (2)-ből $a^2 - m^2x^2 = b^2 - n^2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2 - b^2}{m^2 - n^2}$, x^2-et (1)-be visszahelyettesítve: $PP' = \sqrt{\frac{b^2m^2 - a^2n^2}{m^2 - n^2}}$ összefüggést kapunk. A számadatokkal $PP' = 132$ m.

1673. $CT = TA$, mert $CTA\triangle$ egyenlő szárú, derékszögű. Állítsunk merőlegest T-ben TA-ra $\Rightarrow m$. $m \cap b = B$. $BT = TA$, mert $BTA\triangle$ egyenlő szárú, derékszögű. $CT \perp S \Rightarrow CT \perp TB \Rightarrow CTB\triangle$ derékszögű; $CT = TA = BT$ miatt $CTB\triangle$ egyenlő szárú, derékszögű. $CTB\triangle \cong CTA\triangle$, mert CT oldaluk közös $\Rightarrow \underline{CB = CA}$. $CTB\triangle \cong ATB\triangle$, mert TB oldaluk közös $\Rightarrow \underline{CB = AB}$; Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow \sphericalangle(a; b) = 60°$.

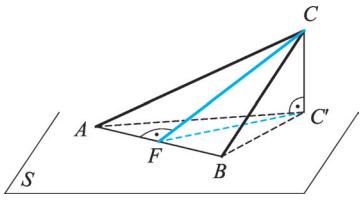
1674. $ABC\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow FC$ alaphoz tartozó magasságának FC' vetülete a vetületi háromszög magassága.

Pitagorasz-tétel az AFC derékszögű háromszögre: $FC^2 = 25^2 - 20^2 \Rightarrow FC = 15$ m. Pitagorasz-tétel az $FC'C$ derékszögű háromszögre: $FC'^2 = 15^2 - 7^2 \Rightarrow FC' = 4\sqrt{11}$ m. $T_{ABC'} = \frac{40 \cdot 4\sqrt{11}}{2} = 80\sqrt{11}\ \text{m}^2 \approx \underline{\underline{265{,}33\ \text{m}^2}}$.

1673.



1674.



II

1675. Jelöljük az ABC háromszög középpontját T-vel, a szakasz felső végpontját D-vel. $DT \perp [ABC] \Rightarrow DT \perp TC \Rightarrow DTC\sphericalangle = \triangleleft$. T az $ABC\triangle$ súlypontja $\Rightarrow TC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, ahol a a háromszög oldala. Pitagorasz-tétel a $DTC\triangle$-re: $c^2 = b^2 + \frac{a^2}{3} \Rightarrow a = \sqrt{3\left(c^2 - b^2\right)}$. A szabályos háromszög területe: $T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}\left(c^2 - b^2\right)}{4}}}$.

Kocka

1676. 27 részre.

1677. Az ábra szerint kiválasztott E, B, G csúcspontok síkja nem tartalmaz negyedik csúcsot. A síkhoz egyértelműen hozzárendelhető a levágott tetraéder F csúcsa. A kocka 8 csúcsához 8 sík rendelhető, így 8-féleképpen tudunk három alkalmas csúcsot választani.

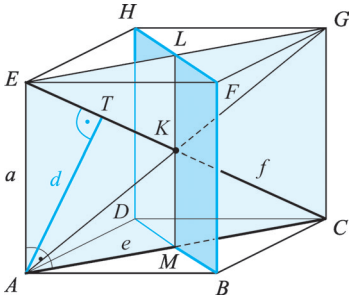
1678. Tekintsük az 1677. ábrát. Minden párhuzamos lappárhoz 2 átlós sík tartozik. 3 db párhuzamos lappár van, így összesen 6 db az átlós síkok száma.

1679. Tekintsük az 1677. ábrát. Lapátló: $e = a\sqrt{2}$. Testátló: $f = a\sqrt{3}$. Körülírt gömb sugara: $KE = R = \frac{f}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Beírt gömb sugara: $KL = r = \frac{a}{2}$.

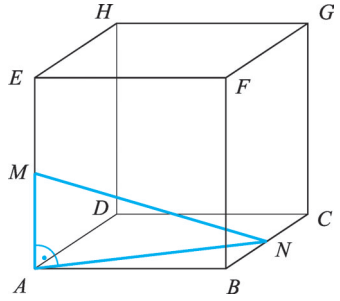
1680. Tekintsük az 1677. ábrát. Felhasználjuk: $e = a\sqrt{2}$, $f = a\sqrt{3}$. A testátlóra illeszkedő csúcsok távolsága 0. A többi csúcs mindegyike egy olyan derékszögű háromszög csúcsa, melynek befogói egy él, illetve egy lapátló, átfogója egy testátló. Írjuk fel az $ACE\triangle$ területét kétféleképpen: $T_{ACE} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2}$, illetve $T_{ACE} = \frac{a\sqrt{3} \cdot d}{2} \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}d}{2} \Rightarrow d = a\sqrt{\frac{2}{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{3}$.

1681. $EA \perp [ABCD] \Rightarrow EA \perp AN \Rightarrow$ Pitagorasz-tétel az $MAN\triangle$-re: (1) $MA^2 + AN^2 = MN^2$. Pitagorasz-tétel az $ABN\triangle$-re: (2) $AB^2 + BN^2 = AN^2$. (2) és (1): $MA^2 + AB^2 + BN^2 = MN^2$. $MA = \frac{a}{2}, AB = a, BN = \frac{a}{2}$. $\frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4} = MN^2 \Rightarrow MN = \underline{\underline{a\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}}}$.

1677.



1681.



II

1682. Tekintsük az 1677. ábrán az EC testátlót és a hozzá képest kitérő BF élt. Legyen $e(E;C)=g$ és $e(B;F)=h$. Húzzunk párhuzamost a testátló felezőpontján át h-val $\Rightarrow h'=e(K;L)$. g és h' metsző egyenesek síkja S, a kocka egyik átlós síkja. h párhuzamos S-sel, $d(h;S)=d(h;g)$. h egy pontjából merőlegest állítunk az S síkra (pl. B-ből). A merőlegesnek B-től az S-ig terjedő szakasza fél lapátlóval egyenlő, $d(g;h)=d(h;S)=d(B;M)=\underline{\underline{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}}$.

1683. Tekintsük az 1677. ábrát. Két testátló egy átlós síkmetszet téglalap két átlója, az átlók szöge legyen φ. Például $GKC\sphericalangle=\varphi\Rightarrow KCM\sphericalangle=\dfrac{\varphi}{2}$. $KMC\sphericalangle=\triangleright$ és $KM=\dfrac{a}{2}$, $KC=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\frac{\varphi}{2}=35{,}26^\circ\Rightarrow\underline{\underline{\varphi=70{,}53^\circ}}.$$

1684. Tekintsük az 1677. ábrát. Jelöljük a testátló és egy él szögét ε-nal.
A keresett szög egy olyan derékszögű háromszög (pl. EAC) egyik hegyesszöge ($CEA\sphericalangle=\varepsilon$), amelyben a keresett szög melletti befogó az él (szöggel szembeni befogó a lapátló), átfogó a testátló. $EAC\triangle$-ben: $\cos\varepsilon=\dfrac{a}{a\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\underline{\underline{\varepsilon=54{,}74^\circ}}$. A testátló minden éllel ugyanekkora szöget zár be, mert az egy csúcsba futó élek mindegyikénél a fenti gondolatmenet követhető, a többi pedig párhuzamos valamelyikkel, így a testátlóval a szögük megegyezik.

1685. Tekintsük az 1677. ábrát. Vetítsük merőlegesen a testátlót az egyik lapra. A vetület a lapátló lesz. (Például EC testátló merőleges vetülete az $ABCD$ lapon az AC lapátló.) A keresett szög a testátló és e lapátló szöge ($ECA\sphericalangle$). EAC derékszögű háromszögből: $\sin\alpha=\dfrac{a}{a\sqrt{3}}=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\underline{\underline{\alpha\approx35{,}26^\circ}}.$$

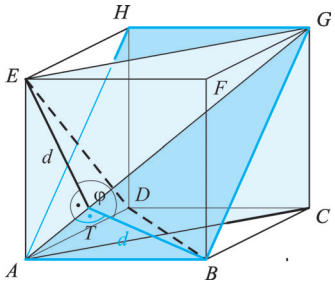
A testátló mindegyik lappal ugyanekkora szöget zár be, mert a vetítésnél kapott derékszögű háromszögből minden esetben az éllel szemközti hegyesszöget keressük, miközben a testátló az átfogó.

1686. A két sík metszésvonala a kocka AG testátlója. ABG derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága és $EAG\triangle$ átfogóhoz tartozó magassága egyenlő, mert a fenti háromszögek egybevágók. A magasságok talppontja az AG szakasz ugyanazon T pontja, mert az egyenlő befogók találkoznak az A csúcsban. A fenti magasságok szöge az átlós síkok keresett szöge. $ETB\triangle$ egyenlő szárú, d szárainak hosszát az 1680. feladatból tudjuk: $d=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. A háromszög alapja az EB lapátló, hossza: $EB=a\sqrt{2}$. $\sin\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}:\dfrac{a\sqrt{6}}{3}=$

$$=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{a\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{\varphi}{2}=60^\circ\Rightarrow\varphi=120^\circ.$$

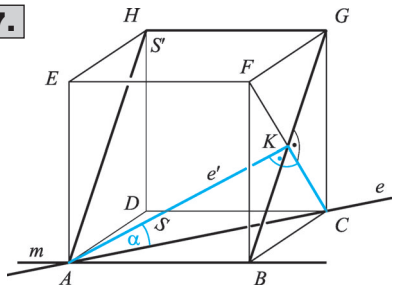
$\Rightarrow$ Az átlós síkok hajlásszöge $\underline{\underline{60^\circ}}$.

1686.

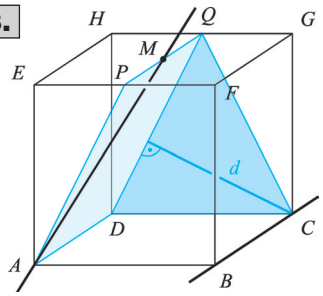


II

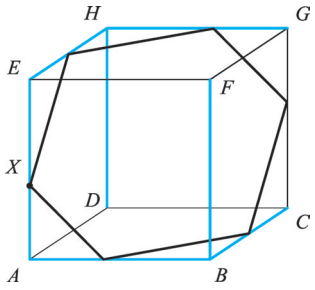
1687.



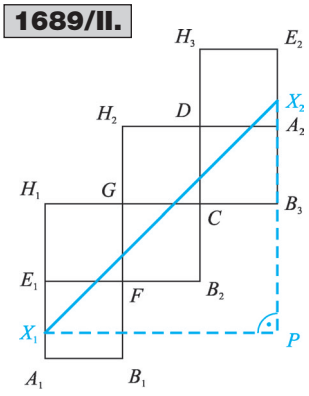
1688.



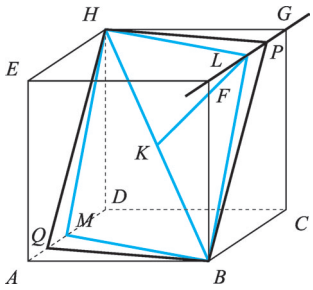
1689/I.



1689/II.



1690.



1687. Vigyük fel a térelemeket egy kockára: S a kocka alapsíkja $\rightarrow [ABCD]$. S' a kocka átlós síkja $\rightarrow [ABGH]$. $m = S \cap S'$ az alapél $\rightarrow e(A;B)$. e az alaplap átlója $\rightarrow e(A;C)$. e-t merőlegesen vetítjük S'-re: A képe önmaga. C képe K lapközéppont, mert $CK \perp BG$ és $CK \perp m \Rightarrow CK \perp S' \Rightarrow e' = e(A;K)$. $\sphericalangle(e;S') = \sphericalangle(e;e')$. AKC derékszögű háromszögben $\sin\alpha = \frac{CK}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 30°}}$.

1688. Húzzunk párhuzamost M-en és A-n át BC-vel $\rightarrow$ $\rightarrow PQ, AD$. $ADQP$ paralelogramma $\Rightarrow [APQD] = S$ párhuzamos BC-vel. $d(AM;BC) = d(S;BC) = d(DQ;C)$. Pitagorasz-tétel a $QGC\triangle$-re: $QC^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow QC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. $QD = QC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$T_{DCQ} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$, $T_{DCQ} = \frac{a \cdot \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \underline{\underline{\frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{5}}{5}}}$ a két egyenes távolsága.

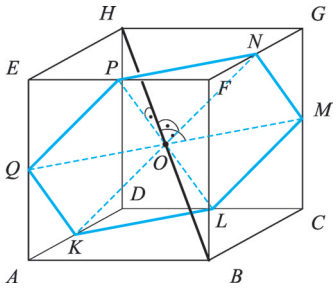
1689. Vágjuk fel a kocka felületét az 1689/I. ábrán jelzett éleken. A kocka kiterített hálóját az 1689/II. ábra mutatja. X_1-ből az X_2-be kell eljutni a kocka felületén, a legrövidebb úton. A hálón ez az X_1X_2 szakasz. $X_1PX_2\triangle$ egyenlő szárú, derékszögű: $X_1P = 3a$, $X_2P = 4a - E_2X_2 - X_1A_1 = 4a - (E_1X_1 + X_1A_1) =$

$= 4a - E_1A_1 = 3a \Rightarrow X_1X_2 = \underline{\underline{3a\sqrt{2}}}$.

1690. Az FG él tetszőleges P pontján és a HB testátlón átfektetett sík a $HPBQ$ paralelogrammában metszi a kockát. A paralelogramma területe a $HPB\triangle$ területének kétszerese. $HPB\triangle$ egyik oldala a HB testátló, ami bármely $P \in FG$ esetén ugyanakkora, így a keresett terület akkor minimális, ha P a legközelebb van HB-hez. HB és FG kitérők, így a normáltranszverzális FG-n levő talppontja adja a minimális területű síkmetszetet. Vetítsük a két egyenest a $DCGH$ lapra. HB képe HC, FG képe G. G és HC távolsága a normáltranszverzális hossza, $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (a lapközéppont és G távolsága) $\Rightarrow KL$ a keresett normáltranszverzális (L az FG él felezéspontja), $HLBM$ a minimális területű síkmetszet. Ehhez a testátlóhoz három megoldás tartozik.

1691. Legyen HB felezéspontja O. O felezi a PL, QM és KN szakaszokat, melyek hossza $a\sqrt{2}$, a lapátlóval egyenlő. PN középvonal az $EFG\triangle$-ben $\Rightarrow$ $PN = \frac{1}{2}EG = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. $OPN\triangle$ oldalai egyenlők $\Rightarrow PON\sphericalangle = 60°$. Ugyanezt mondhatjuk a többi részháromszögről is $\Rightarrow$ O-nál 6 db 60°-os szög teljesszöget tesz ki $\Rightarrow$ $KLMNPQ$ hatszög szabályos. $HP = HQ = HK = HL = HM = HN$ miatt a testátló merőleges erre a síkmetszetre.

1691.



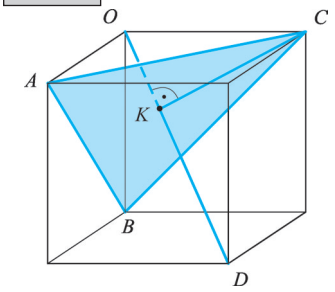
1692. Tekintsük az 1691. ábrát. Az 1690. feladatban láttuk, hogy a testátló és egy hozzá képest kitérő él normáltranszverzálisa a felezéspontjukat összekötő szakasz. $\Rightarrow$ A HB-hez kitérő élek felezéspontjait HB felezéspontjával összekötő szakaszok merőlegesek HB-re. $\Rightarrow$ Ezek az összekötő szakaszok benne vannak a HB-re O-ban állított merőleges síkban. Az 1691. feladatban láttuk, hogy a fenti élfelezéspontok szabályos hatszöget alkotnak, tehát a HB-re O-ban állított merőleges sík szabályos hatszögben metszi a kockát. A hatszög egy oldala az oldallapok átlójának fele, mivel középvonal az átló által létrehozott egyik háromszögben: $x = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1693. Tekintsük az 1691. ábrát. Egy szakasz végpontjaitól egyenlő távol levő pontok halmaza a térben a szakaszfelező merőleges sík. Ennek a síknak a kocka felületével közös pontjait keressük. Az 1692. feladatban láttuk, hogy a HB testátló szakaszfelező merőleges síkja szabályos hatszögben metszi a kockát. Ennek a szabályos hatszögnek a kocka felületével közös pontjai a keresett pontok.

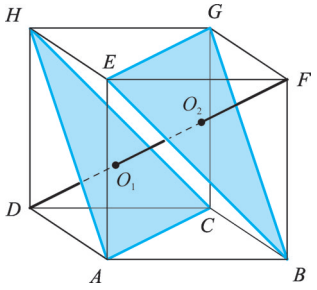
1694. A legnagyobb területű háromszög oldala a lehető leghosszabb. A kocka minden csúcsához tartozik egy ilyen háromszög, a csúcsból induló élek határozzák meg (például az 1686. ábrán F-hez $EBG\triangle$). A háromszög egy-egy oldala a kocka valamelyik lapátlója $\Rightarrow$ hossza $a\sqrt{2}$.

1695. $AO = BO = CO$, $AOC\triangle \cong COB\triangle \cong BOA\triangle \Rightarrow AC = CB = BA = a\sqrt{2}$. $AOD\sphericalangle = BOD\sphericalangle = COD\sphericalangle \Rightarrow ABCO$ szabályos háromoldalú gúla, melynek ABC laphoz tartozó magassága $OD \Rightarrow OD \perp [ABC]$. $OD \cap [ABC] = K$; K az $ABC\triangle$ súlypontja $\Rightarrow KC = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Pitagorasz-tétel az OKC derékszögű háromszögre: $OK^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{OD}{3}$.

1695.



1696.

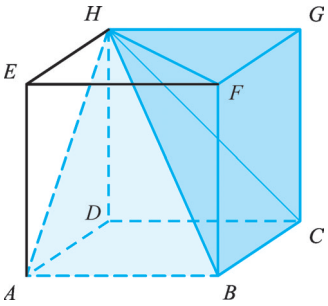


1696. **1. eset:** AH és BG, AH és FC távolsága: AH párhuzamos BG-vel $\Rightarrow$ $d(AH; BG) = a$, AH párhuzamos $[BCGF]$ síkkal $\Rightarrow$ $d(AH; FC) = a$.

2. eset: EB és AH távolsága: Toljuk el EB-t H-ba $\rightarrow$ HC. $[AHC]$ sík párhuzamos EB-vel és $[AHC]$ sík párhuzamos $[EBG]$ síkkal, mert mindkettő az 1695. feladatban látott HB testátló-

II

1697.



ra merőleges sík, ami harmadolja a testátlót $\Rightarrow$ d(AH; EB) = = d([AHC]; EB) = d([AHC]; [EBG]) = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ugyanezt mondhatjuk el az AH átlónak BD, DG és GE átlóktól való távolságára is.

1697. Az ábra szerint a kocka három olyan négyzet alapú gúlára bontható, melynek oldalélei a, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$ és $a\sqrt{2}$. Az ábra jelöléseivel a gúlák csúcsai: $ABCDH$; $GFBCH$; $EABFH$.

1698. Tekintsük az 1696. ábrát. Az 1695. feladatban láttuk, hogy az [ACH] sík is, a [BGE] sík is merőleges a DF testátlóra, és azzal való O_i döféspontjai harmadolják DE-t. Vetítsük a kocka A, H, C és D csúcsait az [ACH] síkra. Az A, H és C pontok helyben maradnak, D képe O_1 lesz. Vetítsük a kocka B, G, E és F csúcsait a [BGE] síkra. A B, G és E pontok helyben maradnak, F képe O_2 lesz. Az ACH részvetület és az EGH részvetület O_1, illetve O_2 középpontú egybevágó szabályos háromszögek páronként párhuzamos oldalakkal. Vetítsük mindkét háromszöget egy a DF testátlóra merőleges S síkra. $S \parallel [ACH] \parallel [EBG]$ miatt ez a vetítés egybevágóság, így helyzetükből adódóan E', A', B', C', G' és H' szabályos hatszöget alkotnak.

1699. *a)* $e = 8\sqrt{3}$ dm $\approx$ 13,86 dm és A = 384 dm^2.

b) $e = 12{,}6\sqrt{3}$ cm $\approx$ 21,82 cm és A = 952,56 cm^2.

c) $e = 423\sqrt{3}$ mm $\approx$ 732,66 mm és A = 1 073 574 mm^2 $\approx$ 1,07 m^2.

d) $e = 0{,}5\sqrt{3}$ m $\approx$ 0,866 m és A = 1,5 m^2.

1700. Az A, B és K pontokra illeszkedő sík a K-n átmenő, AB-vel párhuzamos egyenesben metszi a fedőlapot, ezért a síkmetszet az $ABCD$ téglalap. $BPC\triangle$-ben a Pitagorasz-tételt alkalmazva $BC^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow BC = a\frac{\sqrt{5}}{2}$ és $T_{ABCD} = a^2\frac{\sqrt{5}}{2}$. *a)* T = 71,55 dm^2. *b)* T = 177,5 cm^2.

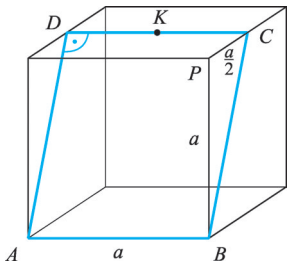
c) T = 200 048,7 mm^2 $\approx$ 0,2 m^2. *d)* $T = \frac{\sqrt{5}}{8}$ m^2 $\approx$ 0,28 m^2.

1701. *a)* $a = 8\sqrt{3}$ dm $\approx$ 13,86 dm és A = 1152 dm^2. *b)* $a = 6\sqrt{3}$ cm $\approx$ 10,4 cm és A = 648 cm^2.

c) $a = 12\sqrt{3}$ mm $\approx$ 20,78 mm és A = 2592 mm^2. *d)* $a = \frac{\sqrt{3}}{6}$ m $\approx$ 0,29 m és A = 0,5 m^2.

1702. *a)* a = 56 dm. *b)* a = 72 cm. *c)* a = 1,6 m. *d)* a = 69,1 mm.

1700.



1703. *a)* $V \approx$ 2,82 dm^3. *b)* $V \approx$ 0,0518 dm^3 $\approx$ 51,8 cm^3.

c) $V \approx$ 1,85 dm^3. *d)* $V \approx$ 1,06 dm^3.

1704. $a_1 \approx$ 7,37 dm; $a_2 \approx$ 1,59 dm.

1705. $V \approx 0{,}568$ dm^3; $a \approx 0{,}828$ dm $\approx$ 8,28 cm.

1706. $a = \sqrt[3]{V}$ = 4,64 dm.

1707. *a)* V = 42,875 cm^3. *b)* $V \approx$ 68,04 cm^3.

c) $V \approx 0{,}068$ m^3 $\approx$ 68 dm^3.

1708. *a)* A = 1014 cm^2. *b)* $A \approx$ 57,93 dm^2. *c)* $A \approx$ 9,52 m^2.

1709. Az átlós síkmetszet olyan téglalap, melynek szomszédos oldalait a kocka egy éle és egy lapátlója alkotja. *a)* $T = a^2 \cdot \sqrt{2}$. *b)* $T \approx 855{,}83\ \text{cm}^2$. *c)* $T \approx 65{,}39\ \text{dm}^2$.

1710. *a)* $t = a^2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$ a kocka éle $a = \underline{\underline{\sqrt{\frac{t}{\sqrt{2}}}}}$; a kocka lapátlója $e = a \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{\sqrt{t \cdot \sqrt{2}}}}$; a kocka testátlója $f = a \cdot \sqrt{3} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{3t}{\sqrt{2}}}}}$; a kocka felszíne $A = 6a^2 = \underline{\underline{\frac{6t}{\sqrt{2}}}}$; a kocka térfogata $V = a^3 = \underline{\underline{\left(\sqrt{\frac{t}{\sqrt{2}}}\right)^3}}$.

b) $a \approx \underline{\underline{13{,}29\ \text{cm}}}$; $e \approx \underline{\underline{18{,}8\ \text{cm}}}$; $f \approx \underline{\underline{23{,}03\ \text{cm}}}$; $A \approx \underline{\underline{1060{,}66\ \text{cm}^2}}$; $V \approx \underline{\underline{2350{,}38\ \text{cm}^3}}$.

c) $a \approx \underline{\underline{6{,}73\ \text{mm}}}$; $e \approx \underline{\underline{9{,}51\ \text{mm}}}$; $f \approx \underline{\underline{11{,}65\ \text{mm}}}$; $A \approx \underline{\underline{271{,}53\ \text{mm}^2}}$; $V \approx \underline{\underline{304{,}44\ \text{mm}^3}}$.

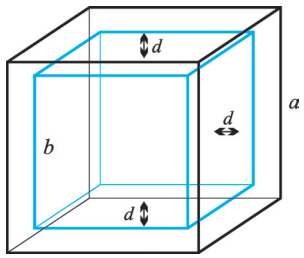
1711. Legyen az eredeti oltárkő éle a, az új oltárkő éle b. $V_1 = a^3$, $V_2 = b^3$ és $V_2 = 2V_1$ összefüggéseket felhasználva: $b^3 = 2a^3 \Rightarrow \underline{\underline{b = a \cdot \sqrt[3]{2}}}$. A b szakasz hossza euklideszi szerkesztéssel nem adható meg, tehát az oltárkövet nem lehet elkészíteni.

1712. A két kocka éle a és $(a + 2)$. Térfogatuk különbsége $V_1 - V_2 = (a + 2)^3 - a^3 = 26\ \text{m}^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 1$ m. A kockák élei: $\underline{\underline{1\ \text{m}}}$, illetve $\underline{\underline{3\ \text{m}}}$.

1713. Felhasználhatjuk: Az átlós síkmetszet területe $a^2 \cdot \sqrt{2}$. Az átlóssík felezi a test térfogatát $\Rightarrow V = \underline{\underline{\frac{1}{2}a^3}}$. A keletkezett test felszínét megkapjuk, ha az eredeti felszín feléhez hozzáadjuk az átlós metszet területét $\Rightarrow A = \underline{\underline{\left(3 + \sqrt{2}\right)a^2}}$.

1714. A belső kocka éle $b = 10\ \text{dm} - 2 \cdot 0{,}2\ \text{dm} = 9{,}6\ \text{dm}$. $V = a^3 - b^3 = 10^3 - 9{,}6^3 \approx 115{,}26\ \text{dm}^3$. $m = V \cdot \rho \approx 115{,}26 \cdot 0{,}8 \approx$ $\approx 92{,}21$ kg. A láda nem merül el, ha a bemerülő rész térfogatának megfelelő víz tömege akkora, mint a láda teljes tömege. A teher tömege legfeljebb: $1000\ \text{kg} - 92{,}21\ \text{kg} \approx \underline{\underline{907{,}79\ \text{kg}}}$.

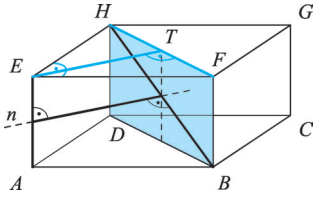
1714.



Téglatest

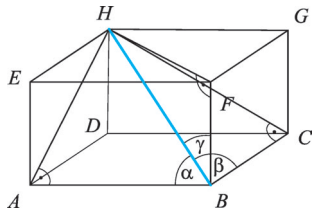
1715. EA él és BH átló egyenese kitérő egyenesek, távolságuk egyenlő az EA egyenes és a vele párhuzamos DH egyenest tartalmazó $[DBFH]$ sík távolságával. Ez a távolság ugyanakkora, mint az E csúcs és a HF lapátló távolsága: $\text{d}(E; T)$. $t_{EFH\triangle} = \frac{ab}{2} = \frac{FH \cdot ET}{2} \Rightarrow ET = \frac{ab}{FH}$ és $FH = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow ET =$ $= \underline{\underline{\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}}$, ugyanekkora az EA él és a DF testátló távolsága.

1715.

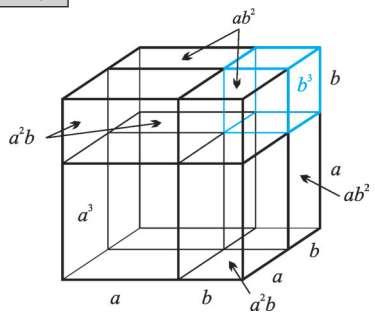


II

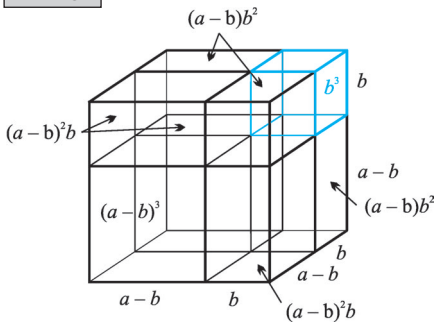
1717.



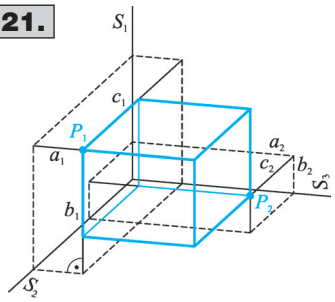
1719.



1720.



1721.



Hasonlóan kiszámítható a többi él és a hozzá kitérő lapátló távolsága: $\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$, illetve $\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$.

1716. Tekintsük az 1715. ábrán a BH testátlót. $HAB\sphericalangle = \triangleleft$ és $HDB\sphericalangle = \triangleleft$. Alkalmazzuk Pitagorasz tételét az BDH és ABD derékszögű háromszögekre: $BH^2 = DH^2 + DB^2$ és $DB^2 = AD^2 + AB^2 \Rightarrow \underline{\underline{BH^2}} = DH^2 + AD^2 + AB^2 = \underline{\underline{BF^2 + BC^2 + BA^2}}$.

1717. Felhasználjuk, hogy az a, b, c élű téglatest testátlója $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ hosszú, valamint egy lapátló, egy testátló és egy él derékszögű háromszöget határoz meg.

$$\cos\alpha = \frac{AB}{BH} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \quad \cos\beta = \frac{BC}{BH} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{BF}{BH} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1.$$

1718. $t = \underline{\underline{a\sqrt{b^2+c^2}}}$.

1719. Tekintsünk egy $(a+b)$ élhosszúságú kockát! Ha a lapjaitól a távolságra párhuzamos síkokat fektetünk az ábra szerint, akkor egy a élű és egy b élű kockát, 3 db a, a, b élű és 3 db a, b, b élű négyzetes hasábot kapunk. Ezek térfogatának összege az eredeti kocka térfogatával egyenlő: $V = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$.

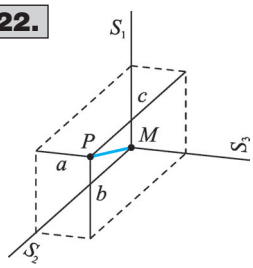
1720. Tekintsünk egy a élhosszúságú kockát! Ha a lapjaitól b távolságra párhuzamos síkokat fektetünk az ábra szerint, akkor egy $(a-b)$ élű és egy b élű kockát, 3 db $(a-b)$, $(a-b)$, b élű és 3 db $(a-b)$, b, b élű négyzetes hasábot kapunk. Ezek térfogatának összege az eredeti kocka térfogatával egyenlő: $V = a^3 = (a-b)^3 + b^3 + 3(a-b)^2 \cdot b + 3(a-b) \cdot b^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow (a-b)^3 = a^3 - [b^3 + 3(a-b)^2 \cdot b + 3(a-b) \cdot b^2] = a^3 - [b^3 + 3a^2b - 3ab^2] \Rightarrow (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

1721. P_1P_2 a téglatest testátlója. A téglatest élei $|a_1 - a_2|$, $|b_1 - b_2|$, $|c_1 - c_2|$ hosszúak. Ha $a_1 = a_2$, vagy $b_1 = b_2$, vagy $c_1 = c_2$, akkor nincs ilyen téglatest.

$$d(P_1;P_2) = \underline{\underline{\sqrt{(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 + (c_1-c_2)^2}}}.$$

1722. A P pontot tekinthetjük egy olyan téglatest csúcsának, amelynek élei a, b, c hosszúságúak és három lapja egy-egy síkra illeszkedik. A keresett távolság a téglatest testátlójának hossza: $PM = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

1722.



1723. $x = a \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{abc}} = \sqrt[3]{\frac{a^2V}{bc}}$; $y = b \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{abc}} = \sqrt[3]{\frac{b^2V}{ac}}$;

$z = c \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{abc}} = \sqrt[3]{\frac{c^2V}{ab}}$.

1724. *a)* $e \approx 6{,}2$ dm; $A = 73{,}92$ dm^2; $V = 42{,}336$ dm^3. *b)* $e \approx 48{,}82$ cm; $A = 4291{,}4$ cm^2; $V = 18\,018$ cm^3. *c)* $e \approx 547$ m; $A = 384\,728$ m^3; $V = 13\,043\,808$ m^3.

1725. A téglatest éleinek hossza (kerekítve): 1,3 dm; 2,6 dm; 3,9 dm.

1726. Egy tégla térfogata $V_o = 25 \cdot 12 \cdot 6{,}5 = 1950$ cm^3. 1 m^3 agyagból a térfogatvesztés után 980 dm^3 = 980 000 cm^3 marad. Ebből 980 000 : 1950 = 502,6 alapján 502 db tégla készülhet.

1727. A 39 cm-es vastagságot $6 \cdot 6{,}5$ cm = 39 cm miatt 6 db téglával tölthetjük ki. A 4 m-es hosszúságot $16 \cdot 25$ cm = 400 cm = 4 m miatt 16 db téglával, a 2,4 m-es magasságot $20 \cdot 12$ cm = = 240 cm = 2,4 m miatt 20 téglával érhetjük el. Összesen $6 \cdot 16 \cdot 20 = 1920$ db tégla szükséges.

1728. A mész térfogata: $V = 3{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2 = 17{,}5$ m^3. A mész tömege: $m = 17{,}5 \cdot 400 = 7000$ kg.

1729. $x \approx 0{,}000\,27$ cm a lap vastagsága.

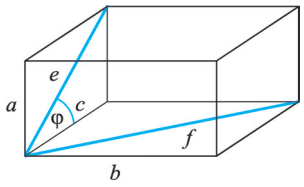
1730. Legyen a hasáb alapéle a, oldaléle b. $\Rightarrow$ Az alaplap átlója $a\sqrt{2} = b$. Az átlós síkmetszet területe $b^2 = 283$ cm$^2 \Rightarrow b \approx 16{,}82$ cm $\Rightarrow a\sqrt{2} = 16{,}82 \Rightarrow a \approx 11{,}9$ cm. A négyzetes oszlop térfogata $V = a \cdot a \cdot b = 11{,}9^2 \cdot 16{,}82 = 2380$ cm^3.

1731. Legyen a négyzetes oszlop alapéle a, oldaléle b. $\Rightarrow$ Az alaplap átlója $a\sqrt{2}$. Az átlós síkmetszet területe $b \cdot a\sqrt{2} = 116{,}8$. $\Rightarrow ab \approx 82{,}6$. A test térfogata: $a \cdot a \cdot b = 627{,}4$, azaz $a \cdot 82{,}6 = = 627{,}4 \Rightarrow a \approx 7{,}6$ cm és $b \approx 10{,}87$ cm.

1732. Az átlós síkmetszetek téglalapok, oldalaik a téglatest megfelelő élei és lapátlói. A szokásos jelöléssel: $t_{ABGH} = a \cdot \sqrt{b^2+c^2} = 32$ és $t_{BCHE} = b \cdot \sqrt{a^2+c^2} = 43{,}5$ és $t_{ACGE} = c \cdot \sqrt{a^2+b^2} = 52$. $a^2 \cdot (b^2+c^2) = 1024$ és $b^2 \cdot (a^2+c^2) = 1892{,}25$ és $c^2 \cdot (a^2+b^2) = 2704 \Rightarrow c^2 \cdot (b^2-a^2) = 868{,}25$ és $c^2 \cdot (a^2+b^2) = 2704 \Rightarrow c^2 \cdot 2b^2 = 3572{,}25 \Rightarrow cb = 42{,}26 \Rightarrow ab = 10{,}3$ és $ac = 30{,}3 \Rightarrow cb \cdot ab \cdot ac = = (abc)^2 = V^2 \Rightarrow V = 114{,}84$ cm^3.

1733. Az átlós síkmetszet négyzet $\Rightarrow$ az egyik lapátló is 7 dm vagy 11 dm. Pitagorasz tétele miatt $e^2 = 7^2 + c^2$ vagy $e^2 = 11^2 + c^2 \Rightarrow e > 7$. A 11 cm-es oldalra illeszkedik az átlós metszet. $c^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow b = 11$ cm, $a = 7$ cm, $c = 6\sqrt{2}$ cm.

1735/I.



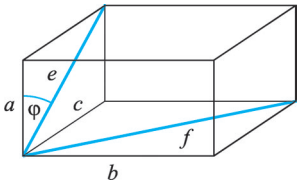
$A = 2 \cdot (ab + bc + ac) = 2 \cdot (77 + 66\sqrt{2} + 42\sqrt{2}) = 154 + 216\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow A \approx 459{,}5$ cm^2. $V = abc = 462\sqrt{2}$ cm$^3 \approx 653{,}4$ cm^3.

1734. $c = 21$ cm; $a = 11$ cm; $b = 5$ cm.

1735. 1. eset: $e = 52$ cm, $\varphi = 22°37'$, $f = 101$ m. $c = e \cdot \cos\varphi \approx$ ≈ 48 m és $a = e \cdot \sin\varphi \approx 20$ m. Pitagorasz-tétel: $f^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = = f^2 - c^2 \Rightarrow b \approx 88{,}9$ m. $V = abc \approx 85\,310$ m^3.

II

1735/II.



2. eset: $e = 52$ cm, $\varphi = 22°37'$, $f = 101$ m. $c = e \cdot \sin\varphi \approx 20$ m és $a = e \cdot \cos\varphi \approx 48$ m. Pitagorasz tétele: $f^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = f^2 - c^2 \Rightarrow b \approx 99$ m. $V = abc \approx \underline{\underline{95\,040\ \text{m}^3}}$.

1736. $a \approx \underline{\underline{13{,}8\ \text{cm}}}$; $b \approx \underline{\underline{18{,}4\ \text{cm}}}$; $c \approx \underline{\underline{23\ \text{cm}}}$.

1737. $a \approx \underline{\underline{10{,}36\ \text{cm}}}$; $b \approx \underline{\underline{15{,}54\ \text{cm}}}$; $c \approx \underline{\underline{20{,}72\ \text{cm}}}$.

1738. $a \approx \underline{\underline{11{,}84\ \text{cm}}}$; $b \approx \underline{\underline{14{,}8\ \text{cm}}}$; $c \approx \underline{\underline{11{,}76\ \text{cm}}}$.

1739. $b^2 = 16\ \text{m}^2 \Rightarrow b = 4$ m és $a : b = 3 : 4 \Rightarrow a = 3$ m. Pitagorasz-tétel: $b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow c = \sqrt{7}$ m. $A = 2 \cdot (ab + bc + ac) =$ $= 2 \cdot \left(12 + 4\sqrt{7} + 3\sqrt{7}\right) = 24 + 14\sqrt{7} \Rightarrow A \approx \underline{\underline{61\ \text{cm}^2}}$. $V = abc = 12\sqrt{7}\ \text{m}^3 \approx \underline{\underline{31{,}75\ \text{m}^3}}$.

1740. $a = 3\frac{1}{\underline{\underline{15}}}$; $b = 9\frac{1}{\underline{\underline{5}}}$; $c = 15\frac{1}{\underline{\underline{3}}}$.

1741. A kocka éle a, a téglatest élei a; $a - 6$; $a - 4$. $a^3 = a(a-6)(a-4) + 2059{,}2 \Rightarrow a^3 = a^3 - 10a^2 + 24a + 2059{,}2 \Rightarrow 0 = 10a^2 - 24a - 2059{,}2 \Rightarrow a_1 < 0$ (ez nem lehet egy szakasz hossza); $a_2 = 15{,}6 \Rightarrow$ A téglatest élei $\underline{\underline{15{,}6\ \text{cm}}}$; $\underline{\underline{9{,}6\ \text{cm}}}$ és $\underline{\underline{11{,}6\ \text{cm}}}$ hosszúak.

1742. $ab : bc : ca = 16 : 21 : 28$. $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c} = \frac{16}{21} \Rightarrow a = \frac{16}{21}c$ és $\frac{ab}{ca} = \frac{b}{c} = \frac{16}{28} \Rightarrow b = \frac{16}{28}c$; $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 29\ \text{cm}$. $\frac{256}{441}c^2 + \frac{256}{784}c^2 + c^2 = 841 \Rightarrow c^2 = 441 \Rightarrow c = \underline{\underline{21\ \text{cm}}}$; $a = \underline{\underline{16\ \text{cm}}}$ $b = \underline{\underline{12\ \text{cm}}}$.

1743. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ és $42 = a + b + c \Rightarrow 1764 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 729 + A \Rightarrow A = \underline{\underline{1035\ \text{cm}^2}}$.

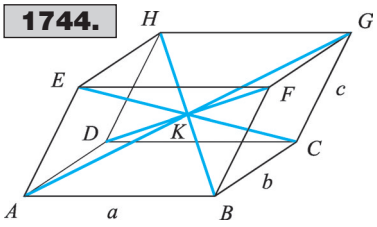
Hasáb

1744. A paralelepipedon szemközti élei párhuzamosak és egyenlők, ezért átlós síkmetszetei paralelogrammák. Az $ABGH$ paralelogramma átlói felezik egymást: $AG \cap BH = K \Rightarrow KA = KG$ és $\underline{KB = KH}$. A $BCHE$ paralelogramma átlói felezik egymást: $CE \cap BH = L \Rightarrow LC = LE$ és $\underline{LB = LH}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $L \equiv K$. Hasonlóan belátható, hogy K mindegyik testátlónak felezőpontja, ezért szimmetria-középpont.

1745. Lásd az 1744. feladat megoldását.

1746. Legyen a négyoldalú hasáb alaplapja $ABCD$, fedőlapja $EFGH$! Az AG és BH testátlók metszik egymást, ezért A, B, G és H egy síkban vannak. Az $ABCD$ sík párhuzamos az $EFGH$ síkkal, ezért $AB \parallel GH$. Hasonlóan belátható, hogy minden szemközti élpár párhuzamos egymással, így a test paralelepipedon.

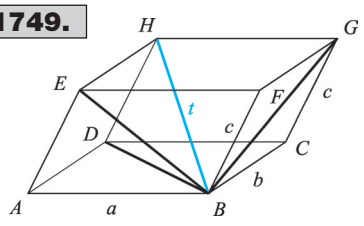
1744.



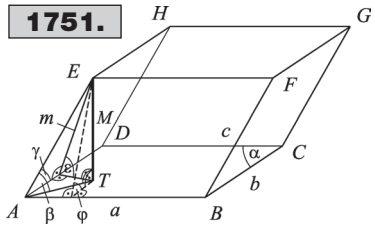
1747. *a)* A téglatest átlós síkmetszetei téglalapok, amiknek átlói egyben a testátlók. Ezek egyenlők és felezik egymást mind a hat átlós metszetben, így a téglatest testátlói egyenlők.

b) Ha egy paralelepipedon testátlói egyenlők, akkor átlós síkmetszetei olyan paralelogrammák, amiknek átlói egyenlők, vagyis téglalapok. ⇒ Élei merőlegesek az éleket nem tartalmazó lapokra. ⇒ A paralelepipedon téglatest.

1749.



1751.



1748. Tekintsük az 1744. ábrát. Felhasználjuk, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalainak négyzetösszegével. Az $ACGE$ paralelogrammában: $AG^2 + EC^2 = 2(AE^2 + AC^2)$. A $BDHF$ paralelogrammában: $DF^2 + BH^2 = 2(BF^2 + DB^2)$. Az $ABCD$ paralelogrammában: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$. A fenti összefüggéseket felhasználva: $AG^2 + EC^2 + DF^2 + BH^2 = 2AE^2 + 2AC^2 + 2BF^2 + 2BD^2 = 2AE^2 + 4AB^2 + 4AD^2 + 2BF^2 = 2c^2 + 4a^2 + 4b^2 + 2c^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$.

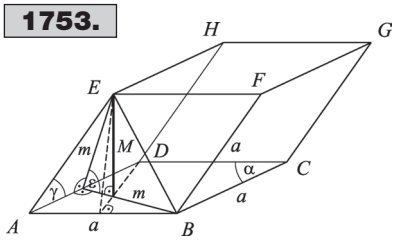
1749. Felhasználjuk, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalainak négyzetösszegével. A $BCHE$ paralelogrammában $t^2 + EC^2 = 2BE^2 + 2b^2$. A $BFHD$ paralelogrammában $t^2 + DF^2 = 2DB^2 + 2c^2$. Az $ABGH$ paralelogrammában $t^2 + AG^2 = 2BG^2 + 2a^2$. A fenti összefüggéseket felhasználva: $2t^2 + \underline{t^2 + EC^2 + DF^2 + AG^2} = 2(BE^2 + DB^2 + BG^2) + 2(a^2 + b^2 + c^2)$. Az aláhúzottak a testátlók négyzetei, amiknek összege az 1748. feladat szerint egyenlő az oldalak négyzetösszegével. $\Rightarrow 2t^2 + 4(a^2 + b^2 + c^2) = 2(BE^2 + DB^2 + BG^2) + 2(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow t^2 + a^2 + b^2 + c^2 = BE^2 + DB^2 + BG^2$.

1750. $V = \underline{15\,105{,}8\ \text{cm}^3} \approx \underline{15{,}1\ \text{dm}^3}$.

1751. $V = t \cdot M = (9 \cdot 13 \cdot \sin 48{,}6°)(25 \cdot \sin 68{,}3°) \approx \underline{2038{,}6\ \text{cm}^3}$.

1752. Tekintsük az 1751. ábrát. Legyen $a = 11\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 46{,}7°$, $c = 16\,\text{cm}$, $\gamma = 62{,}5°$, $\varepsilon = 53°$. $t = 8 \cdot 11 \cdot \sin 46{,}7° \approx 64{,}04\ \text{cm}^2$ és $m = 16 \cdot \sin 62{,}5° \approx 14{,}2\,\text{cm}$. $M = m \cdot \sin 53° \approx 11{,}34\,\text{cm}$. $V = t \cdot M \approx \underline{726{,}25\ \text{cm}^3}$.

1753.

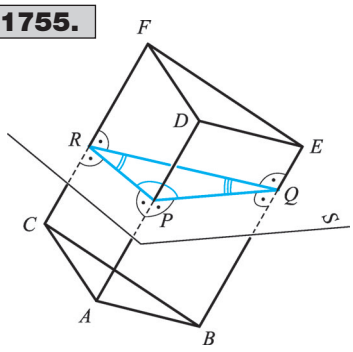


1753. Legyen $a = 11\,\text{cm}$ és $\alpha = \gamma = 52{,}3°$; $A = 6 \cdot a^2 \sin\alpha \approx \underline{\approx 574{,}43\ \text{cm}^2}$. $m = a \cdot \sin\gamma \approx 8{,}7\,\text{cm}$. A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást és szögfelezők. Egybevágó rombuszok magasságai egyenlők. $\Rightarrow BUE\triangle$ egyenlő szárú, szárszöge ε. $\dfrac{e}{2} = a \cdot \sin\dfrac{\gamma}{2} \approx 4{,}85\,\text{cm}$, $\sin\dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{\frac{e}{2}}{m} \Rightarrow \dfrac{\varepsilon}{2} \approx \approx 33{,}88° \Rightarrow \varepsilon \approx 67{,}76°$. $M = m \cdot \sin\varepsilon \approx 8{,}05\,\text{cm}$.

$V = a^2 \cdot \sin\alpha \cdot M \approx \underline{770{,}7\ \text{cm}^3}$.

1754. Tekintsük a hasáb oldalélekre merőleges síkmetszetét! A síkmetszetháromszög oldalai az oldallapok magasságai. Az oldalélek egyenlők (b hosszúságúak). A háromszög-egyenlőtlenség szerint $m_a < m_b + m_c \Rightarrow t_a < t_b + t_c$.

1755.



1755. Tekintsük a hasáb oldalélekre merőleges síkmetszetét, a $PQR\triangle$-et! A síkra merőleges egyenes tétele miatt $AD \perp RP$ és $AD \perp QP \Rightarrow RPQ\sphericalangle$ a két oldallap szöge. $\Rightarrow$ A síkmetszet sokszög belső szögeinek összege egyenlő az oldallapsíkok által bezárt szögek összegével. A bizonyítás tetszőleges n oldalú hasábra elmondható. n oldalú hasáb síkmetszete n-szög, ezért $(n - 2) \cdot 180°$ a szögek összege.

II

1756. Írjuk fel a felszínt és a térfogatot az élekkel kifejezve. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget használjuk fel. $A = 2\cdot(ab + bc + ac) = 6\cdot\dfrac{ab+bc+ac}{3} =$

$$= 6\cdot\frac{\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{ac}{2}+\frac{ac}{2}}{3} = 6\cdot\frac{\frac{a\cdot(b+c)}{2}+\frac{b\cdot(c+a)}{2}+\frac{c\cdot(a+b)}{2}}{3} \geq$$

$$\geq 6\cdot\frac{a\cdot\sqrt{bc}+b\cdot\sqrt{ac}+c\cdot\sqrt{ab}}{3} \geq 6\cdot\sqrt[3]{abc\sqrt{a^2b^2c^2}} = 6\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 6\cdot\sqrt[3]{V^2}.$$

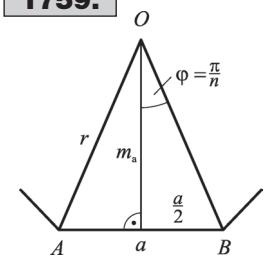
Egyenlőség $a = b = c$ esetén. $\Rightarrow$ Állandó térfogat mellett a minimális felszínű téglatest a kocka.

1757. Vágjuk fel a hasáb palástját az AA' él mentén, és terítsük ki a síkba. A kiterített palástón az út (a PP' szakasz) megrajzolható.

1758. A kimetszett síkidom merőleges vetülete az alaplap síkjára a hasáb alaplapja. Felhasználjuk, hogy a vetület területe a metsző sík alaplappal vett hajlásszögével kiszámítható: $t' = t\cdot\cos\alpha$. $\sqrt{50} = t\cdot\cos 45° \Rightarrow t = \dfrac{\sqrt{50}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \underline{\underline{10\,\text{cm}^2}}$.

1759. $t_a = n\cdot t_{ABO} = n\cdot\dfrac{a\cdot m_a}{2} = n\cdot\dfrac{a\cdot\frac{a}{2\,\text{tg}\frac{\pi}{n}}}{2} = \dfrac{n\cdot a^2}{4\,\text{tg}\frac{\pi}{n}} \Rightarrow V = t_a\cdot m = \dfrac{m\cdot n\cdot a^2}{4\,\text{tg}\frac{\pi}{n}}$.

1759.



1760. $V = t_{\text{alap}}\cdot m = \dfrac{6\cdot 0{,}4^2\cdot\sqrt{3}\cdot 23}{4} \approx \underline{\underline{9{,}56\,\text{cm}^3}}$.

1761. $V = t_{\text{alap}}\cdot m = \dfrac{2\cdot 3{,}4^2\cdot 8{,}02}{\text{tg}\frac{\pi}{8}} \approx \underline{\underline{447{,}65\,\text{cm}^3}}$.

1762. Az alapterület Heron-képlettel:
$t_{\text{alap}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol $a + b + c = 2s = 129$ cm $\Rightarrow$
$\Rightarrow s = 64{,}5$ cm.

$t_{\text{alap}} = \sqrt{64{,}5\cdot 31{,}5\cdot 22{,}5\cdot 10{,}5} \approx 692{,}82\,\text{cm}^2$. $V_{\text{hasáb}} = t_{\text{alap}}\cdot m = 692{,}82\cdot 82 = \underline{\underline{56\,811\,\text{cm}^3}}$.

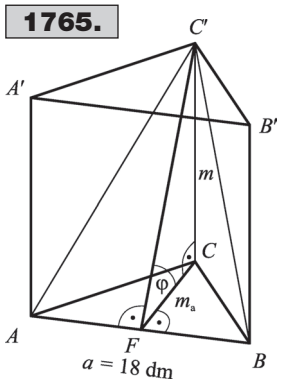
$A_{\text{hasáb}} = 2\cdot t_{\text{alap}} + K_{\text{alap}}\cdot m = 2\cdot 692{,}82 + 129\cdot 82 = \underline{\underline{11\,963{,}64\,\text{cm}^2}}$.

1763. Az alaplap háromszögre ($a = 2{,}18$ m; $b = 1{,}7$ m; $\alpha = 58{,}38°$) alkalmazzuk a szinusztételt: $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow \dfrac{1{,}7}{2{,}18} = \dfrac{\sin\beta}{\sin 58{,}38°} \Rightarrow \sin\beta = 0{,}664 \Rightarrow \beta = 41{,}61°$. (Mivel $\beta < \alpha$, β nem tompaszög.) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 80{,}01°$. $t_{\text{alap}} = \dfrac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2} = 1{,}82\,\text{m}^2 \Rightarrow V = t_{\text{alap}}\cdot m \Rightarrow m = \dfrac{V}{t_{\text{alap}}} =$

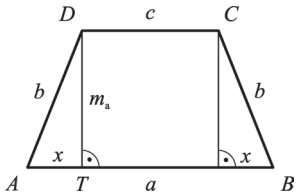
$= \dfrac{26{,}75}{1{,}82} \approx \underline{\underline{14{,}66\,\text{m}}}$.

1764. $M = 3$ dm $= 0{,}3$ m. $V = \dfrac{m}{\varrho} = \dfrac{175{,}8}{0{,}3} = 586\,\text{dm}^3 \Rightarrow t_a = \dfrac{V}{M} = \dfrac{586}{3} \approx \underline{\underline{195{,}3\,\text{dm}^2}}$.

1765.



1767.



1765. Az alaplap szabályos háromszög, ezért $m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. FCC' derékszögű háromszögben $m = m_a \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\varphi$. A síkmetszet és az alaplap szöge $C'FC\sphericalangle = \varphi = 62{,}7°$. $V = t_a \cdot m =$ $= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{3a^3 \cdot \operatorname{tg}\varphi}{8} \Rightarrow V \approx \underline{\underline{4237\ \text{dm}^3}}$.

1766. $A = 2 \cdot 22{,}28 + 20 \cdot 5 \approx \underline{\underline{144{,}56\ \text{cm}^2}}$; $V = 22{,}28 \cdot 5 \approx \underline{\underline{111{,}4\ \text{cm}^3}}$.

1767. Legyen $a = 21\ \text{cm}$, $b = 9\ \text{cm}$, $c = 16\ \text{cm} \Rightarrow x = 2{,}5\ \text{cm}$, $m = 43\ \text{cm}$. ATD derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel: $m_a^2 = 9^2 - 2{,}5^2 \Rightarrow m_a \approx 8{,}65\ \text{cm}$. $t_{\text{alap}} = \frac{(a+c)m_a}{2} = \frac{(21+16)\cdot 8{,}65}{2} \approx$ $\approx 159{,}95\ \text{cm}^2$. $A = 2t_{\text{alap}} + K_{\text{alap}} \cdot m = 2 \cdot 159{,}95 + 55 \cdot 43 \approx \underline{\underline{2685\ \text{cm}^2}}$. $V = t_{\text{alap}} \cdot m = 159{,}95 \cdot 43 \approx$ $\approx \underline{\underline{6877{,}9\ \text{cm}^3}}$.

1768. $V = t_{\text{alap}} \cdot m = 0{,}1496 \cdot 2{,}46 = 0{,}368\ \text{m}^3 = 368\ \text{dm}^3 \Rightarrow m_b = \varrho \cdot V = 2{,}85 \cdot 368 = \underline{\underline{1049{,}2\ \text{kg}}}$.

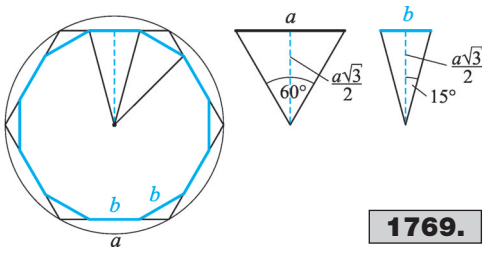
1769. A térfogatok aránya egyenlő lesz az alapterületek arányával. Az ábra jelöléseit használva $\frac{b}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \operatorname{tg} 15° \Rightarrow b = a\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 15°$.

1. $t_{\text{hatszög}} = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{2}$; $t_{\text{tizenkétszög}} = 12 \cdot \frac{a\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 15° \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = 9 \cdot \operatorname{tg} 15° \cdot a^2$.

2. $t_{\text{hatszög}} : t_{\text{tizenkétszög}} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\right) : \left(9 \cdot \operatorname{tg} 15° \cdot a^2\right) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{\underline{\underline{6 \cdot \operatorname{tg} 15°}}} \approx \underline{\underline{1{,}077}}$.

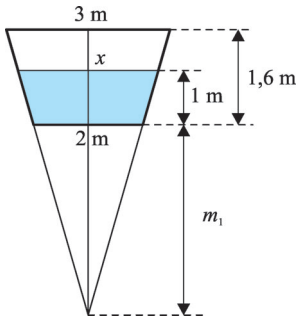
1770. $V_{\text{hasáb}} = \underline{\underline{192\ \text{cm}^3}}$; $A_{\text{hasáb}} \approx \underline{\underline{221{,}7\ \text{cm}^2}}$.



1769.

II

1771.



1771. A hasonlóságból következik, hogy $\frac{m_1}{2} = \frac{m_1+1}{x} = \frac{m_1+1{,}6}{3} \Rightarrow m_1 = 3{,}2\text{ m} \Rightarrow x = 2{,}625\text{ m}$. A csatornát tekinthetjük húrtrapéz alapú egyenes hasábnak: $t_{\text{alap}} = \frac{2+2{,}625}{2}\cdot 1 = 2{,}3125\,\text{m}^2$. 1 másodperc alatt 1,4 m $\Rightarrow$ 1 óra alatt 5040 m, vagyis a hasáb magassága 5040 m. $V = t_{\text{alap}}\cdot m = 2{,}3125\cdot 5040 = \underline{\underline{11\,655\,\text{m}^3}}$.

1772. Tekintsük az 1767. ábrát. Legyen $b = 7{,}3\text{ m}$, $c = 8\text{ m}$, $m_a = 6\text{ m}$, $m = 50\text{ m}$. A töltés tekinthető olyan húrtrapéz alapú hasábnak, amelynek magassága 50 m. Pitagorasz tétele miatt $x = \sqrt{7{,}3^2 - 6^2} \approx 4{,}16\text{ m}$. $AB = DC + 2x = 8 + 2\cdot 4{,}16 \approx 16{,}32\text{ m}$.

$V = t_a\cdot m = \frac{(16{,}32+8)\cdot 6}{2}\cdot 50 \approx \underline{\underline{3647{,}4\,\text{m}^3}}$.

1773. Az alaplap egy egyenlő szárú derékszögű háromszög $\Rightarrow$ oldalai a; $a\frac{\sqrt{2}}{2}$; $a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

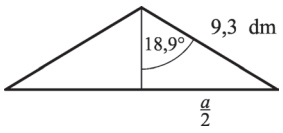
$\frac{a\cdot\frac{a}{2}}{2} = 8 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}\text{ m}$.

$A = 2t_{\text{alap}} + K_{\text{alap}}\cdot m$, azaz $25 = 2\cdot 8 + \left(a + 2\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\cdot m \Rightarrow 9 = a\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot m \Rightarrow$

$\Rightarrow m = \frac{9}{4\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)} = \frac{9\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\sqrt{2}}{8} = \frac{9\left(2-\sqrt{2}\right)}{8}$.

$V = t_{\text{alap}}\cdot m = 8\cdot\frac{9\left(2-\sqrt{2}\right)}{8} = 9\left(2-\sqrt{2}\right) \approx \underline{\underline{5{,}27\,\text{m}^3}}$.

1774.



1774. $\frac{\frac{a}{2}}{9{,}3} = \sin 18{,}9° \Rightarrow a \approx 6{,}02\text{ dm}$ és $\frac{m_a}{9{,}3} = \cos 18{,}9° \Rightarrow$

$\Rightarrow m_a \approx 8{,}8\text{ dm}$. $A_{\text{hasáb}} = 2t_{\text{alap}} + K_{\text{alap}}\cdot m = 2\cdot\frac{6{,}02\cdot 8{,}8}{2} +$

$+ (6{,}02 + 2\cdot 9{,}3)\cdot 23{,}6 \approx \underline{\underline{634\,\text{dm}^2}}$.

$V_{\text{hasáb}} = t_{\text{alap}}\cdot m = \frac{6{,}02\cdot 8{,}8}{2}\cdot 23{,}6 \approx \underline{\underline{625\,\text{dm}^3}}$.

1775. $A_{\text{hasáb}} = 2t_{\text{alap}} + K_{\text{alap}}\cdot m = 2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a\cdot m$, azaz $518{,}2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 660a \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3}\,a^2 + 1320a - 1036{,}4 = 0 \Rightarrow a_1 < 0$, ez nem lehet egy szakasz hossza; $a_2 = 0{,}784$ dm $\Rightarrow$

$\Rightarrow V = t_{\text{alap}}\cdot m = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot m = \frac{0{,}784^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot 220 \approx \underline{\underline{58{,}6\,\text{dm}^3}}$.

1776. $V \approx \underline{\underline{13\,695\ \text{dm}^3}}$; $A \approx \underline{\underline{3506{,}8\ \text{dm}^2}}$.

1777. $V \approx \underline{\underline{37\,279\ \text{cm}^3}}$; $A \approx \underline{\underline{6463\ \text{cm}^2}}$.

1778. $V = t_{\text{alap}} \cdot m = \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} \cdot 15 \cdot \sin 48{,}27° \approx \underline{\underline{310{,}23\ \text{dm}^3}}$.

1779. Az alapterület Heron-képlettel: $t_{\text{alap}} =$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{39{,}5 \cdot 19{,}5 \cdot 13{,}5 \cdot 6{,}5} \approx 259{,}98\ \text{dm}^2$.

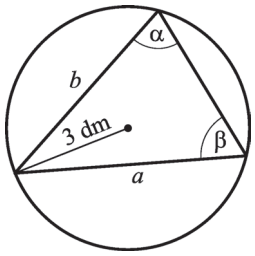
$V = t_{\text{alap}} \cdot b \cdot \sin 69{,}6° = 259{,}98 \cdot 52 \cdot \sin 69{,}6° \approx 12\,671\ \text{dm}^3 \approx \underline{\underline{12{,}67\ \text{m}^3}}$.

1780. $\alpha = 50°7'$; $\beta = 70°13'$; $d = 7$ dm; $r = 3$ dm; $\varphi = 60°$.

$a = 2r \cdot \sin \alpha \approx 4{,}6$ dm; $b = 2r \cdot \sin \beta \approx 5{,}65$ dm; $\gamma = 59{,}66°$.

$t_{\text{alap}} = \dfrac{ab \sin \gamma}{2} \approx 11{,}22\ \text{dm}^2 \Rightarrow V = t_{\text{alap}} \cdot d \cdot \sin \varphi \approx \underline{\underline{68\ \text{dm}^3}}$.

1780.



II

Tetraéder

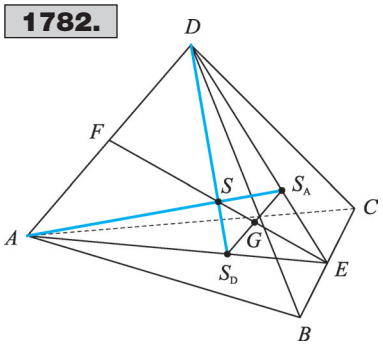
1781. 1 rész: maga a test. 4 rész: a csúcsokhoz csatlakozó triéderekből. 4 rész: a lapokhoz csatlakozó térrészekből. 6 rész: az élekhez csatlakozó térrészekből. Összesen: $\underline{\underline{15\ \text{rész}}}$.

1782. Az $ABC\triangle$ S_D súlypontjára $AS_D = 2S_DE$; a $BCD\triangle$ S_A súlypontjára $DS_A = 2S_AE$. $AED\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt $S_AS_D \parallel DA \Rightarrow$ a párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva $S_AS_D = \dfrac{1}{3}AD$. $S_AS_DS\triangle \sim ADS\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{3} = \dfrac{S_AS}{AS} = \dfrac{S_DS}{DS} \Rightarrow S$ az AS_A, illetve DS_D szakaszok S_A-hoz, illetve S_D-hez közelebbi negyedelőpontja. Páronként bármely két laphoz tartozó súlyvonal metszéspontjáról belátható a fenti negyedelés. $\Rightarrow$ A súlyvonalak egy pontban metszik egymást. Ezt a pontot a tetraéder súlypontjának nevezzük.

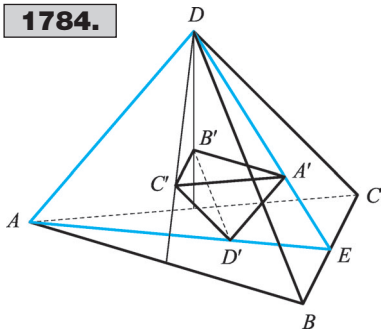
1783. Tekintsük az 1782. ábrát. Az 1782. feladatban láttuk, hogy $S_AS_D \parallel DA$ és az $S_AS_DS\triangle$ középpontosan hasonló az $ADS\triangle$-höz az S pontra vonatkozóan $\lambda_S = -\dfrac{1}{3}$ aránnyal. Igaz továbbá, hogy $S_AS_DE\triangle$ középpontosan hasonló a $DAE\triangle$-höz az E pontra vonatkozóan $\lambda_E = \dfrac{1}{3}$ aránnyal. EF súlyvonal az $AED\triangle$-ben; $EF \cap S_AS_D = G$; F képe G az E középpontú hasonlóságban $\Rightarrow EG$ súlyvonal az $S_AS_DE\triangle$-ben $\Rightarrow G$ felezi S_AS_D-t. SG súlyvonal az S_AS_DS-ben; SF súlyvonal az $ADS\triangle$-ben. Mivel S_AS_D képe AD az S középpontú hasonlóságban $\Rightarrow SG$ képe SF ugyanabban a hasonlóságban. A középponton átmenő egyenes invariáns, így F, S, G és E egy egyenesen vannak $\Rightarrow FE$ átmegy S-en. Az E középpontú hasonlóság miatt $GE = \dfrac{1}{3}FE$;

1782.



II

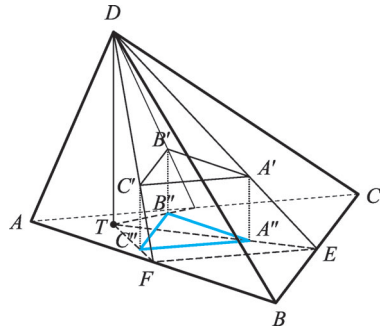
1784.



az S középpontú hasonlóság miatt $FS = \frac{3}{4}FG$. $FS = \frac{3}{4}(FE - GE) = \frac{3}{4}(FE - \frac{1}{3}FE) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}FE = \frac{1}{2}FE$. Tehát S felezi FE-t.

1784. Az 1782. feladatban láttuk, hogy $A'D'E\triangle \sim DAE\triangle$, $\lambda = \frac{1}{3}$ a hasonlóság aránya, E a hasonlóság középpontja $\Rightarrow A'D' \parallel DA$ és $A'D' = \frac{1}{3}DA$. Hasonlóan belátható ez a többi élpárra is. A két tetraéder élei páronként párhuzamosak. A súlypontok által meghatározott tetraéder éle harmada az eredeti tetraéder élének.

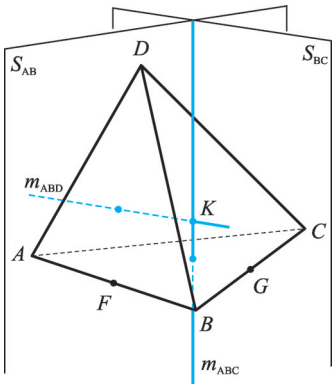
1785.



1785. Az 1784. feladatban láttuk, hogy $C'A' = \frac{1}{3}AC$ és $C'A' \parallel AC \Rightarrow C'A' \parallel [ABC] \Rightarrow C''A'' \parallel AC$ és $C''A'' = C'A' = \frac{1}{3}AC$. Hasonlóan belátható, hogy $A''B'' \parallel AB$ és $A''B'' = \frac{1}{3}AB$, valamint $B''C'' \parallel BC$ és $B''C'' = \frac{1}{3}BC$.

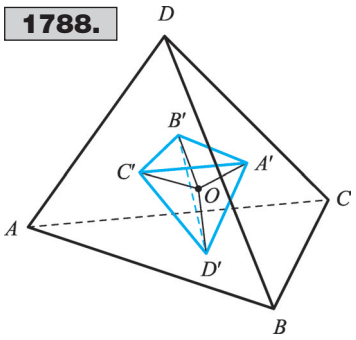
1786. Legyen S_{AB} az AB él felező merőleges síkja. Bármely $P \in S_{AB}$ esetén $PA = PB$. Legyen S_{BC} az BC él felező merőleges síkja. Bármely $Q \in S_{BC}$ esetén $QB = QC$. S_{BC} nem párhuzamos S_{AB}-vel, mert AB sem párhuzamos BC-vel $\Rightarrow S_{AB} \cap S_{BC} = m_{ABC}$ létezik, és merőleges $[ABC]$-re. Bármely $R \in m_{ABC}$ esetén $RA = RB = RC$, mert R benne van mindkét felező merőleges síkban. Legyen S_{AD} az AD él felező merőleges síkja. Bármely $T \in S_{AD}$ esetén $TA = TD$. S_{AD} nem párhuzamos m_{ABC}-vel, mert m_{ABC} merőleges az $[ABC]$ síkra, de S_{AD} nem merőleges rá. Legyen $S_{AD} \cap m_{ABC} = K$. $K \in m_{ABC} \Rightarrow KA = KB = KC$; $K \in S_{AD} \Rightarrow KA = KD$. A két állításból $\Rightarrow KD = KC \Rightarrow K \in S_{DC}$, tehát a negyedik él felező merőleges síkja is átmegy K-n. $KA = KB = KC = KD$ miatt a K középpontú, KA sugarú gömb az $ABCD$ tetraéder köré írható gömb.

1786.

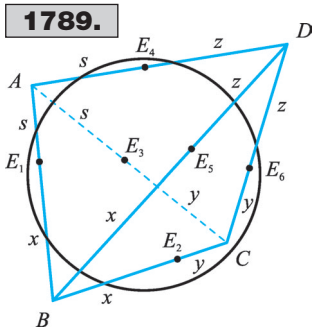


1787. Legyen $S_1 = [ABD]$, $S_2 = [BCD]$, $S_3 = [ACD]$, $S_4 = [ABC]$. S_1 és S_2 lapszögének szögfelező síkja Σ_{12}. Bármely $P \in \Sigma_{12}$ esetén $d(P; S_1) = d(P; S_2)$. S_1 és S_3 lapszögének szögfelező síkja Σ_{13}. Bármely $Q \in \Sigma_{13}$ esetén $d(Q; S_1) = d(Q; S_3)$. Legyen $\Sigma_{12} \cap \Sigma_{13} = e$ ($D \in e$, mert $D \in S_1, D \in S_2$). Bármely $R \in e$ esetén $d(R; S_1) = d(R; S_2)$, mert $R \in \Sigma_{12}$. $d(R; S_1) = d(R; S_3)$, mert $R \in \Sigma_{13}$. A két állításból $\Rightarrow d(R; S_2) = d(R; S_3) \Rightarrow R$ rajta van az S_2 és S_3 síkok lapszögének szögfelező síkján, Σ_{23} síkon. $D \in \Sigma_{23}$ és $R \in \Sigma_{23}$ miatt $e = \Sigma_{12} \cap \Sigma_{13} \cap \Sigma_{23}$. Legyen Σ_{24} az S_2 és S_4 síkok lapszögének szögfelező síkja. e nem párhuzamos a Σ_{24} síkkal, mert akkor a tetraéder által körülzárt térrész nem tartalmazhatná mindkettőt $\Rightarrow e \cap \Sigma_{24} = O$ létezik. $O \in e$ miatt $d(O; S_1) = d(O; S_2) = d(O; S_3)$; $O \in \Sigma_{24}$ miatt $d(O; S_2) = d(O; S_4)$. A két állításból $\Rightarrow d(O; S_1) = d(O; S_4) \Rightarrow O \in \Sigma_{14}$. Hasonlóan belátható, hogy $O \in \Sigma_{34}$, tehát a belső szögfelező síkok egy pontban metszik egymást. Ez az O pont egyenlő távol van a tetraéder lapsíkjaitól $\Rightarrow O$ köré $d(O; S_i)$ sugarú gömb írható, ami érinti a lapsíkokat.

1788.



1789.



1788. Legyenek a gömb érintési pontjai a lapsíkokkal A', B', C' és D'. $OD' \perp [ABC] \Rightarrow$ $\Rightarrow OD' \perp BC$; $OA' \perp [BCD] \Rightarrow OA' \perp BC$. A két állításból $\Rightarrow BC \perp [OA'D'] \Rightarrow BC \perp A'D'$. Hasonlóan belátható, hogy $AB \perp C'D'$, $AC \perp B'D'$, $AD \perp B'C'$, $BD \perp A'C'$ és $DC \perp A'B'$.

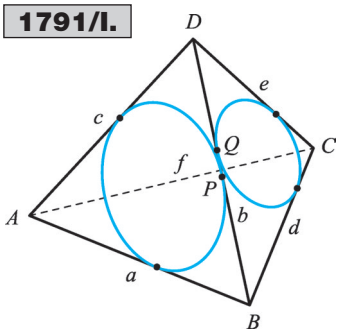
1789. Külső pontból a gömbhöz húzott érintő szakaszok egyenlő hosszúak, így az ábrán egyformán jelölt szakaszokra is ez teljesül. $BE_1 = BE_2 = BE_5 = x$; $CE_2 = CE_3 = CE_6 = y$; $DE_4 = DE_5 = DE_6 = z$; $AE_1 = AE_3 = AE_4 = s$. $AD + BC = s + z + x + y$; $AB + DC = s + x + y + z$; $AC + BD = s + y + x + z$. Tehát a három szemközti élpár hosszának összege egyenlő.

1790. Egy gömb bármely síkmetszete kör. Az oldallap síkmetszeteken az éleknek nem lehet a metszetkörrel két közös pontjuk, mert a gömbbel is csak egy-egy van. Egy közös pontnak viszont lennie kell, hiszen a sík és a gömb közös részéről van szó. Legyen a BD közös élen az $ABD\triangle$-be írt kör érintési pontja P, a $BCD\triangle$-be írt kör érintési pontja Q. P és Q közös pontja a BD élnek és a gömbnek, ilyen pont pedig csak egy van $\Rightarrow P \equiv Q$.

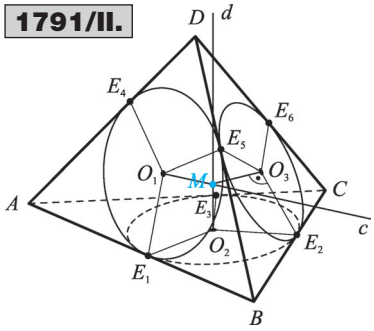
1791. Rajzoljuk meg az $ABD\triangle$, illetve a $BCD\triangle$ beírt körét. Ezek a BD élt P-ben, illetve Q-ban érintik. A beírt kör érintési pontjának helye: $BP = \dfrac{a+b+c}{2} - c = \dfrac{a+b-c}{2}$, illetve $BQ = \dfrac{b+d+e}{2} - e = \dfrac{b+d-e}{2}$. A feltétel szerint $a + e = c + d \Rightarrow BP = BQ$. Hasonlóan belátható, hogy a szomszédos lapok beírt köreinek érintési pontjai az élnek ugyanazon pontjára esnek. Ha van élérintő gömb, akkor annak középpontja a lapsíkokra a beírt körök középpontjában állított merőlegeseken kell legyen.

$AB \perp O_1E_1$ és $AB \perp c \Rightarrow AB \perp [O_1E_1; c]$; $AB \perp O_2E_1$ és $AB \perp d \Rightarrow AB \perp [O_2E_1; d]$. AB-re E_1-ben csak egy merőleges sík állítható, így c és d ebben a síkban vannak és metszik egymást. Legyen $c \cap d = M$. $M \in c \Rightarrow ME_1 = ME_5 = ME_4$; $M \in d \Rightarrow ME_1 = ME_2 = ME_3$. A két összefüggésből

1791/I.

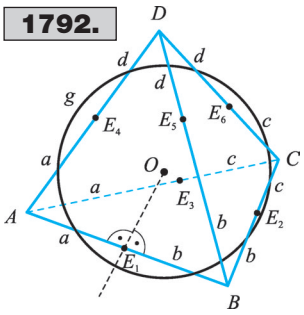


1791/II.

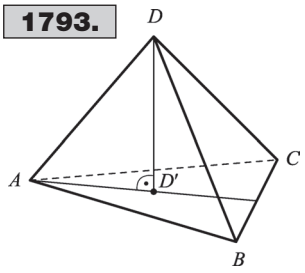


II

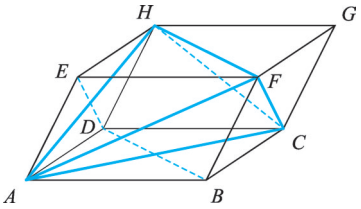
1792.



1793.



1794.



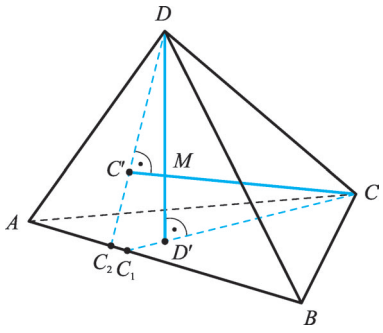
$ME_2 = ME_5$ (1) és $ME_3 = ME_4$ (2) következik. Az (1) egyenlőséget vizsgálva: mivel az O_3-ban állított merőleges is metszené a d-t a fenti gondolatmenet szerint, így arra a metszéspontra $M'E_2 = M'E_5 = M'E_6$ adódna, így M_1-nek és M-nek az E_2E_5 felező merőleges síkján kell lenni, ami d-vel csak egy közös pontot adhat $\Rightarrow M' \equiv M \Rightarrow ME_2 = ME_5 = ME_6$. Ezt a (2) egyenlőséggel összevetve $\Rightarrow M$ rajta van az O_4-ben állított merőlegesen $\Rightarrow$ van élérintő gömb.

1792. Az 1791. feladatban láttuk, hogy a feltételnek eleget tevő tetraédernek van élérintő gömbje. Ehhez az élérintő gömbhöz az A csúcsból húzható érintők érintő szakaszai egyenlők egymással. Ugyanez mondható el a B, C illetve D csúcsokból húzott érintő szakaszokra is. Az A középpontú a sugarú g_A, B középpontú b sugarú g_B, C középpontú c sugarú g_C, D középpontú d sugarú g_D gömbök kölcsönösen érintik egymást: $AE_1 \perp E_1O$, mert g élérintő gömb; $BE_1 \perp E_1O$, mert g élérintő gömb $\Rightarrow$ e$(E_1; O)$ a g_A és g_B gömbök E_1beli közös érintője. Hasonlóan megmutatható, hogy g_A E_3-ban érinti g_C-t és E_4-ben érinti g_D-t. A többi gömb páronként való érintése is ugyanígy belátható.

1793. $\underline{AD \perp BC}$ a feltétel miatt. $DD' \perp [ABC]$ a vetítés miatt $\Rightarrow DD'$ merőleges $[ABC]$ sík minden egyenesére $\Rightarrow \underline{DD' \perp BC}$. Az aláhúzottakból $\Rightarrow BC \perp [ADD'] \Rightarrow BC$ merőleges $[ADD']$ minden egyenesére $\Rightarrow \underline{BC \perp AD'} \Rightarrow AD'$ az $ABC\triangle$ A-ból induló magasságvonala. Hasonlóan megmutatható, hogy CD' is, BD' is magasságvonal. A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást $\Rightarrow D'$ a magasságpont az $ABC\triangle$-ben.

1794. Tekintsük azt az $ABCDEFGH$ paralelepipedont, melynek A; C; F; H csúcsai egyben a tetraéder csúcsai is. $AC \perp FH$ és $AH \perp FC \Rightarrow AC \perp BD$ és $AH \perp DE \Rightarrow ABCD$, illetve $ADEH$ paralelogramma rombusz. $\Rightarrow$ A paralelepipedon egy csúcsba futó élei egyenlők. $\Rightarrow$ A paralelepipedon minden lapja rombusz. $\Rightarrow$ A tetraéder harmadik élpárja is merőleges.

1795.

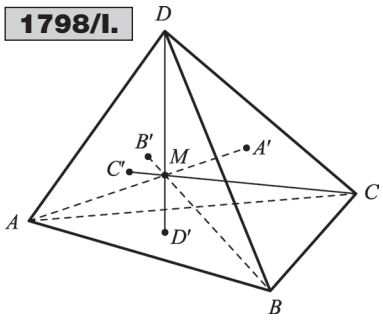


1795. $DD' \perp [ABC] \Rightarrow \underline{DD' \perp AB}$; $CC' \perp [ABD] \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{CC' \perp AB}$. Az aláhúzottak szerint AB merőleges a DD' és CC' metsző egyenesek síkjára: $AB \perp [CC'DD'] \Rightarrow$ $\Rightarrow AB$ merőleges a sík minden egyenesére $\Rightarrow AB \perp CD$.

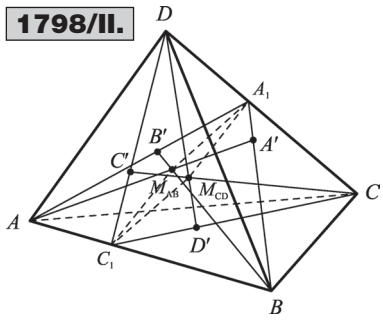
1796. Tekintsük az 1795. ábrát. $AB \perp DC$ és $AB \perp DD' \Rightarrow$ $\Rightarrow AB \perp [CDD'] \Rightarrow AB \perp CD'$. Legyen $AB \cap$ e$(C; D') = C_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow [ABD] \cap [CDD'] = DC_1 \Rightarrow \underline{AB \perp DC_1}$. $AB \perp DC$ és $AB \perp CC' \Rightarrow AB \perp [CDC'] \Rightarrow \underline{AB \perp DC'}$.

Legyen $AB \cap$ e$(D;\ C') = C_2 \Rightarrow [ABD] \cap [CDC'] = DC_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{AB \perp DC_2}$. Az aláhúzottakból $C_1 \equiv C_2$, mivel D-ből AB-re csak egy merőleges húzható $\Rightarrow [DD'C] \equiv [CC'D] \Rightarrow$ $\Rightarrow CC'$ és DD' metsző egyenesek (a $CC_1D\triangle$ magasságvonalai).

1798/I.



1798/II.



1797. Tekintsük az 1795. ábrát. Az 1795. feladatban láttuk, hogy ha $DD' \cap CC' \neq \emptyset$, akkor $DC \perp AB$. Az 1796. feladatban láttuk, hogy ha $AB \perp DC$, akkor $AA' \cap BB' \neq \emptyset$.

1798. I. Megmutatjuk, hogy ha egy tetraéder ortocentrikus, akkor szemközti élpárjai merőlegesek egymásra. Az 1795. feladatban láttuk, hogy ha CC' metszi DD'-t, akkor $DC \perp AB$. Hasonlóan megmutatható, hogy $BD \perp AC$ és $AD \perp BC$. Az aláhúzottak éppen a bizonyítandó állítást jelentik.

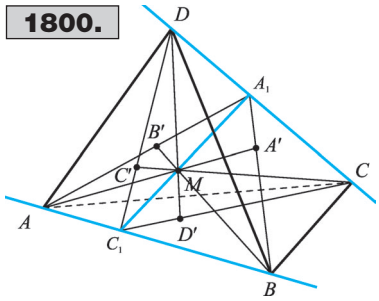
II. Megmutatjuk, hogy ha egy tetraéder szemközti élpárjai merőlegesek egymásra, akkor ortocentrikus. Az 1796. feladatban láttuk, hogy ha $AB \perp DC$, akkor DD' és CC' metszik egymást, síkjuk az AB élre merőleges és a síkmetszet magasságvonalai a DD' és CC' testmagasságok. $\Rightarrow$ $\Rightarrow M_{DC}$ a $DCC_1\triangle$ magasságpontja. Hasonlóan belátható, hogy M_{AB} az $ABA_1\triangle$ magasságpontja. Vegyük az $[ABA_1]$ és $[CDC_1]$ síkok metszetét. $C_1 \in AB$ és $A_1 \in DC$ miatt a metszésvonal a C_1A_1 szakasz. $DC \perp [ABA_1]$ miatt $DC \perp C_1A_1 \Rightarrow C_1A_1$ magasságvonal a $DCC_1\triangle$-ben $\Rightarrow M_{CD} \in C_1A_1$. Hasonlóan belátható, hogy $M_{AB} \in C_1A_1$. Mivel M_{AB} és M_{CD} az AD-re illeszkedő BC-re merőleges, illetve BC-re illeszkedő és AD-re merőleges síkon is rajta vannak, és ezek metszésvonala biztosan nem C_1A_1, így a négy sík közös részén is rajta kell legyenek, ami egyetlen pont. $\Rightarrow A$ testmagasságok egy pontban metszik egymást.

1799. Az 1794. ábra jelöléseit használjuk. Tekintsük azt az $ABCDEFGH$ paralelepipedont, melynek A; C; F; H csúcsai egyben a tetraéder csúcsai is. A szemközti élek merőlegessége miatt $ABCDEFGH$ lapjai rombuszok (1798. feladat és 1794. feladat). Pitagorasz tételét felírva a paralelepipedon éle mint átfogó és a tetraéder két szemközti élének fele mint befogó által meghatározott derékszögű háromszögekre:

$$\frac{AC^2}{4}+\frac{HF^2}{4}=b^2=\frac{AF^2}{4}+\frac{HC^2}{4}=\frac{AH^2}{4}+\frac{FC^2}{4}. \Rightarrow \text{A}$$

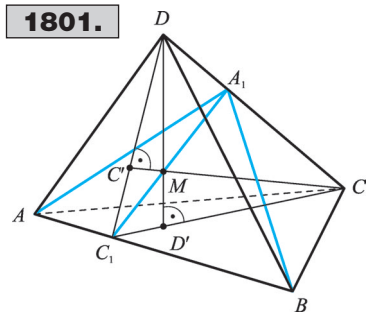
tetraéder szemközti éleinek négyzetösszege állandó.

1800.



1800. Az 1798. feladatban láttuk, hogy a tetraéder magasságvonalai illeszkednek a tetraéder egyik élén át a vele szemben levő élre merőleges síkra (pl. DD' benne van a DC-re illeszkedő, AB-re merőleges síkban). Az AB-re, illetve DC-re illeszkedő ilyen síkok A_1C_1 metszésvonala átmegy az M magasságponton és $A_1C_1 \perp AB$, illetve $A_1C_1 \perp DC$ (l. az 1798. feladat megoldását). A merőlegesség miatt A_1C_1 az AB és DC élek normáltranszverzálisa, ami így átmegy M-en.

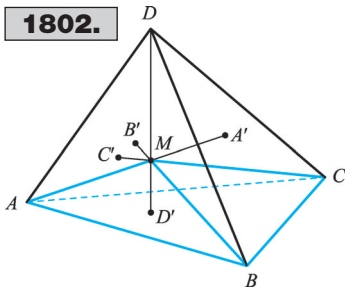
1801.



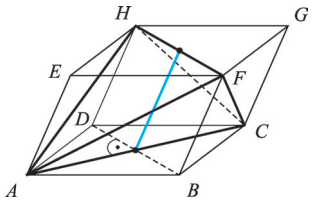
1801. Az 1800. feladatban láttuk, hogy az AB-re illeszkedő DC-re merőleges sík és a CD-re illeszkedő AB-re merőleges sík A_1C_1 metszésvonala az AB és DC élek nor-

II

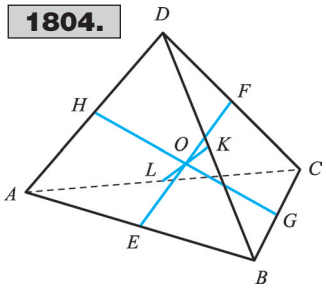
1802.



1803.



1804.



máltranszverzálisa, és átmegy M-en. Jelöljük az AB-re merőleges síkot S_{AB}-vel. $S_{AB} = [DCC_1]$, $AB \perp S_{AB} \Rightarrow AB \perp DC_1 \Rightarrow DC_1$ az $ABD\triangle$ magasságvonala, C_1 a magasságtalppont. Hasonlóan belátható, hogy BA_1 a $BCD\triangle$ magasságvonala $\Rightarrow A_1$ a magasságtalppont.

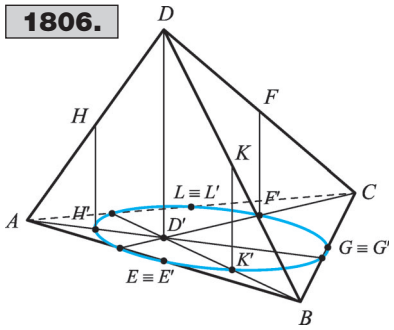
1802. $AA' \perp [BCD] \Rightarrow AA' \perp BC \Rightarrow AM \perp BC$. Hasonlóan megmutatható, hogy $BM \perp AC$ és $CM \perp AB$. A fentiekből következik, hogy az $ABCM$ tetraéder ortocentrikus. $DD' \perp [ABC] \Rightarrow$ $\Rightarrow MD'$ az $[ABC]$ síkhoz tartozó magasságvonal. $CC' \perp [ABD] \Rightarrow \underline{\underline{CC' \perp AD}} \Rightarrow CM \perp AD \Rightarrow$ $\Rightarrow ABCD$ tetraéder ortocentrikus $\Rightarrow \underline{\underline{BC \perp AD}}$. A kétszer aláhúzottakból következik, hogy $AD \perp [BCM] \Rightarrow AD$ a $[BCM]$ síkhoz tartozó magasságvonal $\Rightarrow AD \cap DD' = D$ az $ABCM$ tetraéder magasságpontja (mivel ortocentrikus, elég egy pár magasságvonal metszéspontja). Hasonlóan látható be az állítás a többi tetraéderre is.

1803. Tekintsük azt az $ABCDEFGH$ paralelepipedont, melynek A; C; F; H csúcsai egyben a tetraéder csúcsai is. A szemközti élek merőlegessége miatt a paralelepipedon lapjai rombuszok. A paralelepipedon szemközti lapközéppontjai a tetraéder szemközti élfelező pontjai, melyeket összekötő szakasz a paralelepipedon egyik élével párhuzamos és egyenlő. Mivel az ortocentrikus tetraédert magába foglaló paralelepipedon minden éle egyenlő, ezért a tetraéder élfelező pontjait összekötő szakaszok is egyenlők.

1804. Az 1803. feladatban láttuk, hogy $EF = GH = KL$. $EGFH$ paralelogramma átlói felezik egymást, így $HG \cap EF = O$ pontra $\underline{OE = OG = OF = OH}$. Az $ELFK$ paralelogramma átlóinak metszéspontja ugyancsak a fenti O pont, hiszen EF-nek csak egy felezéspontja van $\Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{OE = OL = OF = OK}$. Az aláhúzottakból $OE = OG = OL = OH = OK = OF \Rightarrow E$, G, L, H, K, F egy O középpontú gömbön vannak.

1805. Tekintsük az 1804. ábrát. Az $ABC\triangle$ Feuerbach köre átmegy az E, L és G pontokon. E, L és G egyértelműen meghatározzák a saját körüket, így a gömb és a sík metszete csak az $ABC\triangle$ Feuerbach köre lehet. Hasonlóan belátható a többi lapra is az állítás.

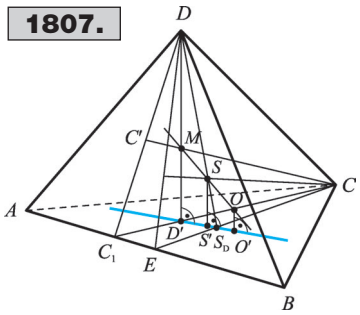
1806.



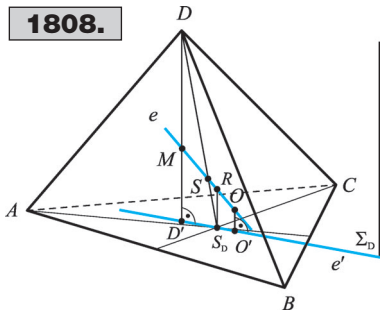
1806. $DD' \perp [ABC] \Rightarrow \underline{DD' \perp AB}$. $ABCD$ tetraéder ortocentrikus $\Rightarrow \underline{DC \perp AB}$. Az aláhúzottakból $\Rightarrow$ $\Rightarrow AB \perp [DD'C] \Rightarrow D'C \perp AB \Rightarrow D'C$ az $ABC\triangle$ C-ből induló magasságvonala. Hasonlóan igaz, hogy $D'A$ és $D'B$ is magasságvonal $\Rightarrow D'$ az $ABC\triangle$ magasságpontja. H felezi AD-t $\Rightarrow H'$ felezi AD'-t. Hasonlóan igaz, hogy K' felezi BD'-t és F' felezi CD'-t. E, G, $L \in [ABC] \Rightarrow E \equiv E'$, $G \equiv G'$, $L \equiv L'$. Az $ABC\triangle$-ben: E', G' és L' oldalfelező pontok; K', F' és H' felezik a csúcs és a magasságpont közti szakaszt. $\Rightarrow$ ezek a pontok rajta vannak az $ABC\triangle$ Feuerbach körén.

II

1807.



1808.



1807. Az 1806. feladatban megmutattuk, hogy az M magasságpont $[ABC]$ síkra vetett merőleges vetülete az $ABC\triangle$ D' magasságpontja. $OA = OB = OC$ miatt O' az $ABC\triangle$ körülírt körének középpontja. e$(O'; D')$ az $ABC\triangle$ Euler egyenese, és az S_D súlypont az $O'D'$ szakasz O'-höz közelebbi harmadolópontja: $\underline{D'S_D = 2S_DO'}$. O', S_D, D' egy egyenesen vannak. Tudjuk, hogy $S \in DS_D \Rightarrow O, S, M$ egy síkban vannak, a D, M és O pontok által kifeszített síkban, ami merőleges az $[ABC]$ síkra. Hasonlóan megmutatható, hogy O, S és M a B, M és O pontok által kifeszített síkban is benne vannak, így a két sík metszésvonalán is, ami egy egyenes $\Rightarrow O, S, M$ egy egyenesen vannak. A merőleges vetítés aránytartó, így $MS : SO = M'S' = S'O'$. $DD'S_D\triangle$-ben: $DS : SS_D = 3 : 1 \Rightarrow D'S' : S'S_D = 3 : 1 \Rightarrow \underline{D'S' = 3S'S_D}$. Az aláhúzott állításokat vizsgálva: $2S_DO' = D'S_D = D'S' + S'S_D = 3S'S_D + S'S_D = 4S'S_D \Rightarrow S_DO' = 2S'S_D$. $\underline{S'O'} = S'S_D + S_DO' = S'S_D + 2S'S_D = 3S'S_D = \underline{D'S'}$. $\Rightarrow S'$ felezi az $O'D'$ szakaszt, tehát S' az $ABC\triangle$ Feuerbach körének középpontja.

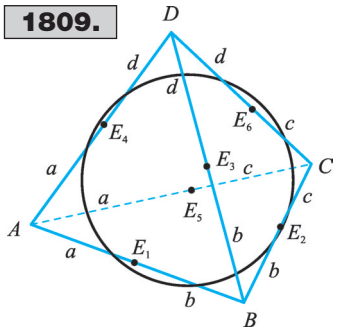
1808. Az 1807. feladatban láttuk, hogy D, M, S, O pontok az $[ABC]$ síkra merőleges Σ_D síkban vannak, és a két sík metszésvonala az $ABC\triangle$ e' Euler egyenese $\Rightarrow S_D$ súlypont is az e' Euler-egyenesen van $\Rightarrow$ az S_D-ben állított merőleges is a Σ_D síkban van és metszi az e egyenest $\Rightarrow R_D$. Az e' Euler-egyenes pontjaira teljesül, hogy $D'S_D = 2S_DO' \Rightarrow MR_D = 2R_DO$. Hasonlóan megmutatható, hogy a többi lapsúlypontba állított merőleges is metszi a tetraéder Euler egyenesét az MO szakasz O-hoz közelebbi harmadolópontjában, így $R_D = R_A = R_C = R_B = R$. Σ_D síkban:

$SRS_D\triangle \sim SMD\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők (csúcsszögek, váltószögek) $\Rightarrow \underline{\lambda = \frac{SR}{SM} = \frac{RS_D}{MD}}$. Az 1807. feladatban láttuk, hogy $MS = SO$. Fönt megmutattuk, hogy $MR = 2RO \Rightarrow$

$$\Rightarrow MR = \frac{2}{3}MO = \frac{4}{3}MS \Rightarrow MS + SR = \frac{4}{3}MS \Rightarrow \underline{SR = \frac{1}{3}MS}.$$

$$\lambda = \frac{\frac{1}{3}MS}{MS} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{RS_D}{MD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{MD = 3RS_D}}.$$ Hasonlóan belátható, hogy $MB = 3RS_B$, $MC = 3RS_C$, $MA = 3RS_A$.

1809.

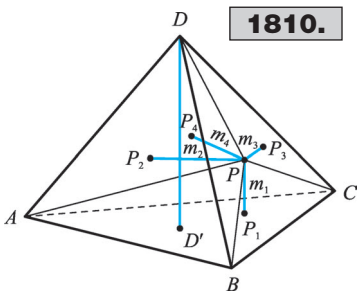


1809. Felhasználjuk: Egy tetraédernek akkor és csak akkor van élérintő gömbje, ha szemközti éleinek összege páronként egyenlő (1789. és 1791. feladat). Ortocentrikus tetraéder szemközti éleinek négyzetösszege páronként egyenlő (1799. feladat).

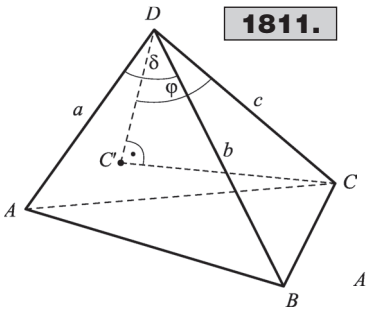
I. Ha $ABC\triangle$ szabályos és $DA = DB = DC$, akkor a szemközti élek összege páronként egyenlő $\Rightarrow$ van élérintő gömb.

II

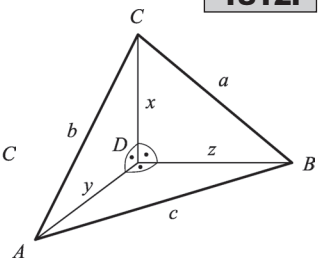
1810.



1811.



1812.



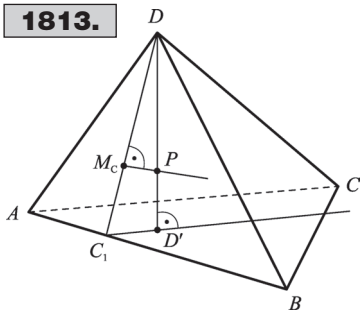
II. Válasszuk az ábra szerinti jelölést. A tetraéder ortocentrikus:
$(a+b)^2+(c+d)^2=(b+d)^2+(a+c)^2$ (1). $(b+d)^2+(a+c)^2=(a+d)^2+(b+c)^2$ (2). (1) $\Rightarrow a^2+2ab+b^2+c^2+2cd+d^2=b^2+2bd+d^2+a^2+2ac+c^2 \Rightarrow ab+cd=bd+ac \Rightarrow$ $\Rightarrow b\cdot(a-d)=c\cdot(a-d)\Rightarrow(a-d)\cdot(b-c)=0$. (2)-t hasonlóan átalakítva: $(c-d)\cdot(a-b)=0$. (1) megoldására a következő lehetőségek vannak: *a)* $a=d\Rightarrow$(2) $(c-a)(a-b)=0\Rightarrow c=a$ vagy $a=b$. *b)* $b=c\Rightarrow$(2) $(c-d)(a-c)=0\Rightarrow c=d$ vagy $a=c$. Pl. *a)* esetben, ha $c=a$: $AB=a+b$; $BC=c+b=a+b$; $CA=a+c=2a$; $DA=d+a=2a$; $DB=d+b=a+b$; $DC=d+c=2a\Rightarrow$ $\Rightarrow ADC\triangle$ szabályos: $AB=DB=CB$. A többi eset is hasonlóan belátható.

1810. Felhasználjuk: a szabályos tetraéder testmagasságai egyenlők és a tetraéder térfogata $V=\frac{t_{alap}\cdot M}{3}$. Bontsuk fel a tetraédert a P pontból induló PA, PB, PC és PD szakaszokkal négy részre. $V_{ABCD}=V_{ABCP}+V_{BCDP}+V_{ACDP}+V_{ABDP}$. $\frac{T_\Delta\cdot M}{3}=\frac{T_\Delta\cdot m_1}{3}+\frac{T_\Delta\cdot m_3}{3}+\frac{T_\Delta\cdot m_4}{3}+\frac{T_\Delta\cdot m_2}{3}$. Egyszerűsítés után: $M=m_1+m_2+m_3+m_4$.

1811. $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{ab\cdot\sin\delta}{2}\cdot c\cdot\sin\varphi=\frac{1}{6}ab\cdot\sin\delta\cdot c\cdot\sin\varphi\le\frac{1}{6}abc$. $\sin\delta\le1$, egyenlőség $\delta=90°$ esetén. $\sin\varphi\le1$, egyenlőség $\varphi=90°$ esetén. Ha $\varphi=90°$, akkor $DC\perp[ABD]\Rightarrow DC\perp DB, DC\perp AD$. Maximális a térfogat, ha D-nél $\sphericalangle(a;b)=\sphericalangle(b;c)=\sphericalangle(c;a)=90°$.

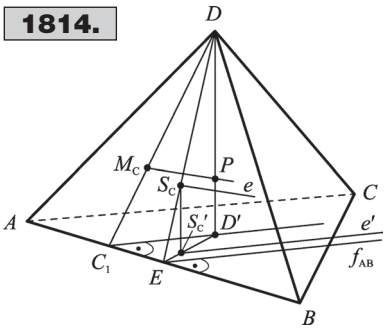
1812. Pitagorasz-tétel a D csúcsú derékszögű $\triangle$-ekre: $x^2+y^2=b^2$ (1); $y^2+z^2=c^2$ (2); $z^2+x^2=a^2$ (3). (1) + (2) + (3): $2(x^2+y^2+z^2)=a^2+b^2+c^2$; $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=s^2$; $x^2+y^2\rightarrow$ (1)-be: $s^2-z^2=b^2\Rightarrow z=\sqrt{s^2-b^2}$; $y^2+z^2\rightarrow$ (2)-be: $s^2-x^2=c^2\Rightarrow x=\sqrt{s^2-c^2}$; $z^2+x^2\rightarrow$ (3)-ba: $s^2-y^2=a^2\Rightarrow y=\sqrt{s^2-a^2}$; $V=\frac{1}{6}xyz=\frac{1}{6}\sqrt{(s^2-a^2)(s^2-b^2)(s^2-c^2)}$.

1813.

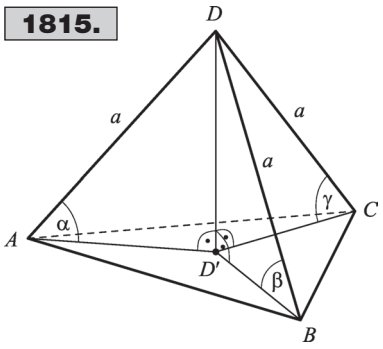


1813. Legyen DC_1 az $ABD\triangle$ magasságvonala $\Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{DC_1\perp AB}$. Legyen D pont vetülete $[ABC]$-ra $D'\Rightarrow$ $\Rightarrow DD'\perp[ABC]\Rightarrow \underline{DD'\perp AB}$. Az aláhúzottakból $AB\perp[DC_1D']$. Az M_C-ben $[ABD]$ síkra állított merőleges benne van a $[DC_1D']$ síkban $\Rightarrow$ e$(M_C;P)$ merőleges vetülete rajta van a C_1D' egyenesen. Hasonlóan megmutatható, hogy a másik két lapra állított merőleges vetülete is egy-egy D'-n átmenő egyenes, így metszéspontjuk a D' pont.

1814.



1815.



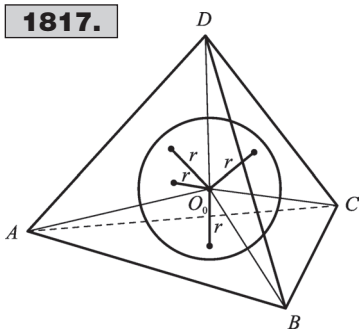
1814. $DS_C = 2S_CE$, mert S_C súlypont az $ABD\triangle$-ben. Az S_C-ben állított e merőleges párhuzamos M_CP-vel. e vetülete e' is párhuzamos M_CP vetületével C_1D'-vel. S_C az ED szakasz E-hez közelebbi harmadolópontja. e' az S_C'-re illeszkedő AB-re merőleges egyenes. A D' középpontú $\frac{2}{3}$ arányú középpontos hasonlóság E-t S_C'-be, az E-re illeszkedő AB-re merőleges f_{AB} felező merőlegest e'-be viszi. Az $ABC\triangle$ oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ hasonló képeik, a merőleges vetületek is egy pontban metszik egymást.

1815. $DD'A\triangle \cong DD'B\triangle \cong DD'C\triangle$, mert mindhárom derékszögű, átfogóik egyenlők, egyik befogójuk közös $\Rightarrow$ másik befogójuk is egyenlő: $D'A = D'B = D'C \Rightarrow D'$ az $ABC\triangle$ körülírt körének középpontja.

1816. Tekintsük az 1815. ábrát. $DD'A\triangle \cong DD'B\triangle \cong DD'C\triangle$, mert mindhárom derékszögű, átfogóik egyenlők, egyik befogójuk közös $\Rightarrow$ DD'-vel szemközti szögeik is egyenlők $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$.

1817. Bontsuk fel a tetraédert a beírható gömb középpontjából a csúcsokba húzott szakaszokkal négy részre. A kapott tetraéderek egy-egy lapja az eredeti tetraéderével közös, ehhez a laphoz tartozó magassága pedig r.

1817.



$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\cdot r + \frac{1}{3}\cdot t_{BCD}\cdot r + \frac{1}{3}\cdot t_{ACD}\cdot r + \frac{1}{3}\cdot t_{ABD}\cdot r =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot r\cdot A_{ABCD}\cdot \frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\cdot m_1 = \frac{1}{3}\cdot r\cdot A_{ABCD} \Rightarrow t_{ABC} = \frac{r\cdot A_{ABCD}}{m_1}.$$

Hasonlóan $t_{BCD} = \frac{r\cdot A_{ABCD}}{m_2}$, $t_{ACD} = \frac{r\cdot A_{ABCD}}{m_3}$, $t_{ABD} =$

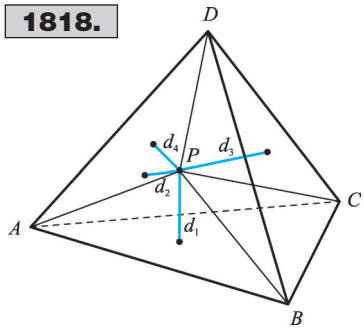
$$= \frac{r\cdot A_{ABCD}}{m_4}. A_{ABCD} = t_{ABC} + t_{BCD} + t_{ACD} + t_{ABD} = \frac{r\cdot A_{ABCD}}{m_1} +$$

$$+ \frac{r\cdot A_{ABCD}}{m_2} + \frac{r\cdot A_{ABCD}}{m_3} + \frac{r\cdot A_{ABCD}}{m_4}. \quad \frac{A_{ABCD}}{r\cdot A_{ABCD}} = \frac{1}{m_1} +$$

$$+ \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}.$$

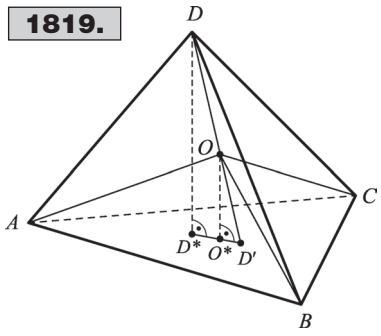
1818. Bontsuk fel a tetraédert P-ből a csúcsokba húzott szakaszokkal négy részre. $V = V_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\cdot m_1$; $V_1 = \frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\cdot d_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{d_1}{m_1}$. Hasonlóan megmutatható,

1818.

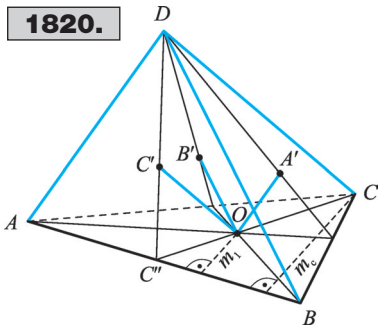


II

1819.



1820.



hogy $\frac{V_2}{V}=\frac{d_2}{m_2}$, $\frac{V_3}{V}=\frac{d_3}{m_3}$, $\frac{V_4}{V}=\frac{d_4}{m_4}$. $\frac{V_1}{V}+\frac{V_2}{V}+\frac{V_3}{V}+\frac{V_4}{V}=\frac{d_1}{m_1}+\frac{d_2}{m_2}+\frac{d_3}{m_3}+\frac{d_4}{m_4}\Rightarrow$
$\Rightarrow 1=\frac{d_1}{m_1}+\frac{d_2}{m_2}+\frac{d_3}{m_3}+\frac{d_4}{m_4}$.

1819. Vetítsük a D és O pontokat az $[ABC]$ síkra $\Rightarrow D^*$, O^*. $OO^*D'\triangle \sim DD^*D'\triangle$, mert szögeik egyállásúak $\Rightarrow \lambda=\frac{OO^*}{DD^*}=\frac{OD'}{DD'}$. $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\cdot DD^*$; $V_{ABCO}=\frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\cdot OO^*\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{V_{ABCO}}{V_{ABCD}}=\frac{OO^*}{DD^*}=\frac{OD'}{DD'}$. Hasonlóan megmutatható, hogy $\frac{V_{ABDO}}{V_{ABCD}}=\frac{OC'}{CC'}$, $\frac{V_{BCDO}}{V_{ABCD}}=\frac{OA'}{AA'}$,
$\frac{V_{ACDO}}{V_{ABCD}}=\frac{OB'}{BB'}$. $\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=\frac{V_{ABCO}+V_{BCDO}+V_{ACDO}+V_{ABDO}}{V_{ABCD}}=1$.

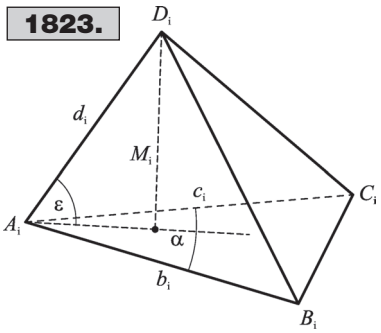
1820. $OC'\parallel DC\Rightarrow O$, C', C, D egy síkban vannak $\Rightarrow$ síkjuknak az $[ABC]$ síkkal való metszésvonala OC, az $[ABD]$ síkkal való metszésvonala $DC'\Rightarrow DC'$ és OC egyenese az $[ABC]$ és $[ABD]$ síkok AB metszésvonalán metszik egymást $\Rightarrow C''\in AB$. $OC'\parallel DC$ miatt $C''OC'\triangle\sim$
$\sim C''CD\triangle$, mert szögeik egyállású szögek $\Rightarrow \lambda=\frac{C'O}{DC}=\frac{C''O}{C''C}=\frac{m_1}{m_c}=\frac{t_{ABO}}{t_{ABC}}$. Hasonlóan belátható, hogy $\frac{B'O}{DB}=\frac{t_{ACO}}{t_{ABC}}$ és $\frac{A'O}{DA}=\frac{t_{BCO}}{t_{ABC}}$. $\frac{C'O}{DC}+\frac{B'O}{DB}+\frac{A'O}{DA}=\frac{t_{ABO}}{t_{ABC}}+\frac{t_{ACO}}{t_{ABC}}+\frac{t_{BCO}}{t_{ABC}}=$
$=\frac{t_{ABC}}{t_{ABC}}=1$.

1821. Legyen CD felezőpontja E, a vizsgált sík az $[ABE]$. E felezi DC-t $\Rightarrow BE$ súlyvonal a $BCD\triangle$-ben $\Rightarrow t_{BCE}=t_{BED}$. Az $ABED$ tetraéder $[BED]$ laphoz tartozó magassága egybeesik az $ABCE$ tetraéder $[BCE]$ laphoz tartozó magasságával (A-ból a $[DBC]$ síkra bocsátott merőleges). $V_{BECA}=\frac{1}{3}\cdot t_{BEC}\cdot M_A=\frac{1}{3}\cdot t_{BED}\cdot M_A=V_{BEDA}$.

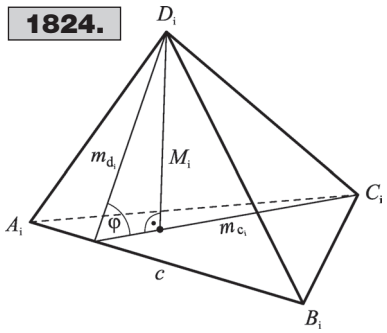
1822. Tekintsük az 1807. ábrán a $DD'S_D$ háromszöget. Felhasználjuk: a tetraéder súlypontja a súlyvonal oldalhoz közelebbi negyedelőpontja. Vegyük a D csúcspont és az S súlypont $[ABC]$ síkra vetett merőleges vetületét $\rightarrow D'S'$. $DD'S_D\triangle\sim SS'S_D\triangle$, mert szögeik egyállásúak $\Rightarrow \lambda=$
$=\frac{DS_D}{SS_D}=\frac{DD'}{SS'}$. $DS_D=4SS_D$-t felhasználva $DD'=4SS'$. $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\cdot DD'=\frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\,4SS'=$
$=4\cdot\frac{1}{3}\cdot t_{ABC}\cdot SS'=4V_{ABCS}$. Hasonlóan megmutatható, hogy a súlypont a többi lappal is negyedakkora térfogatú tetraédert alkot, mint az $ABCD$ tetraéder.

II

1823.



1824.



1823. $V_1 = \frac{1}{3} \cdot t_{A_1B_1C_1} \cdot M_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{b_1 \cdot c_1 \cdot \sin\alpha}{2} \cdot d_1 \cdot \sin\varepsilon = \frac{1}{6} \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot d_1 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varepsilon$.

Hasonlóan $V_2 = \frac{1}{6} \cdot b_2 \cdot c_2 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varepsilon$. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{6} \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot d_1 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varepsilon}{\frac{1}{6} \cdot b_2 \cdot c_2 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varepsilon} = \frac{b_1 \cdot c_1 \cdot d_1}{b_2 \cdot c_2 \cdot d_2}$.

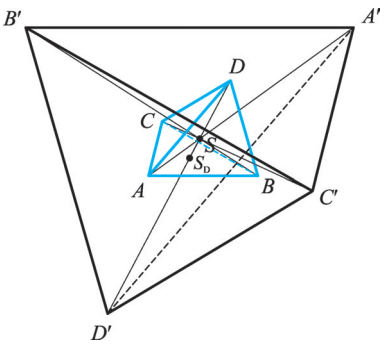
1824. $V_1 = \frac{1}{3} \cdot T_{A_1B_1C_1} \cdot M_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{c \cdot m_{c_1}}{2} \cdot m_{d_1} \cdot \sin\varphi = \frac{1}{6} c \cdot m_{c_1} \cdot m_{d_1} \cdot \sin\varphi$. Hasonlóan $V_2 =$

$= \frac{1}{6} c \cdot m_{c_2} \cdot m_{d_2} \cdot \sin\varphi$. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{c \cdot m_{c_1} \cdot m_{d_1}}{c \cdot m_{c_2} \cdot m_{d_2}} = \frac{\frac{1}{2} c \cdot m_{c_1} \cdot \frac{1}{2} c \cdot m_{d_1}}{\frac{1}{2} c \cdot m_{c_2} \cdot \frac{1}{2} c \cdot m_{d_2}} = \frac{T_{A_1B_1C_1} \cdot T_{A_1B_1D_1}}{T_{A_2B_2C_2} \cdot T_{A_2B_2D_2}}$.

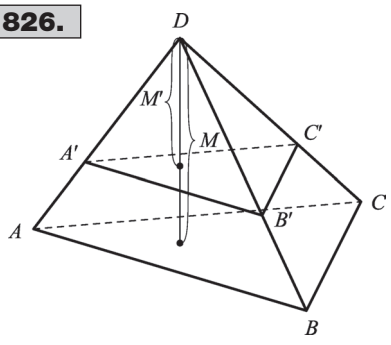
1825. Az $ABCD$ tetraéder DS_D súlyvonalát az S súlypont 1 : 3 arányban osztja $\Rightarrow$ Az S középpontú (-3) arányú középpontos nagyítás S_D-t D-be viszi, tehát az $[ABC]$ síkot a D-n átmenő, vele párhuzamos síkba. Hasonlóan a többi oldallapra is megfelelő ez a hasonlóság, tehát a feladatban megadott tetraéderhez vezet. $\Rightarrow ABCD \sim A'B'C'D'$ és $\lambda = (-3) \Rightarrow \frac{V_{ABCD}}{V_{A'B'C'D'}} = \lambda^3 = \underline{\underline{27}}$.

1826. $\frac{F_{A'B'C'D}}{F_{ABCD}} = \frac{1}{2}$. A levágott tetraéder a D középpontból középpontosan hasonló az eredetihez: $\lambda = \frac{M'}{M} = \sqrt{\frac{F_{A'B'C'D}}{F_{ABCD}}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow M' = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot M}}$.

1825.

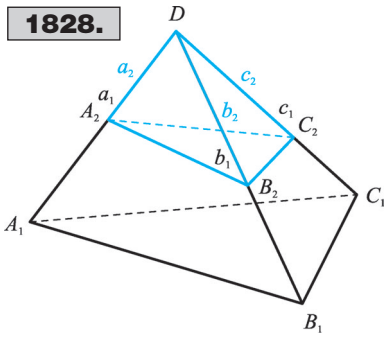


1826.



II

1828.



1827. Tekintsük az 1826. ábrát. $\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCA'B'C'}} = q \Rightarrow$ $\Rightarrow V_{A'B'C'D} = q \cdot V_{ABCA'B'C'}$. A levágott tetraéder D középpontból középpontosan hasonló az eredetihez. $\lambda = \frac{M'}{M} = \sqrt[3]{\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCA'B'C'} + V_{A'B'C'D}}} =$

$= \sqrt[3]{\frac{q \cdot V_{ABCA'B'C'}}{V_{ABCA'B'C'} + q \cdot V_{ABCA'B'C'}}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{\frac{q}{q+1}}}}$.

1828. Az 1823. feladatban láttuk, hogy $\frac{V_{A_2B_2C_2D}}{V_{A_1B_1C_1D}} =$ $= \frac{V_2}{V_1} = \frac{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2}{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}$. A „maradék” test térfogata: $V = V_1 - V_2 = V_1 - \frac{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2}{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1} \cdot V_1 =$ $= \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 - a_2 \cdot b_2 \cdot c_2}{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1} \cdot V_1$. $\underline{\underline{\frac{V}{V_1} = \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 - a_2 \cdot b_2 \cdot c_2}{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}}}$.

1829. Tekintsük az 1794. ábrát. Az F csúcsból induló lapátlók (FA; FC; FH) a tetraéder élei. Ezeknek F-től különböző végpontjait összekötő szakaszok: AC a $ABCD$ lap átlója; CH a $CDHG$ lap átlója; AH az $ADHE$ lap átlója.

1830. Az 1794. ábra jelöléseit használjuk. Az A csúcsból kiinduló lapátlók meghatározzák az $ACFH$ tetraédert. Ugyanehhez a tetraéderhez jutunk, ha a C; az F; illetve a H csúcsból induló lapátlókat tekintjük. A kihagyott négy csúcs (B; D; E; G) bármelyikéből indulunk ki, a $BDEG$ tetraédert kapjuk.

1831. Az AB élre DC-vel párhuzamos síkot fektetünk. A DC élre AB-vel párhuzamos síkot fektetünk. $\Rightarrow$ Ez a két sík párhuzamos egymással. Hasonlóan párhuzamos egymással a BC-re és AD-re; illetve a BD-re és AC-re fektetett két-két sík. Két-két-két párhuzamos sík által meghatározott test egy paralelepipedon, a síkok közül három-háromnak közös pontja a tetraéder négy csúcsa. $\Rightarrow$ Ez egy a tetraéder köré írható paralelepipedon.

1832. Ha egy paralelepipedon egy tetraéder köré írható, akkor a tetraéder egyik élét tartalmazó lapja párhuzamos kell legyen a szemközti lappal, azaz az azon lévő éllel is. $\Rightarrow$ A tetraéder köré írható paralelepipedon az 1831. feladatban ismertetett eljárással létrehozható, az pedig egyetlen testet határoz meg.

1833. A kockába írt tetraéder minden éle a kocka egy lapátlója. A kocka lapjai egybevágóak $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ lapátlói egyenlőek, tehát a tetraéder minden éle egyenlő.

1834. A szabályos tetraéder köré írható paralelepipedon szemközti lapjai olyan paralelogrammák, melyeknek két átlója egyenlő hosszú. $\Rightarrow$ Téglalapok, tehát a test téglatest. Vetítsük a tetraédert és a köré írható téglatestet merőlegesen valamelyik lapjának síkjára! Mivel a szabályos tetraéder szemközti élei merőlegesek egymásra, a téglatest lapjainak átlói is merőlegesek egymásra. $\Rightarrow$ Minden lapja négyzet, azaz a szabályos tetraéder köré írható paralelepipedon kocka.

1835. Mind a nyolc csúcsnál egy-egy egyenlő szárú derékszögű háromszög alapú tetraédert vágunk le, a magasságuk egyben az élük. $V_{\text{kocka}} = 6^3 = \underline{\underline{216\,\text{cm}^3}}$. Egy levágott csúcs térfogata: $V' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}\,\text{cm}^3$. $V = V_{\text{kocka}} - 8V' = \underline{\underline{180\,\text{cm}^3}}$.

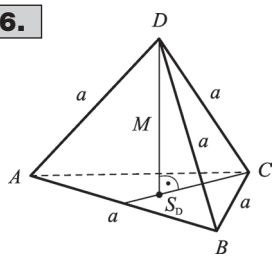
1836. Felhasználjuk: A szabályos tetraéder magasságtalppontja az oldallap súlypontja $\Rightarrow S_DC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Pitagorasz-tétel a $DS_DC\triangle$-re: $M^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2 \Rightarrow M = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3} = \underline{\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$;

$F = 4\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \underline{a^2\cdot\sqrt{3}}$.

a) $a = 8{,}6$ cm; $V = 53\cdot\sqrt{2} \approx \underline{74{,}96\ \text{cm}^3}$; $F = 73{,}96\cdot\sqrt{3} \approx$ $\approx \underline{128{,}1\ \text{cm}^2}$.

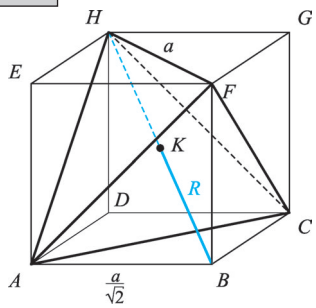
b) $a = \frac{1}{4}$ cm; $V = \frac{\sqrt{2}}{768} \approx 0{,}0018\ \text{m}^3 = \underline{1{,}8\ \text{dm}^3}$; $F = \frac{\sqrt{3}}{16} \approx 0{,}108\ \text{m}^2 = \underline{10{,}8\ \text{dm}^2}$.

1836.



1837. A szabályos tetraédert magába foglaló paralelepipedon egy kocka. A tetraéder körülírt gömbjének középpontja a kocka középpontja, sugara a kocka testátlójának fele: $R = \frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\cdot\sqrt{6}}{4}$.

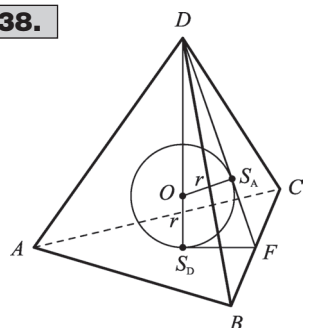
1837.



1838. A szabályos tetraéder térfogata: $V = \frac{a^3\cdot\sqrt{2}}{12}$. A térfogat másképp: $V = 4V_{ABCO} = 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot r = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{3}r$. A kettőt összehasonlítva:

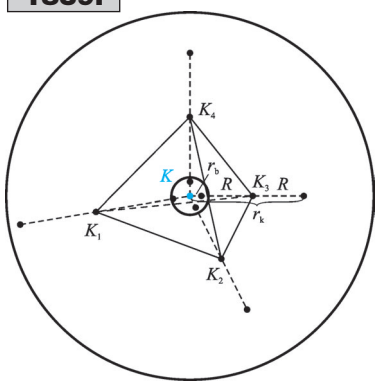
$\frac{a^3\cdot\sqrt{2}}{12} = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{3}r \Rightarrow r = \underline{\frac{a\cdot\sqrt{6}}{12}}$.

1838.



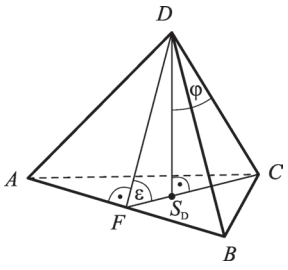
1839. Az egymást páronként érintő gömbök középpontjai egy $2R$ élű szabályos tetraéder négy csúcsában vannak. A belülről, illetve kívülről érintő gömbök koncentrikusak, középpontjuk a tetraéder középpontjával azonos. Az érintkezés feltétele: $r_b + 2R = r_k$. A szabályos tetraéder köré írható gömb sugara az 1837. feladat eredményéből $\frac{2R\sqrt{6}}{4} = \frac{R\sqrt{6}}{2}$. Az ábra szerint $\frac{R\sqrt{6}}{2} = r_b + R \Rightarrow r_b = R\frac{\sqrt{6}-2}{2}$ és $r_k = R\frac{\sqrt{6}+2}{2}$. A térfogatok aránya: $\frac{V_b}{V_k} = \left(\frac{r_b}{r_k}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}\right)^3 = \underline{\left(5-2\sqrt{6}\right)^3}$.

1839.



II

1841.



1840. Az 1836. feladatban láttuk, hogy a szabályos tetraéder magassága: $M = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Ebből $a = \frac{3M}{\sqrt{6}} = \frac{M\sqrt{6}}{2}$.

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot M = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{6M^2}{4} \cdot M = \underline{\underline{\frac{M^3 \cdot \sqrt{3}}{8}}}$.

1841. A szabályos tetraéder magasságtalppontja az oldallap súlypontja $\Rightarrow S_DC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. A $DS_DC\triangle$-ben $\sin\varphi = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \underline{\underline{35{,}26°}}$. A DS_D magasság a DB és AD éllel is φ szöget zár be, AB, AC és BC élekre pedig merőleges, mert merőleges a síkjukra.

1842. Tekintsük az 1841. ábrát. A szabályos tetraéder magasságtalppontja az oldallap súlypontja $\Rightarrow FS_D = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. FS_DD derékszögű háromszögben: $\cos\varepsilon = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \varepsilon \approx \underline{\underline{70{,}53°}}$.

1843. Az 1836. feladatban láttuk, hogy a szabályos tetraéder térfogata: $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = \frac{30^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$. Az 1838. feladatban láttuk, hogy a beírt gömb sugara: $r = \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{30\sqrt{6}}{12} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$. Ha a lapokat 3 cm vastagságban csiszolják le, akkor a beírt gömb sugara 3 cm-rel csökken:

$r' = \left(\frac{5\sqrt{6}}{2} - 3\right)$ cm; $a' = \frac{12r'}{\sqrt{6}} = \frac{12 \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} - 36}{\sqrt{6}} = \left(30 - 6\sqrt{6}\right)$ cm;

$V' = \frac{\left(30 - 6\sqrt{6}\right)^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$; $\Delta V = \frac{30^3 - \left(30 - 6\sqrt{6}\right)^3}{12} \cdot \sqrt{2}$;

$\Delta m = \Delta V \cdot \varrho = \frac{30^3 - \left(30 - 6\sqrt{6}\right)^3}{12} \cdot \sqrt{2} \cdot 2{,}8$; $\Delta m \approx 7726{,}97\text{ g} \approx \underline{\underline{7{,}73\text{ kg}}}$.

Gúla, csonkagúla

II

Gúla

1844. Az oldallapok területösszege nagyobb, mint az alaplap síkjára eső vetületeik területösszege, hiszen $t_i' = t_i \cdot \cos\alpha < t_i$ (ahol α az oldallap és az alaplap szöge). A vetületek területösszege pedig nem kisebb az alaplap területénél.
$t_{\text{alaplap}} \leq t_1' + t_2' + \ldots + t_n' = t_1 \cdot \cos\alpha_1 + t_2 \cdot \cos\alpha_2 + \ldots + t_n \cdot \cos\alpha_n < t_1 + t_2 + \ldots + t_n$. (Az alaplap területe akkor egyenlő a vetületek területének összegével, ha a magasság talppontja az alaplap belső pontja.)

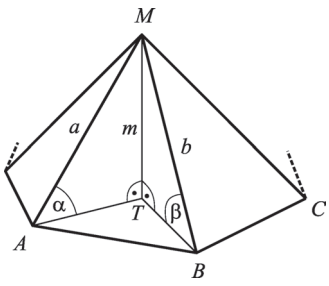
1845. ATM és BTM derékszögű háromszögben: $\sin\alpha = \frac{m}{a}$ és $\sin\beta = \frac{m}{b} \Rightarrow a \cdot \sin\alpha = m = b \cdot \sin\beta \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. A bizonyítás független attól, hogy a T talppont az alapsokszögnek belső pontja-e, vagy sem.

1846. A szabályos n oldalú gúla magasságának talppontja az alaplap köré írt kör középpontja. $PA_iT\triangle$-ben T-nél derékszög van, ezért $PA_i > A_iT$, azaz $a_n > R$. Adott R esetén $a_{n+1} < a_n$, és mivel $a_6 = R$, csak $2 < n < 6$ lehetséges. $\Rightarrow n \in \{3; 4; 5\}$.

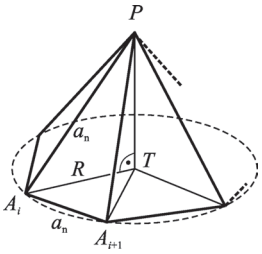
1847. Egy síkot párhuzamos síkokkal metszve a metszésvonalak párhuzamosak: $S' \parallel S \Rightarrow A'B' \parallel AB, B'C' \parallel BC, \ldots$ Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét az $AMB\sphericalangle$ AB és $A'B'$ szelőire: $A'M : AM = B'M : BM$! Hasonlóan a többi lap M-be futó éleire: $B'M : BM = C'M : CM = D'M : DM = \ldots$ Az arányok egyenlőségéből visszajutunk az A ponthoz. Ez azt jelenti, hogy az A' pont az A pont M-re vonatkozó középpontos hasonló képe, B' a B pontnak, C' a C pontnak és így tovább. $\Rightarrow$ Az S' síkbeli metszet az alapsokszög M középpontú hasonló képe.

1848. Használjuk az 1847. ábra jelöléseit! Az 1847. feladatban láttuk, hogy a gúla alaplappal párhuzamos síkmetszetei hasonlók az alapsokszöghöz, ezért egymáshoz is. Hasonlóságuk aránya: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{MB'}{MB} = \frac{MT'}{MT} = \lambda$, ahol T', illetve T a síkokra az M csúcsból állított merőlegesek talppontjai. $\Rightarrow \frac{t_{A'B'C'D'\ldots}}{t_{ABCD\ldots}} = \lambda^2 = \left(\frac{MT'}{MT}\right)^2 = \frac{(MT')^2}{MT^2}$.

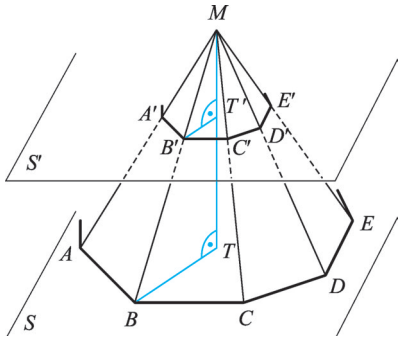
1845.



1846.

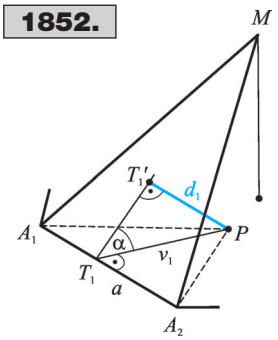


1847.



II

1852.



1849. Legyen az alaplapok területe t_1 és t_2, a síkmetszetek területe t_1' és t_2'! Az 1848. feladatban láttuk, hogy $\frac{t_1'}{t_1}=\left(\frac{M_1T_1'}{M_1T_1}\right)^2$ és $\frac{t_2'}{t_2}=\left(\frac{M_2T_2'}{M_2T_2}\right)^2$. A feltételek szerint $t_1=t_2$, $M_1T_1=M_2T_2$, $T_1T_1'=T_2T_2'$, ezért $M_1T_1'=M_2T_2'$. $\Rightarrow t'_1=t_1\cdot\left(\frac{M_1T_1'}{M_1T_1}\right)^2=$

$=t_2\cdot\left(\frac{M_2T_2'}{M_2T_2}\right)^2=t'_2$.

1850. Legyen a gúla magassága m, a csúcshoz közelebbi síkmetszet területe t'', a távolabbié t'! Az 1848. feladat alapján $t'':t':t=\left(\frac{m}{3}\right)^2:\left(\frac{2m}{3}\right)^2:m^2=\frac{1}{9}:\frac{4}{9}:1$. $\frac{t''}{t}=\frac{1}{9}\Rightarrow t''=\frac{1}{9}\cdot 900=$

$=\underline{\underline{100\text{ cm}^2}}$; $\frac{t'}{t}=\frac{4}{9}\Rightarrow t'=\frac{4}{9}\cdot 900=\underline{\underline{400\text{ cm}^2}}$.

1851. Az 1848. feladat szerint $\frac{t'}{t}=\left(\frac{m'}{m}\right)^2\Rightarrow m'=\sqrt{\frac{t'}{t}m^2}=\sqrt{\frac{t'}{t}}\cdot m$, ahol m' a csúcs és a metsző sík távolsága. *a)* $t'=\frac{1}{2}t\Rightarrow m'=\frac{m}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{30\sqrt{2}\text{ cm}}}$. *b)* $t'=\frac{1}{3}t\Rightarrow m'=\frac{m}{\sqrt{3}}=\underline{\underline{20\sqrt{3}\text{ cm}}}$.

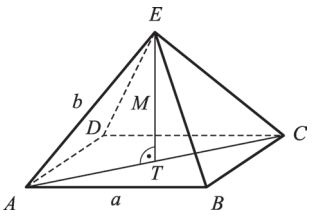
1852. A szabályos gúla minden oldallapja ugyanakkora α szöget zár be az alaplappal. Egy oldallaptól mért távolság $d_1=v_1\cdot\sin\alpha$ (T_1PT_1' derékszögű háromszög). Az oldallapoktól mért távolságok összege, felhasználva, hogy $t_{A_iA_{i+1}P}=t_i=\frac{a\cdot v_i}{2}$ a következő: $d_1+d_2+\ldots+d_n=$

$=v_1\cdot\sin\alpha+v_2\cdot\sin\alpha+\ldots+v_n\cdot\sin\alpha=\sin\alpha\cdot(v_1+v_2+\ldots+v_n)=\sin\alpha\cdot\left(\frac{2t_1}{a}+\frac{2t_2}{a}+\ldots+\frac{2t_n}{a}\right)=$

$=\frac{2\sin\alpha}{a}(t_1+t_2+\ldots+t_n)=\frac{2t_{\text{alap}}\cdot\sin\alpha}{a}=$ állandó.

1853. Tekintsük az 1841. ábrát! A magasság talppontja az $ABC\triangle$ S_D súlypontja, ezért $FS_D=\frac{1}{3}FC=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Pitagorasz tétele az $FS_DD\triangle$-re: $m_a^2=m^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2=m^2+\frac{a^2}{12}$.

1854.



Pitagorasz tétele az $AFD\triangle$-re: $b^2=m_a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=m^2+\frac{a^2}{12}+$

$+\frac{a^2}{4}=m^2+\frac{a^2}{3}$. Az oldalél: $b=\underline{\underline{\sqrt{m^2+\frac{a^2}{3}}}}$.

1854. AC az $ABCD$ négyzet átlója, ezért $AC=a\sqrt{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow a=\frac{AC}{\sqrt{2}}$. ATE derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele:

$b^2 = AT^2 + M^2 \Rightarrow AT = \sqrt{b^2 - M^2} \Rightarrow AC = 2AT = 2\sqrt{b^2 - M^2} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{b^2 - M^2}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2 \cdot (b^2 - M^2)}}}$

az alapél.

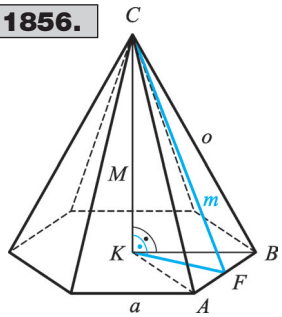
1855. Tekintsük az 1841. ábrát. A magasság talppontja az $ABC\triangle$ S_D súlypontja, ezért $FS_D = \frac{1}{3} FC = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Pitagorasz tétele az $AFD\triangle$-re: $b^2 = FD^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow FD = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. Pitagorasz tétele az $FS_D D\triangle$-re: $DS_D^2 = DF^2 - FS_D^2 = \left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^2}{12} = b^2 - \frac{a^2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow DS_D = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} \approx \underline{\underline{19{,}61\,\text{cm}}}$.

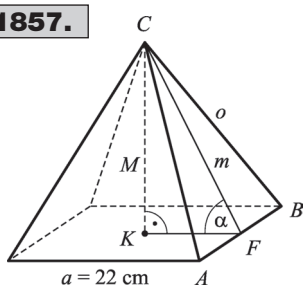
1856. Az alaplap szabályos hatszög, ezért $ABK\triangle$ szabályos. $\Rightarrow KB = a$. Pitagorasz tétele a CKB derékszögű háromszögre: $a^2 = o^2 - M^2 \Rightarrow a = \sqrt{205} \approx \underline{\underline{14{,}32\,\text{cm}}}$.

1857. KFC derékszögű háromszögben $KF = a : 2 = 11$ cm; $\alpha = 63{,}6°$; $\cos\alpha = \frac{11}{m} \Rightarrow m \approx 24{,}74$ cm; $\text{tg}\,\alpha = \frac{M}{11} \Rightarrow M \approx$ $\approx \underline{\underline{22{,}16\,\text{cm}}}$. $ABC\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow F$ felezéspont esetén $AFC\triangle$ derékszögű. Pitagorasz tétele szerint: $o^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow$ $\Rightarrow o \approx \underline{\underline{27{,}07\,\text{cm}}}$.

1856.

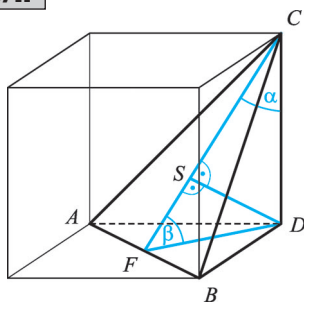


1857.

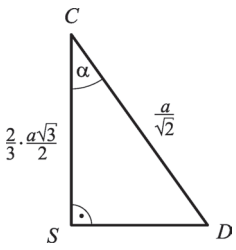


1858. Döntsük a gúlát az egyik oldallapjára! Ágyazzuk be a testet egy kockába! Ha az alapélek a hosszúságúak, akkor az oldalélek (egyben a kocka élei) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ hosszúságúak. A D csúcsnak az alapra vetett merőleges vetülete az a oldalú szabályos háromszög S súlypontja. Az oldalél és az alaplap szöge a DSC derékszögű háromszögből számolható: $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} : \frac{a}{\sqrt{2}} =$

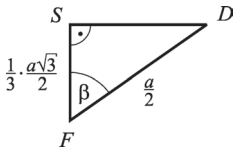
1858/I.



1858/II.

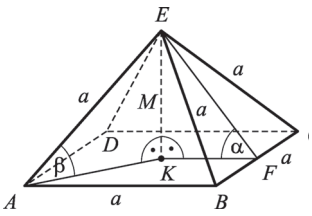


1858/III.



II

1859.



$= \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \alpha \approx \underline{\underline{35{,}26°}}$. Az oldallap és az alaplap szöge a DSF derékszögű háromszögből számolható: $\cos\beta = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta \approx \underline{\underline{54{,}74°}}$. DS testmagasság az $FSD\triangle$-re felírt Pitagorasz-tételből: $M^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} \Rightarrow M = \underline{\underline{\frac{a\sqrt{6}}{6}}}$.

1859. *a)* Pitagorasz tétele a KFE derékszögű háromszögre, ahol $KF = \frac{a}{2}$; $EF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $KE = M$.

$M^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow M = \underline{\underline{\frac{a\sqrt{2}}{2}}}$.

b) oldallap és alaplap szöge KFE derékszögű háromszögben: $\cos\alpha = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \approx \underline{\underline{54{,}73°}}$.

c) oldalél és alaplap szöge az AKE derékszögű háromszögben: $AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $EK = M = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

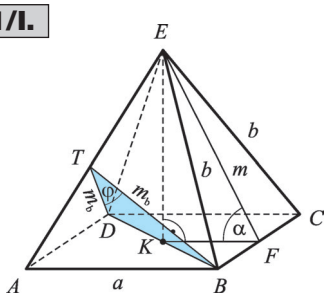
$\Rightarrow$ a háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow \beta = \underline{\underline{45°}}$.

1860. Tekintsük az 1841 ábrát! A D pont $[ABC]$ síkra vetett merőleges vetülete az $ABC\triangle$ súlypontja, ezért a $BCD\triangle$ alapsíkra vetett merőleges vetülete a $BCS_D\triangle$. Jelöljük az alaplap területét t-vel! $t_{S_D BC} = \frac{t}{3}$ a súlypont tulajdonsága miatt, $t_{BCD} = \frac{2t}{3}$ a feltétel miatt. A vetület területe az eredeti terület $\cos\varepsilon$-szorosa, azaz $\frac{t}{3} = \frac{2t}{3} \cdot \cos\varepsilon \Rightarrow \cos\varepsilon = 0{,}5 \Rightarrow \varepsilon = \underline{\underline{60°}}$.

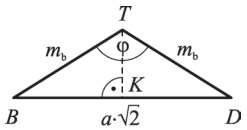
1861. A gúla felszíne: $A = a^2 + 2am$. A feltétel szerint $A : a^2 = 2{,}56$, azaz $(a^2 + 2am) : a^2 = 2{,}56 \Rightarrow \frac{m}{a} = 0{,}78$. Használjuk az 1861/I. ábra jelöléseit!

a) KEF derékszögű háromszögből: $\cos\alpha = \frac{a}{2} : m = \frac{a}{2m} = 0{,}641 \Rightarrow \alpha \approx \underline{\underline{50{,}13°}}$ az oldallap és az alaplap szöge.

1861/I.



1861/II.



II

b) EBC oldallap területe kétféleképpen: $\frac{am}{2} = \frac{bm_b}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{am}{b} = m_b$. Vegyük a BDT síkmetszetet! $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : m_b =$

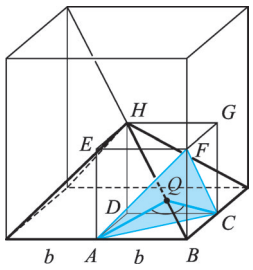
$= \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{am}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{b}{m}$.

Az EFB derékszögű háromszögre írt Pitagorasz-tételből:

$b^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \frac{b^2}{m^2} = 1 + \frac{a^2}{4m^2} = 1 + \frac{1}{4 \cdot 0{,}78^2} \Rightarrow \frac{b}{m} = 1{,}18 \Rightarrow$

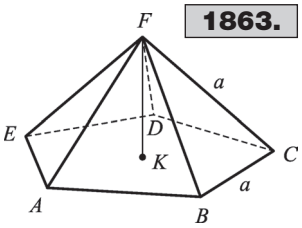
$\Rightarrow \sin\frac{\varphi}{2} = 0{,}8399 \Rightarrow \varphi \approx \underline{\underline{114{,}26°}}$.

1862.



1862. Legyen a gúla alapéle $2b$! Helyezzük rá egy $2b$ élű kocka alaplapjára a gúlát! Tekintsük a kockának az 1862. ábrán látható $ABCDEFGH$ részét, ami egy b élű kocka! A BH testátló merőleges az $[ACF]$ síkra, és azt az $ACF\triangle$ Q súlypontjában metszi. $\Rightarrow AQC\sphericalangle = 120° \Rightarrow$ A H pont a gúla csúcsa. $\Rightarrow$ A gúla magassága $\underline{\underline{b = 16\text{ cm}}}$.

1863.



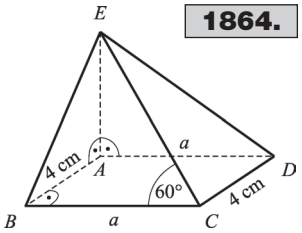
1863. Az 1863. ábra szerint az FC oldalél szögét keressük a különböző alapélekkel.

1. eset: BC és DC alapélekkel: $\underline{\underline{60°}}$.

2. eset: AB és ED alapélekkel ugyanakkora szöget zár be. Felhasználjuk, hogy szabályos ötszögben az ED oldal párhuzamos az AC átlóval, AB oldal pedig párhuzamos az EC átlóval. AB és FC kitérő egyenesek szöge egyenlő az EC és FC metsző egyenesek szögével. Vegyük az ECF síkmetszetet, ami egy egyenlő szárú háromszög, alapja az EC átló, szárai az EF és FC egyenlő élek! Ez a háromszög egybevágó az $ECD\triangle$-gel, mert EC oldaluk közös, másik két oldaluk pedig a hosszúságú. $EDC\sphericalangle = 108° \Rightarrow ECD\sphericalangle = DEC\sphericalangle = 36° \Rightarrow \sphericalangle(AB; FC) = \sphericalangle(ED; FC) = \underline{\underline{36°}}$.

3. eset: EA alapéllel. Vegyük a gúla $[FKC]$ síkkal való tengelymetszetét! FK merőleges az alapsíkra, ezért merőleges annak minden egyenesére. $\Rightarrow \underline{FK \perp EA}$. KC egyenes az ötszög szimmetriatengelye, ezért $\underline{KC \perp EA}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $EA \perp [FKC] \Rightarrow EA$ merőleges $[FKC]$ minden egyenesére $\Rightarrow EA \perp FC$, tehát EA és FC élek szöge $\underline{\underline{90°}}$.

1864.



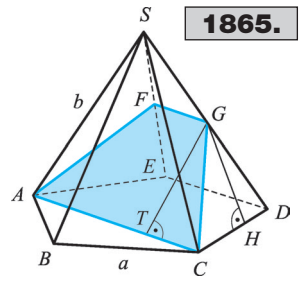
1864. $EBC\triangle$ derékszögű, mert $\underline{BC \perp AB}$ ($ABCD$ téglalap), $EA \perp [ABCD] \Rightarrow \underline{EA \perp BC}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $BC \perp [EAB] \Rightarrow BC \perp EB$. $EBC\triangle$-ben 60° és 30° a hegyesszögek $\Rightarrow$

$\Rightarrow EC = 2BC = 2a$ és $EB = \sqrt{3} \cdot a$; $AD = AE$ feltétel miatt $M = a$.

Pitagorasz tétele az ABE derékszögű háromszögre: $EB^2 = AB^2 +$

$+ AE^2$, azaz $3a^2 = 4^2 + a^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \Rightarrow M = \underline{\underline{2\sqrt{2}\text{ cm}}}$.

1865.



1865. A síkmetszet az $ACGF$ húrtrapéz. FG középvonala az $EDS\triangle$-nek, ezért $FG = \frac{a}{2}$. CG a $CDS\triangle$ súlyvonala, ezért $CH : HD = 3 : 1$. Pitagorasz tételét alkalmazva GHD, majd GHC derékszögű háromszögben: $GH^2 = GD^2 - HD^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2$ és

II

$GC^2 = GH^2 + HC^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{b^2 + 2a^2}{4}$. AC egy a oldalú szabályos ötszög átlója, ezért $AC = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)a}{2}$. $ACGF$ húrtrapézban $TC = \frac{AC - FG}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{4}$. GTC derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele: $GT^2 = GC^2 - CT^2 = \frac{4b^2 + 3a^2}{16}$.

$t_{ACGF} = \frac{(AC + FG)\cdot GT}{2} = \frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\cdot a \cdot \sqrt{4b^2 + 3a^2}}{16}$ a síkmetszet területe.

1866. *a)* $A \approx \underline{\underline{618\ \text{cm}^2}}$. *b)* $A \approx \underline{\underline{409{,}54\ \text{cm}^2}}$. *c)* $A \approx \underline{\underline{845{,}46\ \text{cm}^2}}$. *d)* $A \approx \underline{\underline{1625{,}5\ \text{cm}^2}}$.

1867. 35,17 m^2 önlemez szükséges.

1868. *a)* $V \approx \underline{\underline{26{,}97\ \text{dm}^3}}$. *b)* $V = \underline{\underline{321{,}9\ \text{dm}^3}}$. *c)* $V \approx \underline{\underline{0{,}101\ \text{m}^3}}$.

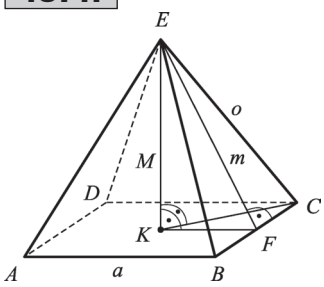
d) Tekintsük az 1854. ábrát. Legyen $a = 56$ cm, $b = 78$ cm! Pitagorasz tétele a $TEC\triangle$-re, ahol $TC = \frac{56\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M^2 = 78^2 - \left(\frac{56\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow M \approx 67{,}2$ cm. $V = \frac{1}{3}\cdot 56^2 \cdot 67{,}2 = 70\,248\ \text{cm}^3 = \underline{\underline{70{,}248\ \text{dm}^3}}$.

e) Tekintsük az 1856. ábrát, legyen $a = 5{,}9$ cm, $o = 12{,}3$ cm! $KAB\triangle$ szabályos, ezért $KB = 5{,}9$ cm. Pitagorasz tétele a $CKB\triangle$-re: $M^2 = 12{,}3^2 - 5{,}9^2 \Rightarrow M \approx 10{,}8$ cm. $V = \frac{1}{3}\cdot 6 \cdot \frac{5{,}9^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot 10{,}8 = \underline{\underline{325{,}36\ \text{cm}^3}}$.

1869. Tekintsük az 1854. ábrát, legyen $AC = e$ és $b = a$! $e = 6$ cm $\Rightarrow a = 3\sqrt{2}$ cm. Pitagorasz tétele az $ETC\triangle$-re: $M^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 3^2 \Rightarrow M = 3$ cm. $V = \frac{1}{3}\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^2 \cdot 3 = \underline{\underline{18\ \text{cm}^3}}$ és $A = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + 4\cdot\frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \underline{\underline{18\left(1+\sqrt{3}\right)\text{cm}^2}}$.

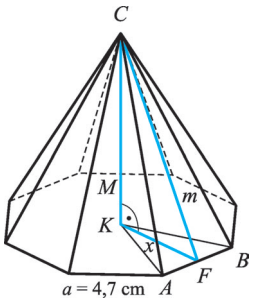
1870. Tekintsük az 1812. ábrát, legyen $x = 32$ cm, $y = 12$ cm, $z = 18$ cm! $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{12\cdot 18}{2}\cdot 32 = \underline{\underline{1152\ \text{cm}^3}}$. Pitagorasz tétele az ABD, BCD, illetve CDA derékszögű háromszögekre: $AB^2 = 12^2 + 18^2 \Rightarrow AB = 6\cdot\sqrt{13} \approx 21{,}63$ cm. $BC^2 = 18^2 + 32^2 \Rightarrow BC \approx 36{,}72$ cm. $AC^2 = 12^2 + 32^2 \Rightarrow AC \approx 34{,}18$ cm. $ABC\triangle$-ben $s = 46{,}3$ cm, ezért a Heron-képlet felhasználásával $t_{ABC\triangle} = 364{,}17\ \text{cm}^2 \Rightarrow A = \frac{12\cdot 18}{2} + \frac{18\cdot 32}{2} + \frac{32\cdot 12}{2} + t_{ABC} = \underline{\underline{952{,}17\ \text{cm}^2}}$.

1871.



1871. A feltétel szerint az oldallapok olyan egyenlő szárú háromszögek, amiknek a szárszöge 45°, alapja 8 cm. Az oldallapok magasságára: $\text{tg}\,22{,}5° = \frac{4}{m} \Rightarrow m \approx 9{,}66$ m. Pitagorasz tétele a $KFE\triangle$-re (1871. ábra): $M^2 = 9{,}66^2 - 4^2 \Rightarrow M = 8{,}79$ cm. $\Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot 8^2 \cdot 8{,}79 \approx \underline{\underline{187{,}5\ \text{cm}^3}}$.

1872. *a)* Tekintsük az 1871. ábrát, legyen $a = 7$ cm!



$A = a^2 + 4 \cdot \frac{am}{2} \Rightarrow m = \frac{A - a^2}{2a} = 15{,}93$ cm. Pitagorasz tétele a KFE derékszögű háromszögre: $m^2 = M^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow M = \sqrt{m^2 - \frac{a^2}{4}} = 15{,}54$ cm.

$V = \frac{1}{3} a^2 M \approx \underline{\underline{253{,}8\ \text{cm}^3}}$.

b) Tekintsük az 1856. ábrát, legyen $a = 5{,}5$ cm!

$A = 6 \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{am}{2} \right) \Rightarrow m = \frac{A - \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}}{3a} = 1172$ cm. $ABK\triangle$ szabályos, ezért $KF = \frac{5{,}5 \cdot \sqrt{3}}{2}$ cm. Pitagorasz tétele a KFC derékszögű háromszögre: $m^2 = M^2 + KF^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = \sqrt{m^2 - KF^2} = 10{,}71$ cm. $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} M = \underline{\underline{280{,}58\ \text{cm}^3}}$.

c) Tekintsük az 1872. ábrát! $ABK\triangle$ egyenlő szárú, szárszöge 45°, ezért $\text{tg}\ \frac{45°}{2} = \frac{a}{2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{a}{2\ \text{tg}\ 22{,}5°} \Rightarrow x = 5{,}67$ cm $\Rightarrow t_{\text{alap}} = 8 \cdot \frac{4{,}7 \cdot 5{,}67}{2} = 106{,}56\ \text{cm}^2$, valamint $A = t_{\text{alap}} + 8 \cdot t_{\text{oldallap}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 272 = 106{,}56 + 8 \cdot \frac{4{,}7\,m}{2} \Rightarrow m = 8{,}79$ cm. Pitagorasz tétele a KFC derékszögű háromszögre:

$m^2 = M^2 + x^2 \Rightarrow M = \sqrt{m^2 - x^2} = 6{,}72$ cm. $V = \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot M \approx \underline{\underline{238{,}9\ \text{cm}^3}}$.

1873. *a)* Tekintsük az 1871. ábrát, legyen $a = 6{,}3$ cm! $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 M \Rightarrow M = 3V : a^2 = 40{,}34$ cm. Pitagorasz tétele az EKC derékszögű háromszögre, melyben $KC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow o^2 = M^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow o = \underline{\underline{40{,}58\ \text{cm}}}$.

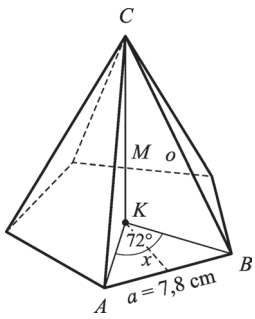
b) Tekintsük az 1873. ábrát! ABK olyan egyenlő szárú háromszög, aminek szárszöge 72°, ezért

$\text{tg}\ 36° = \frac{3{,}9}{x} \Rightarrow x = \frac{3{,}9}{\text{tg}\,36°} = 5{,}37$ cm. $V = \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot M = \frac{5 \cdot \frac{ax}{2} \cdot M}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow M = 15{,}3$ cm; $ABK\triangle$-ből $KB = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = 6{,}64$ cm. Pitagorasz tétele a KBC derékszögű háromszögre: $o^2 = 15{,}3^2 + 6{,}64^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow o = \underline{\underline{16{,}68\ \text{cm}}}$.

1873.



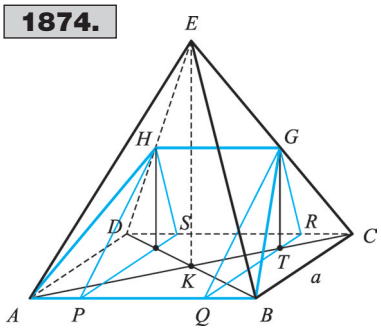
c) Tekintsük az 1856. ábrát, legyen $a = 5{,}9$ cm! $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot M \Rightarrow$

$\Rightarrow M = \frac{2V}{a^2\sqrt{3}} \approx 17{,}7$ cm; $ABK\triangle$ szabályos, ezért $KB = a = 5{,}9$ cm. Pitagorasz tétele a KBC derékszögű háromszögre: $o^2 = M^2 + a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow o = \underline{\underline{18{,}66\ \text{cm}}}$.

II

1874.



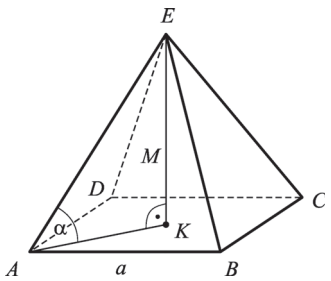
1874. Legyen a gúla alapéle a, magassága M, a keresett távolság $m = GT$! A síkmetszet az $ABGH$ húrtrapéz. $ABCDE$ gúla térfogata: $V = \frac{1}{3}\,a^2\,M$; $ABCDGH$ test térfogata: $\frac{1}{2}V = \frac{1}{6}\,a^2\,M$. $ABCDGH$ test felbontható egy háromszög alapú hasábra ($QRGPSH$) és két egybevágó téglalap alapú gúlára ($APSDH$ és $QBCRG$). A hasáb térfogata: $V_1 = \frac{QR \cdot GT}{2} \cdot GH = \frac{am}{2} \cdot GH$. A téglalap alapú gúla térfogata: $V_2 = \frac{1}{3}\,QB \cdot BC \cdot GT = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB - GH}{2} \cdot am =$ $= \frac{(a - GH)am}{6}$. Az E középpontú hasonlóság alapján: $\frac{GH}{DC} = \frac{EK - GT}{EK} \Rightarrow \frac{GH}{a} = \frac{M - m}{M} \Rightarrow$ $\Rightarrow GH = \frac{(M-m)a}{M}$. $V_1 + 2V_2 = 0{,}5\,V \Rightarrow \frac{am}{2} \cdot \frac{(M-m)a}{M} + 2 \cdot \frac{\left(a - \frac{(M-m)a}{M}\right) \cdot am}{6} = \frac{a^2 M}{6} \Rightarrow$ $\Rightarrow m^2 - 3mM + M^2 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,M > M$, ez nem lehet. $m_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot M$ a keresett távolság.

1875. Az 1875. ábra jelölései szerint: $\alpha = 72°28'$, $a = 2{,}56$ m. AKE derékszögű háromszögben $AK = \frac{2{,}56 \cdot \sqrt{2}}{2} = 1{,}81$ m és $\operatorname{tg} 72°28' = \frac{M}{1{,}81} \Rightarrow M = 5{,}74$ m. $V = \frac{1}{3}\,a^2 M = \underline{\underline{12{,}54\ \text{m}^3}}$.

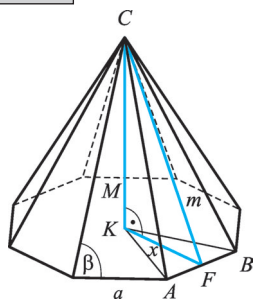
1876. Tekintsük az 1812. ábrát, legyen $a = b = c = 2{,}54$ cm, $x = y = z$! Döntsük a gúlát az egyik oldallapjára! Az oldallapok olyan egyenlő szárú derékszögű háromszögek, amiknek 2,54 cm az átfogója. $\Rightarrow o = \frac{2{,}54}{\sqrt{2}}$. $A = \frac{2{,}54^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{2{,}54^2}{4} \approx \underline{\underline{7{,}63\ \text{cm}^2}}$ és $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{o^2}{2} \cdot o = \frac{o^3}{6} \approx$ $\approx \underline{\underline{0{,}97\ \text{cm}^3}}$.

1877. Tekintsük az 1877. ábrát, legyen $a = 4$ dm, $\beta = 75°$! KAB olyan egyenlő szárú háromszög, aminek szárszöge 45°, ezért $\operatorname{tg} \frac{45°}{2} = \frac{a}{2x} \Rightarrow x = \frac{4}{2 \operatorname{tg} 22{,}5°} = 4{,}83$ dm $\Rightarrow t_{\text{alap}} = 8 \cdot \frac{ax}{2} =$

1875.



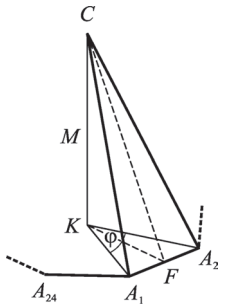
1877.



$= 77{,}25\ \text{dm}^2$. ABC olyan egyenlő szárú háromszög, aminek alapon fekvő szöge 75°, ezért $\text{tg}\,75° = \frac{2m}{a} \Rightarrow m = \frac{4\,\text{tg}\,75°}{2} = 7{,}46\ \text{dm} \Rightarrow t_{\text{oldallap}} = \frac{am}{2} =$ $= 14{,}92\ \text{dm}^2$.

$A = t_{\text{alap}} + 8t_{\text{oldallap}} = 196{,}68\ \text{dm}^2$. Pitagorasz tétele a KFC derékszögű háromszögre: $M^2 + x^2 = m^2 \Rightarrow M = 5{,}68\ \text{dm}$; $V = \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot M = \underline{\underline{146{,}4\ \text{m}^3}}$.

1879.



1878. Tekintsük az 1877. ábrát! $M = 37{,}65\ \text{m}$; $KA = r = 3{,}15\ \text{m}$. KAB olyan egyenlő szárú háromszög, aminek szárszöge 45°, ezért $t_{\text{alap}} =$ $= 8 \cdot \frac{r^2 \sin 45°}{2} = 28{,}06\ \text{m}^2 \Rightarrow V = \frac{1}{3}\, t_{\text{alap}} \cdot M = = \underline{\underline{352{,}2\ \text{m}^3}}$.

1879. Tekintsük az 1879. ábrát! $A_1A_2 = 1{,}9\ \text{cm}$; $KFC\sphericalangle = 87°11'$. Az alaplap a köré írható kör középpontjából a csúcsokhoz vezető sugarakkal 24 db olyan egyenlő szárú háromszögre bontható, amelyek szárszöge 15°. KFA_2 derékszögű háromszögből: $\text{tg}\,7{,}5° = \frac{1{,}9}{2KF} \Rightarrow KF = 7{,}21\ \text{cm}$. CKF derékszögű háromszögből: $\text{tg}\,87°11' = \frac{M}{7{,}21} \Rightarrow M = 146{,}54\ \text{cm}$. $t_{\text{alap}} = 24 \cdot \frac{1{,}9 \cdot 7{,}21}{2} =$ $= 164{,}39\ \text{cm}^2 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot \text{M} \approx 8029{,}8\ \text{cm}^3 \approx \underline{\underline{8{,}03\ \text{dm}^3}}$.

1880. Használjuk az 1871. ábra jelöléseit! $V = 864\ \text{cm}^3$; $a : M = 2 : 3$, ezért $a = \frac{2}{3} M$; $V = \frac{1}{3}\, a^2 M = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} M^3 = \frac{4}{27} M^3 \Rightarrow 864 = \frac{4}{27} M^3 \Rightarrow M = 18\ \text{cm} \Rightarrow a = 12\ \text{cm}$. Pitagorasz tétele a CKF derékszögű háromszögre: $m^2 = M^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow m = 6\sqrt{10} \approx 18{,}97\ \text{cm}$;

$A = a^2 + 4 \cdot \frac{am}{2} = 144 + 144\sqrt{10} = \underline{\underline{144\left(1 + \sqrt{10}\right)\text{cm}^2}} \approx \underline{\underline{599{,}37\ \text{cm}^2}}$.

1881. Az 1871. ábra jelöléseivel: $M = 2\sqrt{2} \cdot a \Rightarrow V = \frac{1}{3}\, a^2 \cdot M = \frac{2\sqrt{2}}{3}\, a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\sqrt{2}}} =$

$= 3{,}75\ \text{m} \Rightarrow M = 10{,}62\ \text{m}$. Pitagorasz tétele a $KFE\triangle$-re: $m^2 = M^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow m = 10{,}78\ \text{m}$;

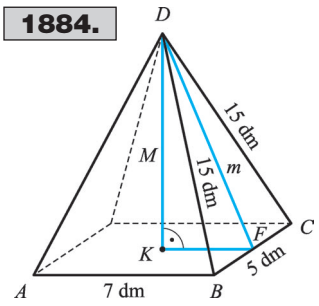
$A = a^2 + 4 \cdot \frac{am}{2} = \underline{\underline{94{,}94\ \text{m}^2}}$.

1882. Az 1871. ábra jelöléseivel: Az oldallapok szabályos háromszögek, ezért $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Pitagorasz tétele a KFC derékszögű háromszögre: $m^2 = M^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow M = \sqrt{\frac{3}{4} a^2 - \frac{1}{4} a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

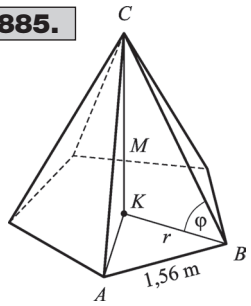
$V = \frac{1}{3}\, a^2 M = \frac{1}{6}\, a^3 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{6V}{\sqrt{2}}} \approx \underline{\underline{6\ \text{cm}}}$.

II

1884.



1885.



1883. Használjuk az 1875. ábra jelöléseit, legyen $\alpha = 46°20'$, $V = 4{,}86\ \text{cm}^3$! AKE derékszögű háromszögben $AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 46°20' = \frac{2M}{a\sqrt{2}} \Rightarrow M = \frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} 46°20'$; $V = \frac{1}{3}a^2 M =$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a^3 \cdot \operatorname{tg} 46°20' \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{6V}{\sqrt{2}\operatorname{tg} 46°20'}} \approx \underline{\underline{2{,}7\ \text{m}}}$.

1884. Pitagorasz tétele a DFC derékszögű háromszögre: $m^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 15^2 \Rightarrow m^2 = \frac{875}{4}\ \text{dm}^2$.

Pitagorasz tétele a KFD derékszögű háromszögre: $M^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{875}{4} \Rightarrow M = 14{,}37\ \text{dm}$;

$V = \frac{1}{3}\cdot 7\cdot 5\cdot 14{,}37 \approx \underline{\underline{167{,}65\ \text{dm}^3}}$.

1885. KAB olyan egyenlő szárú háromszög, aminek szárszöge $72° \Rightarrow \sin 36° = \frac{1{,}56}{2r} \Rightarrow r \approx$

$\approx 1{,}33\ \text{cm}$. CKB derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} 72°45' = \frac{M}{1{,}33} \Rightarrow M = 4{,}27\ \text{cm}$;

$V = t_{\text{alap}}\cdot M = \frac{1}{3}\cdot 5\cdot\frac{1{,}33\cdot\sin 72°}{2}\cdot 4{,}27 \approx 5{,}99\ \text{cm}^3 \Rightarrow m = \varrho\cdot V = 7{,}2\cdot 5{,}99 \approx \underline{\underline{43{,}1\ \text{g}}}$.

1886. Az 1871. ábra jelöléseit használva: $t_{\text{alap}} = a^2 = 1024\ \text{cm}^2 \Rightarrow a = 32\ \text{cm} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot t_{\text{alap}}\cdot M =$

$= \underline{\underline{16{,}47\ \text{cm}}}$. Pitagorasz tétele a KFE derékszögű háromszögre: $m^2 = 16^2 + 16{,}47^2 \Rightarrow m =$

$= 22{,}96\ \text{cm} \Rightarrow t_{\text{palást}} = 4\cdot\frac{am}{2} \approx 1469{,}58\ \text{cm}^2 \approx \underline{\underline{14{,}7\ \text{dm}^2}}$.

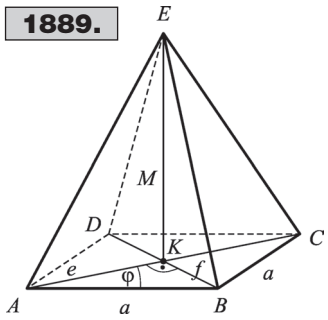
1887. Az 1871. ábra jelöléseit használva: $a = 45\ \text{cm} = 4{,}5\ \text{dm}$. $V = \text{tömeg} : \text{sűrűség} =$

$= 134{,}96\ \text{dm}^3$; $V = \frac{1}{3}\cdot t_{\text{alap}}\cdot M \Rightarrow 134{,}96 = V = \frac{1}{3}\cdot 4{,}5^2\cdot M \Rightarrow M \approx \underline{\underline{20\ \text{dm}}}$.

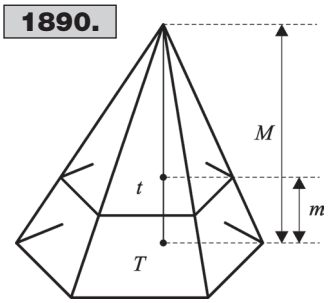
1888. Tekintsük az 1856. ábrát, legyen $a = 4{,}5\ \text{cm}$, $m = 9\ \text{cm}$! $ABK\triangle$ szabályos, ezért $KF = \frac{4{,}5\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}$. Pitagorasz tétele a KFC derékszögű háromszögre: $9^2 = M^2 + \left(\frac{4{,}5\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow M \approx 8{,}11\ \text{cm}$; $V = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{4{,}5\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot 8{,}11 \approx \underline{\underline{142{,}27\ \text{cm}^3}}$.

1889.



1890.

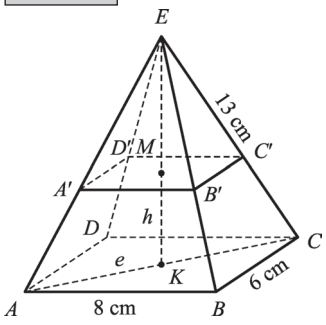


1889. $M = 9$ cm; $V = 62{,}52$ cm^3; $t_{ACE} = 36{,}7$ cm^2. $V = \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot M \Rightarrow t_{\text{alap}} = \frac{3V}{M} = 20{,}84$ cm^2; $t_{ACE} = \frac{e \cdot M}{2} \Rightarrow e = \frac{2t_{ACE}}{M} = 8{,}16$ cm; $t_{\text{alap}} = \frac{e \cdot f}{2} \Rightarrow f = \frac{2t_{\text{alap}}}{e} = 5{,}11$ cm. ABK derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} \varphi = \frac{f}{2} : \frac{e}{2} = \frac{f}{e} = 0{,}6263 \Rightarrow \varphi = 32° \Rightarrow$ Az alaplap egyik szöge $\underline{\underline{64°}}$. Pitagorasz tétele az $ABK\triangle$-re: $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 \Rightarrow a = \underline{\underline{4{,}81\,\text{cm}}}$.

1890. $M = 14$ cm; $m = 4{,}2$ cm; $t = 60$ cm^2. Az alappal párhuzamos sík egy, az eredetivel hasonló gúlát metsz le a gúlából. $\lambda = \frac{M-m}{M} = 1 - \frac{m}{M} = 1 - \frac{4{,}2}{14} = \frac{7}{10}$. A levágott gúla térfogata: $V' = \frac{1}{3} t(M-m) = 196$ cm^3. Hasonló testek térfogatának aránya: $\frac{V'}{V} = \lambda^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow V = \frac{V'}{\lambda^3} \Rightarrow V = \frac{196 \cdot 10^3}{7^3} = \frac{4}{7} \cdot 10^3 \approx \underline{\underline{571{,}43\,\text{cm}^3}}$.

1891. Az alaplap átlója az ABC derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével: $e^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow e = 10$ cm. Pitagorasz tétele a KCE derékszögű háromszögre: $M^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow M = 12$ cm. Az $A'B'C'D'$ sík egy, az eredetivel hasonló gúlát metsz le a gúlából. A két gúla térfogatának aránya: $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, másrészt $\lambda = \frac{M-h}{M} = 1 - \frac{h}{M}$. A kettőt összevetve: $1 - \frac{h}{12} =$ $= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow h = 12 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ cm $\approx 2{,}48$ cm.

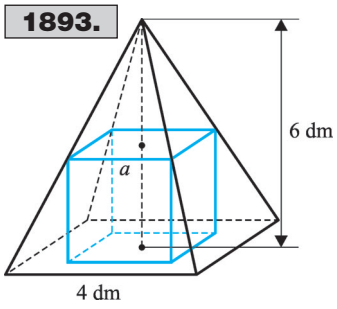
1891.



1892. A csúcshoz közelebbi sík egy olyan gúlát metsz le, amely hasonló az eredeti gúlához. Térfogatuk aránya: $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{3} = \lambda_1^3 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow \frac{m_1}{M} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow m_1 = \frac{45}{\sqrt[3]{3}} \approx \underline{\underline{31{,}2\,\text{cm}}}$.
A csúcstól távolabbi sík is egy olyan gúlát metsz le, amely hasonló az eredeti gúlához. Térfogatuk aránya: $\frac{V_2'}{V} = \frac{2}{3} = \lambda_2^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{m'_2}{M} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \Rightarrow m'_2 = 45 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 39{,}31$ cm.

II

1893.



A csúcstól számított második test magassága: $m_2 = m_2' - m_1 \approx$ $\approx \underline{\underline{8{,}11\text{ cm}}}$. A csúcstól számított harmadik test magassága: $m_3 = M - m_2' \approx \underline{\underline{5{,}69\text{ cm}}}$.

1893. A kocka fedőlapjának síkja egy, az eredetivel hasonló gúlát metsz le. A lemetszett gúla magassága $m = 6 - a$, alapéle a. A hasonlóság aránya: $\lambda = \frac{a}{4}$, másrészt $\lambda = \frac{6-a}{6} \Rightarrow \frac{a}{4} =$ $= \frac{6-a}{6} \Rightarrow a = 2{,}4\text{ dm} \Rightarrow V = a^3 = \underline{\underline{13{,}824\text{ dm}^3}}$.

Csonkagúla

1894. Legyen $PQHE$ a csonkagúla alapsíkra merőleges metszete. $\Rightarrow EP \perp AB \Rightarrow EP = m$ az $ABFE$ oldallap magassága. A feltétel szerint: $a^2 + b^2 = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot m \Rightarrow m = \frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$.

Pitagorasz tétele a $PTE\triangle$-re: $M^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = m^2$, azaz $M^2 + \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4(a+b)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M^2 = \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4(a+b)^2} - \frac{(a-b)^2\cdot(a+b)^2}{4(a+b)^2} = \frac{\left(a^2+b^2\right)^2 - \left(a^2-b^2\right)^2}{4(a+b)^2} =$$

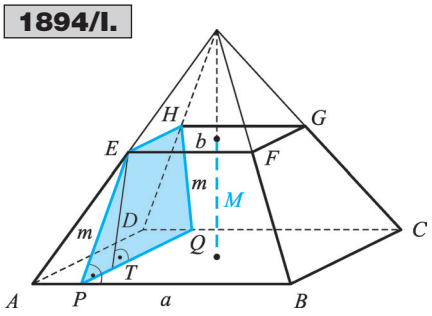
$$= \frac{\left(a^2+b^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-a^2+b^2\right)}{4(a+b)^2} = \frac{2a^2\cdot 2b^2}{4(a+b)^2} \Rightarrow M = \underline{\underline{\frac{ab}{a+b}}}.$$

1895. Az 1894/I. ábra jelöléseivel: $M = 52$ cm; $a = 55$ cm; $b = 32$ cm. Vegyük a csonkagúla EH élre illeszkedő, alapsíkra merőleges metszetét! A síkmetszet olyan húrtrapéz, aminek szárai a csonkagúla oldallapjainak magasságával egyenlők, magassága pedig a testmagassággal. Az 1894/II. ábrát tekintve: $PT = (55 - 32) : 2 = 11{,}5$ cm. Pitagorasz tétele a $PTE\triangle$-re: $m^2 = 11{,}5^2 + 52^2 \Rightarrow$

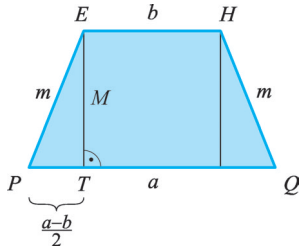
$\Rightarrow m = 53{,}26$ cm. $A = 55^2 + 32^2 + 4 \cdot \frac{55+32}{2} \cdot 53{,}26 \approx 13\,316{,}2\text{ cm}^2 \approx \underline{\underline{1{,}33\text{ m}^2}}$.

$V = \frac{52}{3} \cdot (55^2 + 55 \cdot 32 + 32^2) \approx 100\,689{,}3\text{ cm}^3 \approx \underline{\underline{100{,}69\text{ dm}^3}}$.

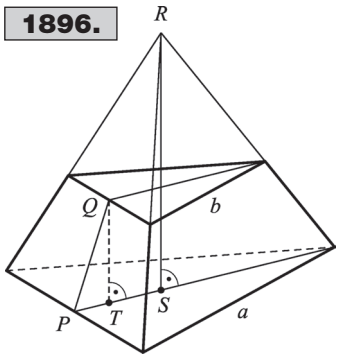
1894/I.



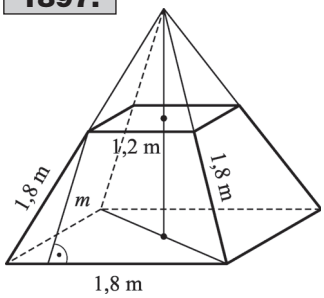
1894/II.



1896.



1897.



1896. Tekintsük a csonkagúla kiegészítő gúláját! Az egyesített test hasonló a kiegészítő gúlához. A hasonlóság aránya: $\lambda = \dfrac{PS - PT}{PS} = 1 - \dfrac{PT}{PS}$. Az alap háromszög súlypontja S, tehát $PS = \dfrac{49{,}5\sqrt{3}}{6}$. $QPT\sphericalangle = 60°$ és $QT = 20\,\text{cm} \Rightarrow QP = \dfrac{40}{\sqrt{3}}$ és $PT = \dfrac{20}{\sqrt{3}} \Rightarrow \lambda =$

$= 1 - \dfrac{20}{\sqrt{3}} : \dfrac{49{,}5\sqrt{3}}{6} = \dfrac{9{,}5}{49{,}5}$. A fedőlap és az alaplap hasonlóságából $b = \lambda \cdot a = \dfrac{9{,}5}{49{,}5} \cdot 49{,}5 =$

$= 9{,}5\,\text{cm}$. $A = \dfrac{49{,}5^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{9{,}5^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \dfrac{49{,}5 + 9{,}5}{2} \cdot \dfrac{40\sqrt{3}}{3} \approx 3144\,\text{cm}^2 \approx \underline{\underline{31{,}44\,\text{dm}^2}}$.

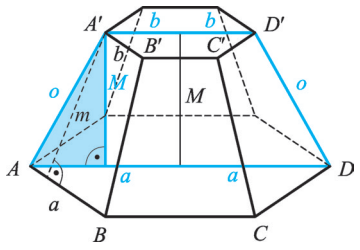
$V = \dfrac{20}{3} \cdot \left(\dfrac{49{,}5^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{49{,}5 \cdot 9{,}5\sqrt{3}}{4} + \dfrac{9{,}5^2\sqrt{3}}{4} \right) \approx 8691{,}3\,\text{cm}^3 \approx \underline{\underline{8{,}69\,\text{dm}^3}}$.

1897. Az oldallapok magassága Pitagorasz tételével: $m^2 = 1{,}8^2 - \dfrac{(1{,}8 - 1{,}2)^2}{4} \Rightarrow m = 1{,}77$ m.

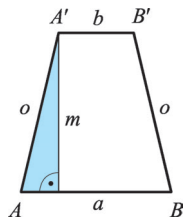
$A' = 1{,}2^2 + 4 \cdot \dfrac{1{,}2 + 1{,}8}{2} \cdot 1{,}77 \approx \underline{\underline{12{,}06\,\text{m}^2}}$.

1898. Vegyük a csonkagúla olyan tengelymetszetét, ami az alaplap egyik szimmetriaátlójára illeszkedik! Ez a síkmetszet egy olyan húrtrapéz, aminek magassága a testmagasság, szárai a csonkagúla oldalélei, alapjai az alapél, illetve a fedőél kétszeresei. Legyen $2a = 7{,}4\,\text{cm}$,

1898/I.

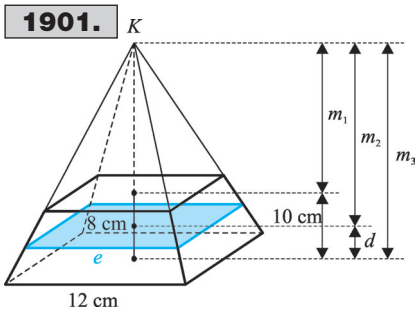


1898/II.



II

1901.



$2b = 4{,}8$ cm, $M = 7{,}4$ cm! Pitagorasz tétele az 1898/I. ábrán kiemelt háromszögre: $o^2 = 7{,}4^2 + \frac{(7{,}4 - 4{,}8)^2}{4} \Rightarrow$ $\Rightarrow o = 7{,}51$ cm. Számítsuk ki egy oldallap magasságát! Pitagorasz tétele az 1898/II. ábrán kiemelt háromszögre: $m^2 = 7{,}51^2 - \frac{(3{,}7 - 2{,}4)^2}{4} \Rightarrow m = 7{,}48$ cm.

$$A = 6 \cdot \left(\frac{3{,}7^2\sqrt{3}}{4} + \frac{2{,}4^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3{,}7 + 2{,}4}{2} \cdot 7{,}48 \right) \approx$$

$\approx \underline{\underline{187{,}42\ \text{cm}^2}}$.

$$V = \frac{7{,}4}{3} \cdot 6 \cdot \left(\frac{3{,}7^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3{,}7 \cdot 2{,}4 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{2{,}4^2\sqrt{3}}{4} \right) \approx \underline{\underline{181{,}55\ \text{cm}^3}}.$$

1899. $V = \frac{12}{3}\left(25 + \sqrt{25t} + t\right) = 916 \Rightarrow \left(\sqrt{t}\right)^2 + 5\sqrt{t} - 204 = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{t}\right)_1 < 0$, ez nem lehet. $\left(\sqrt{t}\right)_2 = 12 \Rightarrow t = \underline{\underline{144\ \text{m}^2}}$.

1900. Tekintsük az 1894/I. ábrát, legyen $a = 32$ cm, $b = 9$ cm! $A = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot m$, azaz $2873 = 32^2 + 9^2 + 82\,m \Rightarrow m \approx 21{,}56$ cm. Az 1894/II. ábra szerint Pitagorasz tétele a kiemelt háromszögre: $M^2 = m^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \Rightarrow M \approx 18{,}24$ cm;

$$V = \frac{1}{3} M \left(a^2 + \sqrt{a^2 b^2} + b^2\right) = \frac{1}{3} M \left(a^2 + ab + b^2\right) \Rightarrow V \approx 8469{,}44\ \text{cm}^3 \approx \underline{\underline{8{,}47\ \text{dm}^3}}.$$

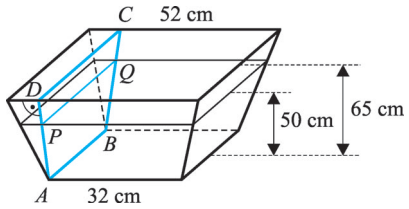
1901. K középpontú hasonlóság miatt $m_1 : 8 = m_2 : e = m_3 : 12$; $m_3 = m_1 + 10 \Rightarrow m_1 : 8 =$ $= (m_1 + 10) : 12 \Rightarrow m_1 = 20$ cm $\Rightarrow m_3 = 30$ cm. $V_1 = \frac{1}{3} m_1 t_1 = \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 8^2 \approx 426{,}7\ \text{cm}^3$ és $V_3 =$ $= \frac{1}{3} m_3 t_3 = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 12^2 = 1440\ \text{cm}^3 \Rightarrow V_2 = V_1 + (V_3 - V_1) : 2 = 933{,}35\ \text{cm}^3$. $V_2 : V_1 = m_2^3 : m_1^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow m_2 = \sqrt[3]{\frac{V_2}{V_1}} \cdot m_1 \approx 25{,}96$ cm $\Rightarrow d \approx \underline{\underline{4{,}04\ \text{cm}}}$. $e : 8 = m_2 : m_1 \Rightarrow e = 8 \cdot \frac{m_2}{m_1} \approx \underline{\underline{10{,}38\ \text{cm}}}$.

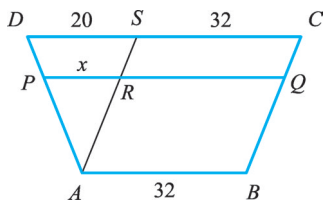
1902. **1. eset:** a medence tele van. $T = 196\ \text{m}^2$; $t = 49\ \text{m}^2$; $m = = 6$ m $\Rightarrow V = \underline{\underline{686\ \text{m}^3}}$.

2. eset: a medence félig van. $t = 49\ \text{m}^2$; $m = 3$ m. A felső lap éle ekkor az oldallap trapéz középvonala. $\Rightarrow$ A felső lap egy $(14 + 7) : 2 = 10{,}5$ m oldalú négyzet, ezért területe $T = 110{,}25\ \text{m}^2$. $\Rightarrow$ $\Rightarrow V = \underline{\underline{232{,}75\ \text{m}^3}}$.

1903/I.



1903/II.



1903. A 1903/I. és 1903/II. ábra jelöléseivel: $ARP\triangle \sim ASD\triangle$, mert szögeik egyenlők, ezért oldalaik aránya egyenlő magasságaik arányával: $\frac{x}{20}=\frac{50}{65}\Rightarrow x=\frac{200}{13}\Rightarrow PQ=\frac{616}{13}$. A ládában levő virágföld csonkagúla alakot vesz fel, alsó négyzetlapjának oldala 32 cm, a felsőé $\frac{616}{13}\approx 47{,}4$ cm.

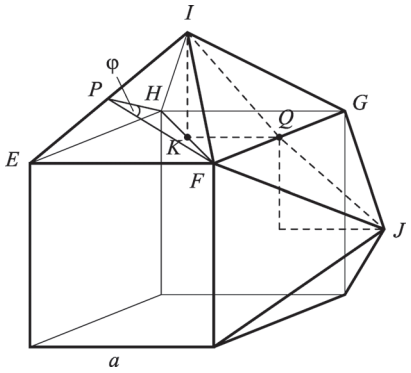
$V_{\text{csonkagúla}}=\frac{1}{3}m\left(T+\sqrt{Tt}+t\right)=\frac{1}{3}\cdot 50\cdot\left(47{,}4^2+\sqrt{47{,}4^2\cdot 32^2}+32^2\right)\approx 79\,792{,}7\ \text{cm}^3\approx 0{,}079\ \text{m}^3$.

A föld tömege: $0{,}079\cdot 1400\approx \underline{\underline{111{,}7\ \text{kg}}}$.

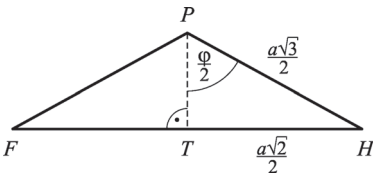
Poliéderek, szabályos testek

1904. Legyen az 1904. ábrák jelöléseivel a kocka éle a, az EI szakasz felezőpontja P! $FP=HP=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, mert egy-egy a oldalú szabályos háromszög súlyvonalai. $FH=a\sqrt{2}$, mert egy a oldalú négyzet átlója. A gúla két oldallapjának szöge: $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\Rightarrow\varphi\approx 109{,}47°$. A kocka

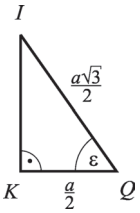
1904/I.



1904/II.

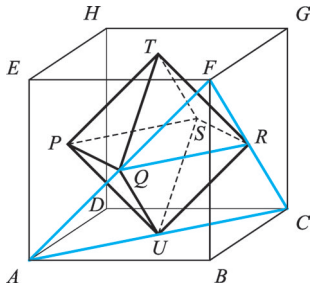


1904/III.



II

1905.



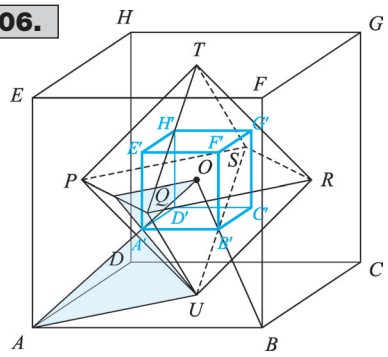
egy élére illeszkedő két szabályos háromszög lapszöge, azaz $IQJ\sphericalangle$ kiszámítása: $\cos\varepsilon = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varepsilon \approx 54{,}74° \Rightarrow IQJ\sphericalangle = \varepsilon + 90° + \varepsilon \approx 199{,}47° \neq \varphi$. A keletkezett test szomszédos lapjai különböző szögeket zárnak be. $\Rightarrow$ Nem szabályos a test.

1905. Legyen a kocka élhossza a. A kocka bármely két szomszédos lapközéppontjának távolsága egyenlő a kocka egy lapátlójának felével. Például az 1905. ábra jelöléseivel $QR = \dfrac{1}{2}AC$, mert QR középvonala az ACF háromszögnek. A keletkezett test minden éle $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ hosszúságú $\Rightarrow$ lapjai egybevágó szabályos háromszögek. A $PQRS$ egyenlő oldalú négyszög, tehát rombusz. PR, illetve QS átlója párhuzamos és egyenlő a kocka AB, illetve BC élével $\Rightarrow$ átlói egyenlő hosszúak $\Rightarrow$ $PQRS$ négyszög négyzet. Hasonlóan $QUST$ és $PURT$ négyszög is négyzet. A $PQRSTU$ test egy csúcsból induló négy éle egy-egy egybevágó négyzet alapú szabályos gúla négy oldaléle $\Rightarrow$ szögletei egybevágók. A kocka lapközéppontjai egy szabályos test (egy szabályos oktaéder) csúcsai.

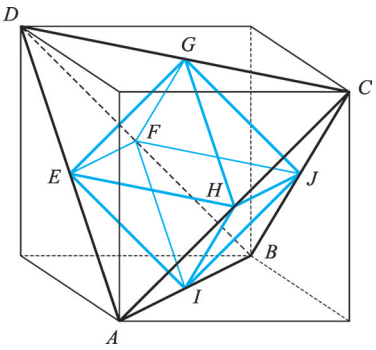
1906. A kocka középpontjára szimmetrikus mindhárom test. Az oktaéder lapközéppontjai az oldallap szabályos háromszögek súlypontjai. Vetítsük az O középpontból a PUQ lap A' középpontját a kocka felületére! A súlypont harmadoló tulajdonsága miatt az A' pont az A pontba kerül, a vetítés pedig egy O középpontú $\lambda' = 3$ arányú középpontos hasonlóság. Ezt bármelyik lapközépponttal megismételhetjük. Az oktaéder lapközéppontjai tehát egy olyan kocka csúcsai, amely az eredetinek O középpontú, $\lambda = \dfrac{1}{3}$ arányú hasonlósággal nyert képe.

1907. A szabályos tetraédert származtathatjuk egy kockából úgy, hogy a tetraéder élei a kocka lapátlói legyenek. A tetraéder élfelező pontjai egyben a kocka lapközéppontjai is. Az 1905. feladatban bizonyítottak szerint a szabályos tetraéder élfelező pontjai egy szabályos oktaéder csúcsai.

1906.

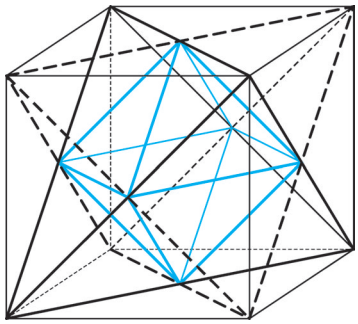


1907.



1908. A két tetraéder élei a felezőpontjukban metszik egymást. A metszéspontok a kocka lapközéppontjai, amelyek az 1905. feladatban bizonyítottak szerint egy szabályos oktaéder csúcsai.

1908.



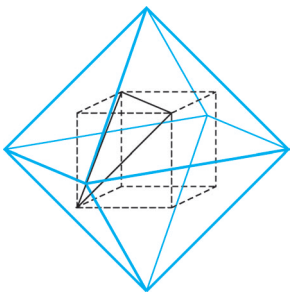
1909. Az 1905. feladatban láttuk, hogy a szabályos oktaéder elhelyezhető egy kockában úgy, hogy az oktaéder csúcsai a kocka lapközéppontjai. ⇒ Az oktaéder testátlói a kocka két szemközti lapjának középpontjait összekötő szakaszok. ⇒ A testátlók párhuzamosak a kocka egy csúcsból induló éleivel, amelyek páronként merőlegesek egymásra. ⇒ Az oktaéder testátlói merőlegesek egymásra.

1910. Az 1906. feladatban beláttuk, hogy a szabályos oktaéder lapközéppontjai kockát határoznak meg. Az oktaéder lapjait a kocka három-három egymáshoz csatlakozó lapátlója síkjával párhuzamos síkok határozzák meg. Ha egy kocka minden csúcsán át a szomszédos három csúcs által kifeszített síkkal párhuzamosan felveszünk egy síkot, éppen a fent említett szabályos oktaéderhez jutunk.

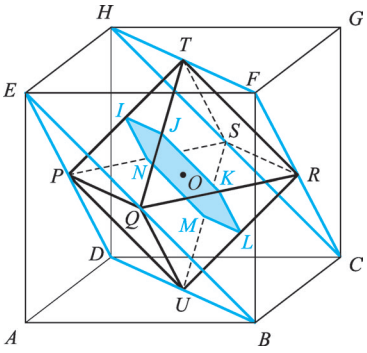
1911. Legyenek az *I, J, K, L, M, N* pontok az oktaéder élfelező pontjai. Az oktaéder *PUQ* lapja középvonal-háromszög az *EBD* háromszögben, *SRT* lapja pedig középvonal-háromszög a *CFH* háromszögben. $[EBD] \parallel [CFH] \Rightarrow [PUQ] \parallel [SRT]$. Mivel *IJ* középvonala *PQT* háromszögnek, az *IJ* szakasz benne van a $[PUQ]$ és az $[SRT]$ középpárhuzamos síkjában és $IJ = \frac{1}{2} PQ$. Hasonlóan belátható, hogy *JK, KL, LM, MN, NI* szakaszok is ebben a síkban vannak, és hosszuk az oktaéder élhosszának a fele. ⇒ Az *IJKLMN* egy síkbeli egyenlő oldalú hatszög. $IJ \parallel PQ \parallel DB$ és $JK \parallel TR \parallel CH \parallel BE \Rightarrow DBE\sphericalangle$ és $IJK\sphericalangle$ párhuzamos szárú szögek, valamint *JK* és *BE* száruk ellentétes irányú ⇒ $IJK\sphericalangle = 180° - 60° = 120°$. Hasonlóan igazolható, hogy az *IJKLMN* sokszög minden szöge egyenlő. Az aláhúzottakból következik, hogy az oktaéder *IJKLMN* síkmetszete egy szabályos hatszög.

1912. Egy adott *a* élű kockából származtassuk a *BGDE* szabályos tetraédert és a *PQRSTU* szabályos oktaédert az 1905. és az 1907. feladatban ismertetett módon. A tetraéder élei lapátlók, hosszuk $a\sqrt{2}$. Az oktaéder csúcsai lapközéppontok, egyben a tetraéder élfelező pontjai,

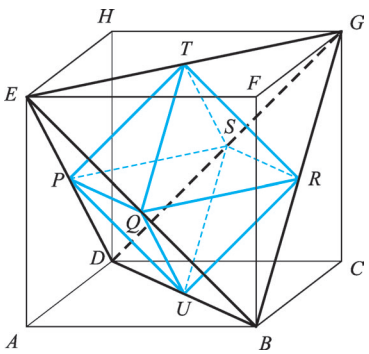
1910.



1911.

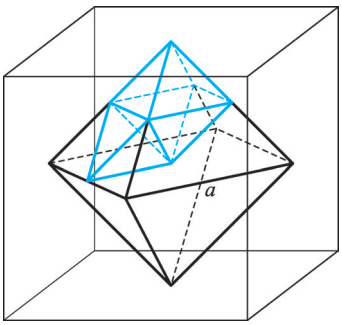


1912.

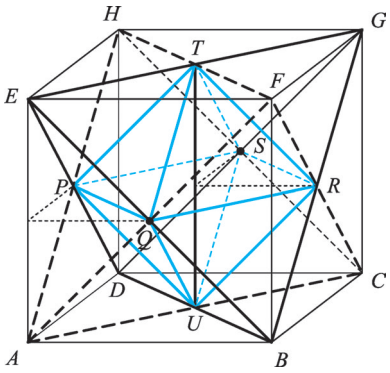


II

1913.



1914.



ezért az oktaéder élhossza $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. A tetraéderből az élfelező pontok négy egybevágó $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ élhosszúságú szabályos tetraédert vágnak le, a *PQTE*, *RSTG*, *PUSD*, *URQB* testeket. E négy tetraéderből és az oktaéderből a kívánt módon összeállítható a kétszeres élű *DBGE* szabályos tetraéder.

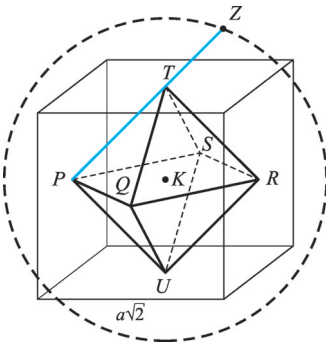
1913. Az oktaéder egy csúcsa, azzal szomszédos négy élfelező pontja és középpontja fele akkora élű, az eredetihez hasonló szabályos oktaédert határoz meg. Az oktaéder mind a hat csúcsánál levághatunk ilyen egybevágó, $\frac{a}{2}$ élű oktaédert. Így az eredeti oktaédernek mind a nyolc lapján megmarad a középvonal háromszög, s ahhoz kapcsolódva egy-egy $\frac{a}{2}$ élű szabályos tetraéderrel kitölthető az a élű oktaéder. Tehát hat darab $\frac{a}{2}$ élű szabályos oktaéderből és nyolc darab $\frac{a}{2}$ élű szabályos tetraéderből összeállítható egy a élű szabályos oktaéder.

1914. A két tetraéder közös része egy szabályos oktaéder, a *PQRSTU* test. Ennek 12 éléhez illeszkednek a kimaradt részek, az *EAQP* tetraéderrel egybevágó testek. Az *EAQP* test $\overrightarrow{AU}$ vektorral való eltoltja a *TURS* test $\Rightarrow$ *EAQP* $\cong$ *TURS*. *TURS* éppen negyede a *PQRSTU* szabályos oktaédernek. $\Rightarrow$ A 12 kimaradó részből 3 darab szabályos oktaéder állítható össze, amelyek mindegyike egybevágó a két tetraéder közös részével, a *PQRSTU* oktaéderrel.

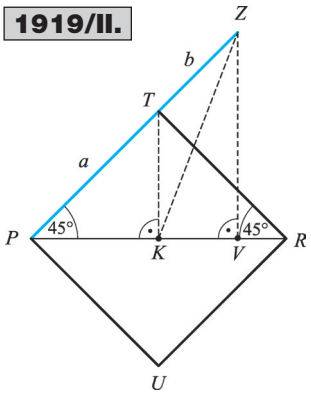
1915. Az 1914. feladatban láttuk, hogy egy a élű kockába beírt két tetraéder nyolc darab $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ élű szabályos tetraédert, egy $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ élű szabályos oktaédert és tizenkét darab $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ élű „szabályos oktaéder-negyedet” határoz meg. Rakjuk ki kockákkal a teret, ez lehetséges. Bontsunk fel minden kockát a fentiekben megadott módon! Így a közös élben találkozó négy kockában egymáshoz csatlakoznak a „szabályos oktaéder-negyedek”. $\Rightarrow$ Kitölthető a tér egyenlő élű szabályos tetraéderekkel és oktaéderekkel.

1916. Az 1914. feladat megoldásában láttuk, hogy egy kocka szétdarabolható 1 szabályos oktaéderre, 8 szabályos tetraéderre és 12 „szabályos oktaéder-negyed”-re. Két kockában 2 szabályos oktaéder, 16 szabályos tetraéder és 24 „szabályos oktaéder-negyed” van. Ennyi „oktaéder-

1919/I.



1919/II.



negyed"-ből 6 darab, az előzőkkel egyenlő élű szabályos oktaéder rakható össze. Így összesen két kockából 8 oktaéderünk és 16 tetraéderünk van. Az 1913., illetve az 1912. feladat szerint 6 oktaéderből és 8 tetraéderből 1 darab kétszeres élű szabályos oktaéder, illetve 2 oktaéderből és 8 tetraéderből 2 darab kétszeres élű szabályos tetraéder lesz. Tehát a kockát átdarabolhatjuk két szabályos tetraéderbe és egy szabályos oktaéderbe.

1917. A szabályos oktaéder beírható egy kockába úgy, hogy az oktaéder csúcsai a kocka lapközéppontjai. A kocka beírt gömbje a lapközéppontokban érinti a kocka lapjait. Ez a gömb egyben az oktaéder köré írható gömb, amelynek középpontja az oktaéder és a kocka közös középpontja, sugara pedig az oktaéder testátlójának fele.

1918. A szabályos oktaéder lapközéppontjai olyan kockát határoznak meg, amelynek testátlói merőlegesek az oktaéder szemközti lappárjaira. Tehát a kocka körülírt gömbje egyúttal az oktaéder beírt gömbje, melynek átmérője a kocka testátlója.

1919. Legyen a szabályos oktaéder éle a, a meghosszabbítás b. Vizsgáljuk a $PURT$ síkmetszetet! A kocka éle $PR = a\sqrt{2}$. A TZ szakasz PR egyenesre eső merőleges vetülete $KV = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

A PT szakasz PR egyenesre eső merőleges vetülete $PK = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow VZ = PV = PK + KV =$

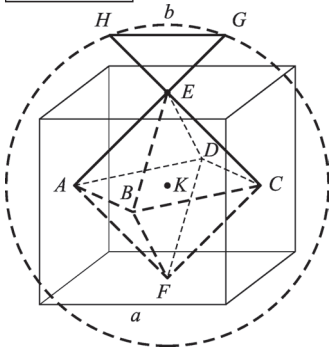
$= \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$. A gömb sugara $KZ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, mert a kocka testátlójának fele. A KVZ derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel szerint: $KV^2 + VZ^2 = KZ^2$, azaz

$$\left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{b^2}{2} + \frac{a^2+2ab+b^2}{2} =$$

$$= \frac{3a^2}{2} \Rightarrow 2b^2 + 2ab - 2a^2 = 0 \Rightarrow b^2 = a^2 - ab = a(a-b) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$. Tehát a TZ meghosszabbítás az oktaéder élének hosszabbik aranymetszete.

1920/I.

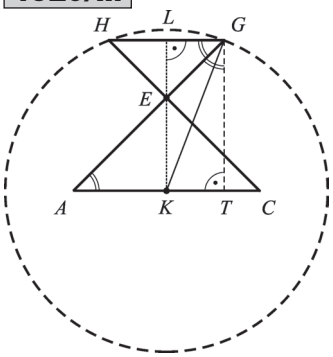


1920. Legyen az oktaéder AE és CE élének a körülírt gömbbel való metszéspontja G és H.

Az AC és a GH szakasz szimmetrikus az EF egyenesre $\Rightarrow$ $\Rightarrow GH \parallel AC$. $CAE\sphericalangle = 45° \Rightarrow EGH\sphericalangle = 45° \Rightarrow GEH\triangle$ egyenlő

II

1920/II.



szárú derékszögű háromszög. Tekintsük az oktaéder A, F, C, E csúcsait tartalmazó síkot, ami a kocka köré írt gömbből a K középpontú KG sugarú főkört metszi ki!

$KG = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AK = KC = \frac{a}{2}$; $LG = KT = \frac{b}{2}$; $GT = AT = \frac{a+b}{2}$, hiszen $\Rightarrow ATG\triangle$ is egyenlő szárú derékszögű háromszög. KTG derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel szerint: $GK^2 = KT^2 + GT^2$, azaz $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 = a^2 - ab \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$, tehát a GH távolság a kocka élének hosszabbik aranymetszete. Mivel a $LEG\triangle$ egyenlő szárú derékszögű, $LE = \frac{b}{2}$, ami a GH szakasz távolsága az alatta levő kockalaptól. Megjegyzés: $b^2 + ab - a^2 = 0$ alapján $b = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)a}{2}$ kiszámítható.

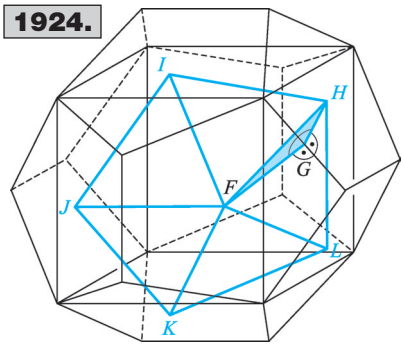
1921. Az 1920. feladatban láttuk, hogy az a élű kockából a megadott származtatással kapott Z, Y pontokra $ZY \parallel DE$; $GC = \frac{1}{2}ZY = \frac{b}{2}$, ahol $b^2 + ab - a^2 = 0$. *a)* $DE \parallel MN \Rightarrow ZY \parallel MN \Rightarrow$ $\Rightarrow MZYN$ síkbeli négyszög és trapéz. Be kell látnunk, hogy az X pont is az $MZYN$ trapéz síkjában van. Ehhez elegendő azt megmutatni, hogy X, F és G pontok egy egyenesen vannak. Vizsgáljuk az A, C, B pontokat tartalmazó síkot! $XX' = \frac{b}{2}$; $FC = \frac{a}{2}$; $X'F = \frac{a-b}{2}$; $CG = \frac{b}{2}$; $\frac{XX'}{FC} = \frac{b}{a}$; $\frac{X'F}{CG} = \frac{a-b}{b}$; $\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b} \Leftrightarrow b^2 + ab - a^2 = 0 \Rightarrow \frac{XX'}{FC} = \frac{X'F}{CG} \Rightarrow XX'F \triangle \sim FCG\triangle$, mert két-két oldaluk aránya és az azok által közrezárt szögük egyenlő $\Rightarrow$ megfelelő szögeik egyenlők. Például $X'XF\sphericalangle = CFG\sphericalangle \Rightarrow X, F, G$ egy egyenesen van.

b) A származtatásból következik, hogy az M, Z, Y, N, X pontok a kocka köré írható gömb pontjai. Mivel egy síkban vannak, és a gömb síkmetszetei körök $\Rightarrow MZYNX$ húrsokszög.

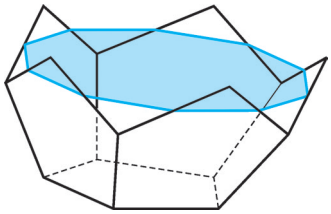
c) A származtatás szerint $MX = MZ = NX = NY$. Pitagorasz-tétel az $X'XF$ derékszögű háromszögben: $XF^2 = XX'^2 + X'F^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{4}$. Pitagorasz-tétel az MFX derékszögű háromszögben: $MX^2 = MF^2 + XF^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{4} = \frac{b^2 - ab + a^2}{2}$. Az *a)* pontban kapott $b^2 + ab - a^2 = 0$ összefüggést felhasználva $MX^2 = b^2$ adódik. $\Rightarrow MX = b \Rightarrow$ Az $MZYNX$ ötszög oldalai egyenlők. Az előző pontban beláttuk, hogy ez az ötszög körbe írható. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Szabályos ötszög csúcsai a vizsgált pontok.

1922. Az 1921. feladat megoldásában láttuk, hogy az a élű kockából a megadott módon származtatott 12 pont, valamint a kocka 8 csúcsa rajta van a kocka köré írt gömbön, és a megfelelő

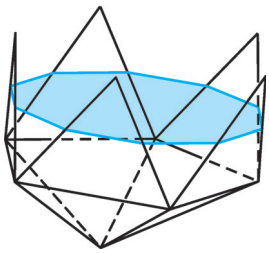
1924.



1925/I.



1925/II.



pontok 12 darab egybevágó szabályos ötszöget alkotnak. ⇒ A test 12 darab olyan egybevágó szabályos ötszög alapú gúlára bontható, amelyeknek oldalélei egyenlők, s ezek az oldalélek a kocka köré írt gömb sugarai. ⇒ A test 12 szöglete egybevágó. A test szabályos tizenkétlapú test, vagyis dodekaéder.

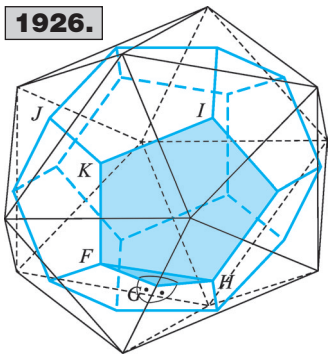
1923. A dodekaédert az 1922. feladatban leírt módon származtathatjuk. ⇒ A dodekaéder 8 megfelelő csúcsa éppen egy beírt kocka csúcsait adja meg. A kocka éle egyenlő a dodekaéder egy lapátlójával, és a beírt kocka egy éle párhuzamos a dodekaéder két szemközti élével. Egy szabályos ötszöglap minden átlójához illeszthető beírt kocka. ⇒ 5 különböző helyzetű, egybevágó kocka írható a dodekaéderbe.

1924. A dodekaéder 12 lapközéppontja egy 12 csúcsú testet határoz meg. Mivel a dodekaéder szabályos test, lapszögei, megfelelő hosszúságadatai egyenlők. ⇒ A keletkezett test minden élének hossza egyenlő az FGH egyenlő szárú háromszög alapjának hosszával, ahol F és H két szomszédos lapközéppont, G pedig e lapok közös élének felezéspontja. ⇒ A test lapjai szabályos háromszögek. A dodekaéder bármely lapközéppontja a hozzá csatlakozó szomszédos lapok középpontjaival szabályos ötoldalú gúlát határoz meg. A kiszemelt lapközéppontnál a gúla élszögei egyenlők. Tehát a szabályos dodekaéder lapközéppontjai 12 csúcsú szabályos testet, azaz szabályos ikozaédert határoznak meg.

1925. *a)* A szabályos dodekaéder két szemközti párhuzamos lapjának középpontját összekötő szakasz felező merőleges síkja tízszögben metszi a dodekaédert. A tízszög csúcsai élfelező pontok, a tízszög oldalának hossza feleakkora, mint a dodekaéder lapátlója. ⇒ A tízszög egyenlő oldalú sokszög. A tízszög csúcsai egyenlő távol vannak a dodekaéder körülírt gömbjének középpontjától, hiszen ez a távolság egyenlő a dodekaéder egy éle és a gömb középpontja által meghatározott egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magasságával. ⇒ A tízszög csúcsai egy körön vannak. A körbe írható egyenlő oldalú tízszög szabályos.

b) A szabályos ikozaéder két átellenes csúcsát összekötő szakasz felező merőleges síkja tízszögben metszi az ikozaédert. A tízszög csúcsai élfelező pontok, és a tízszög oldala feleakkora, mint az ikozaéder éle. ⇒ A tízszög egyenlő oldalú sokszög. A tízszög csúcsai egyenlő távol vannak az ikozaéder körülírt gömbjének középpontjától, hiszen ez a távolság egyenlő az ikozaéder egy éle és a gömb középpontja által meghatározott egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magasságával. ⇒ A tízszög csúcsai egy körön vannak. A körbe írható egyenlő oldalú tízszög szabályos.

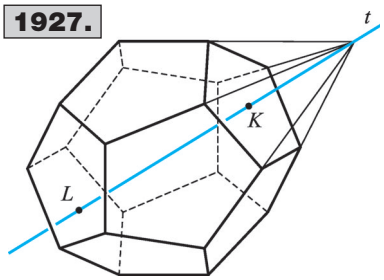
1926.



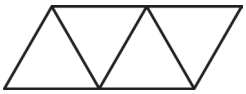
1926. A szabályos ikozaéder 20 lapközéppontja 20 csúcsú testet határoz meg. Mivel az ikozaéder szabályos test, lapszögei és megfelelő hosszúságadatai egyenlők. ⇒ A keletkezett

II

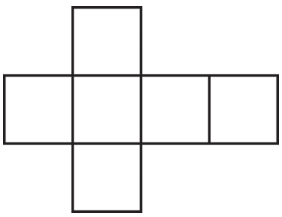
1927.



1929/I.



1929/II.



test minden élének hossza egyenlő az FGH egyenlő szárú háromszög alapjának hosszával, ahol F és H két szomszédos lap középpontja, G pedig e lapok közös élének felezéspontja. Az ikozaéder bármely lapközéppontja a hozzá csatlakozó szomszédos lapok középpontjaival szabályos háromoldalú gúlát határoz meg. A kiszemelt lapközéppontnál a gúla élszögei egyenlők. Tehát a szabályos ikozaéder lapközéppontjai 20 csúcsú szabályos testet, azaz szabályos dodekaédert határoznak meg.

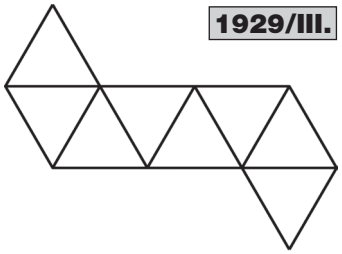
1927. Mivel a szabályos dodekaéder forgásszimmetrikus a két átellenes lapközéppontján átmenő egyenes körüli 72°-os elforgatásra, a megadott élek ezen az egyenesen metszik egymást.

1928. Tekintsük a szabályos dodekaéder egy lapjának csúcsaiba érkező azon éleket, amik nem illeszkednek e lap síkjára. Az 1927. feladatban láttuk, hogy ez az öt egyenes egy ponton megy át. Ez a metszéspont rajta van az adott lap középpontját a dodekaéder középpontjával összekötő egyenesen. A dodekaéder szabályos test, ezért minden laphoz tartozik egy ilyen metszéspont. Ezek a metszéspontok egyenlő távol vannak a dodekaéder középpontjától, ezért a dodekaéder lapközéppontjainak középpontos hasonlósággal nyerhető képei (a hasonlóság középpontja a szabályos dodekaéder köré írt gömbjének középpontja). Az 1924. feladatban láttuk, hogy a szabályos dodekaéder lapközéppontjai szabályos ikozaéder csúcsai. $\Rightarrow$ A feladat feltételeinek megfelelő öt-öt él metszéspontjai is egy szabályos ikozaéder csúcsai.

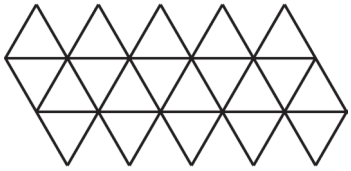
1929. A szabályos testek egy-egy hálóját ábrázoltuk.
A szabályos tetraéder hálója: 1929/I. ábra.
A kocka hálója: 1929/II. ábra.
A szabályos oktaéder hálója: 1929/III. ábra.
A szabályos ikozaéder hálója: 1929/IV. ábra.
A szabályos dodekaéder hálója: 1929/V. ábra.

1930. Tekintsük az 1905. ábrát, legyen $AB = x$, $QR = a$! A szabályos oktaédert beírhatjuk egy kockába úgy, hogy az oktaéder csúcsai a kocka lapközéppontjai. Az oktaéder éle feleakkora, mint a kocka lapátlója. Az ACF háromszögben a QR szakasz középvonal $\Rightarrow QR = \frac{1}{2} AC$ és $a = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} x\sqrt{2}$. Az oktaéder két szemközti élének távolsága a felezéspontokat összekötő

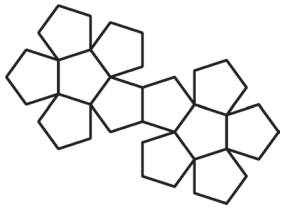
1929/III.



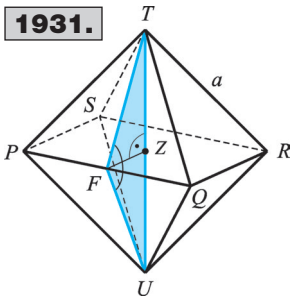
1929/IV.



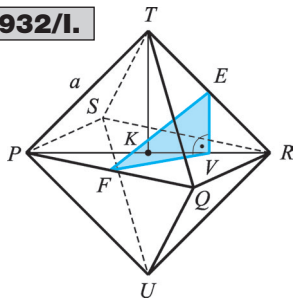
1929/V.



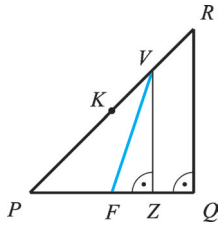
1931.



1932/I.



1932/II.



szakasz hossza, ami egyenlő az oktaéder élhosszával. $\Rightarrow$ $\underline{\underline{d = a}}$. Az oktaéder testátlója $QS = x =$ $= \dfrac{2a}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{a\sqrt{2}}}$.

1931. $FT = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, mert a TUF szabályos háromszög magassága. $TU = a\sqrt{2}$, mert egy a oldalú négyzet átlója. $TZ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, mert Z a TU szakasz felezéspontja. $\sin\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{TZ}{TF} =$ $= \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \Rightarrow \varphi \approx \underline{\underline{109{,}47°}}$ két szomszédos lap szöge.

1932. EV középvonal az RTK háromszögben $\Rightarrow EV = \dfrac{1}{2}TK =$ $= \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. $VZ \parallel RQ$ és V negyedelőpont $\Rightarrow Z$ negyedelőpont a PQ szakaszon $\Rightarrow ZQ = \dfrac{1}{4}a$, $VZ = \dfrac{3}{4}a$ és $FZ = \dfrac{1}{2}a - \dfrac{1}{4}a =$ $= \dfrac{1}{4}a$. Pitagorasz-tétel az FZV derékszögű háromszögben: $FV^2 = FZ^2 + VZ^2$. $FV^2 = \dfrac{a^2}{16} + \dfrac{9a^2}{16} \Rightarrow FV^2 = \dfrac{5a^2}{8}$.

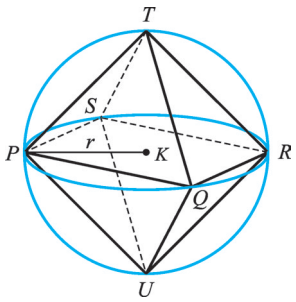
Pitagorasz-tétel az FVE derékszögű háromszögben: $FE^2 = FV^2 + EV^2$. $FE^2 = \dfrac{5a^2}{8} + \dfrac{2a^2}{16} \Rightarrow FE = \underline{\underline{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}}$.

1933. Az a oldalú szabályos oktaéder köré írható gömb átmérője az a oldalú négyzet átlója.

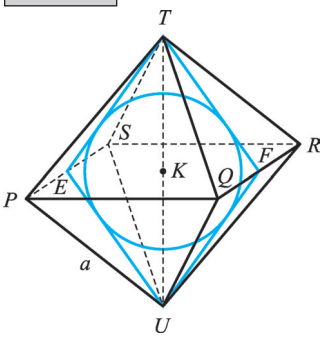
$2r = 2PK = PR \Rightarrow$ Az oktaéder köré írt gömb sugara $r = \underline{\underline{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}}$.

1934. Tekintsük az E, F felezéspontokon átmenő és T, U csúcsokat tartalmazó síkmetszetet!

1933.

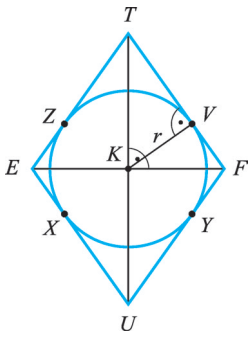


1934/I.

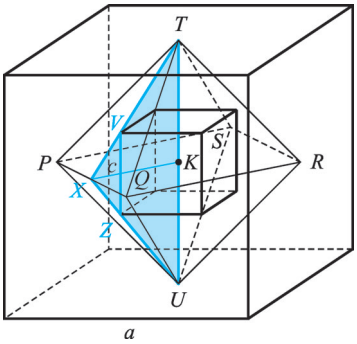


II

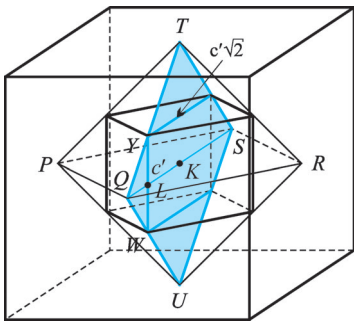
1934/II.



1936/I.



1936/II.



Az $EUFT$ négyszög rombusz, oldalainak hossza $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Az oktaédert a beírt gömb a lapok súlypontjában érinti $\Rightarrow X$, Y, V, Z harmadolja a rombusz oldalait. $KT=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $KF=\frac{a}{2}$; $TF=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow VF=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Pitagorasz tétele a KVF derékszögű háromszögre:

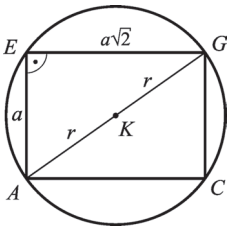
$$r^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{a^2}{6}\Rightarrow r=\underline{\underline{\frac{a\sqrt{6}}{6}}}.$$

1935. A szabályos oktaéder két párhuzamos lapja tartalmaz két kitérő élt, melyek normáltranszverzálisának hossza egyenlő a két lap síkjának távolságával. Ez egyenlő az oktaéder beírt gömbjének átmérőjével. Az 1934. feladatban láttuk, hogy az a élű szabályos oktaéder beírt gömbjének sugara $\frac{a\sqrt{6}}{6}\Rightarrow$ az átmérő hossza, s egyben két kitérő él távolsága $2r=\underline{\underline{\frac{a\sqrt{6}}{3}}}$.

1936. Az a élű kockába írt oktaéder éle: $b=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **1. eset:** a beírt kocka csúcsai az oktaéder lapközéppontjai (V, Z), éleinek hossza c. Ekkor V, illetve Z harmadolja TX, illetve UX súlyvonalat $\Rightarrow XV:XT=c:a=1:3$. A két kocka éleinek aránya $\underline{\underline{1:3}}$.

2. eset: a beírt kocka csúcsai az oktaéder éleire illeszkednek, éleinek hossza c'. Ekkor az a élű kockába írt oktaéder testátlója: $QS=a$. A c' élű beírt kocka átlós síkmetszetéből leolvasható, hogy $QS=c'+c'\sqrt{2}.\Rightarrow c'=\frac{a}{1+\sqrt{2}}$. A két kocka éleinek aránya $1:\left(1+\sqrt{2}\right)$.

1937/I.



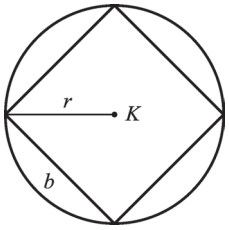
1937. Az r sugarú gömbbe a élű kockát írunk. Tekintsük a gömbnek egy négy kockacsúcsot tartalmazó főkörmetszetét! (1937/I. ábra)
Pitagorasz tétele az ACG derékszögű háromszögre:

$$a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2=(2r)^2\Rightarrow 3a^2=4r^2\Rightarrow a=\frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

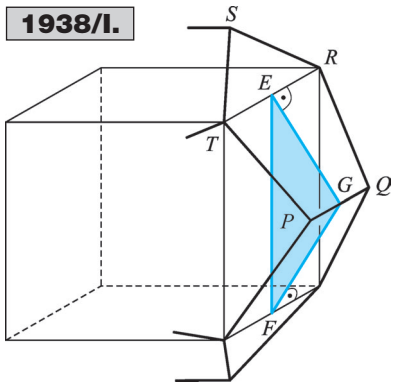
Az a élű kockába írt gömb sugara $\underline{\underline{\varrho=\frac{a}{2}=\frac{r}{\sqrt{3}}}}$.

II

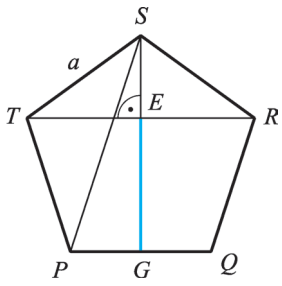
1937/II.



1938/I.



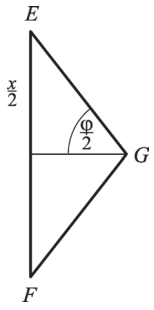
1938/II.



Az r sugarú gömbbe b élű oktaédert írunk. Tekintsük a gömbnek egy négy oktaédercsúcsot tartalmazó főkörmetszetét! (1937/II. ábra)

$b = r\sqrt{2}$. A b élű oktaéderbe írt gömb sugara az 1934. feladat szerint: $\rho' = \dfrac{b\sqrt{6}}{6} = \dfrac{r\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} = \underline{\underline{\dfrac{r}{\sqrt{3}}}}$. $\Rightarrow \rho = \rho'$, a két beírt gömb sugara egyenlő.

1938/III.



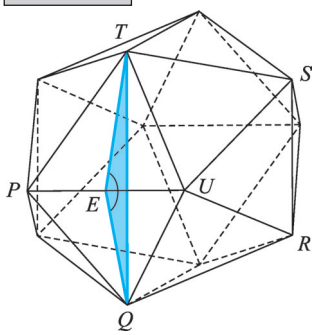
1938. Legyen a szabályos dodekaéder éle a, a beírt kocka éle x. Az 1920. feladat megoldásában láttuk, hogy $a = \dfrac{\left(\sqrt{5}-1\right)x}{2} \Rightarrow x = \dfrac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$. Pitagorasz-tétel a TES és a PGS derékszögű háromszögekre: $SE = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$ és $SG = \sqrt{x^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$. $EG = SG - SE =$

$$= \sqrt{x^2 - \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2 x^2}{16}} - \sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2 x^2}{4} - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}\right).$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)} \Rightarrow \varphi \approx \underline{\underline{116{,}58^\circ}}$$

a szabályos dodekaéder két szomszédos lapjának szöge.

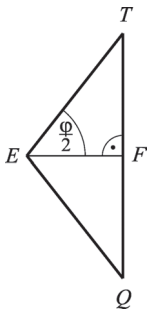
1939/I.



1939. A szabályos ikozaéder egy csúcsba futó öt éle egy szabályos ötoldalú gúlát határoz meg. Két szomszédos lap szögének kiszámításakor ezt a gúlát vizsgáljuk. (1939/I. ábra) Legyen az ikozaéder éle a! $TE = EQ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, mert egy-egy a oldalú szabályos háromszög magasságai. Az 1920. feladat megoldásában pedig láttuk, hogy az a oldalú $PQRST$ szabályos ötszög átlója $QT = \dfrac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$. A $TQE\triangle$-ben. (1939/II. ábra)

II

1939/II.



$TF = \frac{1}{2}QT = \frac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$ és az EFT derékszögű háromszögben $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi \approx \underline{\underline{138{,}19°}}$ a szabályos ikozaéder bármely két szomszédos lapjának szöge.

1940.

A szabályos test	éleinek száma	egy élének hossza, ha az élek összege $12a$
tetraéder	6	$2a$
kocka	12	a
oktaéder	12	a
ikozaéder	30	$\frac{2a}{5}$
dodekaéder	30	$\frac{2a}{5}$

1941. Tekintsük az 1941. ábrát. Adott a $PQRS$ négyzet átlója: $PR = d \Rightarrow PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}d$, valamint $PR = TU \Rightarrow TK = \frac{1}{2}d$. $V = 2 \cdot V_{PQRST} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot t_{PQRS} \cdot TK = \frac{2}{3} \cdot PQ^2 \cdot TK = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot \frac{1}{2}d = \underline{\underline{\frac{1}{6}d^3}}$.

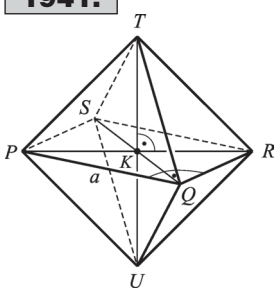
1942. **1. eset:** Kocka; felszíne $6a^2 \Rightarrow$ az éle: $\underline{\underline{a}}$.

2. eset: Tetraéder; éle b; felszíne $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = 6a^2 \Rightarrow b = \underline{\underline{\sqrt[4]{12} \cdot a}}$.

3. eset: Oktaéder; éle c; felszíne $8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = 6a^2 \Rightarrow c = \underline{\underline{\sqrt[4]{3} \cdot a}}$.

4. eset: Dodekaéder; éle d; felszíne $12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot d \cdot \frac{d}{2} \cdot \operatorname{tg} 54° = 6a^2 \Rightarrow d = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{5 \cdot \operatorname{tg} 54°}} \cdot a}}$.

1941.



5. eset: Ikozaéder; éle e; felszíne $20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}e^2 = 6a^2 \Rightarrow e = \underline{\underline{\sqrt[4]{\frac{12}{25}}\,a}}$.

1943. A közös felszín F.

Tetraéder éle: a; felszíne $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = F \Rightarrow a = \sqrt[4]{\frac{F^2}{3}}$; térfogata $V_t = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{36}F \cdot \sqrt[4]{F^2 \cdot 3}$.

II

Oktaéder éle: b; felszíne $8\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}b^2=F\Rightarrow a=\sqrt[4]{\frac{F^2}{12}}$; térfogata $V_o=\frac{\sqrt{2}}{3}b^3=\frac{\sqrt{2}}{36}F\cdot\sqrt[4]{F^2\cdot 12}$.

Kocka éle: c; felszíne $6c^2=F\Rightarrow c=\sqrt{\frac{F}{6}}$; térfogata $V_k=c^3=\frac{F}{6}\sqrt{\frac{F}{6}}$.

$$V_t:V_o:V_k=\left(\frac{\sqrt{2}}{36}F\cdot\sqrt[4]{F^2\cdot 3}\right):\left(\frac{\sqrt{2}}{36}F\cdot\sqrt[4]{F^2\cdot 12}\right):\left(\frac{F}{6}\cdot\sqrt{\frac{F}{6}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{36}\cdot\sqrt[4]{F^2\cdot 3}\right):\left(\frac{\sqrt{2}}{36}\cdot\sqrt[4]{F^2\cdot 12}\right):\left(\frac{6}{36}\cdot\sqrt[4]{\frac{F^2}{36}}\right)=\sqrt[4]{12}:\sqrt[4]{48}:\sqrt[4]{36}=1:\sqrt[4]{4}:\sqrt[4]{3}=$$

$$=\underline{\underline{1:\sqrt{2}:\sqrt[4]{3}}}.$$

1944. A közös térfogat V.

Tetraéder éle: a; térfogata $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=V\Rightarrow a=\sqrt[6]{72V^2}$; felszíne $F_t=\sqrt{3}\cdot a^2=\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{72V^2}$.

Oktaéder éle: b; térfogata $\frac{\sqrt{2}}{3}b^3=V\Rightarrow b=\sqrt[6]{\frac{9V^2}{2}}$; felszíne $F_o=2\sqrt{3}\cdot b^2=2\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{9V^2}{2}}$.

Kocka éle: c; térfogata $c^3=V\Rightarrow c=\sqrt[3]{V}$; felszíne $F_k=6c^2=6\sqrt[3]{V^2}$.

$$F_t:F_o:F_k=\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{72V^2}\right):\left(2\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{9V^2}{2}}\right):\left(6\cdot\sqrt[3]{V^2}\right)=\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{72}\right):\left(2\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right):6=$$

$$=\sqrt[6]{27\cdot 72^2}:\sqrt[6]{64\cdot 27\cdot\frac{81}{4}}:6=\left(6\cdot\sqrt[6]{3}\right):\left(6\cdot\sqrt[6]{\frac{3}{4}}\right):6=\left(\sqrt[6]{3}\right):\left(\sqrt[6]{\frac{3}{4}}\right):1=\underline{\underline{1:\sqrt[6]{\frac{1}{4}}:\sqrt[6]{\frac{1}{3}}}}.$$

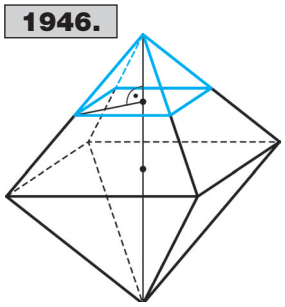
1945. Tetraéder éle: a; felszíne $\sqrt{3}\,a^2$; térfogata $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. Oktaéder éle: a; felszíne $2\sqrt{3}\,a^2$; térfogata $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. Kocka éle: a; felszíne $6a^2$; térfogata a^3.

a) $F_t:F_o:F_k=\left(\sqrt{3}\,a^2\right):\left(2\sqrt{3}\,a^2\right):\left(6a^2\right)=\sqrt{3}:2\sqrt{3}:6=\underline{\underline{1:2:2\sqrt{3}}}$.

b) $V_t:V_o:V_k=\left(\frac{\sqrt{2}}{12}a^3\right):\left(\frac{\sqrt{2}}{3}a^3\right):a^3=\frac{\sqrt{2}}{12}:\frac{\sqrt{2}}{3}:1=\sqrt{2}:4\sqrt{2}:12=\underline{\underline{1:4:6\sqrt{2}}}$.

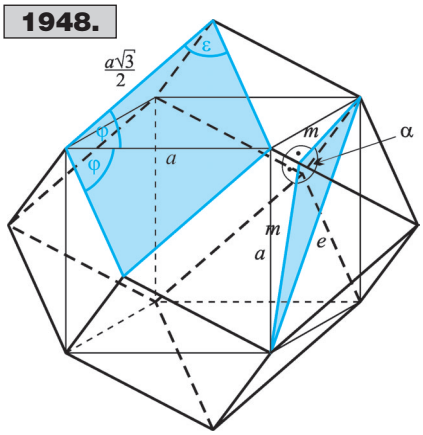
1946. Minden levágott „csúcs” hasonló az oktaédert alkotó két szabályos gúla egyikéhez. A hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$, a térfogatok aránya $\frac{1}{8}$. Az oktaéder hat csúcsánál az eredeti térfogat felének $\frac{6}{8}$-át, vagyis az eredeti térfogat $\frac{3}{8}$-át vágjuk le összesen. A megmaradó rész térfogata az eredeti térfogat $\frac{5}{8}$-a: $V=\frac{5}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}a^3=\underline{\underline{\frac{5\sqrt{2}}{24}a^3}}$.

1946.



II

1948.



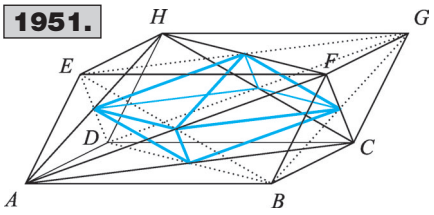
1947. a élű tetraéder felszíne $\sqrt{3}\,a^2$; a élű oktaéder felszíne $2\sqrt{3}\,a^2$; a élű ikozaéder felszíne $5\sqrt{3}\,a^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow F_t : F_o : F_i = \left(\sqrt{3}\,a^2\right) : \left(2\sqrt{3}\,a^2\right) : \left(5\sqrt{3}\,a^2\right) =$
$= \underline{\underline{1 : 2 : 5}}$.

1948. A kocka egy-egy lapjára egy-egy négyoldalú gúlát építettünk, aminek magassága a kocka élének fele. $\Rightarrow$ A gúla oldallapja 45°-ot zár be az alaplapjával. $\Rightarrow$ Két szomszédos gúla egymáshoz csatlakozó lapjai egy síkban vannak. $\Rightarrow$ A kocka élei nem élei az új testnek. *a)* Csúcsok: $6 + 8 = \underline{\underline{14}}$. Minden kockaélhez csatlakozik egy lap. $\Rightarrow \underline{\underline{12}}$ lapja van. 12 db négyszöglap csatlakozik egymáshoz. $\Rightarrow \underline{\underline{24}}$ éle van.
b) A határoló lapok négyszögek, amelyeknek minden oldala a kocka fél testátlójával egyenlő. $\Rightarrow$ Rombuszok határolják.
c) Nem szabályos test, mert a határoló lapok nem szabályos síkidomok.
d) Az él a kocka testátlójának fele: $\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}a}}$.
e) $\cos\varphi = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi \approx 54{,}7° \Rightarrow 2\varphi \approx 109{,}4° \Rightarrow \varepsilon = 180° - 2\varphi \approx 70{,}6°$. Két szomszédos él hajlásszöge $\underline{\underline{70{,}6°}}$, illetve $\underline{\underline{109{,}4°}}$.
f) $m = a \cdot \sin\varphi = a \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $e = a\sqrt{2}$. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\frac{e}{2}}{m} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 60° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 120°}}$.
g) $F = 12 \cdot t_{\text{rombusz}} = 12 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2}\,a = \underline{\underline{6\sqrt{2} \cdot a^2}}$.
h) $V = V_{\text{kocka}} + 6V_{\text{gúla}} = a^3 + 6 \cdot \dfrac{1}{3}a^2 \cdot \dfrac{a}{2} = \underline{\underline{2a^3}}$.

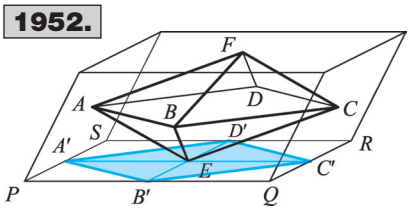
1949. A kocka egy lapjának oldalaira mint élekre fektetett síkok 45°-os szöget zárnak be ezzel a lappal. $\Rightarrow$ Egy közös pontjuk van, ami egyforma távolságra van mind a négy éltől, és a 45°-os hajlásszög miatt feleakkora távolságra a laptól, mint a kocka éle. A közös pont a kocka középpontjának tükörképe a lapra. $\Rightarrow$ A keletkező test $\underline{\text{rombdodekaéder}}$ (lásd 1948. feladat).

1950. Tudjuk, hogy a tér egybevágó kockákkal hézagtalanul kitölthető. Vegyünk hat egybevágó a élű kockát, amelyek körülzárnak egy velük egybevágó „üreget”. A hat kockából kialakítható rombdodekaéderek mindegyikének egy-egy része az „üregbe” nyúló a alapélű $\dfrac{a}{2}$ magasságú szabályos négyoldalú gúla. A hat gúla hézagmentesen kitölti az üreget, tehát a hat kockához tartozó rombdodekaéder is kitölti a tér aktuális részét. Az eljárás a rombdodekaéderek bármely csúcsánál megismételhető.

1951.



1952.



1951. Háromszögek határolják, 6 csúcsa, 8 lapja, 12 éle van. ⇒ A test oktaéder.

1952. Ez a test egy oktaéder. Térfogata: $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot t_{ABCD} \cdot \mathrm{d}(F;\ ABCD)$. Az oktaéder csúcsai az oldallapok középpontjai, ezért $AB \parallel CD \parallel SQ$; $BC \parallel DA \parallel PR$; $AB = SQ : 2$; $BC = PR : 2$; $DC = SQ : 2$ és $DA = PR : 2$, vagyis az $ABCD$ paralelogramma elhelyezhető a $PQRS$ paralelogrammában ($A'B'C'D'$ paralelogramma). $t_{PB'A'} = t_{PQS} : 4$; $t_{QB'C'} = t_{PQR} : 4$; $t_{RD'C'} = t_{RQS} : 4$; $t_{SA'D'} = t_{SPR} : 4$, ezért $t_{ABCD} = t_{PQRS} - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} t_{PQRS} = \frac{1}{2} t_{PQRS}$, valamint $\mathrm{d}(F;\ ABCD) = \frac{1}{2} \mathrm{d}(F;\ PQRS)$. Az aláhúzottakból következik, hogy $V_{\text{oktaéder}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot t_{PQRS} \cdot \frac{1}{2} \mathrm{d}(F;\ PQRS) = \frac{1}{6} V_{\text{paralelepipedon}}$.

1953. Tekintsük az 1951. ábrát. Jelölje S_E az E csúcsra illeszkedő síkot, S_B a B csúcsra illeszkedőt és így tovább! $S_E \parallel [AFH]$ és $S_B \parallel [AFC]$ és $S_G \parallel [CFH]$ és $S_D \parallel [ACH]$. $[AFH]$, $[AFC]$, $[CFH]$, $[ACH]$ síkok a paralelepipedon $ACFH$ beírt tetraéderét határozzák meg. Hasonlóan az S_A; S_F; S_C és S_H síkokkal párhuzamos síkok a paralelepipedon $EBGD$ beírt tetraéderét határozzák meg. A két beírt tetraéder közös része a paralelepipedon beírt oktaédere. ⇒ Az S_A; S_B; …; S_H síkok által meghatározott test is egy oktaéder, ami a paralelepipedon középpontjából nagyított képe a beírt oktaédernek. Mivel $[AFH]$ és $[BGD]$ síkok harmadolják az EC testátlót, a nagyítás háromszoros. $V = 3^3 \cdot V_o = 27 \cdot \frac{1}{6} V_p = = \frac{9}{2} V_p$.

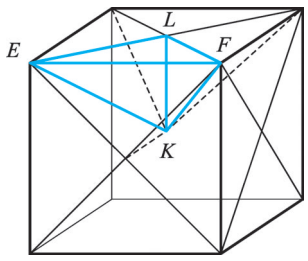
1954. Az átlóssíkok metszésvonalai a kocka testátlói és a kocka párhuzamos lapközéppontjait összekötő egyenesek. ⇒ Az átlóssíkok a kockát $6 \cdot 4 = 24$ db egybevágó derékszögű tetraéderre bontják. Legyen a kocka éle: a. Egy tetraéder térfogata $V = \frac{a^3}{24}$. Egy tetraéder felszíne

$$A = t_{ELF} + t_{ELK} + t_{FLK} + t_{EFK} = t_{ELF} + 2t_{ELK} + t_{EFK} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a =$$

$$= \frac{1}{4} a^2 + \frac{\sqrt{2}}{4} a^2 + \frac{\sqrt{2}}{4} a^2 = \frac{2\sqrt{2} + 1}{4} a^2.$$

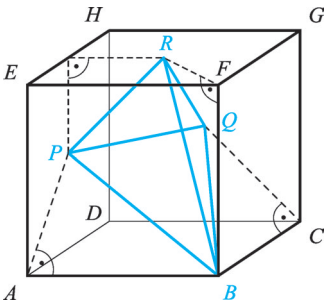
1954.



1955. Maga a gúla 1 térrész. Minden laphoz illeszkedik 1-1 térrész → 5 db. Minden élnél kialakul 1-1 térrész → 8 db. Minden csúcsnál kialakul 1-1 szöglet → 5 db. Összesen 19 részre bontják a lapsíkok a teret.

II

1958.



1956. Maga az oktaéder 1 térrész. Minden laphoz illeszkedik 1-1 térrész → 8 db. Minden élnél kialakul 1-1 térrész → 12 db. Minden csúcsnál kialakul 1-1 szöglet → 6 db. Összesen $\underline{\underline{27}}$ részre bontják a lapsíkok a teret.

1957. Vegyük a két gúla közös alapsíkját és azt az n síkot, melyek mindegyike átmegy mindkét gúla csúcspontján és négy élt tartalmaz. A test minden éle ezen síkok valamelyikén, de csak az egyiken van rajta. Maximális számú metszéspontot kapunk, ha a metszősík ezen síkok mindegyikét olyan egyenesben metszi, amelyiknek a síkon levő két éllel van metszéspontja. *a)* $\underline{6}$; *b)* $\underline{8}$; *c)* $\underline{\underline{10}}$; *d)* $\underline{\underline{2(n+1)}}$.

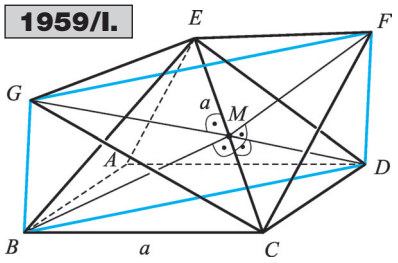
1958. $AB \perp [ADHE] \Rightarrow AB \perp AP$, ezért az $ABP\triangle$-re alkalmazható Pitagorasz tétele:

$BP^2 = AP^2 + AB^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + a^2 = \frac{3}{2}a^2 \Rightarrow BP = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a = \frac{\sqrt{6}}{2}a.$ Hasonlóan RFB derékszögű háromszögből, illetve BCQ derékszögű háromszögből $RB = QB = PB = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}a}}$. Két lapközéppontból bocsássunk merőlegest a lapok közös élére, így létrejön egy derékszögű háromszög, aminek befogói $\frac{a}{2}$ hosszúságúak, átfogója pedig a lapközéppontokat összekötő szakasz. Pitagorasz tétele a PRS derékszögű háromszögre: $PR^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow PR = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}a}}$. Hasonlóan megmutatható, hogy $RQ = QP = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

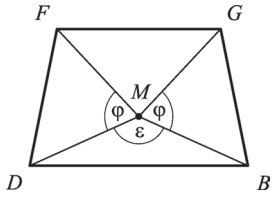
1959. Legyen EC felezőpontja M. $BCE\triangle$ szabályos, ezért $BM \perp EC$ és $CGE\triangle$ szabályos, ezért $GM \perp EC \Rightarrow EC \perp [BGM]$. Hasonlóan: $EC \perp [DFM]$. $\Rightarrow B; G; F; D$ és M egy síkban vannak.

A négyoldalú gúlából és a két tetraéderből álló test szimmetriája miatt $BDFG$ húrtrapéz. $DM = BM = GM = FM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, mert egy-egy a oldalú szabályos háromszög magasságai. $DB = \sqrt{2}\,a$; $FD = BG = a$. A koszinusztétel a $DBM\triangle$-re: $DB^2 = DM^2 + BM^2 - 2DM \cdot BM \cdot \cos\varepsilon$, azaz $2a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}a^2 \cdot \cos\varepsilon \Rightarrow \cos\varepsilon = -\frac{1}{3} \Rightarrow \varepsilon \approx 109{,}47°$. A koszinusztétel az $FDM\triangle$-re: $FD^2 = FM^2 + DM^2 - 2FM \cdot DM \cdot \cos\varphi$, azaz $a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}a^2 \cdot \cos\varphi \Rightarrow$

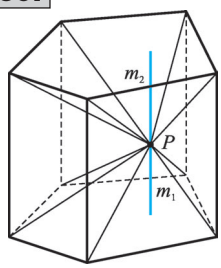
1959/I.



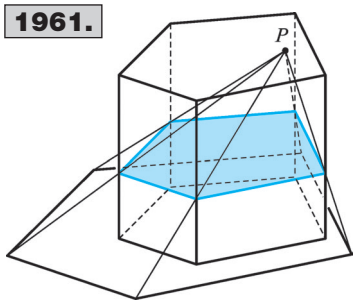
1959/II.



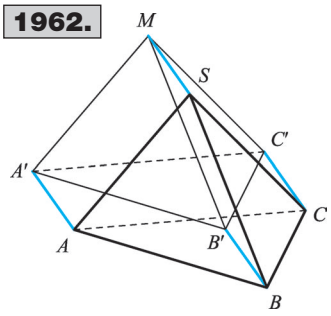
1960.



1961.



1962.



$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi \approx 70{,}53°$. $2\varphi + \varepsilon + FMG\sphericalangle = 360° \Rightarrow FMG\sphericalangle \approx 109{,}47° = \varepsilon \Rightarrow DMB\triangle \cong FMG\triangle \Rightarrow$

$\Rightarrow FG = DB = \underline{\underline{\sqrt{2} \cdot a}}$.

A fentiekből az is következik, hogy $DBGF$ téglalap, vagyis $DB \perp BG \parallel DF$.

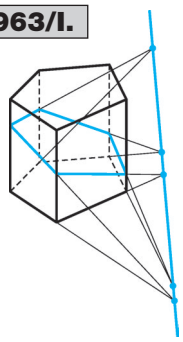
1960. Legyen a hasáb tetszőleges belső pontja P. Ha elvesszük a hasábból azokat a gúlákat, amelyeknek közös csúcsa P és alaplapjaik az oldallapok, akkor két gúla marad, amelyeknek közös csúcsa P és alaplapjaik a hasáb alap- és fedőlapja. Ezek térfogatát elvéve a hasáb térfogatából megkapjuk a keresett térfogatot.

$$V = V_{\text{hasáb}} - V_1 - V_2 = t_{\text{alap}} \cdot m - \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot m_1 - \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot m_2 = t_{\text{alap}} \cdot m - \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot (m_1 + m_2) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot m = \underline{\underline{\frac{2}{3} V_{\text{hasáb}}}} = \text{állandó}.$$

1961. A metszősík az alaplappal egybevágó síkidomot vág ki a hasábból. Legyen a fedőlap tetszőleges pontja P. A feltételeknek megfelelő P csúcsú gúla alaplapja a síkmetszet P középpontból nagyított képe, mert a metszősík párhuzamos az alaplappal. Ezért a feltételeknek megfelelő gúlához hasonló az a gúla, amelynek csúcsa P és alaplapja a síkmetszet. (A hasonlóság aránya λ.)

1963/I.

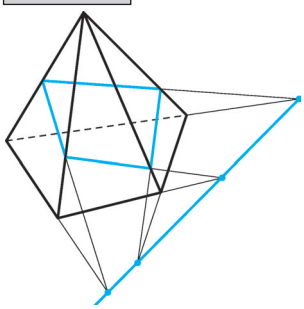


$V_h = t \cdot m$; $V_g = \frac{1}{3} \cdot \lambda^2 \cdot t \cdot m$, valamint $V_h = V_g \Rightarrow \lambda^2 = 3 \Rightarrow \lambda =$

$= \sqrt{3}$. λ a két gúla magasságának is aránya $\Rightarrow \frac{m}{m_1} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow m_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} m \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3} m}}$ távolságra kell legyen a fedőlaptól a metszősík.

1963/II.

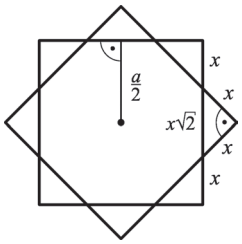


1962. $ABC\triangle$-et eltoljuk $\overrightarrow{SM}$-ral, az $A'B'C'\triangle$-et kapjuk. $ABCS$ tetraéder egybevágó $A'B'C'M$ tetraéderrel, így térfogatuk egyenlő. Az oldallapokra illeszkedő hasábok térfogatának összege: $V_{ABSA'B'M} + V_{BCSB'C'M} + V_{ACSA'C'M} = V_{ABCA'B'C'M} - V_{ABCS} = V_{ABCA'B'C'M} -$ $- V_{A'B'C'M} = V_{ABCA'B'C'}$, vagyis egyenlő az alaplapra illeszkedő hasáb térfogatával.

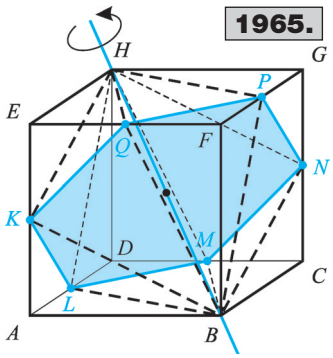
1963. Az alaplap oldalegyenesei az alaplap síkjában vannak. A síkmetszet oldalegyenesei a metsző síkon vannak. $\Rightarrow$ A síkmetszet oldalegyeneseinek az alaplap megfelelő oldalegyeneseivel való metszéspontjai mindkét síkon rajta vannak, vagyis a két sík metszésvonalának pontjai. $\Rightarrow$ Egy egyenesen vannak.

II

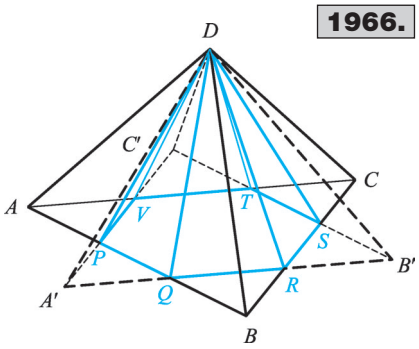
1964.



1965.



1966.



1964. Az 1964. ábrán az eredeti és az elforgatott kocka felülnézetben látható. *a)* Az eredeti és az elforgatott kocka közös része egy szabályos nyolcszög alapú hasáb, amelynek magassága a, alaplapjának egy oldala: $\left(\sqrt{2}-1\right)a$, mert $x+\sqrt{2}\cdot x+x=a \Rightarrow x=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}a \Rightarrow \sqrt{2}\cdot x=$

$=\left(\sqrt{2}-1\right)a$. $V_h=t_a\cdot m=8\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)a\cdot\dfrac{a}{2}\cdot a=\underline{\underline{2\left(\sqrt{2}-1\right)a^3}}$.

b) Az együttes térfogat: $V=2a^3-V_h=2a^3-2\left(\sqrt{2}-1\right)a^3=\underline{\underline{2\left(2-\sqrt{2}\right)a^3}}$.

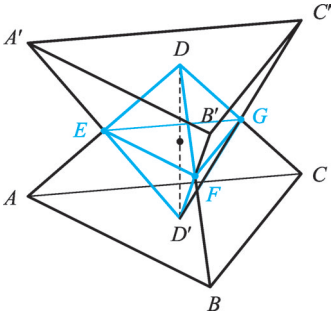
1965. A kockát a BH testátló körül forgatjuk el 60°-kal. $\Rightarrow$ B és H fixpontok. $KLMNPQ$ szabályos hatszög csúcsai a kocka élfelező pontjai, síkja merőleges a BH testátlóra. $\Rightarrow$ A hatszöget a forgatás saját magába viszi át, ezért $KLMNPQ$ az eredeti és az elforgatott kocka közös síkmetszete. $N'\equiv P$; $P'\equiv Q$; $H'\equiv H \Rightarrow G'$ a $PQH\triangle$ fölé írt gúla csúcsa lesz. $\Rightarrow$ Az eredeti és az elforgatott kocka közös része a $KLMNPQ$ alaplapú, H, illetve B csúcsú gúlákból álló test.

$$V=2\cdot\frac{1}{3}\cdot t_{KLMNPQ}\cdot\frac{BH}{2}=\frac{1}{3}\cdot t_{KLMNPQ}\cdot BH=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\cdot\sqrt{3}\cdot a=\underline{\frac{3}{4}a^3}.$$

1966. Az $ABCD$ tetraédert elforgattuk 60°-kal a D-n áthaladó magasságvonala körül $\rightarrow$ $\rightarrow A'B'C'D$ tetraéder. A két tetraéder közös része a $PQRSTV$ szabályos hatszög alapú, D csúcsú egyenes gúla. (P; Q; R; S; T; V az alapélek harmadolópontjai.)

$$V=\frac{1}{3}\cdot t_{PQRSTV}\cdot m=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\underline{\frac{\sqrt{2}}{18}a^3}.$$

1967.



1967. A tetraéder és a sík közös pontjai a tükrözés fixpontjai, ezért $EFG\triangle$ az eredeti és a tükörkép tetraéder metszésvonala. D képe a magasság talppontja, tehát D' az $ABC\triangle$ súlypontja. $\Rightarrow$ D az $A'B'C'\triangle$ súlypontja. $\Rightarrow$ Az eredeti és a tükörkép tetraéder közös része az $EFGD$ és $EFGD'$ tetraéderekből álló test. E; F és G élfelező pontok, ezért $EFGD$ és $EFGD'$ tetraéderek szabályosak, minden élük $\dfrac{a}{2}$.

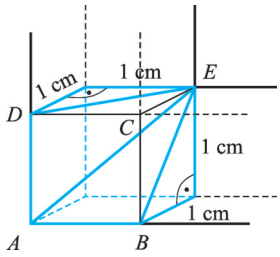
$$V=V_{EFGD}+V_{EFGD'}=2V_{EFGD}=2\cdot\frac{1}{8}\cdot V_{ABCD}=\frac{1}{4}\cdot V_{ABCD}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\underline{\frac{\sqrt{2}}{48}a^3}.$$

1968. Az egyenlő szárú derékszögű háromszög keresztmetszetű hasábot megkaphatjuk egy négyzet keresztmetszetű hasáb felezésével. ⇒ A sarokban egy kockából kell elvenni egy négyzet alapú gúlát (*ABCDE*). Ennek térfogata a kocka térfogatának harmada, így a megmaradó rész a kétharmada. A szükséges gitt térfogata:

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot(a-2)+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot(b-2)+$$
$$+4\cdot\left(1\cdot 1\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\right)=a-2+b-2+\frac{8}{3}=$$
$$=a+b-\frac{4}{3}.$$

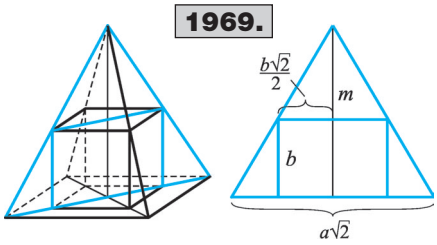
1968.



1969. Hasonlóság miatt:

$$\frac{m-b}{\frac{b\sqrt{2}}{2}}=\frac{m}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow ma-ab=mb\Rightarrow b=\frac{ma}{m+a}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow V=b^3=\left(\frac{ma}{m+a}\right)^3.$$

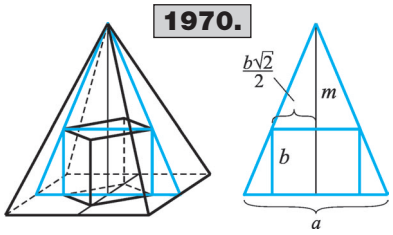
1969.



1970. Hasonlóság miatt:

$$\frac{m-b}{\frac{b\sqrt{2}}{2}}=\frac{m}{\frac{a}{2}}\Rightarrow ma-ab=mb\cdot\sqrt{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow b=\frac{ma}{m\sqrt{2}+a}\Rightarrow V=b^3=\left(\frac{ma}{m\sqrt{2}+a}\right)^3.$$

1970.



Henger

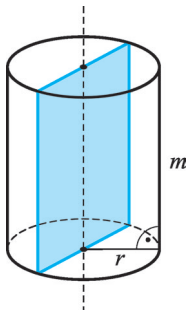
1971. $t_a=t_t$; $t_a=r^2\pi$ és $t_t=2r\cdot m\Rightarrow r^2\pi=2r\cdot m\Rightarrow \underline{\underline{m=1/2\,r\pi}}$.

1972. *a)* $A\approx\underline{\underline{150{,}8\text{ cm}^2}}$; *b)* $A\approx\underline{\underline{588{,}1\text{ dm}^2}}$; *c)* $A\approx\underline{\underline{70\,664{,}42\text{ m}^2}}$.

1973. $k_a=2r\pi=20{,}33$ cm; $m-r=11{,}6$ cm $\Rightarrow m=r+11{,}6$ cm.

$$A=2r\pi(r+m)=2r\pi(2r+11{,}6\text{ cm})=$$
$$=k_a\cdot\left(\frac{k_a}{2\pi}\cdot 2+11{,}6\text{ cm}\right)\approx\underline{\underline{367{,}4\text{ cm}^2}}.$$

1971.



1974. $A_2=2r_2\pi(r_2+m_2)=$
$=2(r_1+4)\cdot\pi\cdot(r_1+4+m_1+3)=$
$=2(r_1+4)\cdot\pi\cdot(r_1+m_1+7)=$
$=2\pi\cdot(r_1\cdot(r_1+m_1)+7\cdot r_1+4\cdot(r_1+m_1)+28)=$
$=2\,\pi\cdot r_1\cdot(r_1+m_1)+2\,\pi\cdot(7r_1+4(r_1+m_1)+28)=$
$=A_1+2\pi\cdot(11r_1+4m_1+28)$. $\Rightarrow 923{,}4=$
$=2\pi\cdot(11r_1+4m_1+28)\Rightarrow m_1=29{,}74-2{,}75r_1$.
$A_1=2r_1\pi\cdot(r_1+29{,}74-2{,}75r_1)=$
$=2r_1\pi\cdot(29{,}74-1{,}75r_1)$. $\Rightarrow 659{,}6=2r_1\pi\cdot(29{,}74-1{,}75r_1)$.

$1{,}75r_1^2 - 29{,}74r_1 + 104{,}98 = 0$. $(r_1)_1 \approx 12$ cm $\Rightarrow (m_1)_1 \approx -3{,}26$ cm, ez nem lehet; $(r_1)_2 \approx 5$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow (m_1)_2 \approx 16$ cm. Az alapkör sugara 5 cm, a magasság 16 cm.

II

1975. $r \approx 38{,}87$ cm; $m \approx 48{,}6$ cm.

1976. $r \approx 6{,}59$ cm; $m \approx 20{,}21$ cm.

1977. Körülbelül 29,3 óra.

1978. Körülbelül 19,6 m^2 bádoglemez kell.

1979. 1,84 kg festékre lesz szükség.

1980. *a)* $V_1 \approx 577{,}27$ m^2; *b)* $V_2 \approx 88\,053{,}4$ $dm^3 \approx 88{,}05$ m^3; *c)* $V_3 \approx 407\,777{,}6$ $cm^3 \approx 407{,}8$ dm^3.

1981. $t_p \approx 263{,}9$ m^2 és $V \approx 1979{,}2$ m^3.

1982. *a)* $m \approx 21{,}14$ cm; *b)* $m \approx 17{,}86$ cm.

1983. **1. eset:** $r = a = 5{,}6$ cm; $m = b = 7{,}9$ cm. $A_b \approx 475$ cm^2.

2. eset: $r = b = 7{,}9$ cm; $m = a = 5{,}6$ cm. $A_a \approx 670{,}1$ cm^2.

1984. $A \approx 764{,}54$ cm^2 és $V \approx 1490{,}8$ cm^3.

1985. $a = 21{,}7$ cm és $b = 36{,}8$ cm. *a)* a körüli forgatás $\Rightarrow a = m$; $b = r$. $A_a \approx 13\,526{,}4$ cm^2 és $V_a \approx 92\,322$ cm^3. *b)* b körüli forgatás $\Rightarrow a = r$; $b = m$. $A_b \approx 7976{,}2$ cm^2 és $V_b \approx 54\,439{,}9$ cm^3.

c) a felező merőlegese körüli forgatás $\Rightarrow r = \frac{a}{2}$; $m = b$. $A_{t_1} \approx 3248{,}4$ cm^2 és $V_{t_1} \approx 13\,609{,}9$ cm^3.

d) b felező merőlegese körüli forgatás $\Rightarrow$ $r = \frac{b}{2}$; $m = a$. $A_{t_2} \approx 4635{,}9$ cm^2 és $V_{t_2} \approx 23\,080{,}5$ cm^3.

1986. **1. eset:** $b = 2r_1\pi$ és $a = m \Rightarrow V_1 = \frac{b^2 a}{4\pi}$. **2. eset:** $a = 2r_2\pi$ és $b = m$ $\Rightarrow V_2 = \frac{a^2 b}{4\pi}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{b}{a} = \frac{33}{26}$.

1987. A szükséges bádog körülbelül 627,35 cm^2.

1988. $m \approx 21{,}68$ cm.

1989. A víz szintje körülbelül 2,04 dm-t emelkedik.

1990. Két beosztás távolsága körülbelül 1,572 cm.

1991. A kapilláris cső belső átmérője kb. 1,248 mm.

1992. $V \approx 64{,}34$ hl.

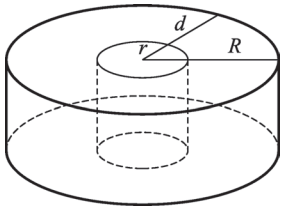
1993. $V = (R^2\pi - r^2\pi)\, m = m\pi\,(R^2 - r^2) \approx 0{,}1508$ $m^3 \approx 150{,}8$ dm^3.

A malomkő tömege: $V \cdot \varrho = 377$ kg.

1994. $r \approx 9$ cm; $m \approx 37{,}64$ cm.

1995. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1}{r_2}$. **1996.** $\frac{A_{p_1}}{A_{p_2}} = \frac{r_1 m_1}{r_2 m_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_2}{r_1}$.

1993.



1997. $V = r^2\,\pi\, m \Rightarrow m = \frac{V}{r^2\pi}$. Felhasználjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget. $t_p + t_a = 2r\,\pi\, m + r^2\,\pi =$

$= 2r\,\pi \cdot \frac{V}{r^2\pi} + r^2\pi = \frac{2V}{r} + r^2\pi = \frac{V}{r} + \frac{V}{r} + r^2\pi \geq$

$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r} \cdot r^2\pi} = 3 \cdot \sqrt[3]{V^2\pi} =$ állandó. Az összeg minimális,

ha egyenlőség van, azaz $\frac{V}{r}=r^2\pi \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \Rightarrow m=\frac{V}{\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}\cdot\pi}}=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \Rightarrow \underline{\underline{m=r}}$. A henger magassága egyenlő az alapkör sugarával.

1998. Felhasználjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$A=2r^2\pi+2r\pi m \Rightarrow m=\frac{A}{2r\pi}-r \Rightarrow V=r^2\pi\cdot\left(\frac{A}{2r\pi}-r\right)=\frac{Ar}{2}-r^3\pi=r\left(\frac{A}{2}-r^2\pi\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow V^2=r^2\cdot\left(\frac{A}{2}-r^2\pi\right)\cdot\left(\frac{A}{2}-r^2\pi\right)=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot r^2\cdot\left(\frac{A}{2}-r^2\pi\right)\cdot\left(\frac{A}{2}-r^2\pi\right)\le$

$\le\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{2\pi r^2+\frac{A}{2}-r^2\pi+\frac{A}{2}-r^2\pi}{3}\right)^3=\frac{A^3}{54\pi}$. A térfogat maximális, ha egyenlőség van, azaz

$\frac{A}{2}-r^2\pi=2\pi r^2 \Rightarrow r=\sqrt{\frac{A}{6\pi}} \Rightarrow m=2\cdot\sqrt{\frac{A}{6\pi}}=2r \Rightarrow \underline{\underline{m=2r}}$, azaz a henger egyenlő oldalú.

1999. $r:m=5:6 \Rightarrow r=\frac{5}{6}\,m \Rightarrow V=r^2\pi m=\frac{25}{36}\,m^2\pi m \Rightarrow m^3=\frac{36}{25}\cdot\frac{V}{\pi} \Rightarrow m\approx 11{,}45\text{ cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow r\approx 9{,}54\text{ cm} \Rightarrow A=2r\pi(r+m)\approx \underline{\underline{1258{,}17\text{ cm}^2}}$.

2000. $V\approx \underline{\underline{28{,}13\text{ cm}^3}}$.

2001. $t_t=2rm=969{,}5\text{ cm}^2$. $A=2r\pi(r+m)=2r\pi\cdot\left(r+\frac{969{,}5}{2r}\right)=2r^2\pi+969{,}5\,\pi=$

$=4532{,}6\text{ cm}^2 \Rightarrow r^2=236{,}6 \Rightarrow r\approx 15{,}38\text{ cm} \Rightarrow m\approx 31{,}52\text{ cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow V=r^2\pi m\approx \underline{\underline{23\,428{,}84\text{ cm}^3}}$.

2002. $V\approx \underline{\underline{1{,}06\text{ m}^3}}$.

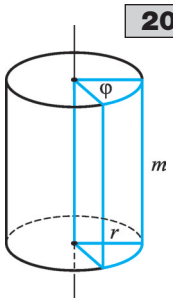
2003. $V\approx \underline{\underline{12\,379\text{ cm}^3}}$ és $A\approx \underline{\underline{2963\text{ cm}^2}}$.

2004. A keletkezett részek térfogatának aránya egyenlő az alapkörcikkek középponti szögeinek arányával. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{40°}{360°}=$

$=\frac{1}{9}\Rightarrow V_1=\frac{V}{9}$, ezért $V_1=\frac{r^2\pi m}{9}=\frac{36\cdot\pi\cdot 11}{9}=44\pi \Rightarrow V_1\approx$

$\approx \underline{\underline{138{,}23\text{ cm}^3}}$.

2004.



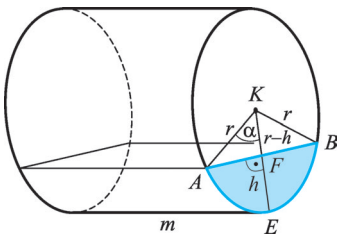
2005. $\cos\alpha=\frac{r-h}{r}\Rightarrow\alpha=52°\Rightarrow\hat{\alpha}=0{,}908$.

$t=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot 2\cdot\hat{\alpha}-\frac{1}{2}\cdot r^2\sin 2\alpha\approx 2{,}86\text{ cm}^2 \Rightarrow V_{\text{beton}}=$

$=tm\approx 7144{,}9\text{ m}^3 \Rightarrow m_{\text{cement}}\approx 7144{,}9\cdot 150\text{ kg}\approx 1\,071\,733{,}7\text{ kg}\approx$

$\approx \underline{\underline{1071{,}7\text{ t}}}$.

2005.



II

2006. $ab = 80\ \text{dm}^2$ és $b = \frac{5}{8}a \Rightarrow \frac{5}{8}a^2 = 80 \Rightarrow a = 8\sqrt{2}\ \text{cm} \Rightarrow b = 5\sqrt{2}\ \text{cm} \approx \underline{7{,}07\ \text{cm}}$ a cső magassága. $2r\pi = a - 2 \Rightarrow 2r = \frac{a-2}{\pi} \Rightarrow 2r \approx \underline{2{,}96\ \text{dm}}$ a cső átmérője.

2007. $m \approx \underline{1{,}27\ \text{m}}$.

2008. $r \approx \underline{2{,}77\ \text{dm}}$ az alapkör sugara, $m \approx \underline{8{,}31\ \text{dm}}$ az edény magassága.

2009. $t_p = 2r\pi m = 2r\pi \cdot 2r = 4r^2\pi \Rightarrow r^2\pi = \frac{t_p}{4}$, valamint $t_p = 2r\pi m = m^2\pi \Rightarrow m = \sqrt{\frac{t_p}{\pi}} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = r^2\pi m = \frac{t_p}{4} \cdot \sqrt{\frac{t_p}{\pi}} = \frac{25}{4} \cdot \frac{5}{\sqrt{\pi}} \approx \underline{17{,}625\ \text{m}^3}$.

2010. $A \approx \underline{471{,}24\ \text{m}^2}$.

2011. $2r = 7{,}5\ \text{m} \Rightarrow r = 3{,}75\ \text{m}$. 1 óra alatt $82\ \text{hl} = 8200\ \text{l víz} \Rightarrow$ 4 óra alatt $32\,800\ \text{l} = 32\,800\ \text{dm}^3 =$ $= 32{,}8\ \text{m}^3$ víz. $32{,}8 = r^2\pi h = 14{,}0625\pi h \Rightarrow h \approx \underline{0{,}74\ \text{m}}$-t emelkedik a vízszint 4 óra alatt.

2012. Percenként a gőzszükséglet: $60 \cdot r^2\pi m \approx 6\,650\,123{,}33\ \text{cm}^3 \approx \underline{6{,}65\ \text{m}^3}$.

2013. Percenkénti vízszállítás: $0{,}9 \cdot 100 \cdot r^2\pi m \approx 1\,053\,501{,}68\ \text{cm}^3 \approx \underline{1{,}053\ \text{m}^3}$.

2014. Idő $= \frac{V}{r^2\pi m} \approx 159{,}15\ \text{perc} \approx \underline{9550\ \text{másodperc}}$.

2015. $2r = 0{,}0324\ \text{dm} = \underline{3{,}24\ \text{mm}}$.

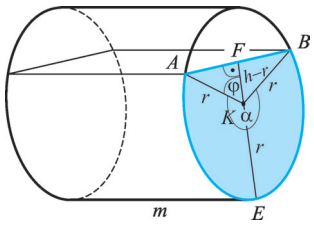
2016. Tekintsük az 1993. ábrát. $V = r^2\pi m - (r-d)^2\,\pi m = \pi m\,(r^2 - (r-d)^2) =$ $= \pi \cdot 9 \cdot (3{,}5^2 - 2{,}6^2) \Rightarrow V \approx 155{,}23\ \text{dm}^3 \Rightarrow$ a tömeg $= V \cdot \varrho \approx \underline{1151{,}8\ \text{kg}}$.

2017. $V_{\text{ólom}} = ((0{,}17\ \text{dm})^2 \cdot \pi - (0{,}15\ \text{dm})^2 \cdot \pi) \cdot 10\ \text{dm} \approx 0{,}201\ \text{dm}^3$. $V_{\text{réz}} = 3 \cdot (0{,}033\ \text{dm})^2 \cdot \pi \cdot 10\ \text{dm} \approx$ $\approx 0{,}103\ \text{dm}^3$. $V_{\text{szigetelés}} = (0{,}15\ \text{dm})^2 \cdot \pi \cdot 10\ \text{dm} - V_{\text{réz}} \approx 0{,}604\ \text{dm}^3$. $m_{\text{ólom}} + m_{\text{réz}} + m_{\text{szigetelés}} =$ $= V_{\text{ólom}} \cdot \varrho_{\text{ólom}} + V_{\text{réz}} \cdot \varrho_{\text{réz}} + V_{\text{szigetelés}} \cdot \varrho_{\text{szigetelés}} \approx \underline{3{,}7484\ \text{kg}}$.

2018. Tekintsük az 1993. ábrát. Jelölje a magasságot h és a tömeget m! $k = 2R\pi \Rightarrow R \approx 1{,}43\ \text{dm}$. $m = V \cdot \varrho = (R^2 - r^2) \cdot \pi \cdot h \cdot \varrho$, azaz $650 = (1{,}43^2 - r^2) \cdot \pi \cdot 36 \cdot 7{,}5 \Rightarrow r \approx 1{,}13\ \text{dm}$. Az oszlop falának vastagsága: $R - r \approx \underline{3\ \text{cm}}$.

2019. $2r = 150\ \text{cm}$; $m = 5\text{m} = 500\ \text{cm}$; $h = 0{,}8 \cdot 2r = 1{,}6r$. $FK = h - r = 0{,}6r \Rightarrow \cos\varphi =$ $= 0{,}6 \Rightarrow \varphi \approx 53{,}13° \Rightarrow 2\varphi \approx 106{,}26° \Rightarrow \alpha \approx 253{,}74°$.

2019.



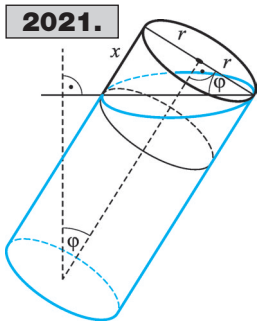
$$V = t \cdot m = \left[r^2\pi \cdot \frac{253{,}74°}{360°} + \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin 106{,}26°\right] \cdot m \approx 7578\ \text{dm}^3.$$

Kb. $\underline{7578\ \text{l}}$ víz van a kazánban.

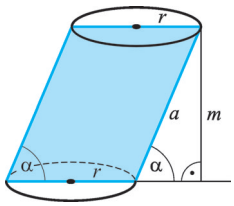
2020. Tekintsük a 2005. ábrát. $EF = 12\ \text{cm}$ és $r = 15\ \text{cm} \Rightarrow$ $\Rightarrow KF = 3\ \text{cm} \Rightarrow \cos\varphi = 0{,}2 \Rightarrow \varphi \approx 78{,}5° \Rightarrow 2\varphi \approx 157°$. $r^2\pi \cdot m \cdot \varrho =$ $= t \cdot m \Rightarrow r^2\pi \cdot \varrho = r^2\pi \cdot \frac{157°}{360°} - \frac{1}{2}r^2 \sin 157° \Rightarrow \pi \cdot \varrho \approx 1{,}37 -$ $- 0{,}195 \Rightarrow \varrho = \underline{0{,}374\ \text{kg/dm}^3}$.

II

2021.



2022.



2021. Legyen $m = 4r$. $V = 1\ \text{dm}^3 = 1000\ \text{cm}^3$; $V = r^2\pi \cdot 4r = 4r^3\pi \Rightarrow r \approx 4{,}3\ \text{cm}$! $\varphi = 36{,}57°$; $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{x}{2r}$.

A kiömlő folyadék térfogata: $V_1 = \dfrac{1}{2} \cdot r^2\pi x = \dfrac{1}{2} r^2\pi \cdot 2r \cdot tg\ \varphi = r^3\pi \cdot tg\ \varphi \approx 185{,}3\ \text{cm}^3$.

Az edényben maradt folyadék: $V - V_1 \approx 1000\ \text{cm}^3 - 185{,}3\ \text{cm}^3 \approx \underline{\underline{814{,}7\ \text{cm}^3}}$.

2022. $t = 2r \cdot a \cdot \sin\alpha \approx \underline{\underline{5{,}73\ \text{m}^2}}$.

2023. Tekintsük a 2022. ábrát! $m = a \cdot \sin\alpha$. $V = r^2\pi m = r^2\pi a \cdot \sin\alpha \approx \underline{\underline{1986{,}5\ \text{cm}^3}}$.

2024. A 2022. ábra jelöléseit használjuk. $k = m \cdot 5 \Rightarrow 2r\pi = 5 \cdot a \cdot \sin\alpha \Rightarrow r = \dfrac{5a\sin\alpha}{2\pi}$.

$$V = r^2\pi m = r^2\pi \cdot a \cdot \sin\alpha = \left(\frac{5a\sin\alpha}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sin\alpha = \frac{25a^3 \cdot \sin^3\alpha}{4\pi} \approx \underline{\underline{5302\ \text{dm}^3}}.$$

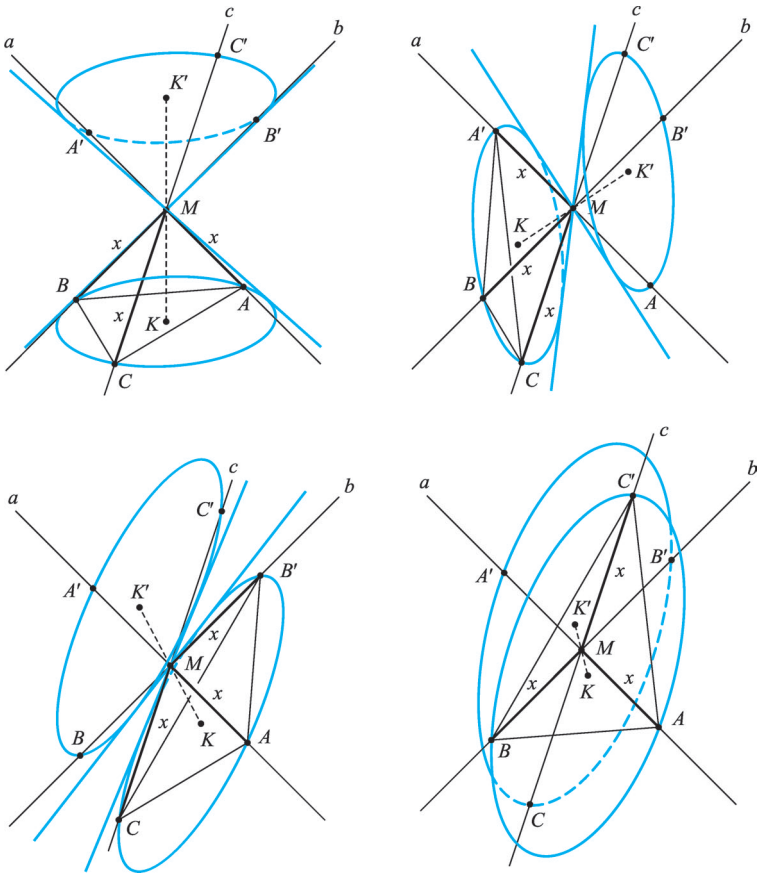
2025. Tekintsük a 2022. ábrát! $m = a \cdot \sin\alpha$; $t = 2r \cdot a \cdot \sin\alpha \Rightarrow r \approx 9{,}09\ \text{dm} \Rightarrow V \approx \underline{\underline{5061{,}2\ \text{dm}^3}}$.

Kúp, csonkakúp

II

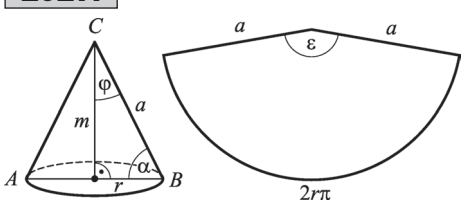
Kúp

2026.



2026. Az egyenesek közös M pontjából mérjünk fel mindhárom egyenesre x hosszúságú szakaszt, így az a-n A, a b-n B és a c-n C pontot kapunk. Az A, B és C pontok háromszöget alkotnak az egyenesek helyzete miatt. Az $ABC\triangle$ körülírt köre k. M rajta van az AB, illetve a BC szakaszok felezőmerőleges síkján, ezért M merőleges vetülete ABC síkra a k kör K középpontja. A kúp forgástengelye az MK egyenes, csúcsa M. Négy forgáskúpot találunk a három egyeneshez.

2027.



2027. $a^2 = m^2 + r^2 \Rightarrow m^2 = a^2 - r^2$.

a) $\underline{\underline{m = 8\,\text{cm}}}$; *b)* $m \approx \underline{\underline{93{,}05\,\text{cm}}}$; *c)* $m \approx \underline{\underline{0{,}088\,\text{m}}}$.

2028. *a)* $a \approx \underline{5{,}24\text{ cm}}$; *b)* $a \approx \underline{25{,}09\text{ dm}}$; *c)* $a \approx \underline{142{,}9\text{ cm}}$.

2029. *a)* $r \approx \underline{5{,}36\text{ dm}}$; *b)* $r \approx \underline{3{,}86\text{ cm}}$; *c)* $r \approx \underline{99{,}75\text{ mm}}$.

2030. A 2027. ábra jelöléseivel: *a)* $\frac{r}{a} = \sin\varphi \Rightarrow 2\varphi \approx \underline{56{,}8°}$; *b)* $\frac{m}{a} = \cos\varphi \Rightarrow 2\varphi \approx \underline{89°}$; *c)* $\frac{r}{m} = \operatorname{tg}\varphi \Rightarrow 2\varphi \approx \underline{79{,}7°}$.

2031. A 2027. ábra jelöléseivel: $\frac{2r\pi}{2a\pi} = \frac{\varepsilon}{360°} \Rightarrow \varepsilon = \frac{r}{a}\cdot 360°$. *a)* $\varepsilon = \underline{225°}$; *b)* $a^2 = m^2 + r^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow r \approx 8{,}46\text{ cm} \Rightarrow \varepsilon \approx \underline{242{,}5°}$.

2032. $CT = CK\cdot\sin\varphi = \underline{5\sqrt{3}\,\text{cm}}$ ($\approx 8{,}66$ cm) a magasság. $KT = CK\cdot\cos\varphi = 5\text{ cm} = KB \Rightarrow$ $\Rightarrow T \equiv B \Rightarrow CB = \underline{5\sqrt{3}\,\text{cm}}$ a legrövidebb alkotó. $ABC\triangle$-ben $CB = \underline{5\sqrt{3}\,\text{cm}}$, $AB = 10$ cm és $ABC\sphericalangle = 90° \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = \underline{5\sqrt{7}\,\text{cm}}$ ($\approx 13{,}23$ cm) a leghosszabb alkotó.

2033. Tekintsük a 2032. ábrát. Legyen $KT = x. \Rightarrow AT = R + x$ és $BT = |R - x|$. (1) $k^2 = m^2 + x^2$; (2) $a_1^2 = m^2 + |R - x|^2$; (3) $a_2^2 = m^2 + (R + x)^2$; (2) és (3) $\Rightarrow a_2^2 - a_1^2 = 4Rx$, valamint (2) és (1) $\Rightarrow R^2 = 2Rx + a_1^2 - k^2 \Rightarrow R \approx \underline{17{,}7\text{ cm}}$ mindkét esetben.

2034. A 2032. ábra jelöléseivel: legyen $KT = x. \Rightarrow AT = R + x$ és $BT = |R - x|$. (1) $a_1^2 = m^2 +$ $+ |x - R|^2$; (2) $k^2 = m^2 + x^2$; (3) $a_2^2 = m^2 + (R + x)^2$; (1) és (3) $\Rightarrow a_2^2 - a_1^2 = 4Rx \Rightarrow x \approx 45{,}8\text{ cm} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ **1. esetben** $BT = R - x < 0 \Rightarrow$ nincs ilyen test. **2. esetben** $BT = x - R \approx 14{,}1\text{ cm} \Rightarrow m \approx 50{,}67\text{ cm} \Rightarrow$ $\Rightarrow k \approx \underline{68{,}3\text{ cm}}$.

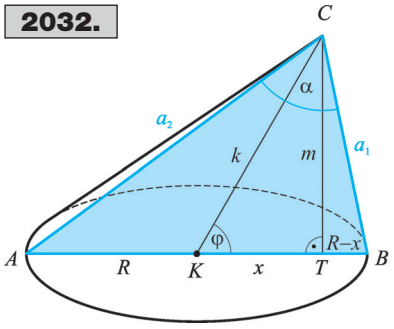
2035. A metszet is kör, hasonló az alapkörhöz. A hasonlóság aránya $\frac{m_1}{m}. \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \left(\frac{m_1}{m}\right)^2 \Rightarrow$

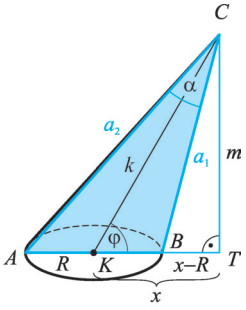
$\Rightarrow t_1 = \left(\frac{m_1}{m}\right)^2 \cdot t$. *a)* $t_1 = \underline{\frac{1}{4}r^2\pi}$; *b)* $t_1 = \underline{\frac{1}{16}r^2\pi}$; *c)* $t_1 = \underline{\left(\frac{m}{m+n}\right)^2 \cdot r^2\pi}$.

2036. *a)* $A = 388{,}7\pi \approx \underline{1221{,}1\text{ cm}^2}$; *b)* $A = 216\pi \approx \underline{678{,}6\text{ dm}^2}$; *c)* $A \approx 9878{,}8\pi \approx \underline{31\,035\text{ mm}^2}$.

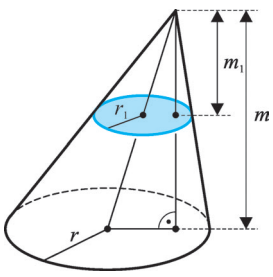
2037. A 2027. ábra jelöléseit használjuk. $A = r(r + a)\cdot\pi$; $t = r\cdot m \Rightarrow m = \frac{t}{r}$; $a^2 = r^2 + m^2 =$ $= r^2 + \frac{t^2}{r^2} \Rightarrow \underline{(ar)^2} = r^4 + t^2$, valamint $\frac{A}{\pi} = r^2 + ar \Rightarrow \underline{ar} = \frac{A}{\pi} - r^2$. Az aláhúzottakból követke-

2032.



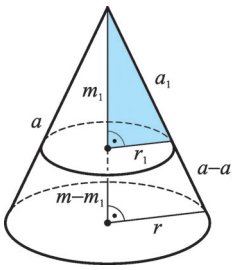


2035.



II

2044.



zik, hogy $\left(\frac{A}{\pi}-r^2\right)^2=r^4+t^2\Rightarrow r^2=\frac{\pi}{2A}\cdot\left(\frac{A^2}{\pi^2}-t^2\right)\Rightarrow r\approx\underline{\underline{12{,}88\text{ cm}}}\Rightarrow$
$\Rightarrow m\approx\underline{\underline{15{,}8\text{ cm}}}$ és $a\approx\underline{\underline{20{,}38\text{ cm}}}$.

2038. $r=\underline{\underline{5\text{ cm}}}$; $m=\underline{\underline{5\sqrt{3}\text{ cm}}}$; $2\varphi=\underline{\underline{60°}}$.

2039. $m=\underline{\underline{\sqrt{15}\cdot r}}$.

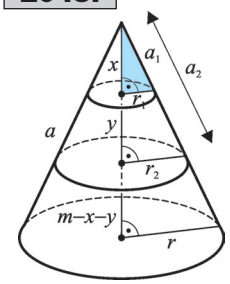
2040. $\varepsilon\approx\underline{\underline{145{,}36°}}$; $t_p\approx\underline{\underline{412{,}36\text{ cm}^2}}$.

2041. $t=\underline{\underline{12{,}5\text{ cm}^2}}$.

2042. $m\approx\underline{\underline{33{,}55\text{ cm}}}$.

2043. $m\approx\underline{\underline{2{,}04\text{ m}}}$.

2045.



2044. Hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r}=\frac{a_1}{a}=\frac{m_1}{m}=\lambda$. $t_p=ra\pi\Rightarrow r_1\cdot a_1\cdot\pi=$
$=\frac{1}{2}\cdot ra\pi$, azaz $\lambda r\cdot\lambda a=\frac{1}{2}ra\Rightarrow\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow m_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot m\Rightarrow m_1=$
$=\underline{\underline{23\sqrt{2}\text{ cm}}}$ ($\approx 32{,}53$ cm).

2045. Hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r}=\frac{a_1}{a}=\frac{x}{m}=\lambda_1$. $r_1\cdot a_1\cdot\pi=\frac{1}{3}\cdot ra\pi$,
azaz $\lambda_1 r\cdot\lambda_1 a=\frac{1}{3}ra\Rightarrow\lambda_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot m\Rightarrow x=\underline{\underline{11\sqrt{3}\text{ cm}}}$
($\approx 19{,}05$ cm). $\frac{r_2}{r}=\frac{a_2}{a}=\frac{x+y}{m}=\lambda_2$. $r_2\cdot a_2\cdot\pi=\frac{2}{3}\cdot ra\pi$, azaz $\lambda_2 r\cdot\lambda_2 a=\frac{2}{3}ra\Rightarrow\lambda_2=\frac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow$
$\Rightarrow x+y=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot m\Rightarrow x+y=\underline{\underline{11\sqrt{6}\text{ cm}}}$ ($\approx 26{,}94$ cm).

2046. Tekintsük a 2044. ábrát. $\frac{t_1}{t_p-t_1}=\frac{a}{b}\Rightarrow t_1=\frac{a}{a+b}\cdot t_p$. Hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r_2}=\frac{a_1}{a_2}=$
$=\frac{m_1}{m}=\lambda$. $r_1\cdot a_1\cdot\pi=\frac{a}{a+b}\cdot r_2\cdot a_2\cdot\pi$, azaz $\lambda^2\cdot r_2\cdot a_2=\frac{a}{a+b}\cdot r_2 a_2\Rightarrow\lambda=\sqrt{\frac{a}{a+b}}\Rightarrow m_1=\lambda m=$
$=\underline{\underline{\sqrt{\frac{a}{a+b}}\cdot m}}$.

2047. A 2044. ábrát vizsgáljuk. Legyen $a_1=a_i$; $r_1=r_i$; $m_1=m_i$. Hasonlóság miatt:
$\frac{r_i}{r}=\frac{a_i}{a}=\frac{m_i}{m}=\lambda_i$ ($i=1;2;\ldots;n-1$). $r_i\cdot a_i\cdot\pi=\frac{i}{n}\cdot ra\pi$, azaz $\lambda_i r\cdot\lambda_i a=\frac{i}{n}ra\Rightarrow\lambda_i=\sqrt{\frac{i}{n}}\Rightarrow$
$\Rightarrow m_i=\lambda_i\cdot m\Rightarrow m_i=\underline{\underline{\sqrt{\frac{i}{n}}\cdot m}}$.

2048. *a)* $A\approx\underline{\underline{15{,}39\text{ cm}^2}}$ és $V\approx\underline{\underline{0{,}637\text{ cm}^3}}$; *b)* $A\approx\underline{\underline{76{,}94\text{ dm}^2}}$ és $V\approx\underline{\underline{36{,}88\text{ dm}^3}}$;
c) $A\approx\underline{\underline{31\,855{,}7\text{ cm}^2}}$ és $V\approx\underline{\underline{343\,062\text{ cm}^3}}$; *d)* $A\approx\underline{\underline{365\text{ cm}^2}}$ és $V\approx\underline{\underline{447\text{ cm}^3}}$.

2049. $\underline{\underline{\frac{A_1}{A_2}=4}}$ és $\underline{\underline{\frac{V_1}{V_2}=8}}$.

2050. $A \approx \underline{\underline{10\,310{,}3\ \text{cm}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{67\,871{,}3\ \text{cm}^3}}$.

2051. $A \approx \underline{\underline{1{,}54\ \text{m}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{0{,}36\ \text{m}^3}}$.

2052. $a \approx \underline{\underline{0{,}652\ \text{m}}}$.

2053. $a \approx \underline{\underline{1{,}64\ \text{m}}}$.

2054. $m^2 = a^2 - r^2 = 8r^2 \Rightarrow m = 2\sqrt{2}\cdot r$. $\qquad V = \frac{1}{3}\cdot r^2\pi \cdot 2\sqrt{2}\cdot r = \frac{2\sqrt{2}}{3}r^3\pi \Rightarrow r = 4{,}37\ \text{cm}$.

$A = r\cdot 4r\cdot\pi = 4r^2\pi \Rightarrow A \approx \underline{\underline{240\ \text{cm}^2}}$.

2055. A tengelymetszet területe: $m\cdot r = 1{,}56\ \text{m}^2$; $a^2 = m^2 + r^2 \Rightarrow a^2 + 2mr = (m+r)^2$ és $a^2 - 2mr = (m-r)^2 \Rightarrow$ **1. eset:** $m + r = 2{,}744$ és $m - r = 1{,}136 \Rightarrow m = 1{,}94$ és $r = 0{,}804 \Rightarrow$ $\Rightarrow V \approx \underline{\underline{1{,}31\ \text{m}^3}}$. **2. eset:** $m + r = 2{,}744$ és $m - r = -1{,}136 \Rightarrow m = 0{,}804$ és $r = 1{,}94 \Rightarrow V \approx \underline{\underline{3{,}17\ \text{m}^3}}$.

2056. $V \approx \underline{\underline{449{,}3\ \text{cm}^3}}$.

2057. $A \approx \underline{\underline{23\,360{,}1\ \text{cm}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{237\,203\ \text{cm}^3}}$.

2058. $A = \underline{\underline{\frac{3a^2\pi}{4}}}$ és $V = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}a^3\pi}{24}}}$.

2059. Tekintsük a 2027. ábrát. $\varepsilon = 240°$. $\frac{2}{3}\cdot 2a\pi = 2r\pi \Rightarrow r = \frac{2}{3}a = 8\ \text{cm} \Rightarrow m = 4\sqrt{5}\ \text{cm}. \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{256\sqrt{5}\cdot\pi}{3} \approx \underline{\underline{599{,}4\ \text{cm}^3}}$.

2060. $V \approx \underline{\underline{391{,}8\ \text{cm}^3}}$.

2061. $A \approx \underline{\underline{1973{,}1\ \text{cm}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{5723{,}34\ \text{cm}^3}}$.

2062. $V \approx \underline{\underline{3{,}56\ \text{m}^3}}$.

2063. $A \approx \underline{\underline{15{,}46\ \text{m}^2}}$.

2064. Tekintsük a 2044. ábrát. Hasonlóság miatt: $\frac{V_1}{V} = \lambda^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, valamint

$\frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a} = \frac{m_1}{m} = \lambda. \Rightarrow r_1 = \lambda r = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot 12{,}7 \approx \underline{\underline{10{,}08\ \text{cm}}}$ és $m_1 = \lambda m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot 42{,}6 \approx \underline{\underline{33{,}81\ \text{cm}}}$.

2065. Tekintsük a 2044. ábrát. Hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a} = \frac{m_1}{m} = \lambda$ és $\frac{V_1}{V} = \lambda^3$. Mivel

$\frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Rightarrow m_1 = \underline{\underline{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot m}}$.

2066. A 2044. ábra jelöléseit használva a hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a} = \frac{m_1}{m} = \lambda$ és $\frac{V_1}{V} = \lambda^3$.

$V = \frac{1}{3}r^2\pi m \approx 26\,575{,}59\ \text{dm}^3$ és $V - V_1 = 7972{,}8\ \text{dm}^3 \Rightarrow V_1 \approx 18\,602{,}8\ \text{dm}^3 \Rightarrow \lambda \approx 0{,}88 \Rightarrow m_1 = \lambda m \approx$

$\approx \underline{\underline{47{,}41\ \text{dm}}}$.

II

2067. Tekintsük a 2027. ábrát. a = állandó; $r = a \cdot \sin\varphi$; $m = a \cdot \cos\varphi$. Alkalmazzuk az $abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ középértékekre vonatkozó egyenlőtlenséget! $V = \frac{1}{3} r^2\pi m =$

$= \frac{\pi}{3} a^2 \cdot \sin^2\varphi \cdot a \cdot \cos\varphi = \frac{\pi}{3} a^3(1-\cos^2\varphi)\cdot\cos\varphi \Rightarrow V^2 = \frac{a^6\pi^2}{9}\cdot(1-\cos^2\varphi)\cdot(1-\cos^2\varphi)\cdot\cos^2\varphi =$

$= \frac{a^6\pi^2}{18}\cdot(1-\cos^2\cdot\varphi)(1-\cos^2\cdot\varphi)\cdot 2\cos^2\cdot\varphi\cdot \le \frac{a^6\pi^2}{18}\cdot\left(\frac{1-\cos^2\varphi+1-\cos^2\varphi+2\cos^2\varphi}{3}\right)^3 =$

$= \frac{a^6\pi^2}{18}\cdot\frac{8}{27} = \frac{4\pi^2a^6}{243}$. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $1-\cos^2\varphi = 2\cos^2\varphi$, azaz $|\cos\varphi| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Mivel φ a kúp nyílásszögének fele, ezért koszinusza nem lehet negatív, vagyis $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi \approx 54{,}74° \Rightarrow$ A $2\varphi \approx 109{,}47°$ nyílásszögű kúp térfogata maximális az egyenlő alkotójú kúpok közül. Ekkor $V_{max.} = \sqrt{\frac{4\pi^2a^6}{243}} = \frac{2a^3\pi\sqrt{3}}{27}$.

2068. A 2027. ábra jelöléseivel: $m^2 = a^2 - r^2$; $A = r(r+a)\pi \Rightarrow a = \frac{A}{r\pi} - r$. $V = \frac{1}{3} r^2\pi m =$

$= \frac{1}{3} r^2\pi\sqrt{a^2-r^2} = \frac{1}{3} r^2\pi\cdot\sqrt{\left(\frac{A}{r\pi}-r\right)^2 - r^2} = \frac{1}{3} r^2\pi\cdot\frac{1}{r\pi}\cdot\sqrt{A^2-2Ar^2\pi} = \frac{r}{3}\cdot\sqrt{A^2-2Ar^2\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow V^2 = \frac{r^2}{9}\cdot(A^2-2Ar^2\pi) \Rightarrow 9V^2 = r^2A^2 - 2Ar^4\pi = -2A\pi\cdot\left(r^4 - \frac{r^2A}{2\pi}\right) =$

$= -2A\pi\cdot\left[\left(r^2-\frac{A}{4\pi}\right)^2 - \frac{A^2}{16\pi^2}\right]$. A másodfokú kifejezést a geometriai adatokkal összevetve akkor van maximum, amikor $r^2 = \frac{A}{4\pi} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{A\pi}}{2\pi}$. Ekkor $a = \frac{A}{r\pi} - r = \frac{A}{\frac{\sqrt{A\pi}}{2\pi}\cdot\pi} - \frac{\sqrt{A\pi}}{2\pi} =$

$= \frac{2A}{\sqrt{A\pi}} - \frac{\sqrt{A\pi}}{2\pi} = \frac{4\sqrt{A\pi} - \sqrt{A\pi}}{2\pi} = \frac{3\sqrt{A\pi}}{2\pi} = 3r$, vagyis akkor maximális a térfogat, ha az alkotó az alapkör sugarának háromszorosa.

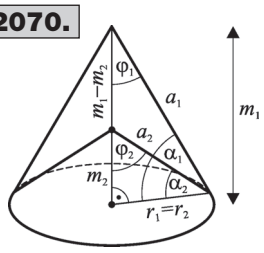
2069. A 2068. feladatban láttuk, hogy az A felszínű kúpok közül annak maximális a térfogata, amelyre $r = \frac{\sqrt{A\pi}}{2\pi}$ és $a = 3r. \Rightarrow m = \sqrt{a^2-r^2} = 2r\cdot\sqrt{2}$. $V_{max.} = \frac{1}{3} r^2\pi m = \frac{1}{3} r^2\pi\cdot 2r\cdot\sqrt{2} =$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3} r^3\pi = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{\frac{A^3}{64\pi^3}}\cdot\pi = \sqrt{\frac{A^3}{72\pi}}$. $V \le V_{max.} \Rightarrow V \le \sqrt{\frac{A^3}{72\pi}} \Rightarrow 72\pi V^2 \le A^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[3]{72\pi V^2} \le A \Rightarrow A_{min.} = \sqrt[3]{72\pi V^2}$, azaz a minimális felszínhez tartozó térfogat pont $V_{max.}$, tehát $\underline{\underline{a = 3r}}$.

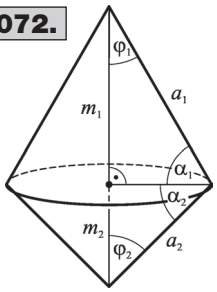
2070. $a=\dfrac{r}{\cos\alpha}$ és $m=r\cdot\operatorname{tg}\alpha$. $A=t_{p_1}+t_{p_2}=r_1a_1\pi+r_2a_2\pi=$
$=r\pi(a_1+a_2)=r\pi\cdot\left(\dfrac{r}{\cos\alpha_1}+\dfrac{r}{\cos\alpha_2}\right)=r^2\pi\cdot\left(\dfrac{1}{\cos\alpha_1}+\dfrac{1}{\cos\alpha_2}\right)\approx$
$\approx\underline{\underline{492{,}7\ \text{cm}^2}}$. $V=V_1-V_2=\dfrac{1}{3}r_1^2\pi m_1-\dfrac{1}{3}r_2^2\pi m_2=\dfrac{1}{3}r^2\pi(m_1-m_2)=$
$=\dfrac{1}{3}r^2\pi(r\cdot\operatorname{tg}\alpha_1-r\cdot\operatorname{tg}\alpha_2)=\dfrac{1}{3}r^3\pi(\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\alpha_2)\approx\underline{\underline{600\ \text{cm}^3}}$.

2070.



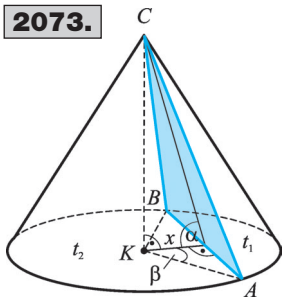
2071. Mivel a kúpok szimmetriatengelye közös, a térfogat nem függ a kisebb kúp nagyobb kúpon belüli helyzetétől. Hasonlóság miatt: $\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{m_2}{m_1}\Rightarrow m_2=14{,}4$ cm. $V=V_1-V_2=\dfrac{1}{3}r_1^2\pi m_1-$
$-\dfrac{1}{3}r_2^2\pi m_2=\dfrac{1}{3}\pi(r_1^2m_1-r_2^2m_2)\approx\underline{\underline{919{,}8\ \text{cm}^3}}$.

2072.



2072. $\varphi_2=45°\Rightarrow m_2=r$ és $\varphi_1=30°\Rightarrow m_1=r\cdot\sqrt{3}$.
1. eset: A 2070. ábrának megfelelően $3{,}2=m_1-m_2=r\left(\sqrt{3}-1\right)\Rightarrow$
$\Rightarrow r\approx4{,}37$ dm. $V=V_1-V_2=\dfrac{1}{3}r^2\pi m_1-\dfrac{1}{3}r^2\pi m_2=$
$=\dfrac{1}{3}r^2\pi(m_1-m_2)\approx\underline{\underline{64{,}03\ \text{dm}^3}}$.
2. eset: $3{,}2=m_1+m_2=r\left(\sqrt{3}+1\right)\Rightarrow r\approx1{,}17$ dm. $V=V_1+V_2=$
$=\dfrac{1}{3}r^2\pi(m_1+m_2)\approx\underline{\underline{4{,}59\ \text{dm}^3}}$.

2073.



2073. $t_{\text{alap}}=r^2\pi\approx201{,}06\ \text{cm}^2$. $\dfrac{m}{x}=\operatorname{tg}\alpha\Rightarrow x=\dfrac{m}{\operatorname{tg}\alpha}\approx2{,}98$ cm.
$\dfrac{x}{r}=\cos\beta\Rightarrow\beta\approx68{,}16°\Rightarrow t_1=r^2\pi\cdot\dfrac{2\beta}{360°}-\dfrac{1}{2}r^2\cdot\sin2\beta\approx54\ \text{cm}^2\Rightarrow$
$\Rightarrow t_2=t-t_1\approx147{,}06\ \text{cm}^2$. $V_1=\dfrac{1}{3}t_1m\approx\underline{\underline{252\ \text{cm}^3}}$ és $V_2=\dfrac{1}{3}t_2m\approx\underline{\underline{686{,}28\ \text{cm}^3}}$.

2074. $t_{ABC\triangle}=\sqrt{s(s-2r)(s-a_1)(s-a_2)}=\dfrac{1}{2}\cdot2rm=rm$, ahol $s=\dfrac{2r+a_1+a_2}{2}\Rightarrow m\approx25{,}97$ cm;
$V=\dfrac{1}{3}r^2\pi m\approx\underline{\underline{2719{,}3\ \text{cm}^3}}$.

2075. A 2032. ábrának megfelelően, az alapkör sugarát r-rel jelölve: $\alpha=45°$; $a_1+a_2=8\Rightarrow$
$\Rightarrow a_2=8-a_1$; $t_{ABC\triangle}=\dfrac{15\sqrt{2}}{4}$. $t_{ABC\triangle}=\dfrac{1}{2}a_1a_2\cdot\sin\alpha=\dfrac{1}{2}a_1(8-a_1)\cdot\sin\alpha\Rightarrow a_1=3$ dm és $a_2=$
$=5$ dm. Koszinusztétel $ABC\triangle$-re: $(2r)^2=a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cdot\cos\alpha\Rightarrow r^2=3{,}20\Rightarrow r\approx1{,}79$ dm. $t_{ABC\triangle}=$
$=rm\Rightarrow m\approx2{,}96$ dm; $V=\dfrac{1}{3}r^2\pi m\approx\underline{\underline{9{,}92\ \text{dm}^3}}$.

2076. A 2032. ábra szerint (az alapkör sugarát r-rel jelölve): $a_1=32$ cm; $a_2=58$ cm;
$\varepsilon=CBA\sphericalangle=65°15'$. $m=a_1\cdot\sin\varepsilon\approx29{,}06$ cm. Koszinusztétel $ABC\triangle$-re: $a_2^2=a_1^2+(2r)^2-$
$-2a_12r\cdot\cos\varepsilon\Rightarrow r\approx31{,}79\ \text{cm}\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}r^2\pi m\approx\underline{\underline{30\,754{,}3\ \text{cm}^3}}$.

II

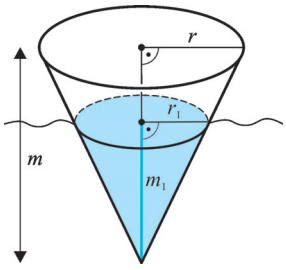
2077. Tekintsük a 2027. ábrát. $t_p = k \cdot t_a$, azaz $ra\pi = k \cdot r^2\pi \Rightarrow a = kr$. $\frac{\varepsilon}{360°} = \frac{2r\pi}{2a\pi} = \frac{r}{a} = \frac{1}{k} \Rightarrow \varepsilon = \frac{360°}{k}$.

2078. A 2027. ábra jelöléseivel: $\varepsilon = 36°$. $\frac{\varepsilon}{360°} = \frac{t}{a^2\pi} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{10t}{\pi}} \Rightarrow t = ar\pi = \sqrt{\frac{10t}{\pi}} \cdot r\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow r = \frac{t}{\sqrt{10t\pi}}$. $m^2 = a^2 - r^2 = \frac{10t}{\pi} - \frac{t^2}{10t\pi} = \frac{99t}{10\pi} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{99t}{10\pi}}$. $V = \frac{1}{3}r^2\pi m =$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^2}{10t\pi} \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{99t}{10\pi}} = \frac{t\sqrt{11t}}{10\sqrt{10\pi}}$.

2079. A homokkúp $\underline{5{,}76\text{ m}}$ széles és $\underline{1{,}73\text{ m}}$ magas.

2080. A 2044. ábra jelöléseivel: $2r_1\pi = 25{,}12 \Rightarrow r_1 \approx 4\text{m} = 40\text{ dm}$; $m_1^2 = a_1^2 - r_1^2 \Rightarrow m_1 \approx 30\text{ dm}$.
A kiálló rész és az egész tömb hasonló. A hasonlóság aránya $\lambda = \frac{m_1}{m} = \frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a}$ és $\frac{V_1}{V} = \lambda^3$.
$(V - V_1) \cdot \varrho_{víz} = V \cdot \varrho_{jég}$. Ezért $(V - \lambda^3 V) \cdot \varrho_{víz} = V \cdot \varrho_{jég} \Rightarrow 1 - \lambda^3 = 0{,}9 \Rightarrow \lambda^3 = 0{,}1$. $V = \frac{V_1}{\lambda^3} =$
$= \frac{\frac{1}{3}r_1^2\pi m_1}{\lambda^3} = \frac{1600\pi \cdot 30}{3 \cdot 0{,}1} = 160\,000\pi$. A jégtömb tömege: $V \cdot \varrho_{jég} =$
$= 160\,000\pi \cdot 0{,}9 \approx \underline{452\,389\text{ kg}}$.

2081.



2081. Hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r} = \frac{m_1}{m} \Rightarrow r_1 = \frac{m_1}{m} \cdot r$. $\frac{1}{3}r^2\pi m\varrho =$
$= \frac{1}{3}r_1^2\pi m_1\varrho_{víz} \Rightarrow r^2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}73 = r_1^2 \cdot m_1 \cdot 1 \Rightarrow r^2 \cdot 0{,}1825 =$
$= \frac{m_1^2}{m^2} \cdot r^2 \cdot m_1 \Rightarrow m_1^3 = 0{,}1825\, m^2 \Rightarrow m_1 \approx 0{,}225$ dm. $\underline{2{,}25\text{ cm}}$-re merül a víz alá.

Csonkakúp

2082. $a \approx \underline{11{,}9\text{ cm}}$ és $\alpha \approx \underline{40{,}9°}$.

2083. $m \approx \underline{0{,}67\text{ cm}}$ és $\alpha \approx \underline{16{,}96°}$.

2084. $r \approx \underline{11{,}91\text{ cm}}$ és $\alpha \approx \underline{44{,}5°}$.

2085. $m = \underline{20{,}7\text{ m}}$ és $a \approx \underline{29{,}27\text{ m}}$.

2086. *a)* $A = \underline{2027{,}08\text{ cm}^2}$; *b)* $A \approx 127\,372\text{ mm}^2 \approx \underline{1273{,}7\text{ cm}^2}$.

2087. $t_p \approx \underline{2803{,}9\text{ cm}^2}$.

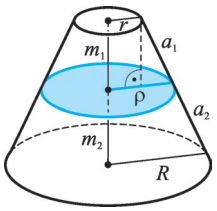
2088. $628{,}17 = [(r+6)^2 + r^2 + (2r+6) \cdot 12{,}6] \cdot \pi \Rightarrow r = \underline{2{,}125\text{ cm}}$ és $R = \underline{8{,}125\text{ cm}}$.

2089. $t_p = 4r \cdot a \cdot \pi$; $\frac{R-r}{a} = \cos\alpha \Rightarrow a = \frac{R-r}{\cos\alpha} = \frac{2r}{\cos\alpha} \Rightarrow$

$t_p = 4r \cdot \frac{2r}{\cos\alpha} \cdot \pi = \frac{8r^2\pi}{\cos\alpha} \Rightarrow r^2 = \frac{t_p \cdot \cos\alpha}{8\pi} \Rightarrow r^2 \approx 20{,}3\ \text{cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r \approx \underline{\underline{4{,}505\ \text{cm}}} \Rightarrow R \approx \underline{\underline{13{,}515\ \text{cm}}}$.

2093.



2090. $R^2\pi = 25 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$ és $r^2\pi = 17 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{\pi}}$. $t_p = (R+r) \cdot a \cdot \pi =$

$= \frac{\sqrt{17}+5}{\sqrt{\pi}} \cdot 12 \cdot \pi = \left(\sqrt{17}+5\right) \cdot 12\sqrt{\pi} \approx \underline{\underline{194\ \text{cm}^2}}$.

2091. $m \approx \underline{\underline{4{,}96\ \text{cm}}}$.

2092. $m \approx \underline{\underline{1{,}33\ \text{dm}}}$.

2093. $t_{p_1} = t_{p_2} = 0{,}5\,t_p$, azaz $(r+\varrho) \cdot a_1 \cdot \pi = (\varrho+R) \cdot a_2 \cdot \pi = 0{,}5 \cdot (r+R) \cdot a \cdot \pi \Rightarrow (r+\varrho) \cdot a_1 =$

$= 0{,}5 \cdot (r+R) \cdot a$, valamint $(\varrho+R) \cdot (a-a_1) = 0{,}5 \cdot (r+R) \cdot a \Rightarrow a_1 \approx 10{,}47\ \text{cm}$ és $\varrho \approx \underline{\underline{14{,}3\ \text{cm}}}$.

$m_1^2 = a_1^2 - (\varrho - \text{r})^2 \Rightarrow m_1 \approx \underline{\underline{10{,}14\ \text{cm}}}$.

2094. *a)* $V \approx \underline{\underline{439{,}7\ \text{cm}^3}}$; *b)* $V \approx \underline{\underline{0{,}019\ \text{cm}^3}}$; *c)* $V \approx \underline{\underline{4460{,}5\ \text{cm}^3}}$; *d)* $V \approx \underline{\underline{113{,}89\ \text{cm}^3}}$.

2095. A vízgyűjtőbe körülbelül $\underline{\underline{490{,}61}}$ víz fér.

2096. $V \approx \underline{\underline{2075{,}5\ \text{cm}^3}}$.

2097. $2R\pi = 50 \Rightarrow R \approx 7{,}96$ és $2r\pi = 30 \Rightarrow r \approx 4{,}77$. $V = \frac{1}{3}(R^2 + r^2 + Rr) \cdot m \cdot \pi \Rightarrow m \approx 2{,}67$

és $\frac{m}{R-r} = \text{tg}\,\alpha \Rightarrow \alpha \approx \underline{\underline{39{,}9°}}$.

2098. $2021{,}6 = \frac{1}{3} \cdot (5{,}7^2 + r^2 + 5{,}7r) \cdot 32{,}5\pi \Rightarrow r^2 + 5{,}7r - 26{,}91 = 0$. $r = \underline{\underline{3{,}05\ \text{dm}}}$.

2099. $V_k = 0{,}5V_h$, azaz $\frac{1}{3} \cdot (R^2 + r^2 + Rr) \cdot m \cdot \pi = 0{,}5 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot m \Rightarrow R^2 - 2Rr - 2r^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_1 = r \cdot \left(1 - \sqrt{3}\right) < 0$, ez nem lehet. $R_2 = r \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \Rightarrow \frac{R}{r} = \underline{\underline{1 + \sqrt{3}}}$.

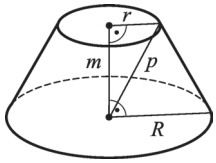
2100. Maximális teher: $t = 36 \cdot V \cdot \varrho_{\text{víz}} - 36 \cdot V \cdot \varrho = 36 \cdot V \cdot (\varrho_{\text{víz}} - \varrho)$, ahol

$V = \frac{1}{3}(1{,}4^2 + 1^2 + 1{,}4 \cdot 1) \cdot 120 \cdot \pi \approx 547{,}9\ \text{dm}^3 \Rightarrow t = 36 \cdot 547{,}9 \cdot (1 - 0{,}6) \approx \underline{\underline{7889{,}76\ \text{kg}}}$.

2101. A folyadék tömege $\underline{\underline{35{,}26\ \text{kg}}}$.

2102. $p = 2r \Rightarrow m = \sqrt{3}\,r$; $r^2\pi = 3 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$; $R^2\pi = 12 \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{3}{\pi}}$.

2102.



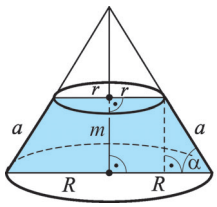
$V = \frac{1}{3} \cdot \left(12 + 3 + 2\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{3}{\pi}}\,\pi\right)\sqrt{3}\sqrt{\frac{3}{\pi}} = (15+6) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{21}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow$

$\Rightarrow V \approx \underline{\underline{11{,}85\ \text{m}^3}}$.

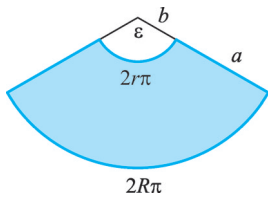
2103. $5V \approx \underline{\underline{157{,}16\ \text{m}^3}}$.

II

2104.



2109.



2104. $a = 2r$; $k_{\text{trapéz}} = 2r + 2a + 2R = 6r + 2R = 15 \Rightarrow R = 7{,}5 - 3r$. $a^2 = m^2 + (R-r)^2$, azaz $4r^2 = 9 + (R-r)^2 \Rightarrow 4r^2 = 9 + (7{,}5 - 4r)^2 \Rightarrow 0 = r^2 - 5r + 5{,}4375 \Rightarrow r_1 = 3{,}4 \Rightarrow R = -2{,}7$ (ez nem lehet). $r_2 = 1{,}6 \Rightarrow R = 2{,}7$. $A \approx \underline{\underline{74{,}14\ \text{m}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{44{,}52\ \text{m}^3}}$.

2105. A testet a fejtetőre állított 2104. ábrán szemléltetjük. $V \approx 35\,137{,}7\ \text{cm}^3 \approx 35{,}14\ \text{dm}^3$; $a^2 = m^2 + (R-r)^2 \Rightarrow a \approx 38{,}8$ cm. A vödör teteje nyitott, ezért $A = (r^2 + (R+r)\,a) \cdot \pi \Rightarrow$ $\Rightarrow A \approx 4675{,}3\ \text{cm}^2$. A hulladékot is számítva: $A' = 1{,}06 \cdot A \approx 4955{,}8\ \text{cm}^2 \approx 50\ \text{dm}^2$. A vödör elkészítéséhez $\underline{\underline{50\ \text{dm}^2}}$ bádog kell és kb. $\underline{\underline{35}}$ l víz fér bele.

2106. Tekintsük a 2104. ábrát. $\dfrac{R-r}{a} = \cos\alpha \Rightarrow a = \dfrac{R-r}{\cos\alpha} \approx 65$ cm; $m = a \cdot \sin\alpha \approx 56$ cm. $128{,}64\ \text{dm}^2 = 12\,864\ \text{cm}^2 = (r+R)\,a\pi \Rightarrow r + R = 63$ cm és $R - r = 33$ cm $\Rightarrow R = 48$ cm és $r = 15$ cm. $\Rightarrow V \approx \underline{\underline{190\,531\ \text{cm}^3}}$.

2107. (1) $(R^2 + r^2 + (R+r)\,a) \cdot \pi = 527{,}5\ \text{dm}^2$; (2) $(r+R)a\pi = 314{,}2\ \text{dm}^2$; (3) $a = 10{,}3$ dm; (1) és (2) egyenletekből: $R^2 + r^2 \approx 67{,}9$; valamint (2) és (3) egyenletekből: $R + r \approx 9{,}71 \Rightarrow r \approx$ $\approx 1{,}6325$ dm és $R \approx 8{,}0775$ dm. $m^2 = a^2 - (R-r)^2 \Rightarrow m \approx 8{,}03$ dm. $\Rightarrow V \approx \underline{\underline{682\ \text{dm}^3}}$.

2108. $a^2 = m^2 + (R-r)^2 \Rightarrow R - r \approx 7{,}38$, valamint $t_p = (R+r)a\pi \Rightarrow R + r \approx 16{,}5$. $R \approx 11{,}94$ dm és $r \approx 4{,}56$ dm $\Rightarrow V \approx \underline{\underline{1436{,}93\ \text{dm}^3}}$.

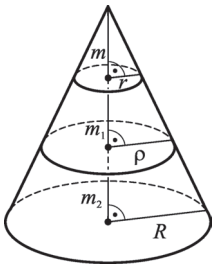
2109. $\varepsilon = 120° \Rightarrow \dfrac{1}{3} \cdot 2b \cdot \pi = 2r\pi \Rightarrow r = \dfrac{1}{3}\,b \approx 0{,}83$ cm és $\dfrac{1}{3} \cdot 2(b+a)\pi = 2R\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \dfrac{1}{3}\,(a+b) = 2$ cm; $a = 6$ cm $- 2{,}5$ cm $= 3{,}5$ cm; $m^2 = a^2 - (R-r)^2 \Rightarrow m \approx 3{,}3$ cm $\Rightarrow$ $A \approx \underline{\underline{45{,}85\ \text{cm}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{2{,}94\ \text{cm}^3}}$.

2110. A 2109. és a 2104. ábra jelöléseit használva: $b = a$. $\dfrac{\varepsilon}{360°} = \dfrac{2r\pi}{2a\pi} = \dfrac{2R\pi}{4a\pi} \Rightarrow R = 2r$ és $a = r \cdot \dfrac{360°}{\varepsilon}$. $t_p = (R+r) \cdot a \cdot \pi = 3r \cdot r \cdot \dfrac{360°}{\varepsilon} \cdot \pi \Rightarrow r \approx 2{,}68$ cm $\Rightarrow R \approx 5{,}36$ cm és $a \approx 8$ cm; $m^2 = a^2 - (R-r)^2 \Rightarrow m \approx 7{,}54$ cm $\Rightarrow V \approx \underline{\underline{396{,}98\ \text{cm}^3}}$.

2111. Tekintsük a 2093. ábrát. $R = 8{,}6$ m, $r = 5{,}8$ m, $m_1 + m_2 = 7$ m, $m_2 = 2$ m. $(a_1 + a_2)^2 =$ $= (m_1 + m_2)^2 + (R-r)^2 \Rightarrow a_1 + a_2 \approx 7{,}54$ m. Párhuzamos szelők tétele miatt $a_1 : a_2 = m_1 : m_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_1 \approx 5{,}39$ m és $a_2 \approx 2{,}15$ m. $a_1^2 = m_1^2 + (\varrho - r)^2 \Rightarrow \varrho \approx 7{,}81$ m. $V_1 = \dfrac{1}{3}\,(r^2 + \varrho^2 + r \cdot \varrho) \cdot m_1 \cdot \pi$ és $V_2 = \dfrac{1}{3}\,(\varrho^2 + R^2 + \varrho \cdot R) \cdot m_2 \cdot \pi \Rightarrow V_1 \approx \underline{\underline{732{,}7\ \text{m}^3}}$ és $V_2 \approx \underline{\underline{423{,}3\ \text{m}^3}}$.

2112. Tekintsük a csonkakúp kiegészítő kúpját! A háromszögek hasonlósága miatt: $\frac{m}{m_1+m_2+m}=\frac{r}{R}$, azaz $\frac{m}{m+14}=\frac{6}{8}\Rightarrow\ m=42$ dm a kiegészítő kúp magassága. A kúpok hasonlósága miatt:



$\left(\frac{r}{\varrho}\right)^3=\frac{V}{V+V_1}$, ahol $V=\frac{1}{3}r^2\pi m\approx 1583{,}36\ \text{dm}^3$ és

$V_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(r^2+R^2+r\cdot R)\cdot(m_1+m_2)\cdot\pi\approx 1084{,}9\ \text{dm}^3\Rightarrow\varrho=1{,}19r_1\approx$

$\approx \underline{\underline{7{,}14\ \text{dm}}}$ a metszetkör sugara. A háromszögek hasonlósága miatt: $\frac{m+m_1}{m}=\frac{\varrho}{r}\Rightarrow m_1\approx 7{,}98$ dm, tehát a fedőkör síkjától mérve $\underline{\underline{7{,}98\ \text{dm}}}$ távolságban kell metszeni a csonkakúpot.

2113. Tekintsük a 2104. ábrát. Legyen $M-m=m_0\Rightarrow M=10$ m, $R=5$ m. $V_{\text{kúp}}=\frac{1}{3}R^2\pi M\approx$

$\approx 261{,}8\ \text{m}^3$ és $V_{\text{csonkakúp}}=20\ \text{m}^3\Rightarrow V_{\text{kis kúp}}=V_{\text{kúp}}-V_{\text{csonkakúp}}\approx 241{,}8\ \text{m}^3$. $V_{\text{kis kúp}}=\frac{1}{3}r^2\pi m_0$, valamint hasonlóság miatt $\frac{m_0}{r}=\frac{M}{R}=2\Rightarrow m_0=2r\Rightarrow V_{\text{kis kúp}}=\frac{1}{3}r^2\pi\cdot 2r=\frac{2}{3}r^3\pi\Rightarrow r\approx 4{,}87$ m $\Rightarrow$

$\Rightarrow m=M-m_0=2R-2r\Rightarrow m\approx \underline{\underline{0{,}26\ \text{méter}}}$ távolságban kell a kúpot metszeni.

2114. Tekintsük a 2112. ábrát. $m_1+m_2=4$ dm, $R=5$ dm, $r=3$ dm, ϱ a vízfelszínnel egy szinten levő kör sugara. $V_t\cdot\varrho_t=V_t'\cdot\varrho_f\Rightarrow V_t'=V_t\cdot\frac{\varrho_t}{\varrho_f}=(9+25+15)\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot 0{,}6\approx 123{,}15\ \text{dm}^3$.

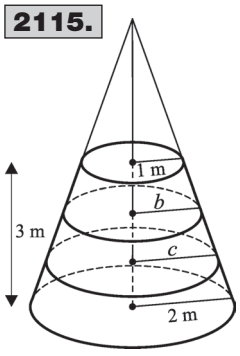
$\frac{m}{m+4}=\frac{3}{5}\Rightarrow 5m=3m+12\Rightarrow m=6$ dm. $V_{\text{kis kúp}}=\frac{1}{3}\cdot 3^2\cdot\pi\cdot 6=18\pi\approx 56{,}54\ \text{dm}^3$ és $V_t-V_t'=$

$=82{,}1\ \text{dm}^3\Rightarrow V_{\text{kis kúp}}+V_t-V_t'=138{,}64\ \text{dm}^3$. Hasonlóság miatt: $6:3=(6+4-m_2):\varrho\Rightarrow 6\varrho=$

$=3(10-m_2)\Rightarrow 10-2\varrho=m_2$. $\qquad 138{,}64=\frac{1}{3}\varrho^2\pi\cdot(6+4-m_2)=\frac{1}{3}\varrho^2\pi\cdot 2\varrho=\frac{2}{3}\varrho^3\pi\Rightarrow\varrho\approx$

$\approx 4{,}04\Rightarrow m_2=\underline{\underline{1{,}92\ \text{dm}}}$.

2115. Tekintsük a csonkakúpot a kiegészítő kúpjával együtt. Az egyesített kúpot metsző síkok a kiegészítő kúppal hasonló kúpokat vágnak le. Bármely két hasonló kúp térfogatának aránya egyenlő a hasonlósági arány köbével. A kúpok térfogata a csúcstól lefelé haladva rendre: V_1; V_2; V_3; V_4. $\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{b}{1}\right)^3$ $\frac{V_3}{V_1}=\left(\frac{c}{1}\right)^3$ $\frac{V_4}{V_1}=\left(\frac{2}{1}\right)^3$. A feladat feltétele szerint a csonkakúpok térfogataránya: $(V_2-V_1):(V_4-V_1)=2:(2+3+7)=$



$=1:6\Rightarrow(V_1\cdot b^3-V_1):(V_1\cdot 2^3-V_1)=(b^3-1):(2^3-1)=1:6\Rightarrow$

$\Rightarrow b^3=\frac{13}{6}\Rightarrow b=\sqrt[3]{\frac{13}{6}}$. $\qquad (V_3-V_1):(V_4-V_1)=(2+3):(2+3+7)=$

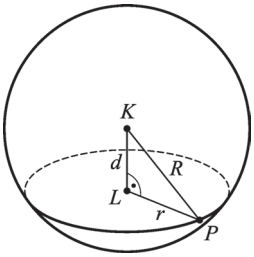
$=5:12\Rightarrow(V_1\cdot c^3-V_1):(V_1\cdot 2^3-V_1)=(c^3-1):(2^3-1)=5:12\Rightarrow$

$\Rightarrow c^3=\frac{47}{12}\Rightarrow c=\sqrt[3]{\frac{47}{12}}$.

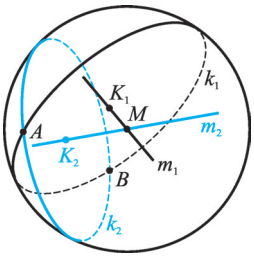
Gömb

II

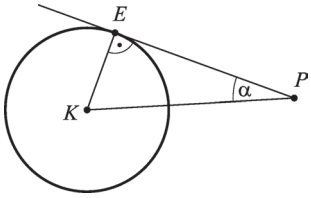
2116.



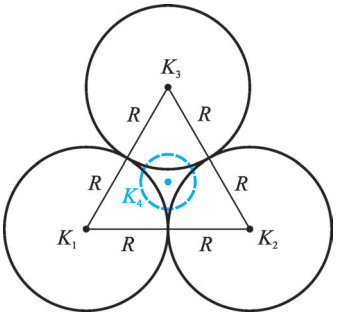
2117.



2121.



2122/I.



2116. KLP derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $R^2 = d^2 + r^2$.

2117. $k_1 \cap k_2 = \{A; B\}$. k_1 összes pontjától egyforma távolságra lévő pontok halmaza a k_1 kör K_1 középpontjában k_1 síkjára állított merőleges egyenes: m_1. k_2 összes pontjától egyforma távolságra lévő pontok halmaza a k_2 kör K_2 középpontjában k_2 síkjára állított merőleges egyenes: m_2. A fentiekből következik, hogy m_1 és m_2 is benne van az AB szakasz felezőmerőleges síkjában és m_1 nem párhuzamos m_2-vel. $\Rightarrow m_1$ metszi m_2-t és $m_1 \cap m_2 = M$. Az M középpontú, MA sugarú gömb az egyetlen, aminek k_1 és k_2 is síkmetszete.

2118. Használjuk a 2117. ábra jelöléseit. k_1 és k_2 kör síkja párhuzamos. K_1-et és K_2-t összekötő m egyenes merőleges a k_1 és k_2 körök síkjaira, ezért m minden pontja egyforma messze van k_1 pontjaitól, valamint k_2 pontjaitól, így m-en lesz a keresett gömb középpontja. Tekintsük k_1 és k_2 körök $r_1 \parallel r_2$ sugarát! Ezek metszéspontja k_1-gyel, illetve k_2-vel A, illetve B. A-tól és B-től egyforma távolságra lévő pontok halmaza az AB szakasz felezőmerőleges síkja: S. S és m helyzetéből következik, hogy m döfi S-et. Legyen $m \cap S = M$. Az M középpontú, MA sugarú gömb az egyetlen, aminek k_1 és k_2 is síkmetszete.

2119. Használjuk a 2117. ábra jelöléseit. k_1 és k_2 körnek egy közös pontja van. Legyen $k_1 \cap k_2 = A$. k_1 kör K_1 középpontjában k_1 síkjára állított merőleges m_1; k_2 kör K_2 középpontjában k_2 síkjára állított merőleges m_2. $e \perp AK_1$ és $e \perp m_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow e \perp [m_1; A]$, valamint $e \perp AK_2$ és $e \perp m_2 \Rightarrow e \perp [m_2; A]$. Mivel e-re A-ban csak egy merőleges sík állítható, m_1 és m_2 egy síkban van. m_1 és m_2 nem párhuzamos, ezért metszik egymást, $m_1 \cap m_2 = M$. M egyforma távolságra van k_1 pontjaitól és k_2 pontjaitól. $\Rightarrow M$ középpontú, MA sugarú gömb az egyetlen, aminek k_1 és k_2 is síkmetszete.

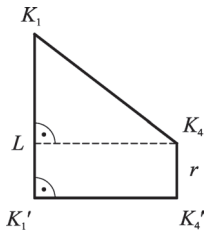
2120. A k kör pontjaitól egyforma távolságra lévő pontok halmaza a k körre a K középpontban állított merőleges: m. Legyen $A \in k$. A-tól és P-től egyforma távolságra lévő pontok halmaza az AP szakasz felezőmerőleges síkja: S. P nincs rajta k_1 síkján $\Rightarrow m$ nem párhuzamos S-sel $\Rightarrow m$ döfi S-et, $m \cap S =$
$= M$. Az M középpontú, MP sugarú gömb az egyetlen, aminek síkmetszete k és áthalad P-n.

2121. P-ből húzott érintő érintési pontja: E. $PE \perp EK$, ezért felírható Pitagorasz tétele a $PEK\triangle$-re: $PK^2 = PE^2 + EK^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow PE^2 = PK^2 - KE^2 =$ állandó $\Rightarrow PE$ állandó és $\sin \alpha = \dfrac{KE}{KP}$ szintén állandó $\Rightarrow \alpha$ is állandó $\Rightarrow PE$ alkotója a PK tengelyű, 2α nyílásszögű forgáskúpnak.

2122. Az R sugarú gömbök középpontjainak merőleges vetületei a közös érintősíkra $2R$ oldalú szabályos háromszöget határoznak meg. E háromszög középpontja a negyedik gömb

középpontjának vetülete, ezért $K_1'K_4' = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2R = 2\frac{\sqrt{3}}{3} R$. Készítsünk az S-re merőleges síkmetszetet K_1-en és K_4-en át! $K_1K_1' = R$; $K_4K_4' = r$, a negyedik gömb sugara; $K_1L = K_1K_1' - K_4K_4' = R - r$; $LK_4 = K_1'K_4'$; $K_1K_4 = R + r$. Pitagorasz tétele a $K_1LK_4\triangle$-re: $K_1K_4^2 = K_1L^2 + LK_4^2$, azaz $(R+r)^2 =$

2122/II.



$$= (R-r)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} R\right)^2 \Rightarrow R^2 + 2Rr + r^2 = R^2 - 2Rr + r^2 + \frac{4}{3} R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \underline{\underline{\frac{1}{3} R}}.$$

2123. A tetraéder egy csúcsból induló a; b; c élei páronként merőlegesek egymásra, ezért a tetraéder beilleszthető egy téglatestbe. A téglatest középpontos szimmetriája miatt a tetraéder köré írható gömb megegyezik a téglatest köré írható gömbbel, aminek átmérője a téglatest testátlója. $\Rightarrow r = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$.

2124. *a)* $r = \underline{\underline{2{,}99\,\text{cm}}}$; *b)* $r = \underline{\underline{44\,\text{m}}}$.

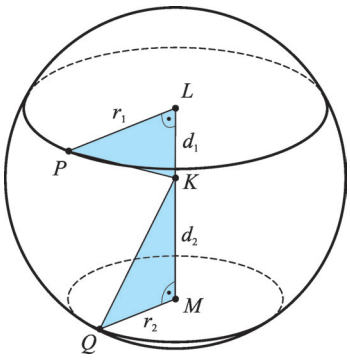
2125. A keresett terület: $t = \underline{\underline{\frac{3}{4} R^2\pi}}$.

2126. A keresett távolság: $KL = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2} R}}$.

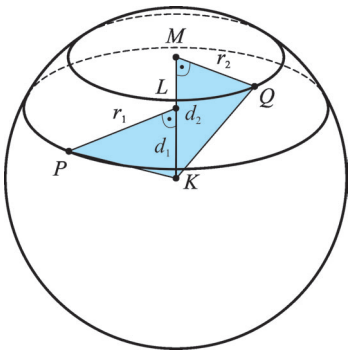
2127. A gömb főkörének területe kétszerese a metszet területének. A 2116. ábra jelöléseit használva: $KP^2 \cdot \pi = 2LP^2 \cdot \pi \Rightarrow KP^2 = 2LP^2$. Pitagorasz tétele a KLP derékszögű háromszögre: $KP^2 = KL^2 + LP^2 \Rightarrow KL^2 = KP^2 - LP^2 = KP^2 - 0{,}5\,KP^2 = 0{,}5\,KP^2$. A keresett távolság: $KL = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2} R}}$.

2128. Pitagorasz tétele a PLK, illetve a QMK derékszögű háromszögekre: $KP^2 = KL^2 + LP^2$ és $KQ^2 = KM^2 + MQ^2$, azaz $r^2 = 36x^2 + 49$ és $r^2 = 25x^2 + 225 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow r = \underline{\underline{25\,\text{cm}}}$. A megoldás független attól, hogy K elválasztja-e az M és L pontokat, vagy sem.

2128/I.

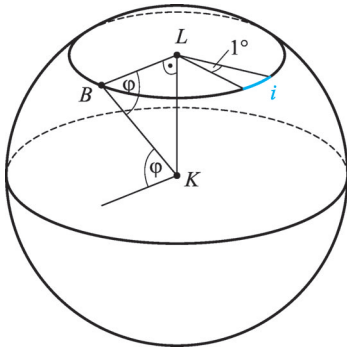


2128/II.



II

2130.



2129. **1. eset:** A két metszősíkot elválasztja a gömb középpontja. Tekintsük a 2128/I. ábrát. Pitagorasz tétele a *PLK*, illetve a *QMK* derékszögű háromszögekre: $R^2 = d_1^2 + r_1^2$ és $R^2 = d_2^2 + r_2^2 \Rightarrow d_1^2 + r_1^2 = d_2^2 + r_2^2 \Rightarrow d_1^2 + 20^2 = (6 - d_1)^2 + 25^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow d_1 = 21{,}75 > 6$, ez nem lehet.
2. eset: A két metszősíkot nem választja el a gömb középpontja. Tekintsük a 2128/II. ábrát. Pitagorasz tétele a *PLK*, illetve a *QMK* derékszögű háromszögekre: $R^2 = d_1^2 + r_1^2$ és $R^2 = d_2^2 + r_2^2 \Rightarrow d_1^2 + r_1^2 = d_2^2 + r_2^2 \Rightarrow d_1^2 + 20^2 = (d_1 - 6)^2 + 25^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow d_1 = 21{,}75 \Rightarrow d_2 = 15{,}75$ és $R = \underline{\underline{29{,}55\text{ cm}}}$.

2130. $BL = BK \cdot \cos\varphi \approx 4303{,}51$ km; $i = \dfrac{1}{360^\circ} \cdot 2 \cdot BL \cdot \pi \Rightarrow$ $\Rightarrow i \approx \underline{\underline{75{,}11\text{ km}}}$.

2131. *a)* $A = 4900\pi\text{ cm}^2 \approx \underline{\underline{15\,394\text{ cm}^2}}$; *b)* $A = 5{,}76\pi\text{ cm}^2 \approx$ $\approx \underline{\underline{18{,}1\text{ cm}^2}}$; *c)* $A \approx 1082{,}28\pi\text{ m}^2 \approx \underline{\underline{3400{,}08\text{ m}^2}}$.

2132. *a)* $R \approx \underline{\underline{2\text{ m}}}$; *b)* $R \approx \underline{\underline{4{,}53\text{ dm}}}$; *c)* $R \approx \underline{\underline{9{,}46\text{ cm}}}$.

2133. *a)* Négyszeresére nő. *b)* Kilencszeresére nő. *c)* k^2-szeresére változik.

2134. $t \approx \underline{\underline{292\text{ m}^2}}$.

2135. $t \approx \underline{\underline{169\,968\,121{,}3\text{ km}^2}}$ $(\approx 1{,}7 \cdot 10^8\text{ km}^2)$.

2136. $A_k - A_b \approx \underline{\underline{236{,}75\text{ cm}^2}}$.

2137. $\dfrac{A - A'}{A} = 1 - \dfrac{A'}{A} = 1 - \dfrac{4(r - 0{,}8)^2\pi}{4r^2\pi} = 1 - \left(\dfrac{r - 0{,}8}{r}\right)^2 = 1 - \left(\dfrac{11{,}2}{12}\right)^2 \approx 0{,}13 \Rightarrow$ 13%-kal lett kisebb a csapágygolyó felszíne.

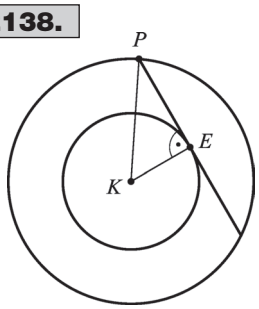
2138. Tekintsük a gömböknek az érintősíkra merőleges, a koncentrikus gömbök középpontján áthaladó síkmetszetét. *KE* a kisebb, *KP* a nagyobb koncentrikus gömb, *PE* a harmadik gömb sugara. Pitagorasz tétele a *PKE* derékszögű háromszögre: $KP^2 = KE^2 + EP^2 \Rightarrow \underline{\underline{A_n - A_k}} =$ $= 4KP^2 \cdot \pi - 4KE^2 \cdot \pi = 4\pi(KP^2 - KE^2) = 4\pi \cdot EP^2 = \underline{\underline{A_3}}$.

2139. Pitagorasz tétele szerint: $r_3^2 = r_1^2 + r_2^2$. $A_3 = 4\pi \cdot r_3^2 = 4\pi \cdot (r_1^2 + r_2^2) = 4\pi \cdot r_1^2 + 4\pi \cdot r_2^2 =$ $= A_1 + A_2$.

2140. *a)* $V \approx \underline{\underline{7{,}24\text{ mm}^3}}$; *b)* $V \approx \underline{\underline{0{,}113\text{ dm}^3}}$; *c)* $V \approx 2000\text{ dm}^3 = \underline{\underline{2\text{ m}^3}}$; *d)* $V \approx 7643{,}67\text{ cm}^3 \approx$ $\approx \underline{\underline{7{,}64\text{ dm}^3}}$.

2141. *a)* $R \approx \underline{\underline{5{,}3\text{ m}}}$; *b)* $R \approx \underline{\underline{6{,}13\text{ dm}}}$; *c)* $R \approx \underline{\underline{7{,}16\text{ cm}}}$.

2138.



2142. $V \approx \underline{\underline{1662{,}95\text{ cm}^3}}$.

2143. $V = \dfrac{20}{11{,}38} = 1{,}757\text{ dm}^3$. $V_{\text{gömb}} \approx 523{,}6\text{ cm}^3 \approx 0{,}524\text{ dm}^3$.
$n = \dfrac{V}{V_{\text{gömb}}} = \dfrac{1{,}757}{0{,}524} \approx 3{,}35 \Rightarrow \underline{\underline{3\text{ db}}}$ ólomgolyót lehet önteni.

2144. $V = \dfrac{37{,}5}{7{,}2} = 5{,}21\text{ dm}^3$.
$V = \dfrac{4}{3}\left(R^3 - (R - d)^3\right)\pi \Rightarrow 5{,}21 = \dfrac{4}{3}\left(R^3 - (R - 0{,}4)^3\right)\pi =$

$= \frac{4}{3} \cdot 0{,}4 \cdot \left(3R^2 - 1{,}2R + 0{,}16\right) \cdot \pi \Rightarrow 0 = 3R^2 - 1{,}2R - 2{,}95 \Rightarrow R_1 < 0$, ez nem lehet. $R_2 = 1{,}21$. A vasgolyó átmérője $2R = \underline{\underline{2{,}42 \text{ dm}}}$.

2145. $r_1 = 2R \Rightarrow V_1 = 8V$, nyolcszorosára; $r_2 = 3R \Rightarrow V_2 = 27V$, huszonhétszeresére; $r_3 = nR \Rightarrow V_3 = n^3 V$, n^3-szörösére változik a térfogat.

2146. $V = \frac{4 \cdot 6^3 \cdot \pi}{3} \approx 904{,}78 \text{ cm}^3 \Rightarrow m = \varrho \cdot V = 0{,}8 \cdot 904{,}78 \approx 723{,}82 \text{g} \approx \underline{\underline{0{,}72 \text{ kg}}}$.

2147. $V = \frac{4 \cdot 11{,}8^3 \cdot \pi}{3} \approx 6882{,}3 \text{ cm}^3 \Rightarrow m = \varrho \cdot V = 7{,}8 \cdot 6882{,}3 \approx 53\,682{,}1 \text{ g} \approx \underline{\underline{53{,}7 \text{ kg}}}$.

2148. A lebegés feltétele: $\frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right) \cdot 7{,}5 = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow 6{,}5R^3 = 7{,}5r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{13}{15}}\, R$.

2149. Az úszás feltétele: $\frac{4}{3}\pi\left(16^3 - 15{,}7^3\right) \cdot \varrho = \frac{2}{3}\pi \cdot 16^3 \Rightarrow \varrho = \frac{16^3}{2\left(16^3 - 15{,}7^3\right)} = 9{,}06 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

2150. $20\,000 = \frac{4}{3} R^3 \pi \Rightarrow R = 16{,}84 \text{ m} \Rightarrow d = \underline{\underline{33{,}68 \text{ m}}}$ a gáztartály belső átmérője. $260\,000 = \frac{4}{3}\pi\left((16{,}84 + x)^3 - 16{,}84^3\right) \cdot 7{,}5 \cdot 10^3 \Rightarrow x \approx 0{,}0097 \text{ m} \approx \underline{\underline{9{,}7 \text{ mm}}}$ a tartály falvastagsága.

2151. *a)* $V \approx \underline{\underline{523{,}6 \text{ m}^3}}$; *b)* $V \approx \underline{\underline{4{,}19 \text{ cm}^3}}$; *c)* $V \approx \underline{\underline{2{,}97 \text{ dm}^3}}$; *d)* $V \approx 0{,}001381 \text{ m}^3 \approx \underline{\underline{1{,}38 \text{ dm}^3}}$.

2152. *a)* $A \approx \underline{\underline{77{,}37 \text{ cm}^2}}$; *b)* $A \approx \underline{\underline{554{,}86 \text{ m}^2}}$; *c)* $A \approx \underline{\underline{122{,}95 \text{ dm}^2}}$; *d)* $A \approx 0{,}8978 \text{ m}^2 \approx \underline{\underline{89{,}78 \text{ dm}^2}}$.

2153. $V = \frac{m}{\varrho} = \frac{4}{0{,}6} \approx \underline{\underline{6{,}67 \text{ dm}^3}}$ a golyó térfogata. $\Rightarrow R \approx 1{,}17 \text{ dm} \Rightarrow A \approx 4 \cdot 1{,}17^2 \cdot \pi \approx \approx \underline{\underline{17{,}13 \text{ dm}^2}}$ a golyó felszíne.

2154. $V_{\ddot{o}} = 1 \text{ cm}^3 = 10^3 \text{ mm}^3$; $d = 3 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \Rightarrow r = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$. $V = \frac{4 \cdot 1{,}5^3 \cdot 10^{-9} \cdot \pi}{3} \approx \approx 14{,}14 \cdot 10^{-9} \text{ mm}^3 \Rightarrow n = \frac{V_{\ddot{o}}}{V} \approx \underline{\underline{7 \cdot 10^{10} \text{ db}}}$.

2155. $r_H = \frac{3}{11} r_F \Rightarrow A_H = 4r_H^2 \pi = 4 \cdot \frac{9}{121} r_F^2 \pi = \frac{9}{121} A_F \Rightarrow \frac{A_H}{A_F} = \underline{\underline{\frac{9}{121}}}$. $V_H = \frac{4r_H^3 \pi}{3} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{27}{1331} r_F^3 = \frac{27}{1331} V_F \Rightarrow \frac{V_H}{V_F} = \frac{27}{1331}$.

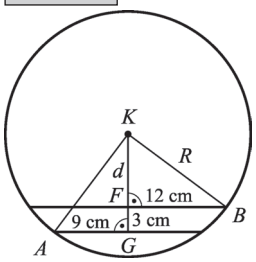
2156. Bármely két gömb hasonló. $\frac{V'}{V} = 2 \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{2} \Rightarrow \frac{A'}{A} = \sqrt[3]{4} \Rightarrow A' = \sqrt[3]{4} \cdot 40 \approx \underline{\underline{63{,}5 \text{ cm}^2}}$.

2157. Bármely két gömb hasonló. $\frac{A'}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 30 = \frac{15\sqrt{2}}{2} \approx \underline{\underline{10{,}6 \text{ cm}^3}}$.

2158. $R_2 = R_1 + 2 \text{ dm}$; $V_2 = V_1 + 1132{,}5 \text{ dm}^3$; $V_1 = \frac{4}{3} R_1^3 \pi$; $V_2 = \frac{4}{3} R_2^3 \pi = \frac{4}{3}(R_1 + 2)^3 \pi$. $V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\pi[(R_1 + 2)^3 - R_1^3] = \frac{4}{3}\pi \cdot 2 \cdot [R_1^2 + R_1(R_1 + 2) + (R_1 + 2)^2] = \frac{8}{3}\pi(3R_1^2 + 6R_1 + 4) = 1132{,}5 \text{ dm}^3 \Rightarrow 3R_1^2 + 6R_1 - 131{,}18 = 0 \Rightarrow (R_1)_1 < 0$, ez nem lehet. $(R_1)_2 = \underline{\underline{5{,}69 \text{ dm}}}$ a gömb sugara.

II

2161.



2159. $4\pi\cdot[(r_2+0{,}9)^2+r_2^2]=5672{,}8\Rightarrow 0=2r_2^2+1{,}8r_2-450{,}62\Rightarrow$ $\Rightarrow (r_2)_1<0$, ez nem lehet. $(r_2)_2=\underline{\underline{14{,}57\text{ dm}}}\Rightarrow r_1=\underline{\underline{15{,}47\text{ dm}}}$.

2160. $r_1=r_2+1{,}3$ dm. $V_1-V_2=1683{,}72=\frac{4}{3}\pi(r_1^3-r_2^3)=$

$=\frac{4}{3}\pi(r_1-r_2)(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)=\frac{4}{3}\pi\cdot 1{,}3\cdot[(r_2+1{,}3)^2+(r_2+1{,}3)r_2+r_2^2]=$

$=\frac{5{,}2}{3}\pi(3r_2^2+3{,}9r_2+1{,}69)\Rightarrow r_2^2+1{,}3r_2-102{,}5=0\Rightarrow (r_2)_1<0$, ez nem lehet. $(r_2)_2\approx\underline{\underline{9{,}5\text{ dm}}}\Rightarrow r_1\approx\underline{\underline{10{,}8\text{ dm}}}$.

2161. Vetítsük merőlegesen a síkmetszeteket a gömb középpontján átmenő, a metsző síkokra merőleges síkra. Pitagorasz tétele az AGK és a BFK derékszögű háromszögekre:
$R^2=9^2+(3+d)^2$ és $R^2=12^2+d^2\Rightarrow 9^2+(3+d)^2=12^2+d^2\Rightarrow d=9\text{ cm}\Rightarrow R=15\text{ cm}\Rightarrow V=$
$=\frac{4}{3}\pi\cdot 15^3=4500\pi=14\,137{,}17\text{ cm}^3\approx\underline{\underline{14{,}14\text{ dm}^3}}$.

Összetett térgeometriai alakzatok

Egymáshoz illesztett testek

2162. $V=V_{\text{henger}}+V_{\text{csonkakúp}}\approx 7{,}2\text{ cm}^3$; $m=\varrho\cdot V\approx\underline{\underline{56{,}55\text{ g}}}$.

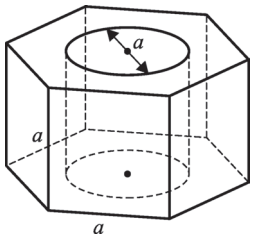
2163. $V=V_{\text{henger}}+2V_{\text{félgömb}}\approx 0{,}07\pi\approx\underline{\underline{0{,}222\text{ m}^3}}$.

2164. $V=V_{\text{henger}}+V_{\text{félgömb}}\approx 10{,}58\pi\approx\underline{\underline{33{,}24\text{ cm}^3}}$.

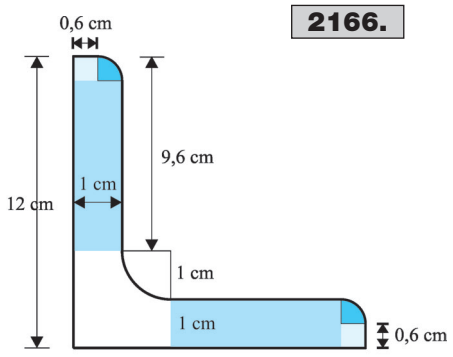
2165. $V=V_{\text{hasáb}}-V_{\text{henger}}\approx 14{,}5\text{ cm}^3$; $m=n\cdot V\cdot\varrho\approx\underline{\underline{113{,}11\text{ kg}}}$.

2166. A keresztmetszet területe: $T=2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4+2\cdot\frac{1}{4}\cdot 0{,}4^2\pi+2\cdot 1\cdot 9{,}6+2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot 1^2\pi\approx$
$\approx\underline{\underline{23{,}15\text{ cm}^2}}$. Az 1 méteres darab térfogata: $V=23{,}15\cdot 100\approx\underline{\underline{2315\text{ cm}^3}}$. Az 1 méteres darab tömege: $m=2315\cdot 7{,}8\approx 18\,057\text{ g}\approx\underline{\underline{18{,}06\text{ kg}}}$.

2165.

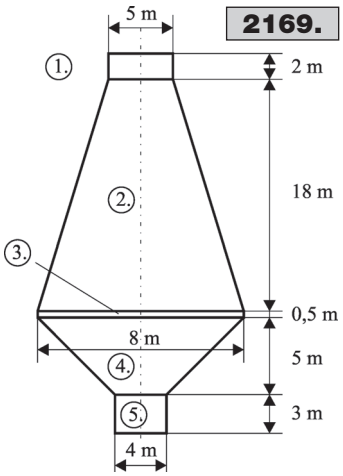


2166.

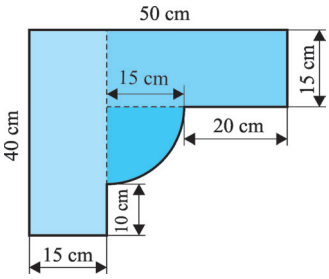


II

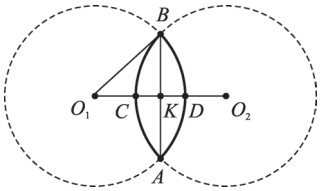
2169.



2170.



2171.



2167. A csonkakúp alakú részek alkotója: $a = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ dm. $A = 2 \cdot 2 \cdot 4\pi \cdot 3 + 2 \cdot (4 + 2) \cdot \sqrt{13} \cdot \pi + 2 \cdot 2 \cdot 2\pi \approx 311{,}85\,\text{dm}^2 \approx \underline{\underline{3{,}12\,\text{m}^2}}$.

2168. A kanna teljes térfogata: $\approx 67{,}39\,\text{dm}^3 \approx \underline{\underline{67{,}41}}$.

A csonkakúp alkotója: $a = \sqrt{0{,}8^2 + (2 - 0{,}4)^2} \approx \underline{\underline{1{,}79\,\text{dm}}}$.

A kanna felszíne: $A \approx \underline{\underline{90{,}49\,\text{dm}^2}}$. A felbecsült lemezszükséglet: $A' = 1{,}05A \approx \underline{\underline{95{,}45\,\text{dm}^2}}$.

2169. $V = 2{,}5^2\pi \cdot 2 + \frac{18}{3}\pi \cdot \left(2{,}5^2 + 2{,}5 \cdot 4 + 4^2\right) + 4^2\pi \cdot 0{,}5 + \frac{5}{3}\pi \cdot \left(4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2\right) + 2^2\pi \cdot 3 \approx$
$\approx \underline{\underline{856{,}6\,\text{m}^3}}$.

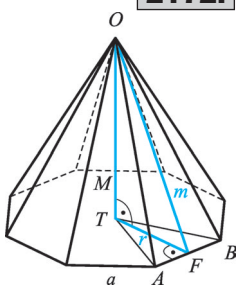
2170. A keresztmetszet területe: $T = 40 \cdot 15 + 35 \cdot 15 + \frac{1}{4} \cdot 15^2 \cdot \pi \approx \underline{\underline{1301{,}71\,\text{cm}^2}}$.

A párkány térfogata: $V = 1301{,}71 \cdot 100 \approx \underline{\underline{0{,}13\,\text{m}^3}}$.

A párkány tömege: $m = 0{,}13 \cdot 2440 = \underline{\underline{317{,}62\,\text{kg}}}$.

2171. $AB = 2 \cdot 4 = 8$ cm. $CD = 0{,}6$ cm $\Rightarrow DK = CK = 0{,}3$ cm $\Rightarrow O_1K = R - 0{,}3$ cm. Pitagorasz-tétel az $O_1KB\triangle$-re: $R^2 = (R - 0{,}3)^2 + 4^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\underline{R \approx 26{,}82\,\text{cm}}}$.

2172.

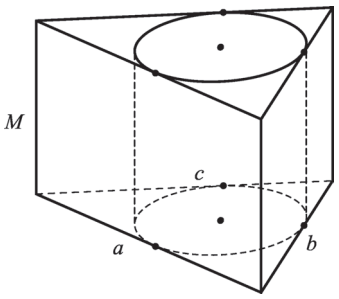


2172. $T_{\text{palást}} = A_{\text{félgömb}} \Rightarrow 8 \cdot \frac{a \cdot m}{2} = 2R^2\pi \Rightarrow m \approx \underline{\underline{13{,}09\,\text{m}}}$. $TFB\triangle$-ből $\operatorname{tg} 22{,}5° = \frac{a}{2r} \Rightarrow r \approx \underline{\underline{1{,}61\,\text{m}}}$. Pitagorasz-tétel a TFO derékszögű háromszögre: $M^2 + r^2 = m^2 \Rightarrow M \approx \underline{\underline{12{,}99\,\text{m}}}$.

Egymásba írt testek

II

2173.



2173. $T_{alap} = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)} = 330\ \text{cm}^2$.
$M = \dfrac{V_{hasáb}}{T_{alap}} = \underline{\underline{60{,}15\ \text{cm}}}$. Az alapháromszögbe írható kör sugara:
$r = \dfrac{T_{alap}}{s} = 6{,}6\ \text{cm}$. $V_{henger} = 6{,}6^2 \cdot \pi \cdot 60{,}15 \approx \underline{\underline{8231{,}4\ \text{cm}^3}}$.

2174. $T_{nyolcszög} = 8\dfrac{R^2 \cdot \sin 45°}{2} \approx \underline{\underline{14{,}96\ \text{dm}^2}}$.
$V_{oszlop} = T_{nyolcszög} \cdot M \approx \underline{\underline{74{,}81\ \text{dm}^3}}$.
Az oszlop tömege: $m_{oszlop} = 74{,}81 \cdot 7{,}2 \approx \underline{\underline{538{,}65\ \text{kg}}}$.

2175. Legyen a gerenda-keresztmetszet körének átmérője $2R$. A körbe írható legnagyobb területű négyzet területe : $T_{négyzet} = 2R^2 = \underline{\underline{0{,}045\ \text{m}^2}}$. A hasáb térfogata: $V_{hasáb} = T_{négyzet} \cdot M = \underline{\underline{157{,}5\ \text{dm}^3}}$. A henger térfogata: $V_{henger} = R^2\pi \cdot M \approx \underline{\underline{247{,}4\ \text{dm}^3}}$. A hulladék térfogata: $V_{hulladék} = V_{henger} - V_{hasáb} \approx \underline{\underline{89{,}9\ \text{dm}^3}}$.

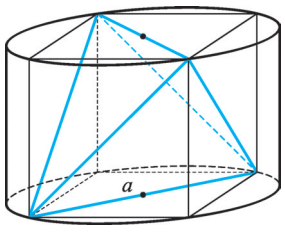
2176. $V_{henger} = 2R^3\pi \Rightarrow R \approx 5\ \text{m}$. Az R sugarú körbe írható szabályos nyolcszög a oldalára: $\dfrac{a}{2} = R \cdot \sin 22{,}5°$. $\Rightarrow \underline{\underline{a = 3{,}83\ \text{m}}}$ a hasáb alapéle és $o = M = 2R = \underline{\underline{10\ \text{m}}}$ a hasáb oldaléle.

2177. Az r sugarú körbe írható legnagyobb területű négyzet oldala $a = r\sqrt{2}$. A hasáb oldaléle: $o = m$. Egy oldallap területe: $T = r \cdot m \cdot \sqrt{2}$.

2178. A két test alaplapjaira: a kör sugara r, a beírt négyzet átlója $2r$. A henger alapkörének sugara: $r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. A henger magassága: $M = a$. A henger térfogata: $V_{henger} = r^2\pi \cdot M =$
$= \dfrac{a^2}{2} \cdot \pi \cdot a = \underline{\underline{\dfrac{a^3\pi}{2}}}$.

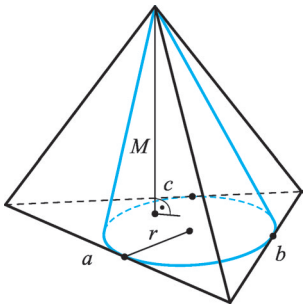
2179. A tetraéder elhelyezhető egy kockában úgy, hogy szemközti élei a kocka két-két szemköztes lapjának egymásra merőleges lapátlói. $\Rightarrow$ A keresett henger a kocka köré írható hengernek felel meg. A henger alapkörének sugara: $\dfrac{a}{2}$. A henger magassága (a kocka éle): $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. A henger térfogata: $V_{henger} = \dfrac{a^2}{4}\pi \cdot \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\dfrac{a^3\sqrt{2}\,\pi}{8}}}$.

2179.

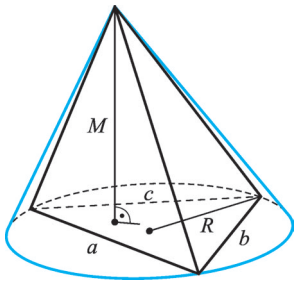


2180. A csonkagúla alaplapjának területe: $T = 8\dfrac{R^2 \cdot \sin 45°}{2} =$
$= \underline{\underline{2\sqrt{2}\,R^2}}$. A csonkagúla fedőlapjának területe: $t = 8\dfrac{r^2 \cdot \sin 45°}{2} =$
$= \underline{\underline{2\sqrt{2}\,r^2}}$. A csonkagúla térfogata: $V_{csonkagúla} = \dfrac{M}{3}\left(T + \sqrt{Tt} + t\right) =$
$= \dfrac{M}{3}2\sqrt{2}\left(R^2 + Rr + r^2\right) = \underline{\underline{554\sqrt{2} \approx 783{,}47\ \text{dm}}}$.

2182/I.



2182/II.



2181. Az R sugarú körbe írható szabályos nyolcszög területe: $T_{\text{nyolcszög}} = 8\dfrac{R^2 \cdot \sin 45°}{2} = 2\sqrt{2}\,R^2$. A gúla térfogata: $V_{\text{gúla}} = \dfrac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot R^2 \cdot M$. A kúp térfogata: $V_{\text{kúp}} = \dfrac{1}{3} R^2 \pi \cdot M$. A térfogatok különbsége: $\Delta V = \dfrac{R^2 M}{3}\left(\pi - 2\sqrt{2}\right) = \underline{\underline{6\left(\pi - 2\sqrt{2}\right) \approx 1{,}88\,\text{dm}^3}}$.

2182. **1. eset:** a beleírható kúp. A gúla alaplapjának területe Heron-képlettel: $T_{\text{alap}} = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)} = 240\ \text{cm}^2$. A gúla alaplapjának területe a beírt kör sugarával és a háromszög oldalaival: $T_{\text{alap}} = rs \Rightarrow r = \dfrac{T_{\text{alap}}}{s} = 6\,\text{cm}$. A beleírható kúp térfogata: $V_{\text{1. kúp}} = \dfrac{1}{3} r^2 \pi \cdot M = \underline{\underline{432\pi \approx 1357\,\text{cm}^3}}$.

2. eset: a köré írható kúp. A gúla alaplapjának területe a körülírt kör sugarával és a háromszög oldalaival: $T_{\text{alap}} = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{abc}{4T_{\text{alap}}} = 17\,\text{cm}$. A köré írható kúp térfogata: $V_{\text{2. kúp}} = \dfrac{1}{3} R^2 \pi \cdot M \approx 3468\pi \approx \underline{\underline{10\,895\,\text{cm}^3}}$.

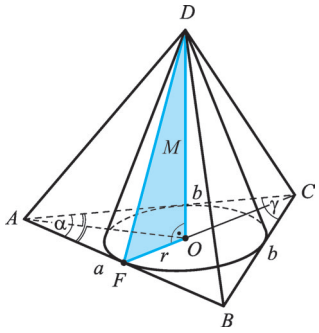
2183. **1. eset:** a köré írható kúp. A szabályos tizenkétszög köré írható kör sugara: $R = \dfrac{a}{2\sin 15°} \approx \underline{\underline{23{,}18\,\text{cm}}}$. A gúla köré írható kúp térfogata: $V_{\text{1. kúp}} = \dfrac{1}{3} R^2 \pi \cdot M \approx 3941\pi \approx \underline{\underline{12\,381{,}16\,\text{cm}^3}}$.

2. eset: a beleírható kúp. A szabályos tizenkétszög beírható körének sugara: $r = \dfrac{a}{2\,\text{tg}\,15°} \approx \underline{\underline{22{,}39\,\text{cm}}}$. A gúlába írható kúp térfogata: $V_{\text{2. kúp}} = \dfrac{1}{3} r^2 \pi \cdot M \approx 3677\pi \approx \underline{\underline{11\,551{,}78\,\text{cm}^3}}$.

2184. A gúla szabályos hatszög alaplapjának beírt köre a kúp alapköre. A szabályos hatszög alapú gúla térfogata: $V_{\text{gúla}} = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot M = \underline{\underline{\dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot M}}$. A kúp alapkörének sugara a hatszög egy középponti háromszögének magassága: $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

II

2186.



A kúp térfogata: $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot M = \frac{a^2\pi}{4} \cdot M$.

A hulladék térfogata: $V_{\text{hulladék}} = V_{\text{gúla}} - V_{\text{kúp}}$. $\frac{V_{\text{hulladék}}}{V_{\text{gúla}}} =$

$= 1 - \frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gúla}}} = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{6-\pi\sqrt{3}}{6}}} \approx 0{,}093.$

2185. A gúla alapéle: $a = R\sqrt{2}$. A gúla fedőéle: $b = r\sqrt{2}$.

$V_{\text{csonkagúla}} = \frac{m}{3}\left[\left(\sqrt{2}\,R\right)^2 + \sqrt{2}\,R \cdot \sqrt{2}\,r + \left(\sqrt{2}\,r\right)^2\right] =$

$= \underline{\underline{\frac{2m}{3}(R^2 + Rr + r^2)}}.$

2186. Az ábra szerinti jelölésekkel: $\alpha = 58°$, $\gamma = 180° - 2 \cdot 58° = 64°$. $r = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} 29°$ és $\frac{a}{2} =$

$= b \cdot \cos 58° \Rightarrow \underline{\underline{r = b \cdot \cos 58° \operatorname{tg} 29°}}$. A gúla alaplapjának területe: $T_{\text{alap}} = \frac{b^2 \cdot \sin 64°}{2}$. A gúla térfogata: $V_{\text{gúla}} = \frac{b^2 \cdot M \cdot \sin 64°}{6}$. A kúp térfogata: $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} b^2 \operatorname{tg}^2 29° \cdot \cos^2 58° \cdot \pi \cdot M$.

A két térfogat aránya: $\frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gúla}}} = \frac{2 \operatorname{tg}^2 29° \cdot \cos^2 58° \cdot \pi}{\sin 64°}$. Az adatokat behelyettesítve: $V_{\text{kúp}} \approx$

$\approx \underline{\underline{405{,}09\ \text{m}^3}}$.

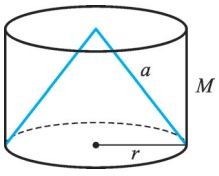
2187. A kúp alapköre a gúla alaplapjának körülírt köre $\Rightarrow$ a négyzet oldala: $a = R\sqrt{2}$. A tengelymetszet háromszögből $M = R\sqrt{3}$. $V_{\text{gúla}} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}\,R\right)^2 R\sqrt{3} = \underline{\underline{18\sqrt{3}}} \approx 31{,}17\ \text{cm}^3$. Az oldallap háromszögből $m = \sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{2}} = R\sqrt{\frac{7}{2}}$. $A_{\text{gúla}} = \left(\sqrt{2}\,R\right)^2 + 4 \cdot \frac{R\sqrt{2} \cdot R \cdot \sqrt{\frac{7}{2}}}{2} =$

$= 2R^2\left(1 + \sqrt{7}\right) \approx \underline{\underline{65{,}62\ \text{cm}^2}}$.

2188. Tekintsük a 2186. ábrát! $a = b$, $r = 7$ cm, $M = 6$ cm. A kúp alapköre a gúla alap háromszögének beírt köre. A szabályos háromszög beírt körének sugara a magasság harmada. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a = 14\sqrt{3}$ cm. FOD derékszögű háromszögben: $m = \sqrt{85}$ cm. $t_{ABD} = 7 \cdot \sqrt{255} \approx$

$\approx \underline{\underline{111{,}78\ \text{cm}^2}}$.

2189.



2189. A feladat feltétele szerint: $2r\pi \cdot M = r\pi a \Rightarrow a = 2M$.

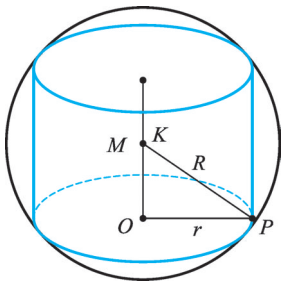
Pitagorasz-tételből: $M^2 + r^2 = a^2$.

A kettőt összevetve: $M = \underline{\underline{\frac{r\sqrt{3}}{3}}}$.

II

2190. A feltétel szerint: $2r\pi \cdot M = 3r^2\pi \Rightarrow M = \frac{3}{2}r$. Pitagorasz-tétel a KOP derékszögű háromszögre: $R^2 = \frac{M^2}{4} + r^2$. A kettőt összevetve: $r = \frac{4}{5}R$ és $M = \frac{6}{5}R$ adódik. A henger térfogata: $V_{\text{henger}} = r^2\pi \cdot M = \frac{16}{25}R^2\pi \cdot \frac{6}{5}R = \underline{\underline{\frac{96}{125}R^3\pi}}$.

2190.



2191. Jelölje a henger sugarát r, a gömb sugarát R. A feltétel szerint a henger magassága $2r$.

$A_{\text{henger}} = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot 2r = \underline{\underline{6r^2\pi}}$. $A_{\text{gömb}} = \underline{\underline{4R^2\pi}}$. $\Rightarrow \frac{r}{R} = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

$V_{\text{henger}} = r^2\pi \cdot 2r = \underline{\underline{2r^3\pi}}$. $V_{\text{gömb}} = \underline{\underline{\frac{4R^3\pi}{3}}}$. $\frac{V_{\text{henger}}}{V_{\text{gömb}}} = \frac{2r^3\pi}{\frac{4R^3\pi}{3}} = \underline{\underline{\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} \approx 0{,}3795}}$.

2192. Tekintsük a 2190. ábrát. A feltétel szerint: $2r\pi \cdot M = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \pi \Rightarrow r = \frac{1}{4M}$. Pitagorasz-tételből: $R^2 = r^2 + \frac{M^2}{4}$. A kettőt összevetve: $1 = \frac{1}{16M^2} + \frac{M^2}{4} \Rightarrow 4M^4 - 16M^2 + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ két megoldás van: $M_1 = \underline{\underline{\sqrt{\frac{4+\sqrt{15}}{2}}}}$ és $M_2 = \underline{\underline{\sqrt{\frac{4-\sqrt{15}}{2}}}}$.

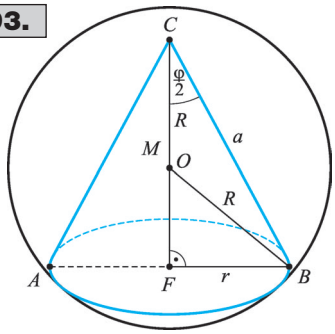
2193. Tekintsük a gömb és a beírt kúp tengelymetszetét: $\varphi = 56{,}7°$. A gömb térfogatából a gömb sugara: $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx \underline{\underline{3{,}08 \text{ cm}}}$. Az ABC egyenlő szárú háromszögben: $2r = 2R \sin 56{,}7° \Rightarrow$

$\Rightarrow r \approx \underline{\underline{2{,}57 \text{ cm}}}$. A CFB derékszögű háromszögben: $\text{tg } 28{,}35° = \frac{r}{M} \Rightarrow M \approx \underline{\underline{4{,}77 \text{ cm}}}$. A kúp térfogata: $V = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot M \approx \underline{\underline{33{,}02 \text{ cm}^3}}$.

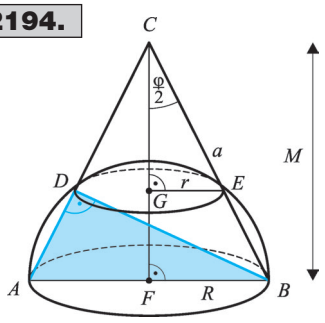
2194. $M = 2R$. Pitagorasz-tétel a $CFB\triangle$-re: $a^2 = R^2 + 4R^2 \Rightarrow a = R \cdot \sqrt{5}$. $A_{\text{félgömb}} = 2R^2 \cdot \pi$.

$T_{\text{palást}} = R \cdot \pi \cdot a = R \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{5} = R^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{5}$. $\underline{\underline{\frac{A_{\text{félgömb}}}{T_{\text{palást}}} = \frac{2R^2\pi}{R^2\pi\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}}}$.

2193.



2194.



II

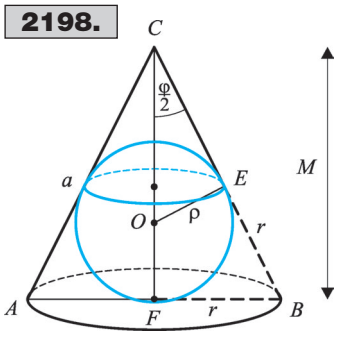
2195. Tekintsük a 2194. ábrát. $M = 2R$. A Thalész-tétel miatt $ADB\sphericalangle = 90° \Rightarrow DB$ az ABC egyenlő szárú háromszög szárhoz tartozó magassága. Az $ABC\triangle$ szára az AFC derékszögű háromszögből: $AC = \sqrt{R^2 + 4R^2} = R\sqrt{5}$. Az $ABC\triangle$ területe: $R \cdot 2R = R\sqrt{5} \cdot \frac{BD}{2} \Rightarrow BD = \frac{4R\sqrt{5}}{5}$. Pitagorasz-tétel az ABD derékszögű háromszögre: $AD = \sqrt{4R^2 - \frac{16R^2}{5}} = \frac{2R\sqrt{5}}{5} \Rightarrow CD = AC - AD = R \cdot \sqrt{5} - \frac{2}{5} \cdot R \cdot \sqrt{5} = \frac{3}{5} \cdot R \cdot \sqrt{5}$. $DEC\triangle \sim ABC\triangle$, mert szögeik egyállású szögek. $\lambda = \frac{CD}{CA} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{\frac{3}{5} \cdot R \cdot \sqrt{5}}{R \cdot \sqrt{5}} = \frac{r}{R} \Rightarrow \underline{\underline{r = \frac{3}{5} \cdot R}}$.

2196. Tekintsük a 2194. ábrát. $M = 2R$ feltételt felhasználva az $AFC\triangle$-re felírt Pitagorasz-tételben: $AC = \sqrt{4R^2 + R^2} = R\sqrt{5}$. A Thalész-tétel miatt az $ADB\sphericalangle = 90°$. $ABD\triangle \sim ACF\triangle$, mert A-nál levő szögük közös, és mindkettő derékszögű. $\Rightarrow \lambda_1 = AB : AC = AD : AF \Rightarrow \frac{2R}{R\sqrt{5}} = \frac{AD}{R} \Rightarrow AD = \frac{2R\sqrt{5}}{5} \Rightarrow DC = AC - AD = R\sqrt{5} - \frac{2R\sqrt{5}}{5} = \frac{3R\sqrt{5}}{5}$. A gömb által levágott kúp C középpontra vonatkozóan hasonló az eredetihez. A hasonlóság aránya: $\lambda_2 = DC : AC = \frac{3R\sqrt{5}}{5} : R\sqrt{5} = \frac{3}{5}$. A két kúppalást területének aránya: $\frac{t}{T} = \lambda_2^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow t = \frac{9}{25}T$. A gömb belsejében levő palástrész területe: $T - t = T - \frac{9}{25}T = \frac{16}{25}T$. A keresett arány: $\underline{\underline{t : (T - t) = 9 : 16}}$.

2197. Tekintsük a 2193. ábrát! $\varphi = 45°$. A gömb felszínéből a sugara: $R = \sqrt{\frac{1000}{4\pi}} \approx \underline{\underline{8{,}92 \text{ cm}}}$. $ABC\triangle$-ből $2r = 2R \sin 45° \Rightarrow r \approx \underline{\underline{6{,}31 \text{ cm}}}$. BFC derékszögű háromszögből: $\operatorname{tg} 225° = \frac{r}{M} \Rightarrow M \approx \underline{\underline{15{,}23 \text{ cm}}}$. A kúp térfogata: $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot M \approx \underline{\underline{634{,}96 \text{ cm}^2}}$.

2198. Tekintsük a kúp és a beírt gömb tengelymetszetét! Pitagorasz-tétel az AFC derékszögű háromszögre: $a^2 = 3{,}69^2 + 8^2 \Rightarrow \underline{\underline{a = 8{,}81 \text{ dm}}}$. Az $ABC\triangle$ területe: $(a + r) \cdot \varrho = r \cdot M \Rightarrow (8{,}81 + 3{,}69)\,\varrho = 3{,}69 \cdot 8 \Rightarrow \underline{\underline{\varrho \approx 2{,}36 \text{ dm}}}$. $A_{\text{gömb}} = 4 \cdot \varrho^2 \cdot \pi \approx \underline{\underline{70{,}08 \text{ dm}^2}}$.

2198.

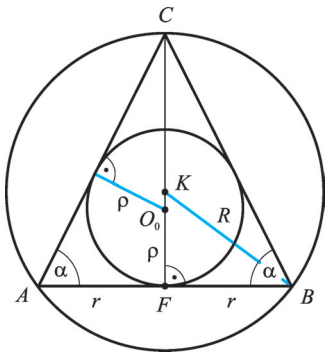


2199. Tekintsük a 2198. ábrát. A feladat feltétele: $\frac{2}{3} r\pi a = 4\varrho^2\pi \Rightarrow ra = 6\varrho^2$ (1). A kúp magassága a Pitagorasz-tételt felhasználva: $M = \sqrt{a^2 - r^2}$. A tengelymetszet területe: $r \cdot M = (a + r) \cdot \varrho \Rightarrow r \cdot \sqrt{a^2 - r^2} = (a + r) \cdot \varrho \Rightarrow a = \frac{r(r^2 + \varrho^2)}{r^2 - \varrho^2}$. a-t (1)-be helyettesítve:

$r\cdot\dfrac{r(r^2+\varrho^2)}{r^2-\varrho^2}=6\varrho^2\Rightarrow 6\varrho^4-5r^2\varrho^2+r^4=0\Rightarrow \varrho_1=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$,

$\varrho_2=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$. Két megoldás van. Az egyik esetben a gömb sugara $\underline{\underline{\dfrac{r}{\sqrt{2}}}}$, az alkotó $3r$, a másikban a sugár $\underline{\underline{\dfrac{r}{\sqrt{3}}}}$ és az alkotó $2r$.

2200.



2200. A három test közös tengelymetszete alapján: $r=2$ m, $\alpha=54°$. ABC egyenlőszárú háromszögben: $ACB\sphericalangle=72°$; $2r=2R\cdot\sin 72°\Rightarrow R\approx\underline{\underline{2{,}1\text{ m}}}$. $CFB\triangle$-ben: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{CF}{r}\Rightarrow$ $\Rightarrow CF\approx\underline{\underline{2{,}75\text{ m}}}$. $\cos\alpha=\dfrac{r}{CB}\Rightarrow CB\approx\underline{\underline{3{,}4\text{ m}}}$. Az $ABC\triangle$ területe: $(CB+r)\cdot\varrho=CF\cdot r\Rightarrow\varrho\approx\underline{\underline{1{,}02\text{ m}}}$.

2201. Tekintsük a 2193. ábrát. $R=12$ cm, $a=32$ cm. CFB derékszögű háromszögből: $\sin\varphi=\dfrac{r}{a}=\dfrac{3}{8}\Rightarrow\varphi=22{,}02°\Rightarrow 2\varphi=44{,}04°$. ABC egyenlő szárú háromszögből:

$2r=2R\cdot\sin 44{,}04°\Rightarrow R=17{,}26$ cm. $V_{\text{gömb}}=\dfrac{4R^3\pi}{3}\approx 21\,536{,}47\text{ cm}^3\approx\underline{\underline{21{,}54\text{ dm}^3}}$.

2202. A 2198. ábra jelöléseivel: A kúp egyenlő oldalú $\Rightarrow$ $ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow$ $\Rightarrow\varrho=\dfrac{M}{3}=\underline{\underline{4\text{ cm}}}$. $V_{\text{gömb}}=\dfrac{4\varrho^3\pi}{3}=\dfrac{4\cdot 4^3\cdot\pi}{3}\text{ cm}^3\approx\underline{\underline{268{,}08\text{ cm}^3}}$.

2203. A 2193. ábra jelöléseit használjuk. Feltétel: $r\cdot\pi\cdot a=\sqrt{5}\cdot r^2\pi\Rightarrow a=\sqrt{5}\cdot r$. OFB derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel: $R^2=(M-R)^2+r^2\Rightarrow M^2-2MR+r^2=0$ (1). CFB derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel: $a^2=M^2+r^2\Rightarrow 5r^2=M^2+r^2\Rightarrow r=\dfrac{M}{2}$.

$r^2\rightarrow$ (1)-be: $M^2-2MR+\dfrac{M^2}{4}=0\Rightarrow M=\dfrac{8}{5}R$. $r=\dfrac{4}{5}R$. $V_{\text{kúp}}=\dfrac{1}{3}\cdot r^2\pi\cdot M=\underline{\underline{\dfrac{128}{375}\cdot R^3\pi}}$.

2204. Vizsgáljuk a kúp tengelymetszetét (például a 2193. ábra CFB háromszögében $a=2r$). Pitagorasz-tétel a CFB derékszögű háromszögre: $M^2=4r^2-r^2\Rightarrow M=r\cdot\sqrt{3}$.

$A_{\text{kúp}}=r^2\pi+r\cdot\pi\cdot 2r=\underline{\underline{3r^2\pi}}$, $A_{\text{gömb}}=4r^2\pi\Rightarrow\dfrac{A_{\text{kúp}}}{A_{\text{gömb}}}=\dfrac{3r^2\pi}{4r^2\pi}=\underline{\underline{\dfrac{3}{4}}}$. $V_{\text{kúp}}=\dfrac{1}{3}\cdot r^2\pi\cdot r\cdot\sqrt{3}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r^3\pi$, $V_{\text{gömb}}=\dfrac{4}{3}r^3\pi\Rightarrow\dfrac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gömb}}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}r^3\pi}{\frac{4}{3}r^3\pi}=\underline{\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}}$.

2205. Pitagorasz-tétel a 2193. ábra CFB háromszögére: $M^2=4r^2-r^2\Rightarrow M=r\sqrt{3}$.

$A_{\text{kúp}}=r^2\pi+r\pi\cdot 2r=3r^2\pi$, $A_{\text{gömb}}=4R^2\pi$. A feltétel szerint $3r^2\pi=4R^2\pi\Rightarrow R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$.

II

$V_{kúp} = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot M = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} r^3\pi$. $V_{gömb} = \frac{4R^3\pi}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot r^3\pi}{3 \cdot 8} = \frac{\sqrt{3}}{2} r^3\pi$.

$\frac{V_{kúp}}{V_{gömb}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} r^3\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2} r^3\pi} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$.

2206. Tekintsük a 2198. ábrát $\Rightarrow a = 2r$. A kúp egyenlő oldalú $\Rightarrow ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varrho = \frac{M}{3} = \frac{r\sqrt{3}}{3}$. $A_{kúp} = r^2\pi + r\pi \cdot 2r = 3r^2\pi$; $A_{gömb} = 4\varrho^2\pi = 4\frac{r^2}{3}\pi$. $\frac{A_{kúp}}{A_{gömb}} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$.

$V_{kúp} = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} r^3\pi$. $V_{gömb} = \frac{4}{3}\varrho^3\pi = \frac{4\sqrt{3}}{27} r^3\pi$. $\frac{V_{kúp}}{V_{gömb}} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$.

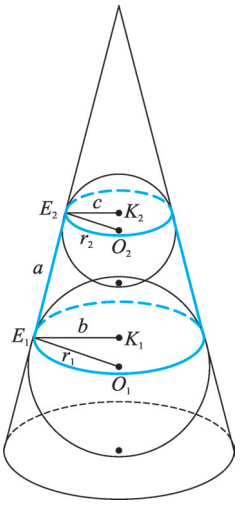
2207. **1. eset:** a gömb köré írt kúp. A 2198. ábra jelöléseit használjuk $\Rightarrow a = 2r$, $M = r\sqrt{3}$. A kúp egyenlő oldalú $\Rightarrow ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow \varrho = \frac{M}{3} = \frac{r\sqrt{3}}{3}$. $A_{kúp1} = r^2\pi + r\pi \cdot 2r = 3r^2\pi$;

$A_{gömb} = 4\varrho^2\pi = 4\frac{r^2}{3}\pi$. $\frac{A_{kúp1}}{A_{gömb}} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$. $V_{kúp} = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} r^3\pi$. $V_{gömb} = \frac{4}{3}\varrho^3\pi =$

$= \frac{4\sqrt{3}}{27} r^3\pi$. $\frac{V_{kúp1}}{V_{gömb}} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$.

2. eset: a gömbbe írt kúp. A 2193. ábra jelöléseit használjuk $\Rightarrow a = 2r$, $M = r\sqrt{3}$. A kúp egyenlő oldalú $\Rightarrow ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow R = \frac{2M}{3} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$. $A_{kúp2} = r^2\pi + r\pi \cdot 2r = 3r^2\pi$;

2208/I.



$A_{gömb} = 4R^2\pi = = \frac{16}{3} r^2\pi. \Rightarrow \underline{\underline{\frac{A_{gömb}}{A_{kúp2}} = \frac{16}{9}}}$.

$V_{kúp2} = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} r^3\pi$. $V_{gömb} = \frac{4}{3} R^3\pi = \frac{4}{3} \cdot \frac{8r^3}{3\sqrt{3}}\pi =$

$= \frac{32\sqrt{3}}{27} r^3\pi. \Rightarrow \underline{\underline{\frac{V_{gömb}}{V_{kúp2}} = \frac{32}{9}}}$.

$A_{kúp1} = \frac{9}{4} A_{gömb} = \frac{9}{4} \cdot \frac{16}{9} A_{kúp2} = 4A_{kúp2}. \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{kúp1} : A_{gömb} : A_{kúp2} = = 4 : \frac{16}{9} : 1 = \underline{\underline{36 : 16 : 9}}$.

$V_{kúp1} = \frac{9}{4} V_{gömb} = \frac{9}{4} \cdot \frac{32}{9} V_{kúp2} = 8V_{kúp2}. \Rightarrow$

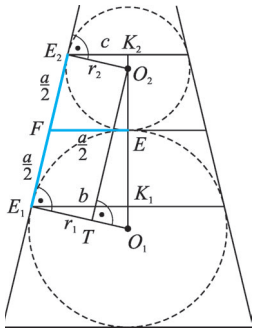
$\Rightarrow V_{kúp1} : V_{gömb} : V_{kúp2} = 8 : \frac{32}{9} : 1 = \underline{\underline{72 : 32 : 9}}$.

2208. A csonkakúp palástjának területe: $T_{palást} = \frac{(2b + 2c)a\pi}{2} =$

$= a\pi(b + c)$. Tekintsük a gömbök és a kúp tengelymetszetét. $FE = FE_1 = FE_2$, mert külső pontból húzott érintőszakaszok. FE

2208/II.

a trapéz középvonalának fele, ezért $FE = \frac{b+c}{2} = \frac{a}{2}$. Pitagorasz tétele az O_1TO_2 derékszögű háromszögre: $a^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow a^2 = 4r_1r_2$. $T_{\text{palást}} = a\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot 2 = a^2\pi = 4r_1r_2\pi = \underline{\underline{160\pi \approx 502{,}65\ \text{cm}^2}}$.



2209. Tekintsük a 2198. ábrát. $OEC\triangle \sim BFC\triangle$, mert C-nél levő szögük közös és mindkettő derékszögű $\Rightarrow$ $\lambda = \frac{\varrho}{r} = \frac{M-\varrho}{a} =$ $= \frac{a-r}{M} \Rightarrow M = \frac{80}{3}$ cm és $a = \frac{100}{3}$ cm. $A_{\text{kúp}} = r^2\pi + r\pi a \approx \underline{\underline{33{,}51\ \text{dm}^2}}$. $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot M = \approx \underline{\underline{11{,}17\ \text{dm}^3}}$.

2210. Tekintsük a 2198. ábrát. Az $ABC\triangle$ területe: $r \cdot M =$ $= (a+r) \cdot \varrho \Rightarrow 72r = (a+r) \cdot 12 \Rightarrow \underline{\underline{a = 5r}}$. Pitagorasz-tétel az FBC derékszögű háromszögre: $a^2 = r^2 + M^2 \Rightarrow 25r^2 = r^2 + 72^2 \Rightarrow \underline{\underline{r = 6\sqrt{6}}}$ és $\underline{\underline{a = 30\sqrt{6}}}$. $A_{\text{kúp}} = r^2\pi +$ $+ r\pi a = 1296\pi \approx 4071{,}5\ \text{cm}^2 \approx \underline{\underline{40{,}71\ \text{dm}^2}}$.

2211. Tekintsük a 2198. ábrát. $\frac{A_{\text{kúp}}}{A_{\text{gömb}}} = k \Rightarrow \frac{r^2\pi + r\pi a}{4\varrho^2\pi} = k \Rightarrow r(r+a) = 4k\varrho^2$ (*). Az $ABC\triangle$ területe: $rM = (r+a)\varrho \Rightarrow M = \frac{r+a}{r}\varrho$. Pitagorasz-tétel az FBC derékszögű háromszögre: $a^2 = M^2 + r^2 \Rightarrow a^2 = \frac{(r+a)^2}{r^2}\varrho^2 + r^2 \Rightarrow a^2r^2 = (r+a)^2\varrho^2 + r^4$. A (*) egyenletből $r \cdot a =$ $= 4k \cdot \varrho^2 - r^2$, illetve $r + a = \frac{4k \cdot \varrho^2}{r}$ összefüggéseket a Pitagorasz-tételbe helyettesítve: $8k\varrho^2 \cdot r^4 - 16k^2\varrho^4 \cdot r^2 + 16k^2\varrho^6 = 0$ „r”-ben negyedfokú egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai: $r_1 = \varrho\sqrt{k + \sqrt{k(k-2)}}$ vagy $r_2 = \varrho\sqrt{k - \sqrt{k(k-2)}}$, ha $k \geq 2$.

2212. Tekintsük a 2198. ábrát. $\frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gömb}}} = k \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}r^2\pi \cdot M}{\frac{4}{3}\varrho^3\pi} = k \Rightarrow M = \frac{4k \cdot \varrho^3}{r^2}$ (*). Az $ABC\triangle$ területe: $rM = (r+a)\varrho \Rightarrow M = \frac{r+a}{r}\varrho$. M-et (*)-ba beírva: $r^2 \cdot \frac{r+a}{r} \cdot \varrho = 4k \cdot \varrho^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = \frac{4k \cdot \varrho^2 - r^2}{r}$. Pitagorasz-tétel az FBC derékszögű háromszögre: $a^2 = r^2 + M^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\frac{4k \cdot \varrho^2 - r^2}{r}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{4k \cdot \varrho^3}{r^2}\right)^2$. Ennek egyszerűbb alakra hozásából a $8k\varrho^2 \cdot r^4 - 16k^2\varrho^4 \cdot r^2 + 16k^2\varrho^6 = 0$ „r”-ben negyedfokú egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai: $r_1 = \varrho\sqrt{k + \sqrt{k(k-2)}}$ vagy $r_2 = \varrho\sqrt{k - \sqrt{k(k-2)}}$, ha $k \geq 2$.

II

2213. A 2194. ábra jelöléseit alkalmazzuk: $\frac{A_{\text{kúp}}}{A_{\text{félgömb}}} = \frac{r^2\pi + r\pi a}{r^2\pi + 2r^2\pi} = \frac{r^2\pi + r\pi a}{3r^2\pi} = \frac{1}{3} + \frac{a}{3r}$.

A feltétel szerint $\frac{1}{3} + \frac{a}{3r} = \frac{18}{5} \Rightarrow \frac{r}{a} = \frac{5}{49}$. $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{a} = \frac{5}{49} \Rightarrow \varphi = \underline{\underline{11,72°}}$.

2214. Tekintsük a 2198. ábrát. $\frac{A_{\text{gömb}}}{T_{\text{alap}}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4\varrho^2\pi}{r^2\pi} = \frac{4}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\varrho = \frac{\sqrt{3}}{3}\, r}}$. CFB derékszögű háromszögben $FBC\sphericalangle = 90° - \frac{\varphi}{2}$. OB felezi az $FBC\sphericalangle$-et $\Rightarrow FBO\sphericalangle = 45° - \frac{\varphi}{4}$. OFB derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\varphi}{4}\right) = \frac{\varrho}{r} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = 60°}}$.

2215. Tekintsük a 2198. ábrát. $A_{\text{kúp}} = n \cdot A_{\text{gömb}} \Rightarrow r^2\pi + r\pi a = n \cdot 4\varrho^2\pi \Rightarrow \underline{\underline{r^2 + ra = 4n\varrho^2}}$ (*).

Az $ABC\triangle$ területe: $r \cdot M = \varrho(r + a) \Rightarrow$ mindkét oldal r-rel való szorzása után $r^2M = \varrho \cdot (r^2 + ra)$.

A (*) összefüggést felhasználva: $r^2M = \varrho \cdot 4n\varrho^2 = 4n\varrho^3 \Rightarrow \frac{1}{3}r^2\pi \cdot M = \frac{4}{3}\varrho^3\pi \cdot n \Rightarrow \underline{\underline{V_{\text{kúp}} = V_{\text{gömb}} \cdot n}}$.

2216. A kúpok közös része egy kettős csonkakúp. A két kúp síkszimmetrikus a gömb középpontján átmenő, a kúpok közös tengelyére merőleges síkra. $\Rightarrow$ A közös részt alkotó két csonkakúp közös alapköre ebben a síkban van, középpontja azonos a gömb középpontjával. $ACB\sphericalangle = 90°$ a Thalész-tétel miatt. $BT_2 = AT = k \cdot R$ a feltétel miatt $\Rightarrow AT_2 = TB = 2R - kR = (2 - k)R$. Magasságtétel az ACB derékszögű háromszög TC magasságára:

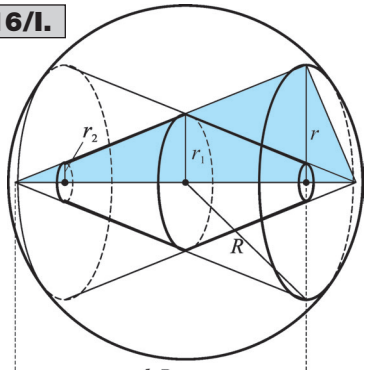
$r = \sqrt{k \cdot R \cdot (2 - k) \cdot R} = R\sqrt{k(2 - k)}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a $CAB\sphericalangle$ r_2, r_1 és r szelőire: $\frac{r_2}{r} = \frac{AT_2}{AT} = \frac{(2-k)R}{kR} = \frac{2-k}{k} \Rightarrow \underline{\underline{r_2 = R(2-k)\sqrt{\frac{2-k}{k}}}}$.

$\frac{r_1}{r} = \frac{AT_1}{AT} = \frac{R}{kR} = \frac{1}{k} \Rightarrow \underline{\underline{r_1 = R\sqrt{\frac{2-k}{k}}}}$.

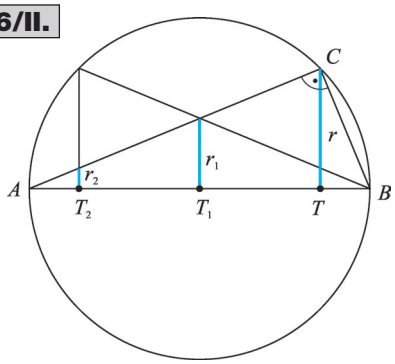
A két kúp közös részének térfogata: $V_{\text{közös}} = 2V_{\text{csonkakúp}} = 2\frac{(k-1)\cdot R\cdot\pi}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) =$

$= 2\frac{(k-1)\cdot R\cdot\pi}{3}\left[R^2\,\frac{2-k}{k} + R^2(2-k)\frac{2-k}{k} + R^2(2-k)^2\,\frac{2-k}{k}\right] =$

2216/I.

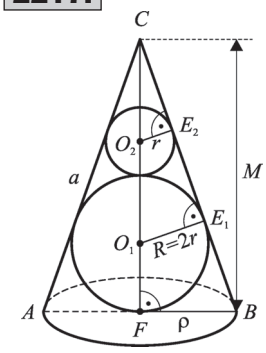


2216/II.



$= \frac{2(k-1)\,(2-k)R^3\pi}{3k}(7-5k+k^2)$. A közös rész és a gömb térfogatának hányadosa: $\frac{V_{\text{közös}}}{V_{\text{gömb}}} = \underline{\underline{\frac{(k-1)\,(2-k)\,(7-5k+k^2)}{2k}}}$.

2217. A gömbök térfogatának aránya a sugarak arányának köbe $\Rightarrow \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \underline{\underline{2r = R}}$. O_2E_2 középvonal az $O_1E_1C\triangle$-ben:



2217.

$CO_2 = O_2O_1 = r + 2r = 3r \Rightarrow M = FO_1 + O_1O_2 + O_2C =$
$= 2r + 3r + 3r = 8r$. $CO_2E_2\triangle \sim CFB\triangle$, mert mindkettő derékszögű és C-nél levő szögük közös. $\lambda = \frac{r}{\varrho} = \frac{3r}{a} \Rightarrow \underline{\underline{a = 3\varrho}}$. Pitagorasz-tétel az FBC derékszögű háromszögre: $9\varrho^2 = \varrho^2 + (8r)^2 \Rightarrow \varrho = \underline{\underline{2\sqrt{2}\cdot r}} \Rightarrow a = \underline{\underline{6\sqrt{2}\cdot r}}$.

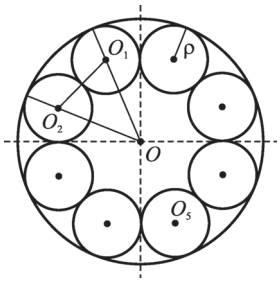
$A_{\text{kúp}} = \varrho^2\pi + \varrho\pi a = \underline{\underline{32r^2\pi}}$. $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3}\varrho^2\pi \cdot M = \underline{\underline{\frac{64}{3}r^3\pi}}$.

2218. A 2198. ábra jelölései szerint: $r\pi a = 3r^2\pi \Rightarrow \underline{\underline{a = 3r}}$. Az $ABC\triangle$ területe: $r \cdot M = (a + r) \cdot \varrho$. A feltételt felhasználva: $\underline{\underline{M = 4\varrho}}$.

2219. A két darabot szétszedve és az egyiket a tengelye körül 180°-kal elforgatva összeilleszthetők úgy, hogy együtt egyenes hengert alkossanak. Ennek a hengernek a térfogata megegyezik a könyökcső térfogatával. A henger alapkörének sugara r, magassága $a + b$. A keresett térfogat: $\underline{\underline{V = r^2\pi \cdot (a + b)}}$.

2220. 1. főkörmetszet: 2220/I. ábra. $OO_1 = OO_2 = R - \varrho$; $O_1O_2 = 2\varrho$; $O_1OO_2\sphericalangle = 45°$.

2220/I.



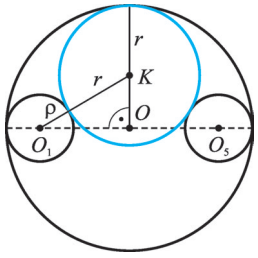
$\sin 22{,}5° = \frac{\varrho}{R-\varrho} \Rightarrow \varrho = \frac{R\sin 22{,}5°}{1+\sin 22{,}5°}$. A $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| =$

$= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ összefüggést felhasználva $\sin 22{,}5° = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} =$

$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow \varrho = \underline{\underline{\frac{R\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}$.

2220/II.

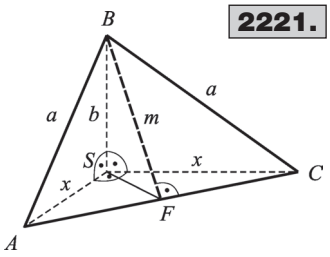
Az 1. főkörmetszetre merőleges a 2. főkörmetszet: 2220/II. ábra. $KO = R - r$; $KO_1 = r + \varrho$; $OO_1 = R - \varrho$. Pitagorasz-tétel az O_1OK derékszögű háromszögre: $(\varrho + r)^2 = (R - \varrho)^2 + (R - r)^2 \Rightarrow r = \underline{\underline{\frac{R(R-\varrho)}{R+\varrho}}}$.



A korábban ϱ-ra kapott összefüggést felhasználva: $R - \varrho = \frac{2R}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ és $R + \varrho = \underline{\underline{\frac{2R\left(1+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}$.

II

2221.



Ezeket felhasználva a megfelelő algebrai átalakítások után: $r = R\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{4-2\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}57R$.

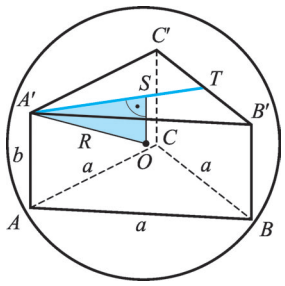
2221. Bontsuk fel a tetraédert a beírt gömb középpontjából a csúcsokhoz vezető szakaszokkal négy tetraéderre. Ezeknek a tetraédereknek egy-egy lapja közös az eredeti tetraéderrel, magasságuk pedig a beírt gömb sugara, r. $\Rightarrow V = \frac{A \cdot r}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow r = \frac{3V}{A}$. Pitagorasz-tétel az ASB derékszögű háromszögre: $x = \sqrt{a^2 - b^2}$. Pitagorasz-tétel az ASC derékszögű háromszögre: $AC = y = x\sqrt{2} = \sqrt{2(a^2 - b^2)}$.

ACB egyenlő szárú háromszögben BF magasság felezi az AC alapot. Pitagorasz-tétel a BFC derékszögű háromszögre: $a^2 = m^2 + \frac{y^2}{4}$. y-t behelyettesítve és a megfelelő átalakításokat elvégezve: $m = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$. A tetraéder térfogata: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot b = \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{2} \cdot (a^2 - b^2)$. A tetraéder felszíne: $A = 2 \cdot \frac{xb}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y \cdot m}{2} = b\sqrt{a^2 - b^2} + \frac{a^2 - b^2}{2} + \frac{\sqrt{2(a^2 - b^2)}\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}}{2}$.

A beírható gömb sugara a felszín és a térfogat összefüggés felhasználásával a megfelelő algebrai átalakítások után: $r = \frac{3V}{A} = \frac{b \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}{2b + \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 + b^2}}$.

2222. A kocka köré írható gömb középpontja a testátlók metszéspontja, sugara a testátló fele: $R = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. A kocka élfelezéspontjain átmenő gömb középpontja a testátlók metszéspontja, sugara a lapátló fele: $r = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. A kocka beírt gömbjének középpontja a testátlók metszéspontja, sugara az él fele: $\varrho = \frac{a}{2}$; $R : r : \varrho = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$.

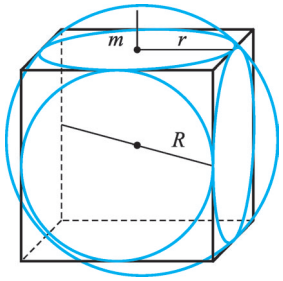
2223.



2223. $a \cdot b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. A szimmetria miatt $OS = \frac{1}{2}b$, ahol S az $A'B'C'$ háromszög középpontja. $A'B'C'$ szabályos háromszögben $A'T = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $A'S = \frac{2}{3}A'T =$ $= \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. $A'SO$ derékszögű háromszögben $A'O = R$; $A'S = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $OS = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$. Pitagorasz-tétel az

II

2224/I.



$A'SO$ derékszögű háromszögben: $\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=R^2\Rightarrow$

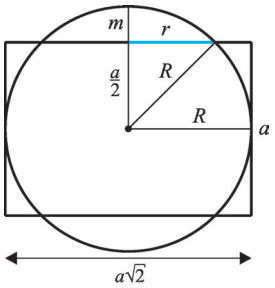
$\Rightarrow \frac{3a^2}{64}+\frac{3a^2}{9}=R^2\Rightarrow R^2=\frac{73a^2}{192}$. A gömb sugara $R=\frac{\sqrt{73}\,a}{8\sqrt{3}}=$

$=\underline{\underline{\frac{\sqrt{219}\,a}{24}}}$.

2224. $V=V_{\text{gömb}}-6V_{\text{gömbsüveg}}$; $A=A_{\text{gömb}}-6P_{\text{gömbsüveg}}+6T_{\text{kör}}$.

Tekintsük az átlós metszetet!

2224/II.



$R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ és $r=\frac{a}{2}$ és $m=R-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1)$.

$V_{\text{gömb}}=\frac{4R^3\pi}{3}=\frac{a^3\pi\sqrt{2}}{3}$ és

$V_{\text{gömbsüveg}}=\frac{\pi}{3}m^2(3R-m)=\frac{a^3\pi(4\sqrt{2}-5)}{24}$.

$\underline{\underline{V_{\text{dobókocka}}}}=\frac{a^3\pi\sqrt{2}}{3}-6\cdot\frac{a^3\pi(4\sqrt{2}-5)}{24}=\underline{\underline{\frac{a^3\pi(15-8\sqrt{2})}{12}}}$.

$A_{\text{gömb}}=4R^2\pi=2a^2\pi$ és $T_{\text{kör}}=r^2\pi=\frac{a^2\pi}{4}$ és

$P_{\text{gömbsüveg}}=2\pi Rm=\frac{a^2\pi(2-\sqrt{2})}{2}$.

$\underline{\underline{A_{\text{dobókocka}}}}=2a^2\pi-6\cdot\frac{a^2\pi(2-\sqrt{2})}{2}+6\cdot\frac{a^2\pi}{4}=\underline{\underline{\frac{a^2\pi(6\sqrt{2}-5)}{2}}}$.

2225. A V térfogatú A felszínű gúlába írt gömb sugara $r=\frac{3V}{A}$; az oldallap területe

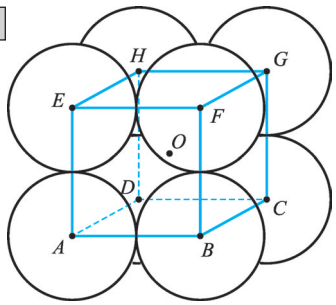
$T_0=\frac{a\cdot\sqrt{M^2+\left(\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\right)^2}}{2}$, $V_{\text{gúla}}=\frac{1}{3}T_a\cdot M=\frac{1}{3}n\frac{a\cdot\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}}{2}\cdot M=\frac{nMa^2}{12\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$ és

$A_{\text{gúla}}=T_a+n\cdot T_0=n\cdot\frac{a\cdot\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}}{2}+n\cdot\frac{a\cdot\sqrt{M^2+\frac{a^2}{4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}}}{2}=\frac{na\left(a+\sqrt{4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}\cdot M^2+a^2}\right)}{4\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$;

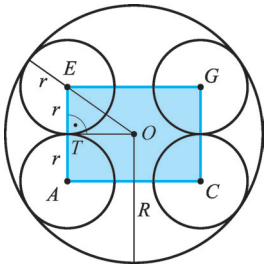
$r=\frac{3V_{\text{gúla}}}{A_{\text{gúla}}}=\underline{\underline{\frac{M\cdot a}{a+\sqrt{4M^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}+a^2}}}}$.

II

2227/I.



2227/II.



2226. $A_{\text{oktaéder}} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = 5\ \text{cm} = R. \Rightarrow \underline{\underline{A_{\text{gömb}} \approx 314\ \text{cm}^2}}$ és $\underline{\underline{V_{\text{gömb}} \approx 523{,}6\ \text{cm}^3}}$.

2227. A középpontok egy $2r$ oldalú kocka csúcsai $\Rightarrow AC = 2r\sqrt{2}$. Tekintsük az átlós síkmetszetet! ETO derékszögű háromszögben $ET = r$; $OT = \frac{1}{2}AC = r\sqrt{2}$; $OE = R - r$. Pitagorasz-tétel az ETO derékszögű háromszögre: $r^2 + (r\sqrt{2})^2 = (R-r)^2 \Rightarrow 2r^2 + 2Rr - R^2 = 0 \Rightarrow$

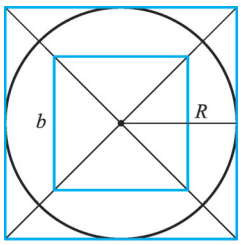
$\Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2R \pm 2\sqrt{3}R}{4}$. A másodfokú egyenlet pozitív megoldása a gömb sugara $\underline{\underline{r = \frac{\sqrt{3}-1}{2}R}}$.

2228. Legyen a külső kocka éle a, a belső kocka éle b, a gömb sugara R. Tekintsük a négy él felezőpontjára illeszkedő síkmetszetet és az átlós síkmetszetet: $a = 2R$; $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow$

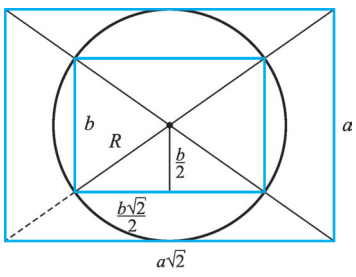
$\Rightarrow b = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$. A feladat adatai szerint $a - b = d \Rightarrow 2R - \frac{2\sqrt{3}}{3}R = d \Rightarrow \underline{R} = \frac{d}{2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} =$

$= \underline{\underline{\frac{3+\sqrt{3}}{4}d}}$; $\underline{\underline{a = \frac{3+\sqrt{3}}{2}d}}$; $\underline{b} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)}{4}d = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}+1}{2}d}}$.

2228/I.



2228/II.



II

2229. Egy r sugarú gömb köré írt kocka éle $2r$, az r sugarú gömbbe írt kocka éle $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$.

$\underline{\underline{V_2 - V_1}} = (2r)^3 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^3 = \underline{\underline{\frac{8\left(9-\sqrt{3}\right)}{9}r^3}}$.

2230. Egy r sugarú gömb köré írt kocka éle $2r$, az r sugarú gömbbe írt kocka éle $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$.

$\underline{\underline{A_2 - A_1}} = 6(2r)^2 - 6\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2 = \underline{\underline{16r^2}}$.

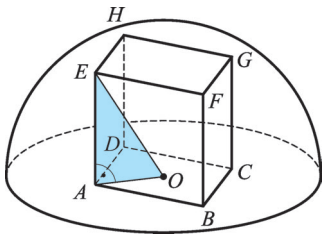
2231. Legyen a külső kocka éle a, a belső kocka éle b, a gömb sugara R. Tekintsük a négy él felezőpontjára illeszkedő síkmetszetet és az átlós síkmetszetet. A 2228/I. ábra és a 2228/II. ábra jelöléseit használjuk: $a = 2R$ és $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$. A 2229. feladat alapján a két kocka térfogatának különbsége: $V = V_2 - V_1 = \frac{8\left(9-\sqrt{3}\right)}{9}R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{9V}{8\left(9-\sqrt{3}\right)}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3V\left(9+\sqrt{3}\right)}{26}}}}$;

$a = \sqrt[3]{\frac{3V\left(9+\sqrt{3}\right)}{26}}$; $b = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt[3]{\frac{3V\left(9+\sqrt{3}\right)}{26}} = \sqrt[3]{\frac{\left(3\sqrt{3}+1\right)V}{26}}$.

2232. Legyen a gömb sugara R, a beírt kocka éle b, a körülírt kocka éle k. Tekintsük az átlós metszetet, ami b és $b\sqrt{2}$ oldalú, $2R$ átlójú téglalap, valamint a négy él felezőpontjára illeszkedő síkmetszetet, ami $k = 2R$ oldalú négyzet. A beírt kocka testátlója az adott gömb egyik átmérője: $2R = b\sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow A_{\text{beírt kocka}} = 6 \cdot \frac{4R^2}{3} = 8R^2$. A körülírt kocka éle egyenlő az adott gömb átmérőjével: $2R = k \Rightarrow A_{\text{körülírt kocka}} = 6 \cdot 4R^2 = 24R^2$. A feltétel szerint $A_{\text{körülírt kocka}} - A_{\text{beírt kocka}} = F \Rightarrow 16R^2 = F \Rightarrow R = \underline{\underline{\frac{\sqrt{F}}{4}}} \Rightarrow b = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3F}}{6}}}$ és $k = \underline{\underline{\frac{\sqrt{F}}{2}}}$.

2233. Legyen a kocka éle a, a beírt gömb sugara r, a körülírt gömb sugara R. A beírt gömb sugara a kocka élének fele: $r = \frac{a}{2}$. A körülírt gömb sugara a kocka testátlójának fele: $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. A feltétel szerint: $R - r = d \Rightarrow a = \left(\sqrt{3}+1\right)d$. A kocka felszíne: $A = 6 \cdot a^2 = \underline{\underline{12\left(2+\sqrt{3}\right)d^2}}$. A kocka térfogata: $V = a^3 = \underline{\underline{2\left(3\sqrt{3}+5\right)d^3}}$.

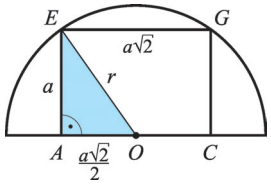
2234/I.



2234. Legyen a félgömbbe írt kocka éle a. Az átlós metszetet tekintve a félgömb sugara az EAO derékszögű háromszög átfogója. Pitagorasz-tétel szerint: $a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow$

2234/II.

II



$\Rightarrow \underline{a = r\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{r\sqrt{6}}{3}}$. A beírt kocka felszíne: $A = 6a^2 = 6 \cdot \frac{r^2 \cdot 6}{9} =$ $= \underline{4r^2}$. A beírt kocka térfogata: $V = a^3 = \frac{r^3 \cdot 6 \cdot \sqrt{6}}{27} = \frac{2\sqrt{6}}{9} r^3$.

2235. 2234/I. és 2234/II. ábra jelöléseivel: A félgömb sugara az ábrából kiemelt derékszögű háromszög átfogója. Pitagorasz-tétel a fenti háromszögre: $r^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow r = a\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}}\, r$. A kocka térfogata: $V = a^3 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\, r^3 \Rightarrow \underline{r = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{V}}$.

2236. A téglatest élei: $a = x$, $b = 2x$, $c = 3x$. A téglatest testátlója a köré írt gömb átmérője: $4r^2 = a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + 4x^2 + 9x^2 \Rightarrow x = r \cdot \sqrt{\frac{2}{7}} = r \cdot \frac{\sqrt{14}}{7}$. A téglatest élei: $\underline{a = \frac{\sqrt{14}}{7} r}$, $\underline{b = \frac{2\sqrt{14}}{7} r}$, $\underline{c = \frac{3\sqrt{14}}{7} r}$.

2237. A téglatest élei: a, b, c. Az oldallapok területei: $t_1 = ab$, $t_2 = bc$, $t_3 = ac$. A feltételek szerint: $bc = 2ab$ és $ac = 3ab \Rightarrow c = 2a = 3b \Rightarrow a = \frac{3}{2} b$. A téglatest testátlója a köré írt gömb átmérője: $(2r)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow 4r^2 = \frac{9}{4} b^2 + b^2 + 9b^2 \Rightarrow 4r^2 = \frac{49}{4} b^2 \Rightarrow \underline{b = \frac{4}{7} r}$; $\underline{a = \frac{6}{7} r}$; $\underline{c = \frac{12}{7} r}$.

2238. Legyen a négyzetes oszlop alapéle a, oldaléle b. $s = 8a + 4b \Rightarrow b = \frac{s - 8a}{4}$. A négyzetes oszlop testátlója a köré írt gömb átmérője: $4r^2 = a^2 + a^2 + b^2 = 2a^2 + \frac{(s - 8a)^2}{16} \Rightarrow$ $\Rightarrow 96a^2 - 16as + s^2 - 64r^2 = 0$. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa: $D = 64 \cdot (384r^2 - 2s^2)$.

1. eset: nincs megoldás, ha $384r^2 - 2s^2 < 0$, azaz $8 \cdot \sqrt{3} \cdot r < s$.

2. eset: egy megoldás van, ha $s = 8 \cdot \sqrt{3}\, r$, ekkor $\underline{a = b = \frac{s}{12}}$, a négyzetes oszlop egy kocka.

3. eset: két megoldás lehet, ha $s < 8 \cdot \sqrt{3} \cdot r$. Ekkor $\underline{a_{1,2}} = \frac{16s \pm 8 \cdot \sqrt{384r^2 - 2s^2}}{192} =$ $= \frac{2s \pm \sqrt{384r^2 - 2s^2}}{24}$ és $\underline{b_{1,2}} = \frac{s \mp \sqrt{384r^2 - 2s^2}}{12}$.

2239. Legyenek a téglatest egy csúcsba futó élei a, b és c. A feltétel szerint $4a + 4b + 4c = s$. A téglatest testátlója a köré írt gömb átmérője: $4r^2 = a^2 + b^2 + c^2$. $4r^2 = (a + b + c)^2 -$ $- 2(ab + bc + ac) = \left(\frac{s}{4}\right)^2 - 2(ab + bc + ac) \Rightarrow 2(ab + bc + ac) = \left(\frac{s}{4}\right)^2 - 4r^2$. A téglatest felszíne: $A = 2ab + 2bc + 2ac = \frac{s^2}{16} - 4r^2 = \underline{\frac{s^2 - 64r^2}{16}}$. Nincs ilyen téglatest, ha $s \le 8r$.

2240. Legyenek a téglatest egy csúcsba futó élei a, b és c; a köré írt gömb sugara pedig R. A feltétel szerint $4a + 4b + 4c = 4(a + b + c) = s$ és $2ab + 2bc + 2ac = F$. $\frac{s^2}{16} = (a + b + c)^2 =$ $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = a^2 + b^2 + c^2 + F$. A gömb átmérője a téglatest testátlója: $(2R)^2 =$ $= a^2 + b^2 + c^2$. A fentieket egybevetve $(2R)^2 = \frac{s^2}{16} - F \Rightarrow R = \underline{\underline{\frac{\sqrt{s^2 - 16F}}{8}}}$. Nincs ilyen téglatest, ha $s \leq 4\sqrt{F}$.

2241. Az 1837. feladatban, valamint az 1838. feladatban bizonyítottuk:

Az a élű szabályos tetraéder köré írható gömb sugara $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; az a' élű szabályos tetraéderbe írt gömb sugara $\frac{a'\sqrt{6}}{12}$. A fentieket felhasználva: az R sugarú gömb köré írt szabályos tetraéder éle $a' = \frac{12R}{\sqrt{6}}$. Az R sugarú gömbbe írt szabályos tetraéder éle $a = \frac{4R}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}a'$. Bármely két szabályos tetraéder hasonló, a térfogatarány kiszámítható a $V : V' = (a : a')^3$ arány alapján. $V : V' =$ $= \left(\frac{1}{3}a' : a'\right)^3 = (1:3)^3$. Egy gömbbe és a gömb köré írt szabályos tetraéderek <u>térfogatának aránya 1 : 27</u>.

2242. Legyen a gömb sugara R, az oktaéder éle a, a tetraéder éle b. A szabályos oktaéder két átellenes csúcsának távolsága a köré írt gömb átmérője. Tekintsük az oktaéder négy oldalélére illeszkedő síkmetszetét, ami négyzet: $(2R)^2 = 2a^2 \Rightarrow a = R\sqrt{2}$. Az oktaéder térfogata két egybevágó szabályos négyoldalú gúla térfogatának összege: $V = 2 \cdot \frac{a^2 R}{3} = \frac{4}{3}R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4}}$.

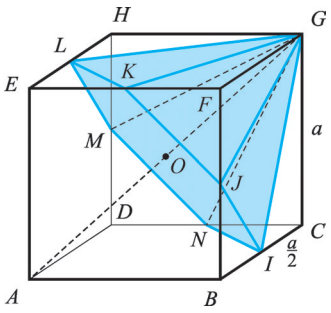
A b élű szabályos tetraéder köré írt gömb sugara az 1837. feladat alapján: $R = \frac{\sqrt{6}\,b}{4} \Rightarrow$ $\Rightarrow b = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$ a tetraéder éle . A b élű szabályos tetraéder magassága $\frac{b\sqrt{6}}{3}$, térfogata: $V_t = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}b^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}R\right)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3 \Rightarrow \underline{\underline{V_t = \frac{8\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{3V}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{9}V}}$.

2243. Felhasználjuk az 1837. feladat és az 1838. feladat eredményeit: az R sugarú gömbbe írt szabályos tetraéder éle $a = \frac{4}{\sqrt{6}}R$. Az a élű szabályos tetraéderbe írt gömb sugara $r = \frac{\sqrt{6}}{12}a = \frac{1}{3}R$. Bármely két gömb hasonló, ezért: $A_R : A_r = (R : r)^2 = \underline{\underline{9 : 1}}$.

2244. Legyen az r sugarú gömbbe írt kocka éle a, ebbe a kockába írt gömb sugara ϱ, a ϱ sugarú gömbbe írt szabályos tetraéder éle pedig b. Az r sugarú gömbbe írt kocka testátlója a gömb átmérője. $\Rightarrow 2r = a\sqrt{3}$. Az a élű kockába írt gömb sugara a kocka élének fele. $\Rightarrow \varrho = \frac{a}{2} = \frac{r}{\sqrt{3}}$.

II

2246.



A ϱ sugarú gömbbe írt szabályos tetraéder éle (l. 1837. feladat) $b=\frac{4\varrho}{\sqrt{6}}=\frac{4r}{3\sqrt{2}}$. A b élű szabályos tetraéder felszíne és térfogata: $A=\sqrt{3}\cdot b^2 \Rightarrow \underline{\underline{A=\frac{8\sqrt{3}}{9}r^2}}$ és $V=\frac{\sqrt{2}}{12}b^3 \Rightarrow \underline{\underline{V=\frac{8}{81}r^3}}$.

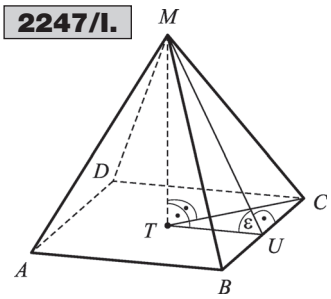
2245. Legyen az a élű kocka köré írt gömb sugara r, e köré a gömb köré írt szabályos tetraéder éle b, a tetraéder köré írt gömb sugara R, végül az R sugarú gömb köré írt szabályos oktaéder éle c. Az r sugarú gömbbe írt kocka testátlója a gömb átmérője. $\Rightarrow 2r=a\sqrt{3}$. Az a élű kocka köré írt gömb sugara feleakkora, mint a kocka testátlója. $\Rightarrow r=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Az r sugarú gömb köré írt szabályos tetraéder éle (l. 1838. feladat): $b=\frac{12}{\sqrt{6}}r$. A b élű szabályos tetraéder köré írt gömb sugara (l. 1837. feladat): $R=\frac{\sqrt{6}}{4}b$. Az R sugarú gömb köré írt szabályos oktaéder éle (l. 1917. feladat): $c=\sqrt{6}R$. A c élű szabályos oktaéder térfogata (l. 2242. feladat): $V=\frac{\sqrt{2}}{3}c^3$. $\Rightarrow V=\underline{\underline{\frac{243}{2}a^3}}$.

2246. Felhasználjuk az 1691. feladat, az 1695. feladat és az 1692. feladat eredményeit. Az ábra jelöléseivel: I; J; K; L; M és N élfelező pontok egy síkban vannak. Síkjuk merőlegesen felezi a testátlót; $IJKLMN$ szabályos hatszög; $GI=GJ=\ldots=GN=AI=AJ=\ldots=AN$. Az $IJKLMNG$ test olyan szabályos hatszög alapú szabályos gúla, aminek a magassága $GO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, alapéle $IJ=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, oldaléle $GI=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ és oldallapjainak magassága $\frac{3a}{2\sqrt{2}}$. A keresett gömb, amely érinti a kocka három lapját és a metsző síkot, éppen a szabályos hatszög alapú gúlába beírható (ϱ sugarú) gömb, hiszen a gúla alaplapját és három oldallapját érinti.

$V_{\text{gúla}}=\frac{A_{\text{gúla}}\cdot\varrho}{3}\Rightarrow\varrho=\frac{3V_{\text{gúla}}}{A_{\text{gúla}}}$. $V_{\text{gúla}}=\frac{1}{3}\cdot T_a\cdot m=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot T_{IJO}\cdot GO=\frac{3}{8}a^3$. $A_{\text{gúla}}=T_a+6T_{IJG}=$

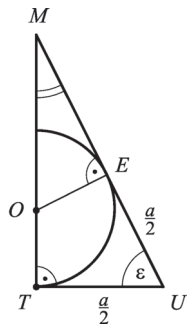
$=\frac{3\sqrt{3}+9}{4}a^2$. $\Rightarrow \underline{\underline{\varrho=\frac{3-\sqrt{3}}{4}a}}$.

2247/I.

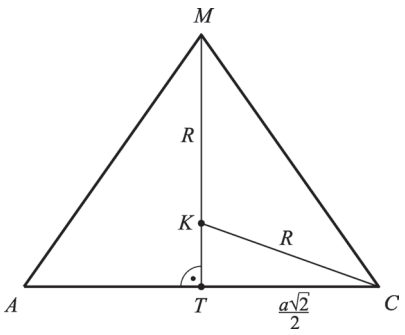


2247. Legyen a gúla alapéle a, magassága m, köré írt gömbjének sugara R, beírt gömbjének sugara r, az oldallap és az alaplap hajlásszöge ε. Tekintsük a gúlának az alapél felezőmerőleges síkjával vett metszetét (2247/II. ábra). $\frac{2m}{a}=\operatorname{tg}\varepsilon$. Pitagorasz-tétel az MTU derékszögű háromszögben: $MU^2=m^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$. $MOE\triangle\sim MUT\triangle$, mert szögeik páronként

2247/II.



2247/III.



egyenlők. $\Rightarrow \frac{m-r}{r}=\frac{MU}{\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{m^2+\frac{a^2}{4}}}{\frac{a}{2}} \Rightarrow r=\frac{ma}{\sqrt{4m^2+a^2}+a}$. Tekintsük az oldalélt tartalmazó tengelymetszetet (2247/III. ábra). Pitagorasz-tétel a KTC derékszögű háromszögben: $KT^2=R^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$ és $m=R+KT \Rightarrow m-R=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}} \Rightarrow R=\frac{m}{2}+\frac{a^2}{4m}$. A feladat feltételei szerint: $R=3r \Rightarrow \frac{m}{2}+\frac{a^2}{4m}=\frac{3ma}{\sqrt{4m^2+a^2}+a} \Rightarrow \frac{10\frac{m^2}{a^2}-1}{2\frac{m^2}{a^2}+1}=\sqrt{4\frac{m^2}{a^2}+1}$. Ebből $\frac{2m}{a}=\operatorname{tg}\varepsilon=x$ (ahol $x>0$, mert $0<\varepsilon<90°$, hiszen két sík hajlásszöge) jelölést felhasználva: $\frac{5x^2-2}{x^2+2}=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow 0=x^6-20x^4+28x^2=x^2\left(x^4-20x^2+28\right)$. Az egyenlet pozitív megoldásai: $x_1=\sqrt{10+6\sqrt{2}}=\operatorname{tg}\varepsilon_1$ és $x_2=\sqrt{10-6\sqrt{2}}=\operatorname{tg}\varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_1\approx 76{,}91°$, illetve $\varepsilon_2\approx 50{,}91°$.

2248. Felhasználjuk, hogy az R sugarú gömbbe írt egyenlő oldalú henger átmérője: $a=\frac{2R}{\sqrt{2}}$; az R sugarú gömbbe írt egyenlő oldalú kúp alkotója: $b=\sqrt{3}R$.

a) $A_{\text{henger}}=2\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi+2\left(\frac{a}{2}\right)\pi a=3\pi R^2$. $A_{\text{gömb}}=4\pi R^2$. $A_{\text{kúp}}=\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi+\left(\frac{b}{2}\right)\pi b=\frac{9\pi}{4}R^2$.

$A_{\text{henger}}=3\pi R^2=\sqrt{4\pi R^2\cdot\frac{9\pi}{4}R^2}=\sqrt{A_{\text{gömb}}\cdot A_{\text{kúp}}} \Rightarrow$ A henger felszíne mértani közepe a gömb és a kúp felszínének. *b)* $V_{\text{henger}}=\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi a=\frac{\pi}{\sqrt{2}}R^3$. $V_{\text{gömb}}=\frac{4\pi}{3}R^3$. $V_{\text{kúp}}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi\cdot\left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)=$

$= \frac{\sqrt{3}\,\pi}{24} b^3 = \frac{3\pi}{8} R^3$. $\underline{\underline{V_{\text{henger}}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} R^3 = \sqrt{\frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \frac{3\pi}{8} R^3} = \underline{\underline{\sqrt{V_{\text{gömb}} \cdot V_{\text{kúp}}}}} \Rightarrow$ A henger térfogata mértani közepe a gömb és a kúp térfogatának.

II

2249. Felhasználjuk, hogy az R sugarú gömb köré írt egyenlő oldalú henger átmérője: $a = 2R$; az R sugarú gömb köré írt egyenlő oldalú kúp alkotója: $b = 2 \cdot \sqrt{3}R$.

a) $A_{\text{henger}} = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi + 2\left(\frac{a}{2}\right)\pi a = 6\pi R^2$. $A_{\text{gömb}} = 4\pi R^2$. $A_{\text{kúp}} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi + \left(\frac{b}{2}\right)\pi b = 9\pi R^2$.

$\underline{\underline{A_{\text{henger}}}} = 6\pi R^2 = \sqrt{4\pi R^2 \cdot 9\pi R^2} = \underline{\underline{\sqrt{A_{\text{gömb}} \cdot A_{\text{kúp}}}}} \Rightarrow$ A henger felszíne mértani közepe a gömb és a kúp felszínének.

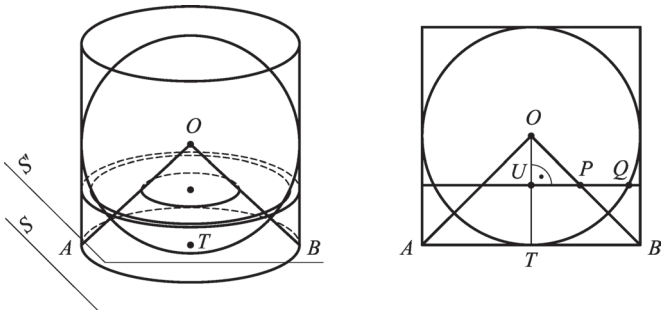
b) $V_{\text{henger}} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi a = 2\pi R^3$. $V_{\text{gömb}} = \frac{4\pi}{3} R^3$. $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} = 3\pi R^3$. $\underline{\underline{V_{\text{henger}}}} = 2\pi R^3 =$

$= \sqrt{\frac{4\pi}{3} R^3 \cdot 3\pi R^3} = \underline{\underline{\sqrt{V_{\text{gömb}} \cdot V_{\text{kúp}}}}} \Rightarrow$ A henger térfogata mértani közepe a gömb és a kúp térfogatának.

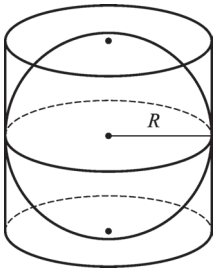
2250. Legyen a metsző sík d távolságra az O középponttól. Legyen a gömb sugara R, ekkor a henger átmérője $2R$. Tekintsük a henger egyik tengelymetszetét. $OT = TB = R$, mert $ABO\triangle$ egyenlő szárú derékszögű háromszög. $OUP\triangle \sim OTB\triangle \Rightarrow OU = UP = d$, azaz a kúp síkmetszet körének sugara d. Pitagorasz-tétel az OUQ derékszögű háromszögben: $UQ^2 + d^2 = R^2 \Rightarrow$ A gömb síkmetszet körének sugara $\sqrt{R^2 - d^2}$. A henger síkmetszet körének sugara R. A síkmetszetek területe: $T_{\text{kúp}} = d^2\pi$, $T_{\text{gömb}} = \left(\sqrt{R^2 - d^2}\right)^2 \pi = \left(R^2 - d^2\right)\pi$, $T_{\text{henger}} = R^2\pi$. Tehát fennáll a $T_{\text{kúp}} +$ $+ T_{\text{gömb}} = T_{\text{henger}}$ egyenlőség.

2251. A gömb köré írt poliéder minden lapjára olyan gúlát állítunk, amelynek az alaplappal szemközti csúcsa a gömb középpontja. Ezek a gúlák egyszeresen és hézagmentesen kitöltik a poliédert, így térfogatösszegük egyenlő a poliéder térfogatával. Legyen a gúlák alapterülete t_i, magassága r. $V_{\text{poliéder}} = \frac{1}{3} t_1 r + \frac{1}{3} t_2 r + \ldots + \frac{1}{3} t_n r = \frac{1}{3} r \cdot \left(t_1 + t_2 + \ldots + t_n\right) = \frac{1}{3} r \cdot A_{\text{poliéder}}$, hiszen

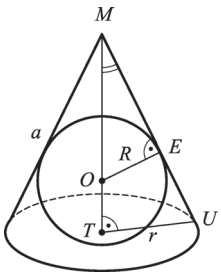
2250.



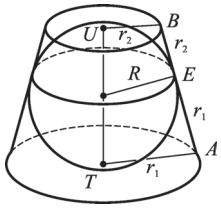
2252/I.



2252/II.



2252/III.



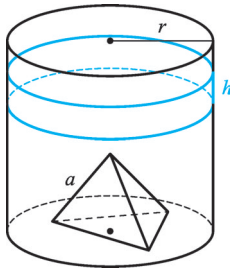
a gúlák alaplapjainak területösszege éppen a poliéder felszíne. $V_{\text{poliéder}} = \frac{1}{3} r \cdot A_{\text{poliéder}} \Rightarrow$ A felszín és a térfogat aránya adott r sugarú gömb esetén állandó: $\underline{\underline{\frac{A_{\text{poliéder}}}{V_{\text{poliéder}}} = \frac{3}{r}}}$.

2252. Adott R sugarú gömb köré egyféle egyenes körhenger írható: $A_{\text{henger}} = 2R^2\pi + 2R\pi \cdot 2R = 6R^2\pi$. $V_{\text{henger}} = R^2\pi \cdot 2R = 2R^3\pi$. $A_{\text{henger}} : V_{\text{henger}} = 6R^2\pi : 2R^3\pi = \underline{\underline{3:R}}$. Adott R sugarú gömb köré írt egyenes körkúpok esetén: $MOE\triangle \sim MUT\triangle$, mert szögeik egyenlők $\Rightarrow \frac{MO}{OE} = \frac{MU}{TU} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{MT - R}{R} = \frac{MU}{r} \Rightarrow \frac{m - R}{R} = \frac{a}{r} \Leftrightarrow \frac{a + r}{mr} = \frac{1}{R}$. $\quad A_{\text{kúp}} = r^2\pi + r\pi a$. $\quad V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot m$.

$A_{\text{kúp}} : V_{\text{kúp}} = (r^2\pi + r\pi a) : \left(\frac{1}{3} r^2\pi m\right) = (r + a) : \left(\frac{1}{3} rm\right) = \underline{\underline{3:R}}$. Adott R sugarú gömb köré írt egyenes csonkakúpok esetén: a csonkakúp alkotója $a = r_1 + r_2$, magassága $m = 2R$.

2253.



$A_{\text{csonkakúp}} = \pi\left[r_1^2 + a(r_1 + r_2) + r_2^2\right] = 2\pi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$.

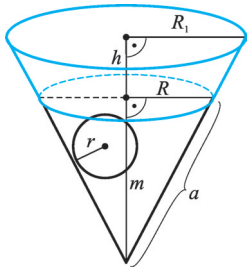
$V_{\text{csonkakúp}} = \frac{1}{3}\pi m\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right) = \frac{2\pi R}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$.

$\underline{\underline{\frac{A_{\text{csonkakúp}}}{V_{\text{csonkakúp}}}}} = \frac{2\pi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)}{\frac{2\pi R}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)} = \underline{\underline{3:R}}$.

Mindegyik esetben $A : V = 3 : R$.

2253. *a)* $V_t = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = r^2\pi h \Rightarrow h = \frac{125\sqrt{2}}{12 \cdot 16 \cdot \pi} \approx \underline{\underline{0{,}29\,\text{cm}}}$. *b)* 2 dm átmérőjű hengerben 8 dm magasságig víz van. $\Rightarrow$ Belefér a gömb a vízbe, ezért $V_{\text{víz}} = 1^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{9}{16}\pi = V_{\text{gömb}} \Rightarrow h = \frac{9}{16} = 0{,}56$. A vízszint $\underline{\underline{0{,}56\,\text{dm}}}$-t emelkedik és $\underline{\underline{8{,}56\,\text{dm}}}$ magasan fog állni.

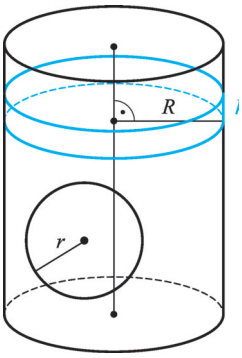
2254.



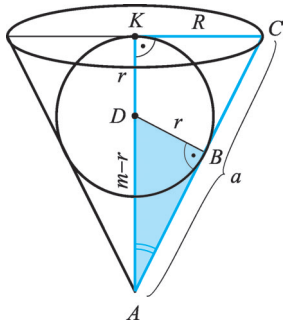
2254. Egyenlő oldalú kúp: $a = 2R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{3} m$. Hasonlóság miatt: $R_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(m + h)$. A gömb térfogata egyenlő a két kúp térfogatának

II

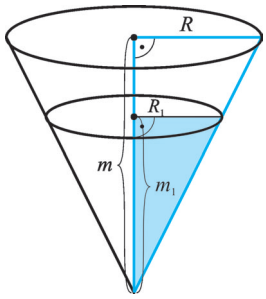
2255.



2256.



2257.



különbségével: $\frac{4}{3}r^3\pi=\frac{1}{3}R_1^2\cdot(m+h)\pi-\frac{1}{3}R^2m\pi\Rightarrow 4r^3=\frac{1}{3}(m+h)^3-\frac{1}{3}m^3\Rightarrow 12r^3+m^3=$
$=(m+h)^3\Rightarrow h=\underline{\underline{\sqrt[3]{12r^3+m^3}-m}}$.

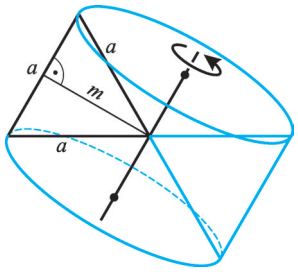
2255. $\frac{4}{3}r^3\pi=R^2\pi h\Rightarrow r^3=\frac{3}{4}R^2h\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{75}{4}}\Rightarrow 2r\approx\underline{\underline{5{,}3\,\text{cm}}}$.

2256. Egyenlő oldalú kúp: $a=2R\Rightarrow m=\sqrt{3}R$. $AKC\triangle\sim ABD\triangle\Rightarrow KC:AC=DB:DA\Rightarrow$
$\Rightarrow m-r=2r\Rightarrow m=3r$, azaz $\sqrt{3}\cdot R=3r\Rightarrow R=\sqrt{3}r$. A szükséges víz térfogata: $V=V_k-V_g=$
$=\frac{1}{3}R^2\pi m-\frac{4}{3}r^3\pi=\frac{5}{3}r^3\pi\Rightarrow V\approx\underline{\underline{41{,}89\,\text{cm}^3}}$.

2257. A 2256. ábra jelöléseit használva az egyenlő oldalú kúpra: $a=2R\Rightarrow m=\sqrt{3}R$.
$AKC\triangle\sim ABD\triangle\Rightarrow KC:AC=DB:DA\Rightarrow m-r=2r\Rightarrow m=3r$, azaz $\sqrt{3}R=3r\Rightarrow R=\sqrt{3}r$.
A beleöntött víz térfogata: $V=V_k-V_g=\frac{1}{3}R^2\pi m-\frac{4}{3}r^3\pi=\frac{5}{3}r^3\pi$. Hasonlóság miatt: $R:m=$
$=R_1:m_1\Rightarrow R_1=\frac{\sqrt{3}}{3}m_1$. $V=\frac{1}{3}R_1^2\cdot\pi m_1=\frac{5}{3}r^3\pi\Rightarrow m_1=\underline{\underline{r\cdot\sqrt[3]{15}}}$.

Síkidomok forgatásával nyert testek

2259.



2258. A keletkezett test két darab $m=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$ sugarú, $\frac{a}{2}$ magasságú kúpból áll. $V=2V_k=\underline{\underline{\frac{a^3\pi}{4}}}$. $A=2t_p=\sqrt{3}a^2\pi$.

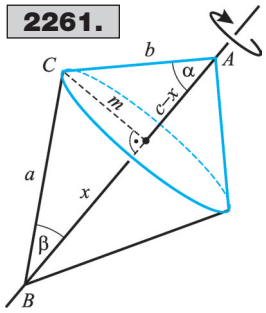
2259. $m=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$. A keletkezett testet megkapjuk, ha egy hengerből kiveszünk két kúpot.

$V=V_h-2V_k=\frac{1}{2}\cdot a^3\pi\Rightarrow V\approx\underline{\underline{6434\,\text{cm}^3}}$.

$A=2\cdot t_{kp}+t_{hp}=2\sqrt{3}\,a^2\pi\Rightarrow A\approx\underline{\underline{2786\,\text{cm}^2}}$.

2260. Legyen a háromszög alaphoz tartozó magassága m_1, a szárhoz tartozó magassága m_2. A háromszög hegyesszögű. Az alap körül forgatva két egybevágó, közös alapkörű kúp keletkezik. Sugaruk m_1, alkotójuk 25 cm, magasságuk 15 cm. A szár körül forgatva két közös alapkörű kúp adódik. Sugaruk m_2, magasságuk x cm, illetve $(25-x)$ cm, alkotójuk 25 cm, illetve 30 cm.

2261.



$am_1 = bm_2$. $V_1 = 2\cdot\frac{1}{3}m_1^2\cdot\pi\cdot\frac{a}{2} = \frac{1}{3}m_1^2\cdot\pi\cdot a$ és $V_2 = \frac{1}{3}m_2^2\cdot\pi x +$

$+\frac{1}{3}m_2^2\cdot\pi(b-x) = \frac{1}{3}m_2^2\cdot\pi b = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{b}m_1^2\cdot\pi \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{b}{a} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$.

$A_1 = 2m_1b\pi$ és $A_2 = m_2b\pi + m_2a\pi = m_2(a+b)\pi = \frac{a}{b}m_1(a+b)\pi \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{2b^2}{a(a+b)} = \underline{\underline{\frac{25}{33}}}$.

2261. A háromszög hegyesszögű $\Rightarrow$ a keletkezett két kúp az alapkör síkjának két oldalán van.

$m = b\cdot\sin\alpha$. $V = \frac{1}{3}m^2\cdot\pi x + \frac{1}{3}m^2\cdot\pi(c-x) = \frac{1}{3}\cdot(b\cdot\sin\alpha)^2\cdot\pi c \Rightarrow V \approx \underline{\underline{188{,}3\ \text{dm}^3}}$.

$A = ma\pi + mb\pi = m(a+b)\pi$ és koszinusztételből a-t kiszámolhatjuk: $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow A \approx \underline{\underline{218{,}3\ \text{dm}^2}}$.

2262. Tekintsük a 2261. ábrát. A háromszög tompaszögű, így leghosszabb oldala körül forgatva a keletkezett két kúp az alapkör síkjának két oldalán van. Az $ABC\triangle$ területe: $\frac{1}{2}mc =$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \Rightarrow m \approx 22{,}47$ cm. $V = \frac{1}{3}m^2\cdot\pi x + \frac{1}{3}\cdot m^2\cdot\pi(c-x) = \frac{1}{3}\cdot m^2\cdot\pi c \Rightarrow$

$\Rightarrow V \approx \underline{\underline{32{,}25\ \text{dm}^3}}$. $A = mb\pi + ma\pi = m(a+b)\pi \Rightarrow A \approx \underline{\underline{53{,}65\ \text{dm}^2}}$.

2263. Tekintsük a 2261. ábrát. Két forgáskúp keletkezik, a közös alapkör síkjának két oldalán.

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = 5{,}69$ dm. $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c\cdot m \Rightarrow m \approx 2{,}11$ dm. $V = \frac{1}{3}m^2\cdot\pi x + \frac{1}{3}m^2\cdot\pi(c-x) =$

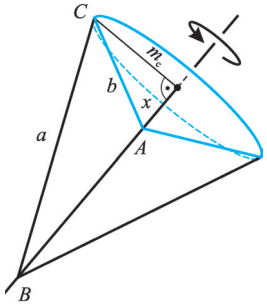
$= \frac{1}{3}\cdot m^2\cdot\pi c \Rightarrow V \approx \underline{\underline{26{,}56\ \text{dm}^3}}$. $A = mb\pi + ma\pi = m(a+b)\pi \Rightarrow A \approx \underline{\underline{49{,}78\ \text{dm}^2}}$.

2264. Két egybevágó, közös alapkörű kúp adódik. Sugaruk b, magasságuk $\frac{a}{2}$, alkotójuk:

$c = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$. $V = 2\cdot\frac{1}{3}b^2\pi\cdot\frac{a}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}ab^2\pi}}$ és $A = 2bc\pi = \underline{\underline{b\sqrt{4b^2+a^2}\cdot\pi}}$.

2265. Három eset lehetséges: **I.** α, β hegyesszög $\Rightarrow V_c = \frac{1}{3}m_c^2\pi c$,

2265.



ahogy azt a 2261. ábra alapján a 2261. feladatban kiszámoltuk. **II.** α tompaszög: 2265. ábra $\Rightarrow V_c = \frac{1}{3}m_c^2\pi(c+x) - \frac{1}{3}m_c^2\pi x = \frac{1}{3}m_c^2\pi c$.

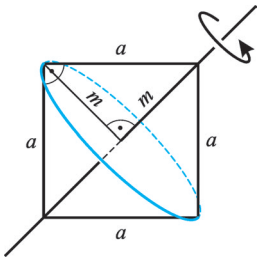
III. α derékszög $V_c = \frac{1}{3}m_c^2\pi c$. $2t = m_a\cdot a = m_b\cdot b = m_c\cdot c \Rightarrow$

$\Rightarrow V_a = \frac{1}{3}m_a^2\pi a = \frac{1}{3}\cdot m_a\cdot 2t\cdot\pi$ és $V_b = \frac{1}{3}\cdot m_b\cdot 2t\cdot\pi$ és

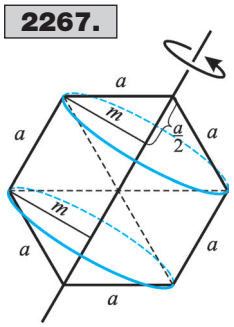
$V_c = \frac{1}{3}\cdot m_c\cdot 2t\cdot\pi \Rightarrow V_a : V_b : V_c = \underline{\underline{m_a : m_b : m_c}}$.

II

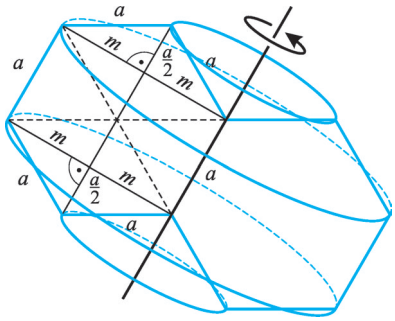
2266.



2267.



2268.



2266. $m=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. $V=2\cdot\frac{1}{3}\cdot m^2\pi m=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot a^3\pi}}$. $A=2t_p=2ma\pi=\underline{\underline{\sqrt{2}a^2\pi}}$.

2267. $m=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. $V=2V_k+V_h=2\cdot\frac{1}{3}m^2\pi\cdot\frac{a}{2}+m^2\pi a=\underline{\underline{a^3\pi}}\Rightarrow V\approx\underline{\underline{3141{,}6\,\text{cm}^3}}$.

$A=2t_{kp}+t_{hp}=2ma\pi+2ma\pi=2\sqrt{3}a^2\pi\Rightarrow A\approx\underline{\underline{1088{,}3\,\text{cm}^2}}$.

2268. $m=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. $V=V_h+2V_{csk}-2V_k=(2m)^2\pi a+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\left[(2m)^2+m^2+2m\cdot m\right]\pi-$

$-2\cdot\frac{1}{3}\cdot m^2\pi\cdot\frac{a}{2}=\underline{\underline{\frac{9}{2}a^3\pi}}$. $A=t_{hp}+2t_{cskp}+2t_{kp}=2(2m)\pi a+2\cdot 3ma\pi+2ma\pi=\underline{\underline{6\sqrt{3}a^2\pi}}$.

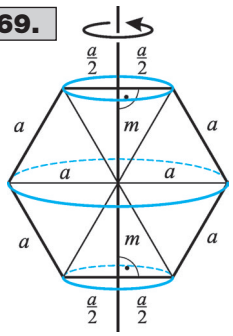
2269. $m=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. $V=2V_{csk}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+a\cdot\frac{a}{2}\right]m\pi=\underline{\underline{\frac{7\sqrt{3}}{12}a^3\pi}}$.

$A=2t_{cskp}+2t_f=2\cdot\left(a+\frac{a}{2}\right)\cdot a\pi+2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi=\underline{\underline{\frac{7}{2}a^2\pi}}$.

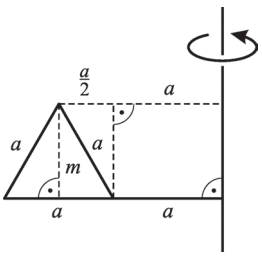
2270. $V=\frac{1}{3}\cdot\left[(2a)^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2+2a\cdot\frac{3}{2}a\right]\cdot m\pi-\frac{1}{3}\cdot\left[\left(\frac{3a}{2}\right)^2+a^2+\frac{3}{2}a\cdot a\right]\cdot m\pi=\underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3\pi}}$.

2271. $b_2=0{,}5b\Rightarrow b_1+b_3=0{,}5b$. $AE=EB$ és $CF=FB\Rightarrow EF\parallel AC$ és $2EF=AC\Rightarrow ABC\triangle\sim$ $\sim EBF\triangle$ és a hasonlóság aránya $2\Rightarrow PB=2QB\Rightarrow PQ=QB=m$. $AEFC$ forgatásából:

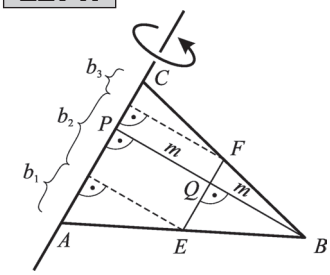
2269.



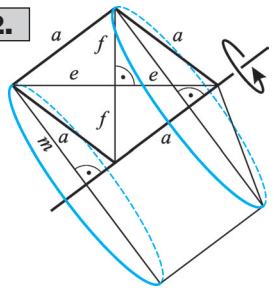
2270.



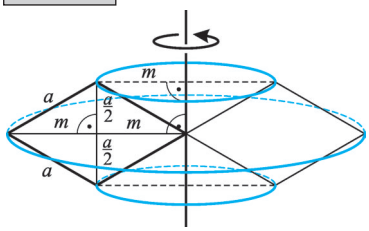
2271.



2272.



2273.



$V_1 = \frac{1}{3}m^2\pi b_3 + m^2\pi b_2 + \frac{1}{3}m^2\pi b_1 = \frac{1}{3}m^2\pi \cdot \frac{b}{2} + m^2\pi \cdot \frac{b}{2} = \frac{2}{3}m^2\pi b$. $EBF\triangle$ forgatásából: $V_2 = \frac{1}{3}(2m)^2 b\pi - V_1 = \frac{4}{3}m^2 b\pi - \frac{2}{3}m^2 b\pi = \frac{2}{3}m^2 b\pi \Rightarrow \underline{\underline{V_1 : V_2 = 1:1}}$.

2272. $a^2 = f^2 + e^2 \Rightarrow f = 15$ cm; $t_{rombusz} = 2f \cdot e = a \cdot m \Rightarrow m = 24$ cm. A keletkezett test térfogata megegyezik egy m sugarú és a magasságú henger térfogatával: $V = m^2\pi a \Rightarrow V \approx \underline{\underline{45{,}24\ \text{dm}^3}}$. $A = t_{hp} + 2t_{kp} = 2m\pi a + 2ma\pi = 4ma\pi \Rightarrow A \approx \underline{\underline{75{,}4\ \text{dm}^2}}$.

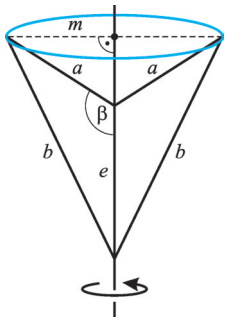
2273. $V = 2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \left\{(2m)^2 + m^2 + 2m \cdot m\right\} \cdot \frac{a}{2} \cdot \pi - \frac{1}{3}m^2\pi \cdot \frac{a}{2}\right] = \underline{\underline{\frac{3}{2}a^3\pi}}$. $A = 2t_{tcskp} + 2t_{kp} = 2 \cdot (2m + m) \cdot a\pi + 2ma\pi = \underline{\underline{4\sqrt{3}a^2\pi}}$.

2274. $V_a = m_a^2\pi a$ és $V_b = m_b^2\pi b$. $\frac{V_a}{V_b} = \frac{m_a^2\pi a}{m_b^2\pi b} = \frac{m_a^2 a}{m_b^2 b} = \frac{t \cdot m_a}{t \cdot m_b} = \frac{m_a}{m_b} = \frac{\frac{t}{a}}{\frac{t}{b}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{V_a}{V_b} = \frac{b}{a}}}$.

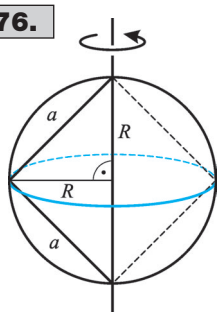
2275. Az adatok egy konkáv deltoidot adnak meg, mert $54^2 + 61^2 = 6637 < 7569 = 87^2 \Rightarrow \beta$ tompaszög. $\frac{1}{2}me = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-e)} \Rightarrow m \approx 60{,}4$ cm. $V = \frac{1}{3}m^2\pi(e + x) - \frac{1}{3}m^2\pi x = \frac{1}{3}m^2\pi e \Rightarrow V \approx \underline{\underline{206{,}3\ \text{dm}^3}}$. $A = mb\pi + ma\pi = m(a + b)\pi \Rightarrow A \approx \underline{\underline{280{,}8\ \text{dm}^2}}$.

2276. $a = \sqrt{2}R$. $V_g = \frac{4}{3}R^3\pi$ és $V = 2 \cdot \frac{1}{3}R^2\pi \cdot R = \frac{2}{3}R^3\pi \cdot \underline{\underline{\frac{V}{V_g} = \frac{1}{2}}}$. $A_g = 4R^2\pi$ és $A = 2 \cdot Ra\pi = 2\sqrt{2}R^2\pi \Rightarrow \frac{A}{A_g} = \frac{2\sqrt{2}R^2\pi}{4R^2\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$.

2275.

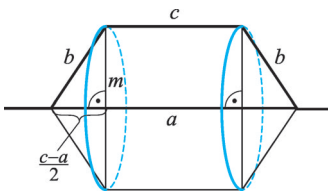


2276.

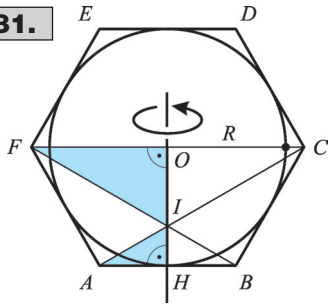


II

2277.



2281.



2277. $m = 24\,\text{cm}$. $V = V_h + 2V_k \approx \underline{48{,}26\,\text{cm}^3}$. $A = t_{hp} + 2t_{kp} \approx \underline{69{,}37\,\text{cm}^2}$.

2278. A keletkezett test egy forgáshenger és egy forgáskúp a közös körlapjuk két oldalán. $V \approx \underline{142{,}5\,\text{dm}^3}$. $A \approx \underline{152{,}7\,\text{dm}^2}$.

2279. A körülírt kör sugara $\frac{2}{3}$-a a háromszög magasságának. $\frac{V_g}{V_k} = \underline{\underline{\frac{32}{9}}}$.

2280. A beírt kör sugara $\frac{1}{3}$-a a háromszög magasságának. $\frac{V_g}{V_k} = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}$.

2281. $ABC\sphericalangle = 120° \Rightarrow IAH\sphericalangle = 30° \Rightarrow 2 \cdot IH = AI$ és $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}AI$. $FOI\triangle \cong COI\triangle \sim$

$\sim AHI\triangle \ (\lambda = 2) \Rightarrow 2IO = FI$ és $FO = \frac{\sqrt{3}}{2}FI$. $FO = AB = 2AH \Rightarrow 2IH = IO \Rightarrow IH = \frac{1}{3}R$ és

$IO = \frac{2}{3}R \Rightarrow AI = \frac{2}{3}R$; $AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}R = \frac{\sqrt{3}}{3}R$; $FI = \frac{4}{3}R$; $FO = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

$V_{FOI} = \frac{1}{3}FO^2 \cdot \pi \cdot IO = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{3}R = \underline{\underline{\frac{8}{27}R^3\pi}}$ és $V_{AIH} = \frac{1}{8}V_{FOI} = \underline{\underline{\frac{1}{27}R^3\pi}}$;

$A_{FOI} = FO \cdot (FO + FI) \cdot \pi = \frac{2\sqrt{3}}{3}R \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R + \frac{4}{3}R\right) \cdot \pi = \underline{\underline{\frac{12 + 8\sqrt{3}}{9}R^2\pi}}$; $A_{AIH} = \frac{1}{4}A_{FOI} =$

$= \underline{\underline{\frac{3 + 2\sqrt{3}}{9}R^2\pi}}$.

III. Vektorok

Vektorok összege, különbsége és vektor szorzása számmal

III

2282. *a)* egyenlő vektorok: $\mathbf{f} = \mathbf{c}$; *b)* ellentett vektorok: $\mathbf{a} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} + \mathbf{e} = \mathbf{0}$, $\mathbf{g} + \mathbf{h} = \mathbf{0}$.

2283. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$; $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$; $\overrightarrow{DA} = \mathbf{d}$; $\overrightarrow{AC} = \mathbf{e}$; $\overrightarrow{BD} = \mathbf{f}$. $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$, $\mathbf{a} + \mathbf{f} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$, $\mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e} = \mathbf{0}$.

2284. *a)* $\mathbf{g} = \mathbf{f} + \mathbf{a}$; *b)* $\mathbf{h} = -\mathbf{f} - \mathbf{a}$; *c)* $\mathbf{k} = -2\mathbf{g} + \mathbf{i}$.

2285. *a)* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; *b)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$; *c)* $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$; *d)* $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$; *e)* $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$.

2286. *a)* $\mathbf{c} - \mathbf{a} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{d}$; *b)* $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EA} = \mathbf{a} - \mathbf{e}$; *c)* $\mathbf{a} + \mathbf{d} - \mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{c} - \mathbf{b} = -\mathbf{b} = \overrightarrow{KG}$; *d)* $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{d} - \mathbf{e} = \mathbf{a} - \mathbf{d} + \mathbf{b} - \mathbf{e} = -2\mathbf{e} + \mathbf{b} - \mathbf{e} = -2\mathbf{e} + 2\mathbf{a} = \overrightarrow{KH}$.

2287. Legyen az AB szakasz felezőpontja H, az S súlypont H pontra vonatkozó tükörképe S' pont. Felhasználjuk, hogy S harmadolja HC-t $\Rightarrow \overrightarrow{HS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$ és $\overrightarrow{S'S} = \overrightarrow{SC}$.

a) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SS'} + \overrightarrow{SC} = \mathbf{0}$; *b)* $\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{BA}$; *c)* $\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{CB}$; *d)* $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SS'} - \overrightarrow{SC} = -2\overrightarrow{SC}$.

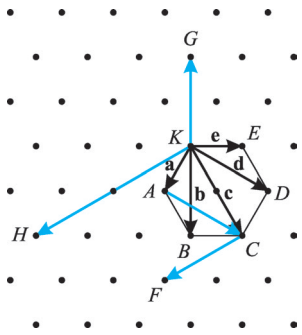
2288. *a)* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OO'}$, ahol O' pont az O pont AB egyenesre vonatkozó tükörképe. *b)* $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CA}$.

2289. Az ábrán vázolt $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egy lehetséges megoldás, mert $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$.

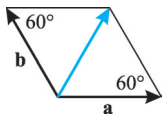
2290. Az ábrán vázolt $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egy lehetséges megoldás, mert $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

2291. *a)* $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{v}$; *b)* $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = -\mathbf{v}$.

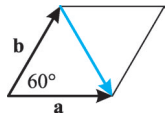
2286.



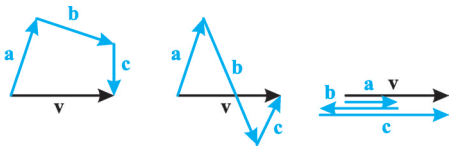
2289.



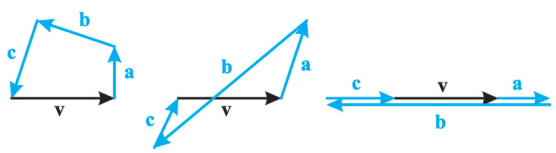
2290.



2291/I.

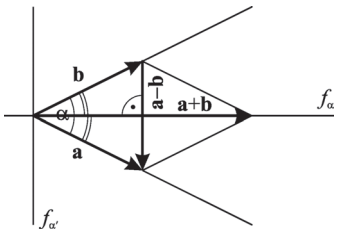


2291/II.



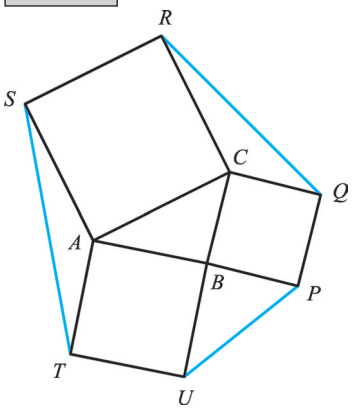
III

2296.



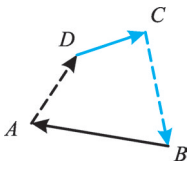
2292. **1. eset:** $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, **a** és **b** vektor nem párhuzamos. A paralelogrammamódszer szerint $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektor egy $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ oldalú rombusz átlói. $\Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b} \perp \mathbf{a}-\mathbf{b}$.
2. eset: $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ és $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$ vagy $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$. Ha $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, akkor $\mathbf{a}+\mathbf{b} = 2\mathbf{a}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b} \perp \mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Ha $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$, akkor $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b} = -2\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{0} \perp \mathbf{a}-\mathbf{b}$.
2293. **1. eset:** $\mathbf{a}+\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{a}+\mathbf{b} \perp \mathbf{a}-\mathbf{b} \Rightarrow$ A paralelogrammamódszer szerint $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektor egy $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ oldalú rombusz átlói.
2. eset: $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} = -\mathbf{b} \Rightarrow |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.
3. eset: $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.
2294. **1. eset:** $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. A paralelogrammamódszer szerint $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ egy téglalap átlói. $\Rightarrow |\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.
2. eset: $\mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b} = -\mathbf{b} \Rightarrow |\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.
3. eset: $\mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{a}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{a} \Rightarrow |\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.
2295. **1. eset:** $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektorok nem párhuzamosak és $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$. Ekkor a paralelogrammamódszer szerint $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ egy téglalap átlói. $\Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
2. eset: $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \parallel (\mathbf{a}-\mathbf{b})$ és $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}| \Rightarrow$ vagy $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{a}-\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ vagy $\mathbf{a}+\mathbf{b} = -(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
2296. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, **a** és **b** nem párhuzamosak $\Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektorok az **a** és **b** által kifeszített rombusz átlóvektorai, amelyek felezik a rombusz szögeit $\Rightarrow (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \parallel f_\alpha$, illetve $(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \parallel f_{\alpha'}$. A megoldás $k \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b})$ vektor, ahol k nullától különböző valós szám. Végtelen sok megoldás van.
2297. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, azaz $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.
2298. $\mathbf{a} = -\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$. A nullvektor egyenlő az ellentettjével.
2299. *a)* Bármely négy pontra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$;
b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}$;
c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}$.
2300. $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}$
2301. *a)* $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OB} + 2\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \mathbf{b} + 2(\mathbf{p} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{p} - \mathbf{b}$.
b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -\mathbf{a} + 2\mathbf{p} - \mathbf{b}$.

2303.

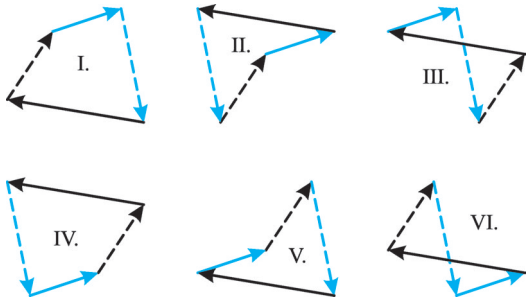


2302. $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{x} = \mathbf{c} + 2\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{c} + \mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$. Geometriai jelentése: a háromszög középvonala párhuzamos a nem felezett oldallal, és fele olyan hosszú.
2303. Az ábra jelölései szerint U és P, Q és R, S és T „szomszédos csúcsok”. $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CQ}$; $\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{AS}$; $\overrightarrow{BU} = \overrightarrow{AT}$ egyenlőségeket felhasználva: $\overrightarrow{UP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BU} = \overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{AT}$ és $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{CR} - \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{CQ}$ és $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AS} \Rightarrow \overrightarrow{UP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{ST} = \mathbf{0} \Rightarrow$ A QR, ST, UP szakaszokkal párhuzamosan szerkeszthető QR, ST, UP oldalú háromszög.
2304. A vektorösszeadás kommutatív. $\Rightarrow$ A négy vektor összege minden esetben nullvektor. $\Rightarrow$ A négy vektor négyszöget alkot.

2304/I.



2304/II.



1. eset: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$. (I.)
2. eset: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{0}$. (II.)
3. eset: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{0}$. (III.)
4. eset: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$. (IV.)
5. eset: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$. (V.)
6. eset: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$. (VI.)

2305. $\mathbf{a}-\mathbf{b}\perp\mathbf{b}$. $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ egy derékszögű háromszög befogói; $\mathbf{a}$ az átfogó, és $|\mathbf{a}|=2\cdot|\mathbf{b}|$, ezért $\sphericalangle(\mathbf{a};\mathbf{b})=60°$.

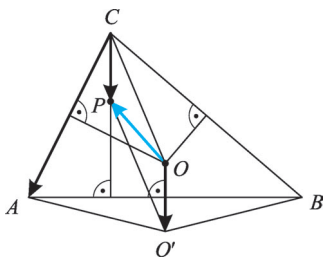
2306. A feltételnek eleget tevő vektorok egy szabályos háromszög oldalvektorai, ezért a szomszédosak egymással 120°-ot zárnak be.

2307. $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$ és O' az O pont AB egyenesre vonatkozó tükörképe.
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}$. Mivel $\overrightarrow{OO'}\perp AB$, ezért $\overrightarrow{CP}\perp AB\Rightarrow P$ pont rajta van az ABC háromszög m_c magasságvonalán. Hasonlóan belátható, hogy P az m_a és az m_b magasságvonalnak is pontja. $\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$, ahol M a háromszög magasságpontja.

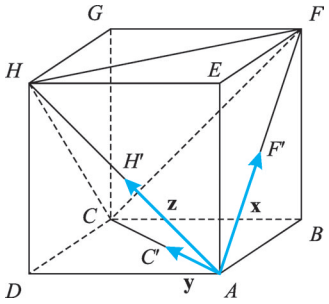
2308. Legyen $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$; $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AE}=\mathbf{c}$. *a)* $\overrightarrow{AF}=\mathbf{a}+\mathbf{c}=\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AH}=\mathbf{b}+\mathbf{c}=\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{BE}=\mathbf{c}-\mathbf{a}=\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{BD}=\mathbf{b}-\mathbf{a}=\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{DE}=\mathbf{c}-\mathbf{b}=\overrightarrow{CF}$;
b) $\overrightarrow{AG}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\overrightarrow{EC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\overrightarrow{DF}=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\overrightarrow{BH}=-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

2309. $\overrightarrow{AH}=2\mathbf{z}$; $\overrightarrow{AC}=2\mathbf{y}$; $\overrightarrow{AF}=2\mathbf{x}$; $\overrightarrow{FH}=2\mathbf{z}-2\mathbf{x}$; $\overrightarrow{CH}=2\mathbf{z}-2\mathbf{y}$; $\overrightarrow{FC}=2\mathbf{y}-2\mathbf{x}$.
a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{C'B}=\mathbf{y}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}=\mathbf{y}-\mathbf{z}+\mathbf{x}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{C'D}=\mathbf{y}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FH}=\mathbf{y}+\mathbf{z}-\mathbf{x}$,
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AH'}+\overrightarrow{H'E}=\mathbf{z}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CF}=\mathbf{z}-\mathbf{y}+\mathbf{x}$;

2307.



2309.



b) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = 2\mathbf{y} + \mathbf{z} - \mathbf{y} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = -2\mathbf{y} + \mathbf{z} - \mathbf{y} + \mathbf{x} =$
$= \mathbf{x} - 3\mathbf{y} + \mathbf{z}$, $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HF} = \mathbf{z} - \mathbf{y} + \mathbf{x} + 2\mathbf{x} - 2\mathbf{z} = 3\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z}$, $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FH} =$
$= \mathbf{z} - \mathbf{y} + \mathbf{x} + 2\mathbf{z} - 2\mathbf{x} = -\mathbf{x} - \mathbf{y} + 3\mathbf{z}$.

2310. A 2309. ábra jelöléseit használjuk. Az **x**, **y**, **z** vektorok által kifeszített tetraéder a kockába írt $AFHC$ szabályos tetraédernek az A középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú hasonlósággal kapott képe. $\Rightarrow$ élei 60°-os szöget zárnak be $\Rightarrow \sphericalangle(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sphericalangle(\mathbf{y}; \mathbf{z}) = \sphericalangle(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = 60°$.

2311. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AD} = \mathbf{c}$. $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$; $\overrightarrow{BD} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$; $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$.

2312. $\overrightarrow{CD} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$; $\overrightarrow{FD} = \mathbf{c}$; $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = \overrightarrow{FC}$; $\overrightarrow{CE} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = \overrightarrow{FA}$;
$\overrightarrow{DE} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = \overrightarrow{FB}$.

2313. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$. *a)* $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \overrightarrow{AG}$, kockacsúcsba mutat.
b) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = \overrightarrow{EC}$, nem mutat kockacsúcsba. *c)* $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \overrightarrow{AF}$, kockacsúcsba mutat.
d) $\mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0} = \overrightarrow{AA}$, kockacsúcsba mutat. *e)* $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{DB}$, nem mutat kockacsúcsba.
f) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} = \overrightarrow{AH}$, kockacsúcsba mutat.

2314. Például egy kocka egy csúcsból induló három élvektora esetén két élvektor összege egy lapátló vektor, amely merőleges a vele közös csúcsból induló harmadik élvektorra.

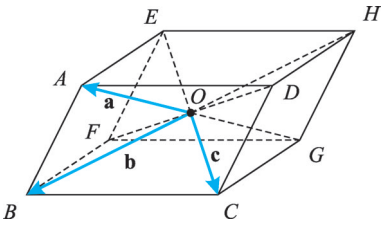
2315. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{OG} = -\mathbf{a}$; $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = -\mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$; $\overrightarrow{OE} = -\mathbf{c}$; $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} =$
$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = \mathbf{c} + \mathbf{a} - \mathbf{b}$; $\overrightarrow{OF} = \mathbf{b} - \mathbf{a} - \mathbf{c}$.

2316. $AB = BC$, OB oldal közös és $AOB \sphericalangle = COB \sphericalangle = 90° \Rightarrow AOB\triangle \cong BOC\triangle \Rightarrow OA =$
$= OC \Rightarrow AOC\triangle$ egyenlő szárú derékszögű háromszög. Hasonlóan igazolható, hogy $AOB\triangle$ és $BOC\triangle$ is egyenlő szárú derékszögű háromszög. Az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ egyenlő hosszúságú, páronként merőleges vektorok olyan kockát határoznak meg, amelynek az adott tetraéder élei a lapátlói, az O ponttal átellenes csúcsa pedig $D \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$.

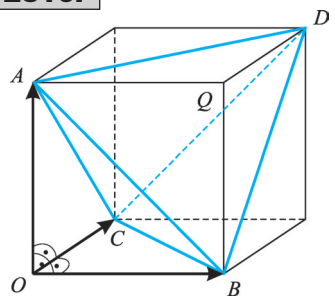
2317. $2\mathbf{a}$; $1{,}5\mathbf{a}$; $3\mathbf{a}$; $\frac{\mathbf{a}}{2}$ egyirányú az **a** vektorral. $(-2\mathbf{a})$; $(-2{,}5\mathbf{a})$ ellentétes irányú az **a** vektorral. A szerkesztendő vektorok hossza 2-szerese, 1,5-szerese, 3-szorosa, 2,5-szerese, illetve fele az **a** vektor hosszának.

2318. $2\mathbf{b}$; $0{,}5\mathbf{b}$; $\frac{\mathbf{b}}{3}$; $\frac{4}{5}\mathbf{b}$; $\frac{\mathbf{b}}{4}$ egyirányú a **b** vektorral. $\left(-\frac{4}{3}\mathbf{b}\right)$; $(-\mathbf{b})$ ellentétes irányú a

2315.

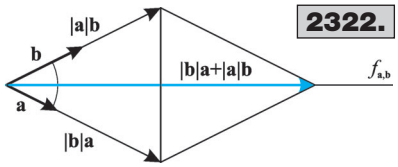


2316.



b vektorral. A szerkesztendő vektorok hossza $\frac{4}{3}$-szorosa, 2-szerese, fele, harmada, $\frac{4}{5}$-e, 1-szerese, illetve negyede a **b** vektor hosszának.

2322.



2319. 2320. A feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.

2321. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ és $\lambda\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}\right)=\lambda\cdot\overrightarrow{DA}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\lambda\cdot\overrightarrow{DA}\Rightarrow\underline{\underline{\lambda=-1}}$.

2322. Legyen az **a** vektor hossza a és a **b** vektor hossza b. A $|\mathbf{b}|\cdot\mathbf{a}$ vektor hossza $b\cdot a$, iránya egyezik **a** vektor irányával. Az $|\mathbf{a}|\cdot\mathbf{b}$ vektor hossza $a\cdot b$, iránya egyezik **b** vektor irányával. Az **a** és a **b** vektor nem párhuzamosak. $\Rightarrow|\mathbf{b}|\cdot\mathbf{a}$ vektor sem párhuzamos $|\mathbf{a}|\cdot\mathbf{b}$ vektorral. A két nem párhuzamos, egyenlő hosszúságú vektor összegét egy $a\cdot b$ oldalú rombusz átlója határozza meg. Ez az átló párhuzamos az **a** és **b** vektorok szögének szögfelezőjével.

Vektorműveletek alkalmazásával bizonyítható állítások

2323. $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, azaz $\mathbf{f}=\frac{\mathbf{a}}{2}+\frac{\mathbf{b}}{2}=\underline{\underline{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}}}$.

2324. $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$, azaz $\mathbf{h}=\underline{\underline{\frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}}}$;

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}$, azaz $\mathbf{g}=\underline{\underline{\frac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{3}}}$.

2325. $AP:PB=\lambda:\mu$; $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=$

$=\frac{\mu\cdot\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}}{\lambda+\mu}$, azaz $\mathbf{p}=\underline{\underline{\frac{\mu\cdot\mathbf{a}+\lambda\cdot\mathbf{b}}{\lambda+\mu}}}$.

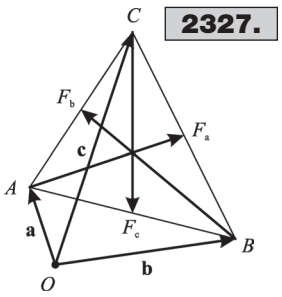
2326. $\overrightarrow{OP}=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{OQ}=-2\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\right)\Rightarrow\mathbf{f}=\underline{\underline{\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}}}$.

2327. $\mathbf{f}_c=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; $\mathbf{f}_a=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$; $\mathbf{f}_b=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}$. $\overrightarrow{CF_c}=\mathbf{f}_c-\mathbf{c}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}-2\mathbf{c}}{2}$; $\overrightarrow{AF_a}=\mathbf{f}_a-\mathbf{a}=$

$=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}-2\mathbf{a}}{2}$; $\overrightarrow{BF_b}=\mathbf{f}_b-\mathbf{b}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}-2\mathbf{b}}{2}$; $\overrightarrow{CF_c}+\overrightarrow{AF_a}+\overrightarrow{BF_b}=\mathbf{0}$.

Tehát a CF_c, az AF_a és a BF_b súlyvonalakból a kívánt módon háromszög szerkeszthető.

2327.



2328. $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$; $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$; AB felezőpontja $F\Rightarrow\overrightarrow{OF}=$

$=\mathbf{f}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; BC felezőpontja $G\Rightarrow\overrightarrow{OG}=\mathbf{g}=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$;

CA felezőpontja $H\Rightarrow\overrightarrow{OH}=\mathbf{h}=\frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}$; $\mathbf{f}+\mathbf{g}+\mathbf{h}=\underline{\underline{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}}$.

III

2329. Legyen $\overrightarrow{OA_i} = \mathbf{a}_i$ és a felezéspont F_i, amelyre $\overrightarrow{OF_i} = \mathbf{f}_i$ $(1 \le i \le n)$. $\mathbf{f}_i = \dfrac{\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1}}{2}$ $(1 \le i \le n-1)$ és $\mathbf{f}_n = \dfrac{\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_1}{2} \Rightarrow \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \ldots + \mathbf{f}_n = \dfrac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{2} + \dfrac{\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3}{2} + \ldots + \dfrac{\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n}{2} + \dfrac{\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_1}{2} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n$.

2330. Legyen $\overrightarrow{OA_i} = \mathbf{a}_i$ és a harmadolópont H_i, amelyre $OH_i = \mathbf{h}_i$ $(1 \le i \le n)$. $\mathbf{h}_i = \dfrac{2\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1}}{3}$ $(1 \le i \le n-1)$ és $\mathbf{h}_n = \dfrac{2\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_1}{3} \Rightarrow \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \ldots + \mathbf{h}_n = \dfrac{2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{3} + \dfrac{2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3}{3} + \ldots + \dfrac{2\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n}{3} + \dfrac{2\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_1}{3} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n$.

2331. Felhasználjuk: a súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja. $\overrightarrow{OF} = \mathbf{f} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ és $\overrightarrow{OS} = \mathbf{s} = \dfrac{2\mathbf{f} + \mathbf{c}}{3} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} + \mathbf{c}}{3} = \underline{\underline{\dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}}}$.

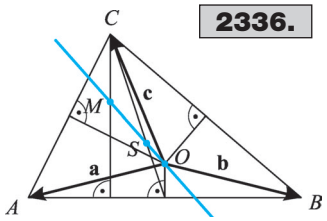
2332. Legyen O a helyvektorok közös kezdőpontja. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OS} = \mathbf{a} - \mathbf{s} + \mathbf{b} - \mathbf{s} + \mathbf{c} - \mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - 3\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - 3 \cdot \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \mathbf{0}$.

2333. Legyen O a helyvektorok közös kezdőpontja. $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ} - \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = 3 \cdot \overrightarrow{OQ} - 3 \cdot \overrightarrow{OS} = \underline{\underline{3\overrightarrow{SQ}}}$.

2334. Legyen $H \in AB$ és $HA : HB = 1 : 2$; $G \in BC$ és $BG : GC = 1 : 2$; $F \in CA$ és $CF : EA = 1 : 2$. Legyenek az A, B, C, F, G, H pontokba mutató helyvektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$. $\mathbf{h} = \dfrac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3}$; $\mathbf{g} = \dfrac{2\mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$; $\mathbf{f} = \dfrac{2\mathbf{c} + \mathbf{a}}{3}$. Legyen az $ABC\triangle$ S súlypontjába mutató vektor $\mathbf{s}$, az $FGH\triangle$ T súlypontjába mutató vektor $\mathbf{t}$. $\mathbf{t} = \dfrac{\mathbf{h} + \mathbf{g} + \mathbf{f}}{3} = \dfrac{2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c} + 2\mathbf{c} + \mathbf{a}}{9} = \underline{\underline{\dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}}} = \mathbf{s}$.

2335. Legyenek a hatszög csúcsai a felezőpontokkal azonos körüljárási irányban $X; Y; Z; P; Q; R$ és legyen XY felezőpontja A. $\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}\right)$; $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OP}\right)$; $\overrightarrow{OE} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}\right)$; $\overrightarrow{OB} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ}\right)$; $\overrightarrow{OD} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right)$; $\overrightarrow{OF} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OX}\right)$. Legyen az $ACE\triangle$ súlypontja S, a $BDF\triangle$ súlypontja T. $\overrightarrow{OT} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF}\right) = \dfrac{1}{6}\left(\overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OX}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}\right) = \overrightarrow{OS} \Rightarrow \underline{\underline{T \equiv S}}$.

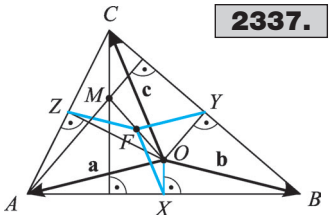
2336.



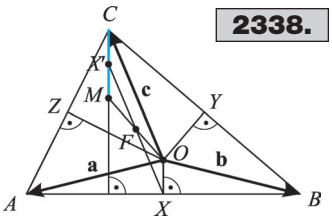
2336. Legyen O a helyvektorok közös kezdőpontja. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. A 2307. feladatban láttuk, hogy $\overrightarrow{OM} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. A 2331. feladatban láttuk, hogy $\overrightarrow{OS} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OM} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{OS}$ és $\overrightarrow{OM}$ egyállású vektorok $\Rightarrow$ S; M és O egy egyenesen vannak $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM} \Rightarrow MS : SO = 2 : 1$.

2337. Legyen a körülírt kör középpontja a helyvektorok közös kezdőpontja. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. A 2307. feladatban láttuk, hogy $\overrightarrow{OM} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ miatt $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2 \cdot \overrightarrow{OX}$, ahol az X az AB szakasz felezőpontja. $\overrightarrow{OX} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{XF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OX} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} - \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} = \frac{\mathbf{c}}{2}$. Hasonlóan belátható, hogy $\overrightarrow{YF} = \frac{\mathbf{a}}{2}$ és $\overrightarrow{ZF} = \frac{\mathbf{b}}{2}$. A körülírt kör középpontja O, ezért $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| \Rightarrow |\overrightarrow{XF}| = |\overrightarrow{YF}| = |\overrightarrow{ZF}| = \frac{R}{2}$, ahol R a körülírt kör sugara. Megjegyzés: Ez a kör az $ABC\triangle$ Feuerbach köre.



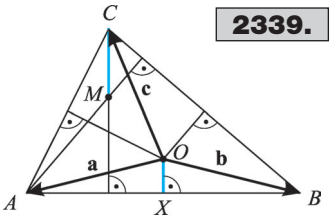
2337.



2338.

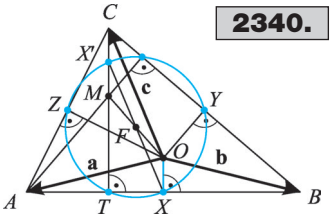
2338. Legyen a körülírt kör középpontja a helyvektorok közös kezdőpontja. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$; $\overrightarrow{OX} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$. A 2307. feladatban láttuk, hogy $\overrightarrow{OM} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$. Legyen X' az X pont F-re vonatkozó tükörképe. $\overrightarrow{OX'} = 2 \cdot \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OX} = 2 \cdot \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} - \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} = \frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{b}}{2} + \mathbf{c}$. Legyen X'' az MC szakasz felezőpontja. $\overrightarrow{OX''} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{b}}{2} + \mathbf{c} = \overrightarrow{OX'} \Rightarrow X' \equiv X'' \Rightarrow$ Az X pont F-re vonatkozó tükörképe az MC szakasz felezőpontja.

2339. Legyen a körülírt kör középpontja a helyvektorok közös kezdőpontja. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$; $\overrightarrow{OX} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM} = \mathbf{c} - (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = -(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \Rightarrow \overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{OX} \Rightarrow M$-et $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú, OM-nek az O-hoz közelebbi harmadolópontjára vonatkozó középpontos hasonlóság viszi át az X oldalfelező pontba.



2339.

2340. Legyen O a körülírt kör középpontja, M a magasságpont és F az OM szakasz felezéspontja. A 2337. feladatban láttuk, hogy $FX = FY = FZ = R : 2$. A 2338. feladatban láttuk, hogy X, Y és Z pontok F-re vonatkozó tükörképe felezi az MC, az MA és az MB szakaszokat. A fentiekből következik, hogy az X, Y, Z oldalfelezéspontok és az X', Y', Z' szakaszfelezéspontok rajta vannak az F középpontú, $FX = R : 2$ sugarú körön. XX' átmérője ennek a körnek. A magasságok talppontjai vagy egybeesnek az oldalfelező pontokkal, vagy $X'TX\sphericalangle = 90°$ miatt a Thalész-tételt alkalmazva a magasságtalppontok is a fenti kör pontjai.

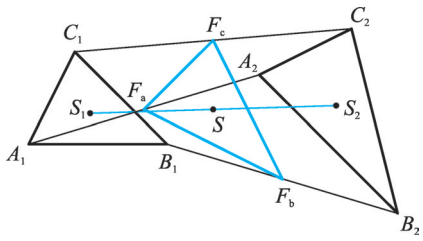


2340.

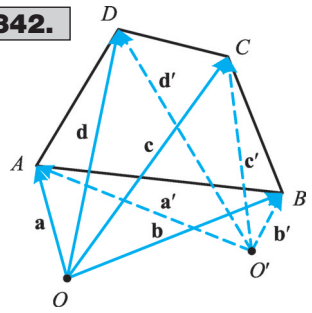
III

III

2341.



2342.



2341. Legyen O a helyvektorok közös kezdőpontja. $\overrightarrow{OA_1}=\mathbf{a}_1$; $\overrightarrow{OB_1}=\mathbf{b}_1$; $\overrightarrow{OC_1}=\mathbf{c}_1$; $\overrightarrow{OA_2}=\mathbf{a}_2$; $\overrightarrow{OB_2}=\mathbf{b}_2$; $\overrightarrow{OC_2}=\mathbf{c}_2$; $\overrightarrow{OS_1}=\dfrac{\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1+\mathbf{c}_1}{3}$; $\overrightarrow{OS_2}=\dfrac{\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2+\mathbf{c}_2}{3}$ és $\overrightarrow{OF_a}=\dfrac{\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2}{2}$; $\overrightarrow{OF_b}=\dfrac{\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2}{2}$; $\overrightarrow{OF_c}=\dfrac{\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2}{2}$. $\overrightarrow{OS}=\dfrac{\frac{\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2}{2}+\frac{\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2}{2}+\frac{\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2}{2}}{3}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1+\mathbf{c}_1}{3}+\dfrac{\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2+\mathbf{c}_2}{3}\right)=$

$=\dfrac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OS_1}+\overrightarrow{OS_2})\Rightarrow$ S felezi az S_1S_2 szakaszt

2342. $\overrightarrow{OS}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$ és $\overrightarrow{O'S'}=\dfrac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}'+\mathbf{c}'+\mathbf{d}'}{4}$. $\overrightarrow{OS'}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'S'}=\overrightarrow{OO'}+\dfrac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}'+\mathbf{c}'+\mathbf{d}'}{4}$

$=\dfrac{(\overrightarrow{OO'}+\mathbf{a}')+(\overrightarrow{OO'}+\mathbf{b}')+(\overrightarrow{OO'}+\mathbf{c}')+(\overrightarrow{OO'}+\mathbf{d}')}{4}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}=\overrightarrow{OS}\Rightarrow S'\equiv S.$

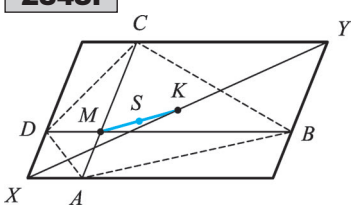
2343. Legyen O a helyvektorok közös kezdőpontja. AB felezőpontja E; BC-é F; CD-é G; DA-é H. $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$; $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$; $\overrightarrow{OD}=\mathbf{d}$. $\overrightarrow{OE}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; $\overrightarrow{OF}=\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$; $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}$; $\overrightarrow{OH}=\dfrac{\mathbf{d}+\mathbf{a}}{2}$. EG felezéspontja M_1, $\overrightarrow{OM_1}=\dfrac{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}}{2}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}=\overrightarrow{OS}$. HF felezéspontja M_2, $\overrightarrow{OM_2}=\dfrac{\frac{\mathbf{d}+\mathbf{a}}{2}+\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}}{2}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}=\overrightarrow{OS}$. $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OS}\Rightarrow EG$ és HF felezéspontja azonos a négyszög súlypontjával.

2344. Legyenek a négyszög csúcsaiba mutató helyvektorok rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$. Legyen az AC átló felezéspontja F_1, a BD átlóé F_2. $\overrightarrow{OF_1}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}$; $\overrightarrow{OF_2}=\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2}$. F_1F_2 szakasz felezéspontja F.

$\overrightarrow{OF}=\dfrac{\overrightarrow{OF_1}+\overrightarrow{OF_2}}{2}=\dfrac{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}+\frac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2}}{2}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}=\overrightarrow{OS}\Rightarrow$

$\Rightarrow F\equiv S.$

2345.

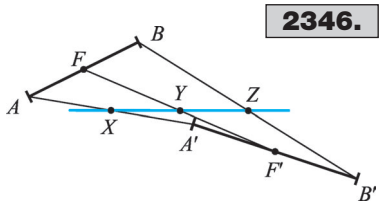


2345. Legyenek az A, B, C és D pontokba mutató helyvektorok rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$, az M-be mutató helyvektor $\mathbf{m}$. A 2342. feladatban láttuk, hogy az $ABCD$ négyszög súlypontjába mutató vektor: $\overrightarrow{OS}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$. A 2343. feladat-

ban láttuk, hogy a középvonalak metszéspontja a súlypont. $XAMD$ paralelogramma, ezért $\overrightarrow{MX} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA}$ és $\overrightarrow{OX} - \mathbf{m} = \mathbf{d} - \mathbf{m} + \mathbf{a} - \mathbf{m} \Rightarrow \overrightarrow{OX} = \mathbf{a} + \mathbf{d} - \mathbf{m}$; $YBMC$ paralelogramma, ezért $\overrightarrow{MY} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}$ és $\overrightarrow{OY} - \mathbf{m} = \mathbf{c} - \mathbf{m} + \mathbf{b} - \mathbf{m} \Rightarrow \overrightarrow{OY} = \mathbf{c} + \mathbf{b} - \mathbf{m}$. Az XY szakasz K felezéspontja a paralelogramma középpontja: $\overrightarrow{OK} = \dfrac{\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}}{2} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{2} - \mathbf{m}$. Az MK szakasz felezéspontja F: $\overrightarrow{OF} = \dfrac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OK}}{2} = \dfrac{\mathbf{m} + \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{2} - \mathbf{m}}{2} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4} = \overrightarrow{OS}$.

2346. Legyenek a A, B, F, A', B', F' pontokba mutató helyvektorok rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{f}'$.

2346.



$\overrightarrow{OX} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{a}'}{2}$; $\overrightarrow{OZ} = \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{b}'}{2}$; $\overrightarrow{OY} = \dfrac{\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OF'}}{2} =$

$= \dfrac{\dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} + \dfrac{\mathbf{a}' + \mathbf{b}'}{2}}{2} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{a}' + \mathbf{b} + \mathbf{b}'}{4} = \dfrac{\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OZ}}{2} \Rightarrow Y$ pont az XZ szakasz felezőpontja. $\Rightarrow X$, Y és Z egy egyenesen vannak.

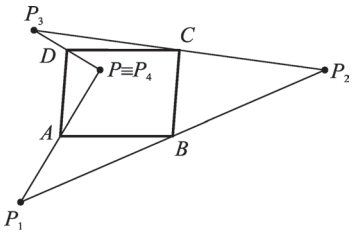
2347. Legyen az AC átló felezőpontja F_1, a BD átló felezőpontja F_2. $\overrightarrow{AF_1} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ és $\overrightarrow{AF_2} = \mathbf{a} + \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{F_1F_2} = \overrightarrow{AF_2} - \overrightarrow{AF_1} = \mathbf{a} + \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} - \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} = \underline{\underline{\dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2}}}$.

2348. C felezi a PP' szakaszt: $\mathbf{c} = \dfrac{\mathbf{p} + \mathbf{p}'}{2} \Rightarrow \mathbf{p}' = \underline{\underline{2\mathbf{c} - \mathbf{p}}}$.

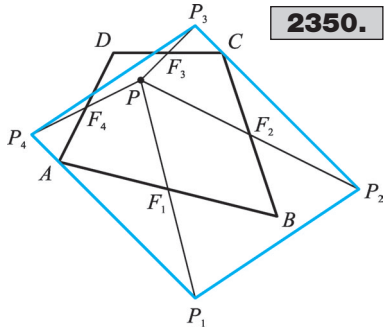
2349. A 2348. feladatban láttuk, hogy $\mathbf{p}_1 = 2\mathbf{a} - \mathbf{p}$; $\mathbf{p}_2 = 2\mathbf{b} - \mathbf{p}_1 = 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + \mathbf{p}$; $\mathbf{p}_3 = 2\mathbf{c} - \mathbf{p}_2 = 2\mathbf{c} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{a} - \mathbf{p}$; $\mathbf{p}_4 = 2\mathbf{d} - \mathbf{p}_3 = 2\mathbf{d} - 2\mathbf{c} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + \mathbf{p}$; $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$, mivel $ABCD$ paralelogramma $\Rightarrow 2\mathbf{d} - 2\mathbf{c} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a} = 2(\mathbf{d} - \mathbf{c} + \mathbf{b} - \mathbf{a}) = 2(\mathbf{d} - \mathbf{c} + \mathbf{c} - \mathbf{d}) = \mathbf{0} \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathbf{p}_4 = \mathbf{p}$.

2350. $\mathbf{f}_1 = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$; $\mathbf{f}_2 = \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$; $\mathbf{f}_3 = \dfrac{\mathbf{c} + \mathbf{d}}{2}$; $\mathbf{f}_4 = \dfrac{\mathbf{d} + \mathbf{a}}{2}$. A 2348. feladatban láttuk, hogy: $\mathbf{p}_1 = 2\mathbf{f}_1 - \mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{p}$ és $\mathbf{p}_2 = 2\mathbf{f}_2 - \mathbf{p} = \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{p}$ és $\mathbf{p}_3 = 2\mathbf{f}_3 - \mathbf{p} = \mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{p}$ és $\mathbf{p}_4 = 2\mathbf{f}_4 - \mathbf{p} = \mathbf{d} + \mathbf{a} - \mathbf{p} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{p} - \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{p} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{P_4P_3} =$ $= \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4 = \mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{p} - \mathbf{d} - \mathbf{a} + \mathbf{p} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$, tehát $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3} \Rightarrow P_1P_2P_3P_4$ paralelogramma.

2349.



2350.



2351. Legyenek a tükörképpontokba mutató vektorok rendre $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \ldots, \mathbf{p}_6$. A 2348. feladatban láttuk, hogy $\mathbf{p}_1 = 2\mathbf{a} - \mathbf{p}$; $\mathbf{p}_2 = 2\mathbf{b} - \mathbf{p}_1 = 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + \mathbf{p}$; $\mathbf{p}_3 = 2\mathbf{c} - \mathbf{p}_2 = 2\mathbf{c} - 2\mathbf{b} + 2\mathbf{a} - \mathbf{p}$; $\mathbf{p}_4 = 2\mathbf{a} - \mathbf{p}_3 = 2\mathbf{a} - 2\mathbf{c} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + \mathbf{p} = -2\mathbf{c} + 2\mathbf{b} + \mathbf{p}$; $\mathbf{p}_5 = 2\mathbf{b} - \mathbf{p}_4 = 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c} - 2\mathbf{b} - \mathbf{p} = 2\mathbf{c} - \mathbf{p}$; $\mathbf{p}_6 = 2\mathbf{c} - \mathbf{p}_5 = 2\mathbf{c} - 2\mathbf{c} + \mathbf{p} = \mathbf{p}$. Tehát $\mathbf{p}_6 = \mathbf{p}$.

III

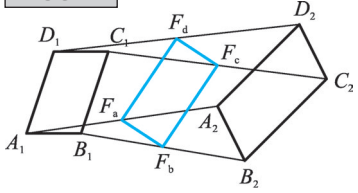
2352. Legyenek az A, B, C, D, E és F pontokba mutató helyvektorok $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}$ és $\vec{F}$. $\vec{E} = \frac{\vec{A} + \vec{D}}{2}$; $\vec{F} = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2}$; $\mathbf{b} = \vec{B} - \vec{A}$; $\mathbf{a} = \vec{C} - \vec{D}$; $\mathbf{k} = \vec{F} - \vec{E} = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2} - \frac{\vec{A} + \vec{D}}{2} = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{2} + \frac{\vec{C} - \vec{D}}{2} = \underline{\underline{\frac{\mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{a}}{2}}}$.

2353. Legyenek a csúcsokba és az átlófelező pontokba mutató helyvektorok $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}$ és $\vec{F}$. E felezi AC-t, ezért $\vec{E} = \frac{\vec{A} + \vec{C}}{2}$ és F felezi BD-t, ezért $\vec{F} = \frac{\vec{B} + \vec{D}}{2}$. $\overrightarrow{EF} = \vec{F} - \vec{E} = \frac{\vec{B} + \vec{D}}{2} - \frac{\vec{A} + \vec{C}}{2} = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{2} + \frac{\vec{D} - \vec{C}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{CD}}{2}$. $AB \parallel CD \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ egyállású vektorok $\Rightarrow EF$ párhuzamos az alapokkal.

2354. Legyenek az A_1, B_1, C_1, D_1, illetve A_2, B_2, C_2, D_2 pontokba mutató helyvektorok $\vec{A}_1, \vec{B}_1, \vec{C}_1, \vec{D}_1$, illetve $\vec{A}_2, \vec{B}_2, \vec{C}_2, \vec{D}_2$. $\vec{F}_a = \frac{\vec{A}_1 + \vec{A}_2}{2}$ és $\vec{F}_b = \frac{\vec{B}_1 + \vec{B}_2}{2}$ és $\vec{F}_c = \frac{\vec{C}_1 + \vec{C}_2}{2}$ és $\vec{F}_d = \frac{\vec{D}_1 + \vec{D}_2}{2}$. $\overrightarrow{F_bF_c} = \vec{F}_c - \vec{F}_b = \frac{\vec{C}_1 + \vec{C}_2}{2} - \frac{\vec{B}_1 + \vec{B}_2}{2} = \frac{\vec{C}_1 - \vec{B}_1}{2} + \frac{\vec{C}_2 - \vec{B}_2}{2}$. $\overrightarrow{F_aF_d} = \vec{F}_d - \vec{F}_a = \frac{\vec{D}_1 + \vec{D}_2}{2} - \frac{\vec{A}_1 + \vec{A}_2}{2} = \frac{\vec{D}_1 - \vec{A}_1}{2} + \frac{\vec{D}_2 - \vec{A}_2}{2}$. Mivel $A_1B_1C_1D_1$, illetve $A_2B_2C_2D_2$ paralelogramma, ezért $\vec{C}_1 - \vec{B}_1 = \vec{D}_1 - \vec{A}_1$ és $\vec{C}_2 - \vec{B}_2 = \vec{D}_2 - \vec{A}_2 \Rightarrow \overrightarrow{F_bF_c} = \overrightarrow{F_aF_d} \Rightarrow F_aF_bF_cF_d$ paralelogramma.

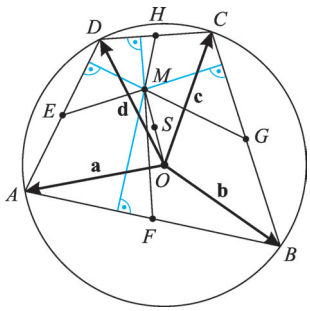
2355. Az ABC, a BCD, a CDA és az ABD háromszögeknek közös a körülírt köre. A 2307. feladatban láttuk, hogy ha a körülírt kör középpontja a helyvektorok közös kezdőpontja, akkor a csúcsokba mutató helyvektorok összege a körülírt kör középpontjából a magasságpontba mutató vektor. Az $ABC\triangle$ M_1 magasságpontjába mutató vektor: $\overrightarrow{OM_1} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. A $BCD\triangle$ M_2 magasságpontjába mutató vektor: $\overrightarrow{OM_2} = \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$. Az $ABD\triangle$ M_3 magasságpontjába mutató vektor: $\overrightarrow{OM_3} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}$. Az $ACD\triangle$ M_4 magasságpontjába mutató vektor: $\overrightarrow{OM_4} = \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$. Az $M_1M_2M_4M_3$ négyszög oldalvektorai: $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{d} - \mathbf{a} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{M_2M_4} = \overrightarrow{OM_4} - \overrightarrow{OM_2} = \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{M_4M_3} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_4} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{c} = \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_1} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{d} - \mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$. A magasságvonalakból alkotott négyszög oldalvektorai egyenlők a húrnégyszög oldalvektoraival, ezért a két négyszög oldalai páronként párhuzamosak és egyenlők, tehát a két négyszög egybevágó.

2354.



2356. Legyen a húrnégyszög körülírt körének középpontja a helyvektorok közös kezdőpontja. A 2342. feladatban láttuk, hogy $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$. Legyen O-nak S-re vonatkozó tükörképe M. $\overrightarrow{OM} = 2\cdot\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$. Legyen E az AD szakasz felezéspontja. $\overrightarrow{OE} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}$. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OE} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$ és $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}-\mathbf{b}$. Mivel $|\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = r$, így $(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ és $(\mathbf{c}-\mathbf{b})$ vektorok merőlegesek egymásra. $\Rightarrow \overrightarrow{EM} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow M$ rajta van az E felezéspontból BC-re állított merőlegesen. A többi esetre is hasonlóan lehet belátni.

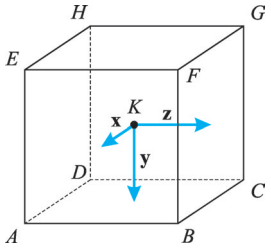
2356.



2357. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$. $ABCD$ lap középpontjába mutató vektor: $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; $ABFE$ lap középpontjába mutató vektor: $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}$; $ADHE$ lap középpontjába mutató vektor: $\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$; $BCGF$ lap középpontjába mutató vektor: $\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}+\mathbf{a}$; $DCGH$ lap középpontjába mutató vektor: $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}+\mathbf{b}$; $EFGH$ lap középpontjába mutató vektor: $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\mathbf{c}$.

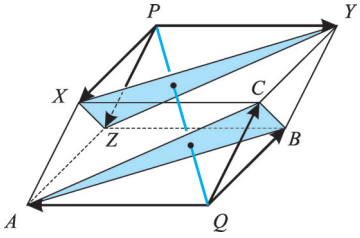
2358. $\overrightarrow{KB} = \mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$; $\overrightarrow{KF} = \mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}$; $\overrightarrow{KC} = -\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$; $\overrightarrow{KG} = -\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}$; $\overrightarrow{KA} = \mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}$; $\overrightarrow{KE} = \mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z}$; $\overrightarrow{KD} = -\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}$; $\overrightarrow{KH} = -\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z}$.

2358.



2359. Tekintsük a PQ testátlót. $\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY} + \overrightarrow{PZ} = \overrightarrow{PQ}$. Másrészről $\frac{\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{PY}+\overrightarrow{PZ}}{3} = \overrightarrow{PS}$ az $XYZ\triangle$ súlypontjába mutató vektor, ami benne van az $[XYZ]$ síkban. $\Rightarrow$ A testátló P-hez közelebbi harmadolópontja benne van az $[XYZ]$ síkban. Hasonlóan megmutatható, hogy a Q-hoz közelebbi harmadolópont benne van az $[ABC]$ síkban.

2359.

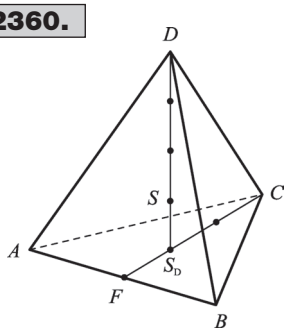


2360. $DS = 3SS_D$; $\overrightarrow{OS_D} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$ az $ABC\triangle$ súlypontjának helyvektora.

$\overrightarrow{OS} = \frac{3\overrightarrow{OS_D}+\overrightarrow{OD}}{4} = \frac{3\cdot\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}+\mathbf{d}}{4} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$.

Hasonlóan látható be a többi súlyvonalra is.

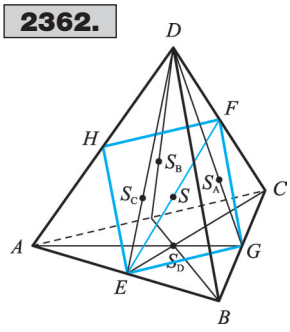
2360.



2361. Legyenek a csúcsokba mutató helyvektorok rendre **a**, **b**, **c** és **d**. A 2360. feladatban láttuk, hogy $\overrightarrow{OS}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$. $\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OS}=\mathbf{a}-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}=\frac{3\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d}}{4}$. Hasonlóan: $\overrightarrow{SB}=\frac{3\mathbf{b}-\mathbf{a}-\mathbf{c}-\mathbf{d}}{4}$; $\overrightarrow{SC}=\frac{3\mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{d}}{4}$; $\overrightarrow{SD}=\frac{3\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}}{4}$.

$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\frac{3\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d}+3\mathbf{b}-\mathbf{a}-\mathbf{c}-\mathbf{d}+3\mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{d}+3\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}}{4}=\mathbf{0}$.

2362.

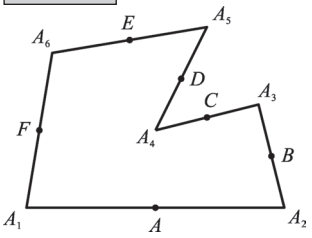


2362. Legyenek az A, B, C, D csúcsokba mutató helyvektorok rendre **a**, **b**, **c** és **d**. $\overrightarrow{OS}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$ az $ABCD$ tetraéder súlypontjának helyvektora. $\overrightarrow{OS_D}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$; $\overrightarrow{OS_A}=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3}$; $\overrightarrow{OS_B}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3}$; $\overrightarrow{OS_C}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d}}{3}$ a lapsúlypontokba mutató helyvektorok. Legyen Q az $S_AS_BS_CS_D$ tetraéder súlypontja. $\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OS_A}+\overrightarrow{OS_B}+\overrightarrow{OS_C}+\overrightarrow{OS_D}}{4}=\frac{3\mathbf{a}+3\mathbf{b}+3\mathbf{c}+3\mathbf{d}}{12}=$
$=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}=\overrightarrow{OS}\Rightarrow Q\equiv S$.

2363. Nézzük a 2362. ábrát! Legyenek a csúcsokba mutató helyvektorok rendre **a**, **b**, **c** és **d**. A súlypontba mutató helyvektor: $\overrightarrow{OS}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$. AB felezéspontja E: $\overrightarrow{OE}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, CD felezéspontja F: $\overrightarrow{OF}=\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}$, EF felezéspontja P: $\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}}{2}=\frac{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}}{2}=$
$=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}=\overrightarrow{OS}\Rightarrow P\equiv S\Rightarrow$ A súlypont felezi EF szakaszt.

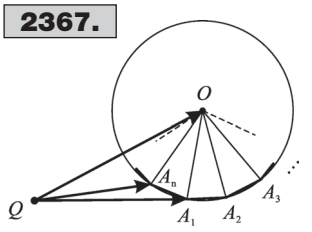
2364. Nézzük a 2362. ábrát! Felhasználjuk, hogy S felezi EF-et és HG-t (lásd 2363. feladat) $\Rightarrow EGFH$ négyszög EF és GH átlójának közös felezéspontja $S\Leftrightarrow EGFH$ síkbeli négyszög és paralelogramma.

2365.



2365. $\vec{A}=\frac{\vec{A}_1+\vec{A}_2}{2}$ és $\vec{B}=\frac{\vec{A}_2+\vec{A}_3}{2}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}=\frac{\vec{A}_3-\vec{A}_1}{2}$.
Hasonlóan: $\overrightarrow{CD}=\frac{\vec{A}_5-\vec{A}_3}{2}$ és $\overrightarrow{EF}=\frac{\vec{A}_1-\vec{A}_5}{2}\Rightarrow$
$\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\vec{A}_3-\vec{A}_1+\vec{A}_5-\vec{A}_3+\vec{A}_1-\vec{A}_5\right)=\mathbf{0}$.

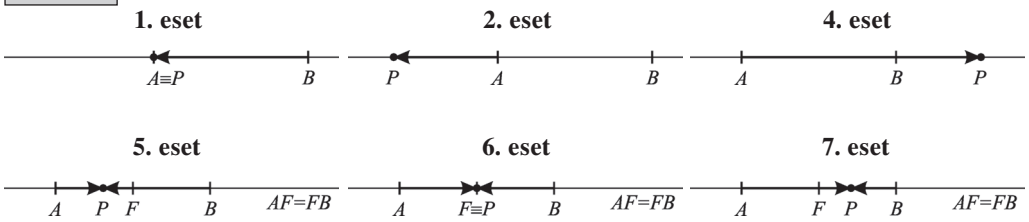
2367.



2366. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+$
$+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}\right)+$
$+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}\right)=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CD}=\underline{\underline{3\overrightarrow{AD}}}$ az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}=\mathbf{0}$ és $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\mathbf{0}$ összefüggéseket felhasználva.

2367. $\overrightarrow{QO}=\overrightarrow{QA_1}+\overrightarrow{A_1O}$; $\overrightarrow{QO}=\overrightarrow{QA_2}+\overrightarrow{A_2O}$; $\overrightarrow{QO}=\overrightarrow{QA_3}+\overrightarrow{A_3O}$;
... $\overrightarrow{QO}=\overrightarrow{QA_n}+\overrightarrow{A_nO}$. $\Rightarrow n\cdot\overrightarrow{QO}=\overrightarrow{QA_1}+\overrightarrow{QA_2}+\ldots+\overrightarrow{QA_n}+\overrightarrow{A_1O}+$

2369.



$+\overrightarrow{A_2O} + ... + \overrightarrow{A_nO}$.⊗ Mivel az $A_1A_2...A_n$ sokszög szabályos, O a sokszög súlypontja is egyben. $\Rightarrow \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{A_2O} + ... + \overrightarrow{A_nO} = \mathbf{0}$.

Ezt a ⊗ egyenletben felhasználva: $\overrightarrow{QO} = \underline{\underline{\frac{1}{n} \cdot \left(\overrightarrow{QA_1} + \overrightarrow{QA_2} + ... + \overrightarrow{QA_n}\right)}}$.

2368. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{A_1} - \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B_1} - \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C_1} - \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D_1} - \overrightarrow{D} = (C_1 - A) + (D_1 - B) + (A_1 - C) + (B_1 - D) = \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{DB_1}$.

2369. **1. eset:** $\lambda = 0$; $\overrightarrow{AP} = \mathbf{0} = 0 \cdot \overrightarrow{BP}$.

2. eset: $0 < \lambda < 1$; $|\overrightarrow{AP}| < |\overrightarrow{BP}|$.

3. eset: $\lambda = 1$; Nincs olyan P pont, amelyre $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP}$ lenne.

4. eset: $1 < \lambda$; $|\overrightarrow{AP}| > |\overrightarrow{BP}|$.

5. eset: $-1 < \lambda < 0$; $|\overrightarrow{AP}| < |\overrightarrow{BP}|$.

6. eset: $\lambda = -1$; $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP}$.

7. eset: $\lambda < -1$; $|\overrightarrow{AP}| > |\overrightarrow{BP}|$.

2370. $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{A} - \vec{P} + 2\vec{B} - 2\vec{P} + 3\vec{C} - 3\vec{P} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{A} + 2\vec{B} + 3\vec{C} = 6\vec{P} \Rightarrow$

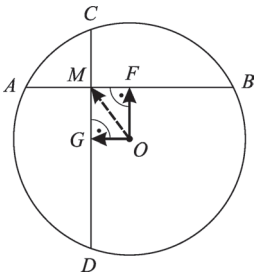
$\Rightarrow \vec{P} = \dfrac{\vec{A} + 2\vec{B} + 3\vec{C}}{6}$. A P pontba mutató helyvektor a fenti összefüggéssel szerkeszthető.

2371. $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + ... + \overrightarrow{A_nB_n} = \overrightarrow{B_1} - \overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{A_2} + ... + \overrightarrow{B_n} - \overrightarrow{A_n} = (\overrightarrow{B_{i_1}} - \overrightarrow{A_1}) + (\overrightarrow{B_{i_2}} - \overrightarrow{A_2}) + \ldots + (\overrightarrow{B_{i_n}} - \overrightarrow{A_n}) = \overrightarrow{A_1B_{i_1}} + \overrightarrow{A_2B_{i_2}} + ... + \overrightarrow{A_nB_{i_n}}$.

Felhasználtuk, hogy a vektorösszeadás kommutatív művelet.

2372. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OF}$, ahol F felezi AB-t; $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OG}$, ahol G felezi CD-t. $OF \perp AB$, $OG \perp CD$ és $AB \perp CD$ miatt $OGMF$ téglalap. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OF} + 2\overrightarrow{OG} = \underline{\underline{2\overrightarrow{OM}}}$.

2372.



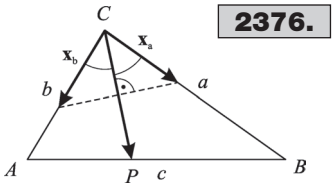
Vektorok felbontása összetevőkre

2373. A súlyvonalvektor az oldalvektorok felének összege.

2374. 2375. A feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.

III

2376.



2376. A kért felbontást a 2376. ábra mutatja. A szögfelező tételből tudjuk, hogy $\frac{AP}{PB}=\frac{b}{a}\Rightarrow AP=\frac{bc}{a+b}$ $BP=\frac{ac}{a+b}$. A párhuzamos szelők tétele miatt $\frac{|\mathbf{x}_b|}{b}=\frac{PB}{c}$; $\frac{|\mathbf{x}_a|}{a}=\frac{AP}{c}$. $|\mathbf{x}_b|=b\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{ac}{a+b}=\frac{ab}{a+b}$ és $\mathbf{x}_b=|\mathbf{x}_b|\cdot\mathbf{e}_b=|\mathbf{x}_b|\cdot\frac{\mathbf{b}}{b}=$ $=\frac{ab}{a+b}\cdot\frac{\mathbf{b}}{b}=\underline{\underline{\frac{a}{a+b}\cdot\mathbf{b}}}$. Hasonlóan belátható, hogy $\mathbf{x}_a=\underline{\underline{\frac{b}{a+b}\cdot\mathbf{a}}}$.

$\overrightarrow{CP}=\mathbf{x}_b+\mathbf{x}_a=\underline{\underline{\frac{a}{a+b}\cdot\mathbf{b}+\frac{b}{a+b}\cdot\mathbf{a}}}$.

2377. *a)* Az egyértelmű előállíthatóság miatt $\underline{\underline{\alpha=3}}$ és $2\beta+1=5\Rightarrow\underline{\underline{\beta=2}}$. *b)* $\alpha+\beta-1=0$ és $2\alpha-\beta=0\Rightarrow\underline{\underline{\alpha=\frac{1}{3}}}\Rightarrow\underline{\underline{\beta=\frac{2}{3}}}$. *c)* $\alpha=\beta+1$ és $\beta=-(\alpha-1)\Rightarrow\underline{\underline{\alpha=1}}\Rightarrow\underline{\underline{\beta=0}}$.

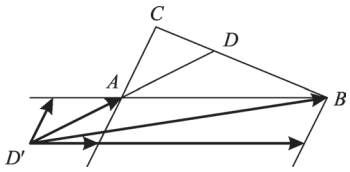
d) $2\alpha-\beta-1=0$ és $3\alpha+\beta+10=0\Rightarrow\underline{\underline{\alpha=-\frac{9}{5}}}\Rightarrow\underline{\underline{\beta=-\frac{23}{5}}}$.

2378. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD'}=\mathbf{0}\Rightarrow D$ középpontos tükörképe A-ra D'.

$\overrightarrow{D'A}=\overrightarrow{AD}=\underline{\underline{\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{2}}}$; $\overrightarrow{D'B}=\overrightarrow{D'A}+\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{2}+\overrightarrow{AB}=\underline{\underline{\frac{\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}}{2}}}$.

2379. $\mathbf{m}=-\frac{1}{2}\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

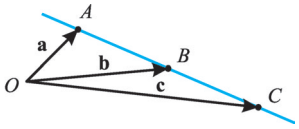
2378.



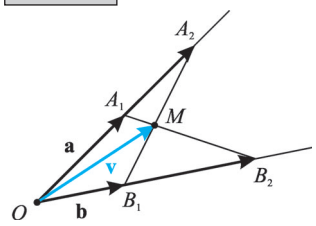
2380. $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$. A, B és C egy egyenesen vannak, ezért $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{AB}$ $(\neq\mathbf{0})$ egyállású vektorok. $\Rightarrow$ Van olyan $\lambda\in\mathbf{R}$, hogy $\overrightarrow{BC}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$; $\mathbf{c}=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}+\lambda\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=$ $=(\lambda+1)\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a}$; $\beta=\lambda+1$ és $\alpha=-\lambda$ választással $\mathbf{c}=\alpha\cdot\mathbf{a}+\beta\cdot\mathbf{b}$ és $\alpha+\beta=1$.

2381. $\mathbf{c}=\alpha\cdot\mathbf{a}+\beta\cdot\mathbf{b}$ és $\alpha+\beta=1\Rightarrow\alpha=1-\beta\Rightarrow$ $\Rightarrow\mathbf{c}=(1-\beta)\cdot\mathbf{a}+\beta\cdot\mathbf{b}$; $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$; $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}=$ $=(1-\beta)\cdot\mathbf{a}+\beta\cdot\mathbf{b}-\mathbf{b}=(\beta-1)\cdot\mathbf{b}-(\beta-1)\cdot\mathbf{a}=$ $=(\beta-1)\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=(\beta-1)\cdot\overrightarrow{AB}$. $\otimes$ Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem egyállású vektorok, akkor $\overrightarrow{AB}\neq\mathbf{0}$. Ha $\beta=1$, akkor $\mathbf{c}=\beta\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\Rightarrow C$ rajta van az AB egyenesen. Ha $\beta\neq1$, akkor $\overrightarrow{BC}\neq\mathbf{0}\Rightarrow\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ a $\otimes$ összefüggés miatt egymásba fűzött egyállású vektorok, így A, B és C egy egyenesen vannak.

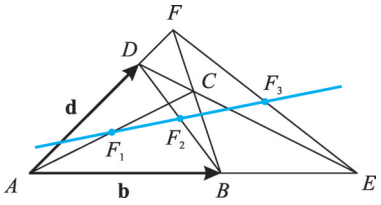
2381.



2382.



2383.



2382. Az M metszéspont akkor létezik, ha A_1B_2 nem párhuzamos B_1A_2-vel, azaz $\lambda\mu \neq 1$. A 2380. feladatban láttuk, hogy A_2, M, B_1 egy egyenesen lévő pontokba mutató vektorokra: $\mathbf{v} = \alpha \cdot \lambda\mathbf{a} + (1 - \alpha) \cdot \mathbf{b}$. Hasonlóan az A_1, M, B_2 pontokba mutató vektorokra: $\mathbf{v} = \beta \cdot \mathbf{a} + (1 - \beta) \cdot \mu\mathbf{b} \Rightarrow \alpha \cdot \lambda\mathbf{a} + (1 - \alpha) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{v} = \beta \cdot \mathbf{a} + (1 - \beta) \cdot \mu\mathbf{b}$. Az előállítás egyértelműsége miatt: $\alpha \cdot \lambda = \beta$ és $1 - \alpha = (1 - \beta) \cdot \mu \Rightarrow \alpha = \dfrac{\beta}{\lambda} \Rightarrow 1 - \dfrac{\beta}{\lambda} = (1 - \beta) \cdot \mu \Rightarrow \beta = \dfrac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1}$

$$\mathbf{v} = \frac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{a} + \left(1 - \frac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1}\right) \cdot \mu\mathbf{b} = \underline{\underline{\frac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{a} + \frac{\mu(\lambda - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{b}}}.$$

2383. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$; $\overrightarrow{AE} = \lambda\mathbf{b}$; $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$; $\overrightarrow{AF} = \mu\mathbf{d}$. A 2382. feladat eredményét felhasználva $\overrightarrow{AC} = \dfrac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{b} + \dfrac{\mu(\lambda - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{d}$; $\overrightarrow{AF_1} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \dfrac{\lambda(\mu - 1)}{2(\mu\lambda - 1)} \cdot \mathbf{b} +$

$+ \dfrac{\mu(\lambda - 1)}{2(\mu\lambda - 1)} \cdot \mathbf{d}$; $\overrightarrow{AF_2} = \dfrac{\mathbf{d} + \mathbf{b}}{2}$; $\overrightarrow{AF_3} = \dfrac{\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{d}}{2}$; $\overrightarrow{AF_1} = \dfrac{\lambda\mu\mathbf{b} - \lambda\mathbf{b} + \lambda\mu\mathbf{d} - \mu\mathbf{d}}{2(\mu\lambda - 1)} =$

$= \dfrac{\lambda\mu(\mathbf{b} + \mathbf{d})}{2(\mu\lambda - 1)} - \dfrac{\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{d}}{2(\mu\lambda - 1)} = \dfrac{\lambda\mu}{(\mu\lambda - 1)} \cdot \overrightarrow{AF_2} + \dfrac{1}{1 - \mu\lambda} \cdot \overrightarrow{AF_3}$; $\overrightarrow{AF_1} = k \cdot \overrightarrow{AF_2} + m \cdot \overrightarrow{AF_3}$, ahol

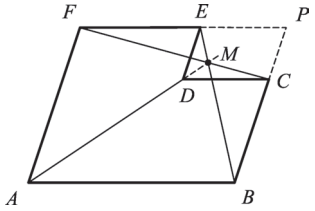
$k = \dfrac{\lambda\mu}{(\mu\lambda - 1)}$ és $m = \dfrac{1}{1 - \mu\lambda}$. $k + m = \dfrac{\mu\lambda}{(\mu\lambda - 1)} + \dfrac{1}{1 - \mu\lambda} = \dfrac{\mu\lambda - 1}{\mu\lambda - 1} = 1$ miatt a 2381. feladat alapján ez éppen azt jelenti, hogy F_1, F_2 és F_3 egy egyenesen vannak.

2384. Legyen $\overrightarrow{PE} = \mathbf{e}$ $\overrightarrow{PF} = \lambda\mathbf{e}$ $\overrightarrow{PC} = \mathbf{c}$ $\overrightarrow{PB} = \mu\mathbf{c}$ és $EB \cap FC = M$. A 2382. feladatban láttuk, hogy $\overrightarrow{PM} = \dfrac{\lambda(\mu - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{e} + \dfrac{\mu(\lambda - 1)}{\mu\lambda - 1} \cdot \mathbf{c}$; $AB \parallel PF$; $FA \parallel PB$; $DC \parallel PE$ és $ED \parallel PC$ miatt $\overrightarrow{PA} = \lambda \cdot \mathbf{e} + \mu \cdot \mathbf{c}$ és $\overrightarrow{PD} = \mathbf{e} + \mathbf{c}$. $\overrightarrow{PM} = \dfrac{\lambda\mu \cdot \mathbf{e} - \lambda \cdot \mathbf{e} + \lambda\mu \cdot \mathbf{c} - \mu \cdot \mathbf{c}}{\lambda\mu - 1} =$

$= \dfrac{\lambda\mu}{\lambda\mu - 1} \cdot (\mathbf{e} + \mathbf{c}) - \dfrac{\lambda \cdot \mathbf{e} + \mu \cdot \mathbf{c}}{\lambda\mu - 1} = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda\mu - 1} \cdot \overrightarrow{PD} -$

$- \dfrac{1}{\lambda\mu - 1} \cdot \overrightarrow{PA}$. $\dfrac{\lambda\mu}{\lambda\mu - 1} - \dfrac{1}{\lambda\mu - 1} = 1$ és a 2381. feladat felhasználásával ez azt jelenti, hogy M rajta van az AD egyenesen. $\Rightarrow$ AD, BE és CF egy pontban metszik egymást.

2384.



III

2385. Az osztópontba mutató helyvektorokra vonatkozó összefüggés miatt $\vec{V}=\frac{\vec{A}+\vec{D}}{2}$; $\vec{Z}=\frac{\vec{B}+\vec{C}}{2}$; $\vec{X}=\frac{\mu\vec{A}+\lambda\vec{B}}{\lambda+\mu}$; $\vec{Y}=\frac{\mu\vec{D}+\lambda\vec{C}}{\lambda+\mu}$. P az XY egyenes pontja, ezért a 2380. feladat állítása szerint van olyan $k\in\mathbf{R}$, hogy $\vec{P}=k\cdot\vec{X}+(1-k)\cdot\vec{Y}$. P a VZ egyenes pontja, ezért van olyan $m\in\mathbf{R}$, hogy $\vec{P}=m\cdot\vec{V}+(1-m)\cdot\vec{Z}$. A kettőt összevetve $k\cdot\vec{X}+(1-k)\cdot\vec{Y}=m\cdot\vec{V}+$ $+(1-m)\cdot\vec{Z}$, azaz $k\cdot\frac{\mu\vec{A}+\lambda\vec{B}}{\lambda+\mu}+(1-k)\cdot\frac{\mu\vec{D}+\lambda\vec{C}}{\lambda+\mu}=m\cdot\frac{\vec{A}+\vec{D}}{2}+(1-m)\cdot\frac{\vec{B}+\vec{C}}{2}$.

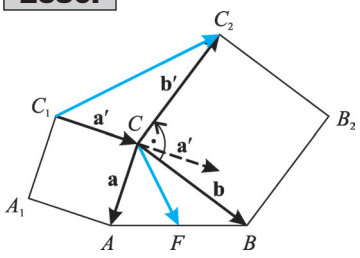
$\vec{A}(2k\mu-m(\mu+\lambda))+\vec{B}(2k\lambda-(1-m)(\mu+\lambda))+\vec{C}(2\lambda(1-k)-(1-m)(\mu+\lambda))+$ $+\vec{D}(2\mu(1-k)-m(\mu+\lambda))=\mathbf{0}\Rightarrow 2k\mu=m(\mu+\lambda);\quad 2k\lambda=(1-m)(\mu+\lambda);\quad 2\lambda(1-k)=$ $=(1-m)(\mu+\lambda);\quad 2\mu(1-k)=m(\mu+\lambda)\Rightarrow\frac{\mu}{\lambda}=\frac{m}{1-m}\Rightarrow m=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\Rightarrow 2k\mu=$ $=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot(\mu+\lambda)\Rightarrow k=\frac{1}{2}\Rightarrow\underline{\underline{\frac{k}{1-k}=1}}$. A P pont felezi az XY szakaszt és $\lambda:\mu$ arányban osztja a VZ szakaszt.

Vektorok elforgatásával megoldható feladatok

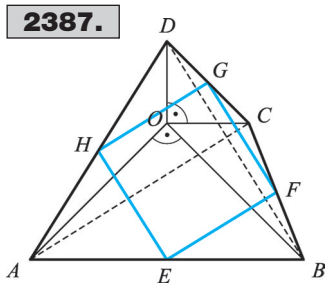
2386. Legyen $\overrightarrow{CA}=\mathbf{a}$ és $\overrightarrow{CB}=\mathbf{b}$. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=2\overrightarrow{CF}$, mert CF súlyvonal. Legyen $\mathbf{a}$ $+90°$-os elforgatottja $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$ $+90°$-os elforgatottja $\mathbf{b}'$. $\overrightarrow{C_1C}=\mathbf{a}'$; $\overrightarrow{CC_2}=\mathbf{b}'\Rightarrow\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CC_2}=\mathbf{a}'+\mathbf{b}'=$ $=(\mathbf{a}+\mathbf{b})'=(2\overrightarrow{CF})'\Rightarrow\underline{\underline{C_1C_2=2CF}}$ és a $90°$-os elforgatás miatt egymásra merőlegesek.

2387. $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$; $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$; $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$; $\overrightarrow{OD}=\mathbf{d}$; $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$; $\overrightarrow{BD}=\mathbf{d}-\mathbf{b}$. *a)* Tekintsük az O középpontú $+90°$-os elforgatást. $\mathbf{a}$ képe $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ képe $\mathbf{d}$, $(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ képe $(\mathbf{d}-\mathbf{b})$, $\overrightarrow{AC}$ képe $\overrightarrow{BD}\Rightarrow BD\perp AC$ és $BD=AC$. *b)* $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{EH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. A feladat *a)* része miatt $EF\perp EH$ és $EF=EH$. Ez az $EFGH$ négyszög bármely két szomszédos oldalára megmutatható, ezért $EFGH$ négyzet.

2386.



2387.

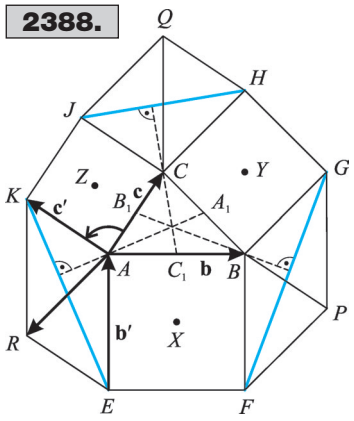


2388. *a)* A megoldást lásd a 2386. feladat megoldásánál. *b)* Az *a)* pontban láttuk, hogy $KE \perp AA_1$, ahol AA_1 az egyik súlyvonal. $\Rightarrow$ A-ból KE-re bocsátott merőleges az AA_1 egyenes. Hasonlóan B-ből FG-re bocsátott merőleges a BB_1 egyenes, C-ből JH-ra bocsátott merőleges a CC_1 egyenes. A háromszög súlyvonalai a súlypontban metszik egymást, ezért a feltételeknek eleget tevő merőlegesek is a súlypontban metszik egymást. *c)* Legyen $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$ és $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} \Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$. Tekintsük a $+90°$-os elforgatást. $\mathbf{b}$ képe $\mathbf{b}'$ és $\mathbf{c}$ képe $\mathbf{c}'$, ezért $\overrightarrow{EA} = \mathbf{b}'$ és $\overrightarrow{AK} = \mathbf{c}'$. $\overrightarrow{AR} = \mathbf{c}' - \mathbf{b}' = (\mathbf{c} - \mathbf{b})' =$ $= (\overrightarrow{BC})' \Rightarrow \overrightarrow{AR}$ a $\overrightarrow{BC}$ $+90°$-os elforgatottja, ezért $AR \perp BC$ és $AR = BC$. Hasonlóan megmutatható, hogy $BP \perp AC$ és $BP = AC$, valamint $CQ \perp AB$ és $CQ = AB$. *d)* A korábbi jelöléseket használva (a helyvektorok közös kezdőpontja A): $\vec{Z} = \dfrac{\mathbf{c} + \mathbf{c}'}{2}$; $\vec{X} = \dfrac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{2}$; $\vec{A_1} = \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{A_1Z} = \vec{Z} - \vec{A_1} = \dfrac{\mathbf{c} + \mathbf{c}' - \mathbf{b} - \mathbf{c}}{2} =$ $= \dfrac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{2}$ és $\overrightarrow{A_1X} = \vec{X} - \vec{A_1} = \dfrac{\mathbf{b} - \mathbf{b}' - \mathbf{b} - \mathbf{c}}{2} = \dfrac{-\mathbf{c} - \mathbf{b}'}{2}$. Vegyük az $\overrightarrow{A_1Z}$ $+90°$-os elforgatottját. $(\overrightarrow{A_1Z})' = \left(\dfrac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{2}\right)' = \dfrac{\mathbf{c}'' - \mathbf{b}'}{2} = \dfrac{-\mathbf{c} - \mathbf{b}'}{2} = \overrightarrow{A_1X} \Rightarrow X$ a Z pont A_1 körüli $+90°$-os elforgatottja. $\Rightarrow$ Az A_1 oldalfelezéspont az $XYZ\triangle$ XZ oldala fölé befelé rajzolt négyzet középpontja. Hasonlóan megmutatható, hogy B_1 az XY oldal fölé, C_1 az YZ oldal fölé rajzolt négyzet középpontja. *e)* A korábbi jelöléseket használva: $\vec{P} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GP} = \mathbf{b} + (\mathbf{b} - \mathbf{c})' - \mathbf{b}' =$ $= \mathbf{b} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}' - \mathbf{b}' = \mathbf{b} - \mathbf{c}'$; $\vec{R} = \mathbf{c}' - \mathbf{b}'$; $\vec{X} = \dfrac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{2}$. $\dfrac{\vec{P} + \vec{R}}{2} = \dfrac{\mathbf{b} - \mathbf{c}' + \mathbf{c}' - \mathbf{b}'}{2} = \dfrac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{2} = \vec{X} \Rightarrow X$ a PR szakasz felezőpontja. Hasonlóan megmutatható, hogy Y a PQ szakasz, Z pedig a QR szakasz felezőpontja. *f)* Az *e)* pontban láttuk, hogy X felezi a PR szakaszt, ezért QX a $PQR\triangle$ Q-ból induló súlyvonala. Hasonlóan belátható, hogy PZ és RY is súlyvonalak, tehát a $PQR\triangle$ súlypontjában metszik egymást. *g)* A korábbi jelöléseket használva: $\vec{S}_{ABC} = \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$; $\vec{X} = \dfrac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{2}$; $\vec{Y} = \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}'}{2}$; $\vec{Z} = \dfrac{\mathbf{c} + \mathbf{c}'}{2}$; $\vec{S}_{XYZ} = \dfrac{\mathbf{b} - \mathbf{b}' + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}' + \mathbf{c} + \mathbf{c}'}{6} = \dfrac{2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}}{6} = \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$

$\vec{E} = -\mathbf{b}'$; $\vec{G} = \mathbf{b} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}'$; $\vec{J} = \mathbf{c} + \mathbf{c}'$; $\vec{S}_{EGJ} = \dfrac{-\mathbf{b}' + \mathbf{b} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}' + \mathbf{c} + \mathbf{c}'}{3} = \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$;

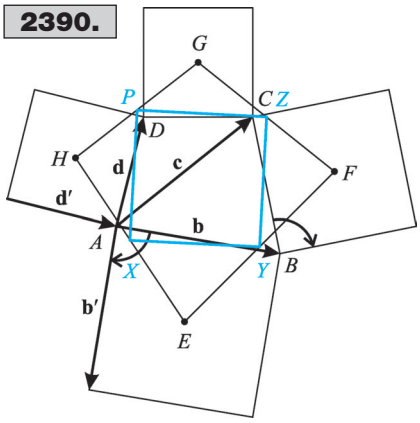
$\vec{F} = \mathbf{b} - \mathbf{b}'$; $\vec{H} = \mathbf{c} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}'$; $\vec{K} = \mathbf{c}'$; $\vec{S}_{FHK} = \dfrac{\mathbf{b} - \mathbf{b}' + \mathbf{c} + \mathbf{b}' - \mathbf{c}' + \mathbf{c}'}{3} = \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$. A fentiek alapján $S_{ABC} \equiv S_{XYZ} \equiv S_{EGJ} \equiv S_{FHK}$. *h)* $ABHJ$ négyszögben a C pont olyan, hogy AJC és BHC egyenlő szárú derékszögű háromszögek. A 2387. feladatban beláttuk, hogy ilyen négyszög esetében az átlók merőlegesek és egyenlők: $AH = BJ$ és $AH \perp BJ$. Hasonlóan megmutatható a másik két szakaszpár egyenlősége és merőlegessége is.

2388.



III

2390.



2389. A 2387. ábra jelöléseivel: Legyenek az A, B, C és D pontokba mutató helyvektorok $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ és $\vec{D}$. $\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A}$ és $\overrightarrow{BD} = \vec{D} - \vec{B}$, $AC \perp BD$ és $AC = BD$ miatt $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BD}$ $(-90)°$-os elforgatottja: $\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BD})' \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{C} - \vec{A} = \vec{D}' - \vec{B}'$; $\vec{E} = \dfrac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$; $\vec{F} = \dfrac{\vec{B} + \vec{C}}{2}$;

$\vec{H} = \dfrac{\vec{A} + \vec{D}}{2}$. $\overrightarrow{EF} = \vec{F} - \vec{E} = \dfrac{\vec{B} + \vec{C} - \vec{A} - \vec{B}}{2} =$

$= \dfrac{\vec{C} - \vec{A}}{2}$; $\overrightarrow{EH} = \vec{H} - \vec{E} = \dfrac{\vec{A} + \vec{D} - \vec{A} - \vec{B}}{2} = \dfrac{\vec{D} - \vec{B}}{2}$.

Tekintsük az $\overrightarrow{EH}$ $(-90)°$-os elforgatottját. $\left(\overrightarrow{EH}\right)' =$

$= \left(\dfrac{\vec{D} - \vec{B}}{2}\right)' = \dfrac{\vec{D}' - \vec{B}'}{2} = \dfrac{\vec{C} - \vec{A}}{2} = \overrightarrow{EF} \Rightarrow F$ a H pont E körüli $(-90)°$-os elforgatottja. Hasonlóan H az F pont G körüli $(-90)°$-os elforgatottja, ezért $HEFG$ négyzet.

2390. Legyen A a helyvektorok közös kezdőpontja. Jelöljük a $(-90)°$-os elforgatás során keletkezett képeket $'$-vel. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$; $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$; $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$; $\overrightarrow{AE} = \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{b}'}{2}$; $\overrightarrow{AF} = \mathbf{b} + \dfrac{\mathbf{c} - \mathbf{b} + \mathbf{c}' - \mathbf{b}'}{2} =$

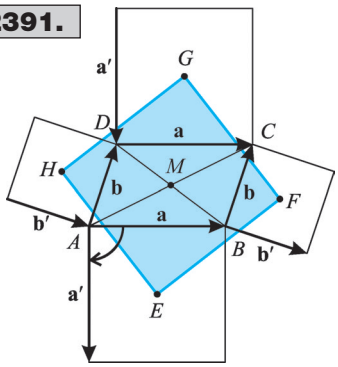
$= \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{c}' - \mathbf{b}'}{2}$; $\overrightarrow{AG} = \mathbf{c} + \dfrac{\mathbf{d} - \mathbf{c} + \mathbf{d}' - \mathbf{c}'}{2} = \dfrac{\mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{d}' - \mathbf{c}'}{2}$; $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\mathbf{d} - \mathbf{d}'}{2}$;

$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AG} = \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{b}' - (\mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{d}' - \mathbf{c}')}{2} = \dfrac{\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d} + \mathbf{b}' + \mathbf{c}' - \mathbf{d}'}{2}$;

$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AF} = \dfrac{\mathbf{d} - \mathbf{d}' - (\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{c}' - \mathbf{b}')}{2} = \dfrac{\mathbf{b}' - \mathbf{c}' - \mathbf{d}' - \mathbf{b} - \mathbf{c} + \mathbf{d}}{2}$;

$\left(\overrightarrow{GE}\right)' = \left(\dfrac{\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d} + \mathbf{b}' + \mathbf{c}' - \mathbf{d}'}{2}\right)' = \dfrac{\mathbf{b}' - \mathbf{c}' - \mathbf{d}' + \mathbf{b}'' + \mathbf{c}'' - \mathbf{d}''}{2}$. Felhasználva, hogy $\mathbf{b}'' = -\mathbf{b}$, $\mathbf{c}'' = -\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}'' = -\mathbf{d}$: $\left(\overrightarrow{GE}\right)' = \dfrac{\mathbf{b}' - \mathbf{c}' - \mathbf{d}' - \mathbf{b} - \mathbf{c} + \mathbf{d}}{2} = \overrightarrow{FH} \Rightarrow$ A $HEFG$ négyszög átlói merőlegesek és egyenlők. A 2389. feladatot alkalmazva a négyszög oldalfelezéspontjai négyzetet alkotnak.

2391.



2391. 1. megoldás: Legyen A a helyvektorok közös kezdőpontja. Jelöljük a $(-90)°$-os elforgatás során keletkezett képeket $'$-vel. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$. $ABCD$ paralelogramma, ezért $\overrightarrow{DC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$. $\overrightarrow{AE} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{a}'}{2}$; $\overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + \dfrac{\mathbf{b} + \mathbf{b}'}{2}$; $\overrightarrow{AG} = \mathbf{b} + \dfrac{\mathbf{a} - \mathbf{a}'}{2}$;

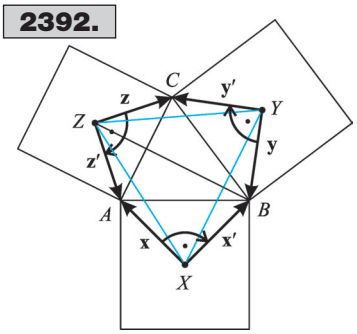
$\overrightarrow{AH} = \dfrac{\mathbf{b} - \mathbf{b}'}{2}$. $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AH} = \mathbf{b} + \dfrac{\mathbf{a} - \mathbf{a}'}{2} -$

$-\frac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'}{2}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2}$; $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AH}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{a}'}{2}-\frac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'}{2}=\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2}$; $\overrightarrow{GF}=$ $=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AG}=\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}+\mathbf{b}'}{2}-\mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}-\mathbf{a}'}{2}=\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2}$. Tehát $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{GF}$, ezért $HE=GF$ és $HE\parallel GF$ (1). $(\overrightarrow{HG})'=\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2}\right)'=\frac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}'-\mathbf{a}''+\mathbf{b}''}{2}$. Felhasználva $\mathbf{a}''=-\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}''=-\mathbf{b}$:

$(\overrightarrow{HG})'=\frac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}'+\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}=\overrightarrow{HE}\Rightarrow HG=HE$ és $HG\perp GE$ (2). (1) és (2) összefüggésekből következik, hogy $HEFG$ négyzet. **2. megoldás:** Legyen M a paralelogramma átlóinak metszéspontja. $\overrightarrow{AE}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{a}'}{2}$; $\overrightarrow{MA}=-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}=-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\frac{\mathbf{a}+\mathbf{a}'}{2}=\frac{\mathbf{a}'-\mathbf{b}}{2}$; $\overrightarrow{MH}=$ $=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AH}=-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\frac{\mathbf{b}-\mathbf{b}'}{2}=-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}'}{2}$. Vegyük az $\overrightarrow{ME}$ vektor $(-90°)$-os elforgatottját. $(\overrightarrow{ME})'=\left(\frac{\mathbf{a}'-\mathbf{b}}{2}\right)'=\frac{\mathbf{a}''-\mathbf{b}'}{2}=\frac{-\mathbf{a}-\mathbf{b}'}{2}=-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}'}{2}=\overrightarrow{MH}$. Hasonlóan belátható, hogy $(\overrightarrow{MH})'=\overrightarrow{MG}$ és $(\overrightarrow{MG})'=\overrightarrow{MF}$. MEF; MFG; MGH és MHE egyenlő szárú derékszögű háromszögek, a derékszög M-ben van. $\Rightarrow EFGH$ négyzet.

2392. *a)* Jelöljük az ábra szerint a vektorokat, és $'$-vel a $(-90)°$-os elforgatottjukat (felhasználva, hogy a négyzet félátlói merőlegesek és egyenlők). $\overrightarrow{XY}=\mathbf{x}'-\mathbf{y}$; $\overrightarrow{BZ}=-\mathbf{x}'+\mathbf{x}-\mathbf{z}'$. Tekintsük a C-ből kiindulva az egymáshoz fűzött, majd oda visszaérkező vektorokat.
$-\mathbf{z}+\mathbf{z}'-\mathbf{x}+\mathbf{x}'-\mathbf{y}+\mathbf{y}'=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}=\mathbf{x}'+\mathbf{y}'+\mathbf{z}'=(\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z})'\Rightarrow\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}=\mathbf{0}\Rightarrow$
$\Rightarrow\mathbf{y}=-\mathbf{x}-\mathbf{z}$. $\overrightarrow{XY}=\mathbf{x}'+\mathbf{x}+\mathbf{z}$; $(\overrightarrow{XY})'=(\mathbf{x}'+\mathbf{x}+\mathbf{z})'=\mathbf{x}''+\mathbf{x}'+\mathbf{z}'=-\mathbf{x}+\mathbf{x}'+\mathbf{z}'=-\overrightarrow{BZ}$. $\overrightarrow{BZ}$ az $\overrightarrow{XY}$ $+90°$-os elforgatottja, ezért $BZ=XY$ és $BZ\perp XY$. *b)* Az *a)* pontban látottakhoz hasonlóan belátható, hogy $AY\perp ZX$ és $CX\perp ZY$. $\Rightarrow AZ$; CX és BZ az $XYZ\triangle$ magasságvonalai, ezért egy pontban metszik egymást.

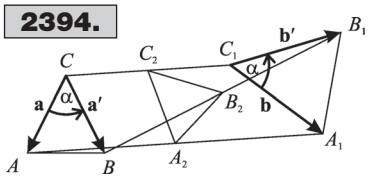
2392.



2393. A 2394. ábra jelöléseit használjuk. Legyenek az A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 pontokba mutató helyvektorok rendre $\vec{A}$, $\vec{B}$,..., $\vec{C}_2$. Jelölje a $+90°$-os elforgatás képét $'$. $\vec{C}_2=\frac{\vec{C}+\vec{C}_1}{2}$; $\vec{A}_2=\frac{\vec{A}+\vec{A}_1}{2}$; $\vec{B}_2=\frac{\vec{B}+\vec{B}_1}{2}$. $\overrightarrow{C_2A_2}=\vec{A}_2-\vec{C}_2=$ $=\frac{\vec{A}-\vec{C}}{2}+\frac{\vec{A}_1-\vec{C}_1}{2}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; $\overrightarrow{C_2B_2}=\vec{B}_2-\vec{C}_2=\frac{\vec{B}-\vec{C}}{2}+$ $+\frac{\vec{B}_1-\vec{C}_1}{2}=\frac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2}$; $(\overrightarrow{C_2A_2})'=\frac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}'}{2}=\overrightarrow{C_2B_2}\Rightarrow C_2A_2=$ $=C_2B_2$ és $C_2A_2\perp C_2B_2\Rightarrow A_2B_2C_2\triangle$ egyenlő szárú és derékszögű.

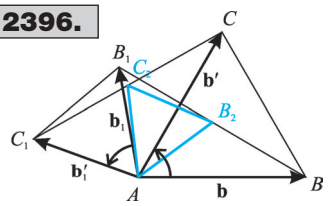
2394. A 2393. feladat megoldásmenete teljes egészében megismételhető, csak a $+90°$-os elforgatás képe helyett az

2394.

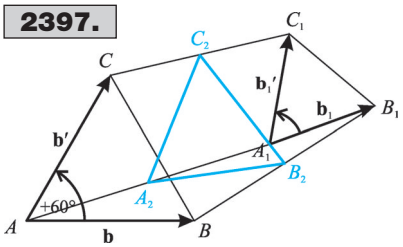


III

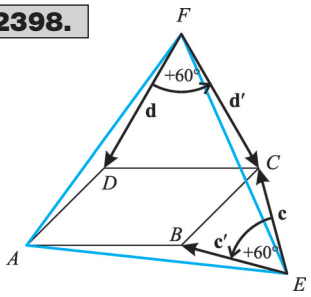
2396.



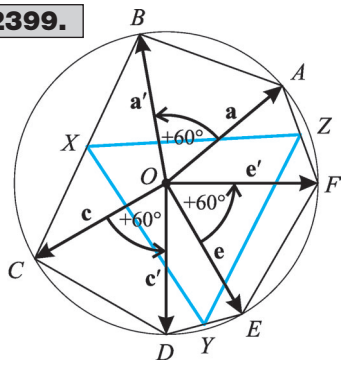
2397.



2398.



2399.



α irányított szögű elforgatás képét jelöljük $'$-vel. $(\overrightarrow{C_2A_2})' = \overrightarrow{C_2B_2} \Rightarrow C_2A_2 = C_2B_2$ és $A_2C_2B_2\sphericalangle = \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow C_2A_2B_2\triangle \sim CAB\triangle$.

2395. Legyen $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{OA'} = \mathbf{a}'$; $\overrightarrow{OA''} = \mathbf{a}''$. Az $\mathbf{a}''$ az $\mathbf{a}$ vektor + 120°-os elforgatottja, így $OAA'\triangle$-ben az $\overrightarrow{AA'}$-ral helyettesíthető. A vektorok különbségére tanult ábrázolásból következik, hogy $\mathbf{a}'' = \mathbf{a}' - \mathbf{a}$.

2396. Legyenek az A, B, C, B_1, C_1, B_2, C_2 pontokba mutató helyvektorok rendre $\vec{A}$, $\vec{B}$, ..., $\vec{C}_2$. Jelölje a +60°-os elforgatás képét $'$. $\vec{C}_2 = \dfrac{\vec{C} + \vec{C}_1}{2}$; $\vec{B}_2 = \dfrac{\vec{B} + \vec{B}_1}{2}$. $\overrightarrow{AB_2} =$

$$= \vec{B}_2 - \vec{A} = \frac{\vec{B} + \vec{B}_1}{2} - \vec{A} = \frac{\vec{B}_1 - \vec{A}}{2} + \frac{\vec{B} - \vec{A}}{2} = \frac{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}}{2};$$

$$\overrightarrow{AC_2} = \vec{C}_2 - \vec{A} = \frac{\vec{C} + \vec{C}_1}{2} - \vec{A} = \frac{\vec{C}_1 - \vec{A}}{2} + \frac{\vec{C} - \vec{A}}{2} = \frac{\mathbf{b}_1' + \mathbf{b}'}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB_2})' = \frac{\mathbf{b}_1' + \mathbf{b}'}{2} = \overrightarrow{AC_2}.$$

A fentiekből következik, hogy $AC_2 = AB_2$ és $B_2AC_2\sphericalangle = 60° \Rightarrow AB_2C_2\triangle$ szabályos.

2397. Legyenek az A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 pontokba mutató helyvektorok rendre $\vec{A}$, $\vec{B}$, ..., $\vec{C}_2$. Jelölje a +60°-os elforgatás képét $'$. $\vec{C}_2 = \dfrac{\vec{C} + \vec{C}_1}{2}$; $\vec{A}_2 = \dfrac{\vec{A} + \vec{A}_1}{2}$; $\vec{B}_2 = \dfrac{\vec{B} + \vec{B}_1}{2}$.

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \vec{B}_2 - \vec{A}_2 = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{2} + \frac{\vec{B}_1 - \vec{A}_1}{2} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}_1}{2};$$

$$\overrightarrow{A_2C_2} = \vec{C}_2 - \vec{A}_2 = \frac{\vec{C} - \vec{A}}{2} + \frac{\vec{C}_1 - \vec{A}_1}{2} = \frac{\mathbf{b}' + \mathbf{b}_1'}{2};$$

$(\overrightarrow{A_2B_2})' = \dfrac{\mathbf{b}' + \mathbf{b}_1'}{2} = \overrightarrow{A_2C_2}$. A fentiekből következik, hogy $A_2C_2 = A_2B_2$ és $B_2A_2C_2\sphericalangle = 60° \Rightarrow A_2B_2C_2\triangle$ szabályos.

2398. Legyen $\overrightarrow{FD} = \mathbf{d}$, $\overrightarrow{EC} = \mathbf{c}$ és jelölje a +60°-os elforgatás képét $'$. $\overrightarrow{EF} = \mathbf{c} - \mathbf{d}'$; $\overrightarrow{EA} = \mathbf{c}' + \mathbf{d} - \mathbf{d}'$; $(\overrightarrow{EF})' = \mathbf{c}' - \mathbf{d}''$. A 2395. feladat eredményét felhasználva $\mathbf{d}'' = \mathbf{d}' - \mathbf{d}$. $\Rightarrow (\overrightarrow{EF})' = \mathbf{c}' - (\mathbf{d}' - \mathbf{d}) = \mathbf{c}' - \mathbf{d}' + \mathbf{d} =$ $= \overrightarrow{EA} \Rightarrow EA = EF$ és $FEA\sphericalangle = 60° \Rightarrow FEA\triangle$ szabályos.

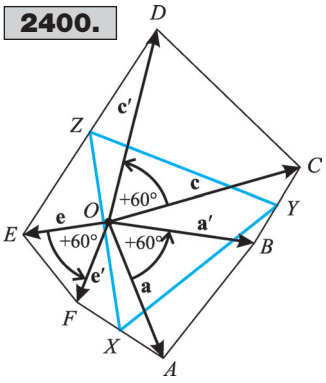
2399. $CD = r$ és $OC = r$ és $OD = r$, ezért $CDO\triangle$ szabályos. $\Rightarrow COD\sphericalangle = 60°$. Hasonlóan megmutatható, hogy $EOF\sphericalangle = 60°$ és $AOB\sphericalangle = 60°$. Legyen $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OE} = \mathbf{e}$ és $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ és jelölje a + 60°-os elforgatás képét $'$. $\vec{X} = \dfrac{\mathbf{c} + \mathbf{a}'}{2}$; $\vec{Y} = \dfrac{\mathbf{e} + \mathbf{c}'}{2}$; $\vec{Z} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{e}'}{2}$. $\overrightarrow{YZ} = \vec{Z} - \vec{Y} =$

$= \frac{\mathbf{a}+\mathbf{e}'-\mathbf{e}-\mathbf{c}'}{2}$; $\overrightarrow{YX} = \vec{X} - \vec{Y} = \frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}'-\mathbf{e}-\mathbf{c}'}{2}$; $(\overrightarrow{YZ})' = \frac{\mathbf{a}'+\mathbf{e}''-\mathbf{e}'-\mathbf{c}''}{2}$. A 2395. feladat eredményét felhasználva $\mathbf{e}'' = \mathbf{e}' - \mathbf{e}$ és $\mathbf{c}'' = \mathbf{c}' - \mathbf{c}$, így $(\overrightarrow{YZ})' = \frac{\mathbf{a}'+\mathbf{e}'-\mathbf{e}-\mathbf{c}'+\mathbf{c}-\mathbf{e}'}{2} =$
$= \frac{\mathbf{a}'-\mathbf{e}-\mathbf{c}'+\mathbf{c}}{2} = \overrightarrow{YX} \Rightarrow YX = YZ$ és $ZYX\sphericalangle = 60°$, ezért $XYZ\triangle$ szabályos.

III

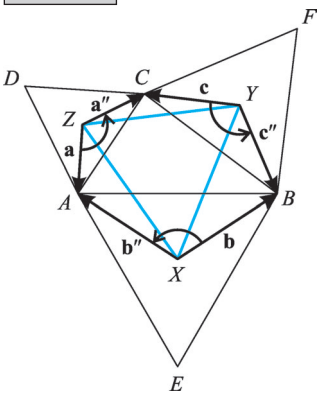
2400. Legyen $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OE} = \mathbf{e}$ és $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ és jelölje a + 60°-os elforgatás képét ′. Szabályos háromszögekről lévén szó $\overrightarrow{OD} = \mathbf{c}'$, $\overrightarrow{OF} = \mathbf{e}'$ és $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a}'$. $\vec{Y} = \frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}'}{2}$; $\vec{Z} = \frac{\mathbf{e}+\mathbf{c}'}{2}$; $\vec{X} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{e}'}{2}$. $\overrightarrow{ZX} = \vec{X} - \vec{Z} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{e}'-\mathbf{e}-\mathbf{c}'}{2}$; $\overrightarrow{ZY} = \vec{Y} - \vec{Z} =$
$= \frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}'-\mathbf{e}-\mathbf{c}'}{2}$; $(\overrightarrow{ZX})' = \frac{\mathbf{a}'+\mathbf{e}''-\mathbf{e}'-\mathbf{c}''}{2}$. A 2395. feladat eredményét felhasználva $\mathbf{e}'' = \mathbf{e}' - \mathbf{e}$ és $\mathbf{c}'' = \mathbf{c}' - \mathbf{c}$, így $(\overrightarrow{ZX})' =$
$= \frac{\mathbf{a}'+\mathbf{e}'-\mathbf{e}-\mathbf{c}'+\mathbf{c}-\mathbf{e}'}{2} = \frac{\mathbf{a}'-\mathbf{e}-\mathbf{c}'+\mathbf{c}}{2} = \overrightarrow{ZY} \Rightarrow ZX = ZY$
és $XZY\sphericalangle = 60°$, ezért $XYZ\triangle$ szabályos.

2400.



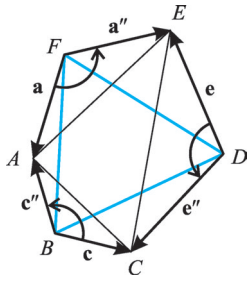
2401. Legyenek a szabályos háromszögek középpontjai X, Y és Z. Legyen $\overrightarrow{YC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{XB} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{ZA} = \mathbf{a}$. Jelölje a + 60°-os elforgatás képét ′, a + 120°-os elforgatás képét ″. Felhasználva, hogy $BXA\sphericalangle = CYB\sphericalangle = AZC\sphericalangle = +120°$: $\overrightarrow{YB} = \mathbf{c}''$, $\overrightarrow{XA} = \mathbf{b}''$ $\overrightarrow{ZC} = \mathbf{a}''$. $\overrightarrow{XY} = \mathbf{b} - \mathbf{c}''$; $\overrightarrow{XZ} = \mathbf{b}'' - \mathbf{a}$; $(\overrightarrow{XY})' = \mathbf{b}' - (\mathbf{c}'')' =$
$= \mathbf{b}' - (-\mathbf{c}) = \mathbf{b}' + \mathbf{c}$. X-ből kiindulva vegyük sorra az egymásba fűzött vektorokat. $\mathbf{b} - \mathbf{c}'' + \mathbf{c} - \mathbf{a}'' + \mathbf{a} - \mathbf{b}'' = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} =$
$= \mathbf{a}'' + \mathbf{b}'' + \mathbf{c}'' \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \Rightarrow \overrightarrow{XZ} = \mathbf{b}'' - \mathbf{a} =$
$= \mathbf{b}'' + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. A 2395. feladat eredményét felhasználva $\mathbf{b}'' =$
$= \mathbf{b}' - \mathbf{b}$, így $\overrightarrow{XZ} = \mathbf{b}' - \mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{b}' + \mathbf{c} = (\overrightarrow{XY})' \Rightarrow XZ = XY$
és $YXZ\sphericalangle = 60°$, ezért $XYZ\triangle$ szabályos.

2401.

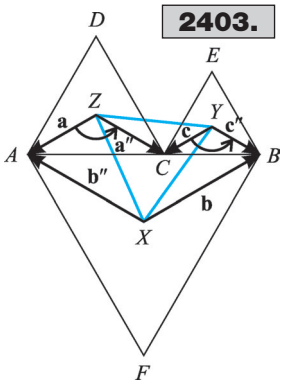


2402. Legyen $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{DE} = \mathbf{e}$ és $\overrightarrow{FA} = \mathbf{a}$ és jelölje a + 60°-os elforgatás képét ′, a +120°-os elforgatás képét ″. Felhasználva, hogy $CBA\sphericalangle = EDC\sphericalangle = AFE\sphericalangle = +120°$; $\overrightarrow{BA} = \mathbf{c}''$, $\overrightarrow{DC} = \mathbf{e}''$ és $\overrightarrow{FE} = \mathbf{a}''$. $\overrightarrow{BD} = \mathbf{c} - \mathbf{e}''$; $\overrightarrow{BF} = \mathbf{c}'' - a$; $(\overrightarrow{BD})' = \mathbf{c}' - (\mathbf{e}'')' =$
$= \mathbf{c}' - (-\mathbf{e}) = \mathbf{c}' + \mathbf{e}$. B-ből kiindulva vegyük sorra az egymásba fűzött vektorokat. $\mathbf{c} - \mathbf{e}'' + \mathbf{e} - \mathbf{a}'' + \mathbf{a} - \mathbf{c}'' = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{c} +$
$+ \mathbf{e} = \mathbf{a}'' + \mathbf{c}'' + \mathbf{e}'' \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{e} = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{e} \Rightarrow \overrightarrow{BF} =$
$= \mathbf{c}'' - \mathbf{a} = \mathbf{c}'' + \mathbf{c} + \mathbf{e}$. A 2395. feladat eredményét felhasználva $\mathbf{c}'' = \mathbf{c}' - \mathbf{c}$, így $BF = \mathbf{c}' - \mathbf{c} + \mathbf{c} + \mathbf{e} = \mathbf{c}' + \mathbf{e} = (\overrightarrow{BD})' \Rightarrow BF = BD$
és $DBF\sphericalangle = 60°$, ezért $BDF\triangle$ szabályos.

2402.



III



2403.

2403. Legyenek a szabályos háromszögek középpontjai X, Y és Z. Legyen $\overrightarrow{YC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{XB} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{ZA} = \mathbf{a}$, és jelölje a $+60°$-os elforgatás képét $'$, a $+120°$-os elforgatás képét $''$. Felhasználva, hogy $BXA\sphericalangle = CYB\sphericalangle = AZC\sphericalangle = +120°$; $\overrightarrow{YB} = \mathbf{c}''$, $\overrightarrow{XA} = \mathbf{b}''$ és $\overrightarrow{ZC} = \mathbf{a}''$. $\overrightarrow{XY} = \mathbf{b} - \mathbf{c}''$; $\overrightarrow{XZ} = \mathbf{b}'' - \mathbf{a}$; $(\overrightarrow{XY})' = \mathbf{b}' - (\mathbf{c}')' = \mathbf{b}' - (-\mathbf{c}) = \mathbf{b}' + \mathbf{c}$. X-ből kiindulva vegyük sorra az egymásba fűzött vektorokat. $\mathbf{b} - \mathbf{c}'' + \mathbf{c} - \mathbf{a}'' + \mathbf{a} - \mathbf{b}'' = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}'' + \mathbf{b}'' + \mathbf{c}'' \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \Rightarrow \overrightarrow{XZ} = \mathbf{b}'' - \mathbf{a} = \mathbf{b}'' + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. A 2395. feladat eredményét felhasználva $\mathbf{b}'' = \mathbf{b}' - \mathbf{b}$, így $\overrightarrow{XZ} = \mathbf{b}' - \mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{b}' + \mathbf{c} = (\overrightarrow{XY})' \Rightarrow XZ = XY$ és $YXZ\sphericalangle = 60°$, ezért $XYZ\triangle$ szabályos.

Műveletek koordinátákkal megadott vektorokkal

2404. Legyen a kezdőpont az origó. Alkalmazzuk a $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ képletet, ahol v_1 és v_2 a $\mathbf{v}$ vektor koordinátái. Ekkor $|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{34}$; $|\mathbf{c}| = \sqrt{73}$; $|\mathbf{d}| = 4$; $|\mathbf{e}| = \sqrt{153}$; $|\mathbf{f}| = \frac{\sqrt{2404}}{15}$; $|\mathbf{g}| = \sqrt{10}$; $|\mathbf{h}| = \sqrt{12 - \sqrt{5} + 4{,}5\sqrt{2}}$. Ha a vektorok kezdőpontja az (5; 5) koordinátájú pont, a vektorok abszolútértéke nem változik. Ekkor például az $\mathbf{a}$ vektor kezdőpontja az (5; 5), végpontja a (9; 11) koordinátájú pont. $|\mathbf{a}| = \sqrt{(9-5)^2 + (11-5)^2} = 2\sqrt{13}$. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; $\mathbf{b} = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{c} = -8\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\mathbf{d} = -4\mathbf{j}$; $\mathbf{e} = 12\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\mathbf{f} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - 3{,}2\mathbf{j}$; $\mathbf{g} = -\sqrt{2}\,\mathbf{i} - \sqrt{8}\,\mathbf{j}$; $\mathbf{h} = \frac{\sqrt{20} - 1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{18} + 3}{2}\mathbf{j}$.

2405. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Alkalmazzuk a $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ képletet, ahol v_1, v_2, v_3, a $\mathbf{v}$ vektor koordinátái. Ekkor $|\mathbf{a}| = 3\sqrt{5}$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{29}$; $|\mathbf{c}| = \sqrt{109}$; $|\mathbf{d}| = 5\sqrt{17}$.

2406. A feladat megoldását az olvasóra bízzuk.

2407. Az $\mathbf{m} = (a;\ b)$; $\mathbf{n} = (b;\ a)$ helyvektorok egymás tükörképei az $y = x$ egyenletű (az origón átmenő és az első és a harmadik siknegyedet felező) egyenesre.

2408. *a)* (3; −4) és így tovább; *b)* (−3; 4) és így tovább; *c)* (−3; −4); (4; −2); (−4; 5); (−5; 0); (0; 3); $(-p;\ -q)$; *d)* (4; 3); (2; −4); (−5; 4); (0; 5); (−3; 0); $(q;\ p)$; *e)* (−4; −3); (−2; 4); (5; −4); (0; −5); (3; 0); $(-q;\ -p)$.

2409. $C_1(5; 6)$, $C_2(-5; 6)$, $C_3(-5; -6)$, $C_4(5; -6)$. Pitagorasz tételét alkalmazva $m^2 = 8^2 - 6^2 = 28$, $m = 2\sqrt{7}$. A megoldás: $C_1\left(6; 2\sqrt{7}\right)$, $C_2\left(-6; 2\sqrt{7}\right)$, $C_3\left(-6; -2\sqrt{7}\right)$, $C_4\left(6; -2\sqrt{7}\right)$.

2410. *a)* $AC = a\sqrt{2}$, így $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$, $B\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$, $D\left(0;\ -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$;

b) $A\left(\frac{a}{2};\ \frac{a}{2}\right)$, $B\left(-\frac{a}{2};\ \frac{a}{2}\right)$, $C\left(-\frac{a}{2};\ -\frac{a}{2}\right)$, $D\left(\frac{a}{2};\ -\frac{a}{2}\right)$.

2411. $\left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$.

2412. *a)* A szabályos hatszög tulajdonságai miatt ABO háromszög szabályos. Pitagorasz tételéből: $m^2 = 4^2 - 2^2 = 12$, $m = 2\sqrt{3}$. A csúcspontok: $A(4; 0)$, $B(2; 2\sqrt{3})$, $C(-2; 2\sqrt{3})$, $D(-4; 0)$, $E(-2; -2\sqrt{3})$, $F(2; -2\sqrt{3})$, illetve
$A(2a; 0)$, $B(a; a\sqrt{3})$, $C(-a; a\sqrt{3})$, $D(-2a; 0)$, $E(-a; -a\sqrt{3})$, $F(a; -a\sqrt{3})$.
b) $(0; 4)$, $(2\sqrt{3}; 2)$, $(2\sqrt{3}; -2)$, $(0; -4)$, $(-2\sqrt{3}; -2)$, $(-2\sqrt{3}; 2)$, illetve $(0; 2a)$, $(-a\sqrt{3}; a)$, $(-a\sqrt{3}; -a)$, $(0; -2a)$, $(a\sqrt{3}; -a)$, $(a\sqrt{3}; a)$.

2413. 233. ábra

2414. *a)* $a'(-3; -2)$, $a''(3; -2)$; *e)* $e'(-b; a)$, $e''(b; -a)$; *f)* $f'(-\cos\alpha; \sin\alpha)$, $f''(\cos\alpha; -\sin\alpha)$.

2415. 1. $(-1; 7)$. 2. $(5; 10)$. 3. $(10; -7)$. 4. $-2\mathbf{b}(8; -4)$, $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}(11; 1)$. 5. $\frac{1}{2}\mathbf{a}\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$, $\frac{2}{3}\mathbf{b}\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right)$, $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}\left(-\frac{7}{6}; \frac{23}{6}\right)$. 6. $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$. 7. $\left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

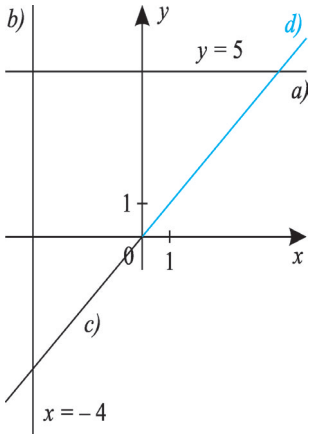
2416. $\overrightarrow{AB}(-2; 7)$, $\overrightarrow{BC}(-8; -1)$, $\overrightarrow{CA}(10; -6)$. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{89}$, $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{104}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (-2; 7) + (-8; -1) + (10; -6) = (0; 0) = \mathbf{0}$;
$|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CA}| = 26{,}9$.

2417. $\overrightarrow{AB}(-8; 4)$, $\overrightarrow{BC}(-4; -11)$, $\overrightarrow{CA}(12; 7)$, $\overrightarrow{DA}(5; 16)$.

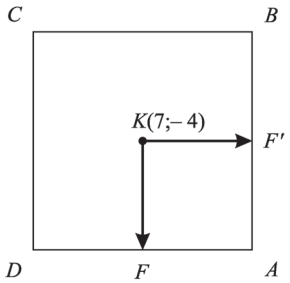
2418. $\overrightarrow{KF'}(-4; -10)$, $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KF} + \overrightarrow{KF'}$, $\overrightarrow{KA}(-14; -6)$. Legyen 0 az origó. Ekkor $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{OA}(-7; -10)$, $A(-7; -10)$. $-\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KC}(14; 6)$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{OC}(21; 2)$, $C(21; 2)$. $\overrightarrow{KB}(6; -14)$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{OB}(13; -18)$, $B(13; -18)$, $-\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KD}$, ebből $D(1; 10)$.

2419. $\overrightarrow{AB}(2; 5)$, $\overrightarrow{DC}(2; 5) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ paralelogramma;
$\overrightarrow{AD}(5; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow ABCD$ négyzet.

2413.



2418.



2420. $|\mathbf{a}| = \sqrt{73}$; $\mathbf{a}^0\left(\frac{8}{\sqrt{73}}; \frac{3}{\sqrt{73}}\right)$; $|\mathbf{b}| = 2\sqrt{10}$; $\mathbf{b}^0\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$; $|\mathbf{c}| = \sqrt{106}$; $\mathbf{c}^0\left(\frac{5}{\sqrt{106}}; -\frac{9}{\sqrt{106}}\right)$; $|\mathbf{d}| = \sqrt{58}$; $\mathbf{d}^0\left(-\frac{7}{\sqrt{58}}; -\frac{3}{\sqrt{58}}\right)$.

III

2421. Az A, B, C, D, K pontokhoz vezessenek az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{k}$ helyvektorok. Ekkor $\overrightarrow{KA} = \mathbf{a} - \mathbf{k}(-4; -2)$, $\overrightarrow{KC}(4; 2)$. $\mathbf{c} = \overrightarrow{KC} + \mathbf{k}$. Innen $\mathbf{c}(5; 11)$, $C(5; 11)$. $\overrightarrow{KB}$ a $\overrightarrow{KA}$ 90°-os elforgatottjának $\frac{1}{2}$-szerese, tehát $\overrightarrow{KB}(1; -2)$. $\mathbf{b} = \mathbf{k} + \overrightarrow{KB} \Rightarrow \mathbf{b}(2; 7)$, $B(2; 7)$. $\overrightarrow{KD}(-1; 2)$, $\mathbf{d}(0; 11)$, $D(0; 11)$.

2422. $a = -\frac{2\sin\frac{39+13}{2} \cdot \cos\frac{39-13}{2}}{\sin 26° \cdot \cos 13°} = -2$; $b = \sqrt{10^2 \cdot 10^{\lg 25}} = \sqrt{10^2 \cdot 25} = 50$;

$c = (\sqrt{5}+2)^3 - (\sqrt{5}-2)^3$, mert $(\sqrt{5}+2)\cdot(\sqrt{5}-2) = 1$.

$c = 4[(\sqrt{5}+2)^2 + (\sqrt{5}-2)\ (\sqrt{5}-2) + (\sqrt{5}-2)^2] = 4 \cdot 19 = 76$.

$\overrightarrow{AB}(2; 52)$, $\overrightarrow{BC}(1; 26)$. Mivel $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{BC}$, ezért a 3 pont egy egyenesre illeszkedik.

2423. $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{29}$.

2424. *a)* $|\mathbf{a}| = \sqrt{42}$, $\mathbf{a}^0\left(\frac{1}{\sqrt{42}}; \frac{4}{\sqrt{42}}; \frac{5}{\sqrt{42}}\right)$, *b)* $\mathbf{a}^0\left(-\frac{3}{\sqrt{29}}; -\frac{2}{\sqrt{29}}; -\frac{4}{\sqrt{29}}\right)$, *c)* $\mathbf{a}^0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Két vektor skaláris szorzata

2425. Az oldalhossz négyzetének a $\frac{3}{2}$-szerese.

2426. 43,5. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\alpha$ és $\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{bc} \cdot \cos\alpha = \mathbf{a}^2 \Rightarrow |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\alpha = \frac{\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2}{2}$.

2427. Bontsuk fel $\mathbf{a}$-t a $\mathbf{b}$-vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre. A $\mathbf{b}$-vel párhuzamos összetevő $-k\mathbf{b}$.

2428. $\cos(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \cos\alpha = \frac{19\sqrt{43}}{215}$. $(3\mathbf{a} - 5\mathbf{b})(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0$ és $(\mathbf{a} + 4\mathbf{b})(-\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6a^2 - 7ab\cos\alpha - 5b^2 = 0$ és $-a^2 - 3ab\cos\alpha + 4b^2 = 0 \Rightarrow 6\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\left(\frac{a}{b}\right)\cos\alpha - 5 = 0$ és

$-\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{b}\right)\cos\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\sqrt{43}}{5}$; $\cos\alpha = \frac{19\sqrt{43}}{215}$.

2429. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=4\cdot 5\cdot\cos 40^\circ=15{,}32$.

2430. *a)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=24+24=48$; $|\mathbf{a}|=\sqrt{16+9}=5$; $|\mathbf{b}|=10$; $48=5\cdot 10\cdot\cos(\mathbf{a};\mathbf{b})\Rightarrow$ $\Rightarrow\cos(\mathbf{a};\mathbf{b})=0{,}96\Rightarrow(\mathbf{a};\mathbf{b})\sphericalangle=16{,}26^\circ$. *b)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-7$, $(\mathbf{a},\mathbf{b})\sphericalangle=105{,}1^\circ$. *c)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=48$, $(\mathbf{a},\mathbf{b})\sphericalangle=67{,}2^\circ$. *d)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1$, $(\mathbf{a},\mathbf{b})\sphericalangle=88{,}9^\circ$.

2431. *a)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-1+6-35=-30$; *b)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=11$; *c)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=27$; *d)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\sqrt{6}-58$.

2432. *a)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-2+15-28=-15$, $|\mathbf{a}|=\sqrt{1+9+49}=\sqrt{59}$, $|\mathbf{b}|=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$,
$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=-\dfrac{15}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{59}}=-0{,}2911$, $(\mathbf{a},\mathbf{b})\sphericalangle=106{,}9^\circ$. *b)* $30{,}8^\circ$; *c)* $122{,}7^\circ$.

2433. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-6\cdot 12+4y=0\Rightarrow y=18$.

2434. $\overrightarrow{AC}(10;-5)$, $\overrightarrow{AB}(6;75)$, $\overrightarrow{AB}-k\cdot\overrightarrow{AC}(6-10k;7+5k)$, $\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-k\cdot\overrightarrow{AC})=$
$=10(6-10k)-5(7+5k)=0$, $12-20k-7-5k=0\Rightarrow k=\dfrac{1}{5}$.

2435. $\overrightarrow{CA}(9;3)$, $\overrightarrow{CB}(2;-6)$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0\Rightarrow\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$.

2436. $\overrightarrow{AB}(10;12)$, $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}(5;6)$ 90°-os elforgatottja $\overrightarrow{AD_1}(-6;6)$, illetve $\overrightarrow{AD_2}(6;-5)$,
$\overrightarrow{OD_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{OD_1}(-8;9)$, $\overrightarrow{OD_2}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD_2}$, $\overrightarrow{OD_2}(4;-1)$. $\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{BC_2}=\overrightarrow{AD_2}$,
$\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{OC_1}(2;21)$, $\overrightarrow{OC_2}(14;11)$. $C_1(2;21)$, $D_1(-8;9)$, illetve $C_1(14;11)$,
$D_2(4;-1)$.

2437. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-10-2-3z=0\Rightarrow z=-4$.

2438. $\mathbf{a}^2=\mathbf{b}^2=\mathbf{c}^2=p^2+(p+1)^2+p^2(p+1)^2=p^2+(p+1)^2(1+p^2)\Rightarrow|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|$.
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-p^2(p+1)-p(p+1)+(p+1)^2=0\Rightarrow\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=-p(p+1)+p(p+1)^2-p^2(p+1)=0\Rightarrow\mathbf{a}\perp\mathbf{c}$.

2439. *a)* $\overrightarrow{AB}(3;5)$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{34}$, $\overrightarrow{AC}(5;1)$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{26}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=15+5=20$.
$20=\sqrt{34}\cdot\sqrt{26}\cdot\cos\alpha\Rightarrow\alpha=47{,}7^\circ$. Hasonlóan kiszámítható a $\beta=57{,}5^\circ$, $\gamma=74{,}8^\circ$.
b) $\overrightarrow{BA}(-2;-1)$, $\overrightarrow{BC}(1;-2)$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow\gamma=90^\circ$. $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{5}\Rightarrow\alpha=\beta=45^\circ$;
c) $101{,}9^\circ$, $48{,}2^\circ$, $29{,}9^\circ$; *d)* $81{,}9^\circ$, $74{,}1^\circ$, 24°.

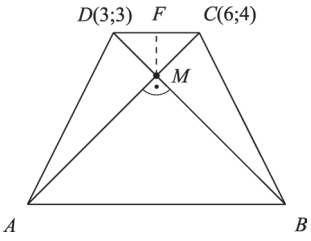
2440. $|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{17}$, $|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{38}$, $|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{19}$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=1$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}=18$.
$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{BA}|}=\dfrac{18}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{38}}=0{,}7082\Rightarrow\alpha=44{,}9^\circ$. $\cos\gamma=\dfrac{-1}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{19}}=$
$=-0{,}0556\Rightarrow\gamma=93{,}2^\circ$, $\beta=41{,}9^\circ$.

2441. Legyen $\mathbf{x}(a;b;c)$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=5a-b+2c=0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}=-2a+3b+c=0$.
$\left.\begin{array}{l}-b+2c=-5a\\3b+c=2a\end{array}\right\}\Rightarrow c=-\dfrac{13}{7}a$, $b=\dfrac{9}{7}a$. $\mathbf{x}\left(a;\dfrac{9}{7}a;-\dfrac{13}{7}a\right)$, illetve $\mathbf{x}(7a;9a;-13a)$, ahol
$a\in\mathbf{R}$.

2442. Legyen $\mathbf{e}(a;b)$, $\mathbf{f}(c;d)$, $|\mathbf{e}|=\sqrt{a^2+b^2}$; $|\mathbf{f}|=\sqrt{c^2+d^2}$. $\mathbf{e}\cdot\mathbf{f}=ac+db$.
$\mathbf{e}\cdot\mathbf{f}=|\mathbf{e}|\cdot|\mathbf{f}|\cdot\cos(e,f)\le|\mathbf{e}|\cdot|\mathbf{f}|$, behelyettesítve: $ac+bd\le\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$.

III

2443.



2443. $ABM\triangle \sim CDM\triangle$ egyenlő szárú derékszögű háromszögek. $F\left(\frac{9}{2};\frac{7}{2}\right)$. $\overrightarrow{FC}\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ 90°-os elforgatottjai $\overrightarrow{FM_1}\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$, $\overrightarrow{FM_2}\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. Ha 0 az origó, $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FM_1}$, illetve $\overrightarrow{OM_2}=$ $=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FM_2}$. Innen $M_1(5;2)$, $M_2(4;5)$. $\overrightarrow{M_1C}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM_1}$ $\overrightarrow{M_1C}(1;2)$, $-3\overrightarrow{M_1C}=\overrightarrow{M_1A}(-3;-6)$; $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1A}$, $\overrightarrow{OA}(2;-4)$, $A_1(2;-4)$, $\overrightarrow{OB_1}(11;-1)$, $B_1(11;-1)$. Hasonlóan M_2-ből $A_2(-2;8)$, $B_2(7;11)$.

2444. $|\mathbf{a}|=10$, $\mathbf{a}^0\left(\frac{8}{10};\frac{6}{10}\right)$, $|\mathbf{a}^0|=1$. Ha $\mathbf{a}^0$ irányszöge α, akkor $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. Legyen $|\mathbf{e}|=1$, irányszöge: $(\alpha\pm 60°)$. $\sin\varphi=\sin(\alpha\pm 60°)=\sin\alpha\cdot\cos 60°\pm\cos\alpha\cdot\sin 60°=$ $=\frac{3\pm 4\sqrt{3}}{10}$, $\cos\varphi=\frac{4\pm 3\sqrt{3}}{10}$. $\mathbf{e}\left(\frac{4\pm 3\sqrt{3}}{10};\frac{3+4\sqrt{3}}{10}\right)$. $\mathbf{b}=k\mathbf{e}$, ahol $k\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

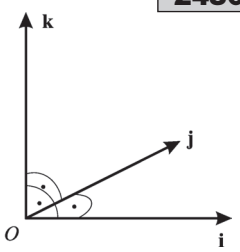
2445. $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$, $\left.\begin{matrix}6=4\alpha+2\beta\\4=\alpha+2\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha=\frac{4}{3}$, $\beta=\frac{1}{3}$. $\alpha\,\mathbf{a}\left(\frac{16}{3};\frac{4}{3}\right)$, $\beta\,\mathbf{b}\left(\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$, $\mathbf{v}=\frac{4}{3}\mathbf{a}+\frac{1}{3}\mathbf{b}$.

2446. $\mathbf{v}=-\frac{4}{3}\mathbf{a}+\frac{5}{6}\mathbf{b}$. **2447.** $\mathbf{v}=\frac{6}{5}\mathbf{a}+\frac{8}{5}\mathbf{b}$.

2448. Legyen $\mathbf{e}(\cos\alpha;\sin\alpha)$ a szögfelezőre illeszkedő egységvektor. $(\mathbf{a},\mathbf{e})\sphericalangle=(\mathbf{b},\mathbf{e})\sphericalangle=\varphi$. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{e}|\cdot\cos\varphi$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}=|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{e}|\cdot\cos\varphi$. Ezekből $\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}}{|\mathbf{a}|\cdot 1}=\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}}{|\mathbf{b}|\cdot 1}$, ahol $|\mathbf{a}|=5$, $|\mathbf{b}|=13$. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}=3\cos\alpha+4\sin\alpha$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}=5\cos\alpha+12\sin\alpha$,
$\frac{3\cos\alpha+4\sin\alpha}{5}=\frac{5\cos\alpha+12\sin\alpha}{13}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{7}{4}$. $\mathbf{e}\parallel\mathbf{v}\Rightarrow\mathbf{v}(4;7)$. A $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$ is kielégíti a feladat feltételeit, ahol $k\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

Két vektor vektoriális szorzata

2450.



2449. A vektoriális szorzat definíciója szerint $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=$ $=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin|(\mathbf{a},\mathbf{b})\sphericalangle|$. Ez a pozitív valós szám annak a parallelogrammának a területe, amelynek oldalai $|\mathbf{a}|$ és $|\mathbf{b}|$ hosszúságúak és a hajlásszögük $\alpha=(\mathbf{a},\mathbf{b})\sphericalangle$.

2450. Alkalmazzuk a vektoriális szorzat definícióját és tekintsük az 2450. ábra jobbrendszerét. Ekkor az ábráról leolvashatjuk a feladat állításainak helyességét!

2451. $\mathbf{a}=\mathbf{a}_1\mathbf{i}+\mathbf{a}_2\mathbf{j}+\mathbf{a}_3\mathbf{k}$ és $\mathbf{b}=\mathbf{b}_1\mathbf{i}+\mathbf{b}_2\mathbf{j}+\mathbf{b}_3\mathbf{k}$. A szorzás elvégzésekor az a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 vektoriális szorzás két (bizonyítható) tulajdonságát használjuk fel.

a) A vektoriális szorzatot úgy szorozhatjuk meg egy számmal, hogy egyik tényezőjét szorozzuk! $\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{d})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})$. (Ebből következik, hogy (-1) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{a})$.
b) A vektoriális szorzás disztributív tulajdonságú, azaz például $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \mathbf{a}\times\mathbf{c} + \mathbf{b}\times\mathbf{c} + + \mathbf{a}\times\mathbf{d} + \mathbf{b}\times\mathbf{d}$. Ekkor $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\,(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_3)\mathbf{k}$, mert $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}$, továbbá $\mathbf{j}\times\mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

III

2452. *a)* $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}) = 2(\mathbf{i}\times\mathbf{i}) + 4(\mathbf{j}\times\mathbf{i}) + 2(\mathbf{k}\times\mathbf{i}) + 3(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) + 6(\mathbf{j}\times\mathbf{j}) + + 3(\mathbf{k}\times\mathbf{j}) - 2(\mathbf{i}\times\mathbf{k}) - 4(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) - 2(\mathbf{k}\times\mathbf{k}) = -7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$; $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{49+16+1} = \sqrt{66}$.
b) $-2\mathbf{j}$; $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = 2$. *c)* $29\mathbf{i} - 22\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{1334}$.

2453. *a)* $t_{ABCD} = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\sin\varphi$, ahol φ az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{BC}$ vektorok által bezárt szög. $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3}$, mert $\overrightarrow{BC}(-1;\,1;\,1)$. $\overrightarrow{AC}(1;\,1;\,1)$, $(\overrightarrow{AC}) = \sqrt{3}$.
A φ szög kiszámítható a koszinusztétellel. $3 = 3 + 4 - 2\cdot 2\sqrt{3}\cos\varphi$, innen $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ és $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $t_{ABCD} = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \sqrt{8}$ egység. *b)* $\sqrt{424}$.

2454. *a)* $t = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sin\varphi$, ahol φ az A csúcsnál fekvő szög. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{24}$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}$; $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{13}$. Ekkor $\cos\varphi = \dfrac{4}{\sqrt{30}}$, a koszinusztétel alkalmazásával, $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{7}{15}}$; $t = \sqrt{14}$. *b)* $\sqrt{11}$.

2455. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})$; $\mathbf{b}\times\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{b},\mathbf{a})$ és $\sin(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -\sin(\mathbf{b},\mathbf{a})$; $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin 0 = \mathbf{0}$.

IV. Trigonometria

Szögek átváltása fokról radiánra és fordítva

2456. *a)* 180°; 90°; 60°; 45°; 22,5°. *b)* 120°; 150; 135°; 240°; 210°.

2457. *a)* 300°; 315°; 36°; 270°; 225°. *b)* $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}296°$; $\approx 143{,}239°$; $\approx 29{,}794°$; $\approx 162{,}72°$; $\approx 6{,}36°$.

2458. *a)* $\approx 114{,}59°$; $\approx 203{,}4°$; $\approx 16{,}33°$; $\approx 83{,}14°$; $\approx 307{,}11°$. *b)* $\approx 185{,}64°$; $\approx 138{,}60°$; $\approx 3129{,}50°$; $\approx 5729{,}58°$; $\approx 42{,}97°$.

2459. *a)* π; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$. *b)* $2 \cdot \pi$; $\frac{3 \cdot \pi}{2}$; $\frac{5 \cdot \pi}{6}$; $\frac{3 \cdot \pi}{4}$; $\frac{2 \cdot \pi}{3}$.

2460. *a)* $\frac{2 \cdot \pi}{9}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{23 \cdot \pi}{36}$; $\frac{4 \cdot \pi}{3}$; $\frac{5 \cdot \pi}{3}$. *b)* $\frac{\pi}{15}$; $\frac{11 \cdot \pi}{36}$; $\frac{59 \cdot \pi}{90} \approx 2{,}6634$; 1,8368.

2461. *a)* $\frac{29 \cdot \pi}{144} \approx 0{,}6327$; 0,7965; 2,0644; 4,1681; 5,5318. *b)* $\approx 0{,}274$; $\approx 1{,}1796$; $\approx 1{,}5435$; $\approx 0{,}8860$; $\approx 0{,}1463$.

2462. 144°; $\approx 22{,}92°$; 220°; $\approx 72{,}48°$; 252°; 114,59°.

2463. $\approx 0{,}2653$; $\approx 1{,}7532$; $\approx 0{,}4296$; $\approx 0{,}2909$; $\frac{5 \cdot \pi}{3} \approx 5{,}2360$.

2464. *a)* $\frac{5 \cdot \pi}{12}$; $\frac{5 \cdot \pi}{36}$; $\frac{4 \cdot \pi}{9}$; $\frac{7 \cdot \pi}{12}$; $\frac{43 \cdot \pi}{36}$. *b)* $\frac{\pi}{5}$; $\frac{\pi}{18}$; $\frac{7 \cdot \pi}{4}$; $\frac{\pi}{36}$; $\frac{7 \cdot \pi}{3}$.

Hegyesszögű trigonometriai alapfeladatok

2465. $\approx 6{,}52$ cm a megadott szöggel szemközti befogó hossza.

2466. $\approx 25{,}2$ cm a megadott szög melletti befogó hossza.

2467. $\approx 4{,}69$ cm; $\approx 11{,}05$ cm a befogók hossza.

2468. ≈ 10 cm; $\approx 45{,}41$ cm a befogók hossza.

2469. $\approx 14{,}06$ cm az átfogó hossza; $\approx 11{,}35$ cm a keresett befogó hossza.

2470. $\approx 23{,}81$ m az átfogó hossza; $\approx 17{,}44$ m a keresett befogó hossza.

2471. $\approx 8{,}75$ dm a másik befogó hossza.

2472. $\approx 12{,}07$ cm a másik befogó hossza.

2473. $\approx 6{,}75$ cm; $\approx 27{,}06$ cm a háromszög ismeretlen oldalainak a hossza.

2474. $\approx 18{,}36$ dm; $\approx 25{,}23$ dm a háromszög ismeretlen oldalainak a hossza.

2475. $\approx 84{,}56$ cm; $\approx 91{,}6$ cm a háromszög ismeretlen oldalainak a hossza.

2476. $\approx 18{,}79$ m; $\approx 61{,}63$ m a háromszög ismeretlen oldalainak a hossza.

2477. 30° az adott befogóval szemközti szög.

2478. $\approx 19{,}47°$ az adott befogóval szemközti szög.

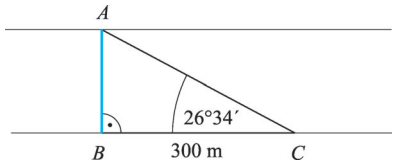
2479. $\approx 65{,}42°$ a keresett hegyesszög nagysága.

2480. $\approx 20{,}67°$ az ismert befogóval szemközti szög.

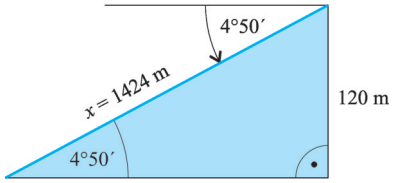
2481. 30°; 60° a háromszög ismeretlen szögei.

2482. $\approx 83{,}62°$ az ismeretlen oldallal szemközti szög, ha az ismeretlen oldal befogó. Ha pedig átfogó, akkor 90° az ismeretlen oldallal szemközti szög.

2503.



2504.



IV

2483. 30°; 60° a háromszög ismeretlen szögei.
2484. ≈ 41,81° az adott befogóval szemközti szög.
2485. ≈ 28,4° a lejárat hajlásszöge a vízszinteshez képest.
2486. ≈ 1,43° az emelkedés szöge.
2487. ≈ 1,49 m magasról érkezik a lejtő.
2488. ≈ 4,43 m a lejtő hossza; ≈ 4,04 m a lejtő vízszintesre eső merőleges vetülete.
2489. ≈ 13,6° szöget zár be a fallal a létra.
2490. ≈ 25 m magas a torony.
2491. ≈ 2,25 m magasra visz a lejtő.
2492. ≈ 7,06 m távol kezdődjön a feljáró.
2493. ≈ 26° a lépcsősor hajlásszöge a vízszinteshez képest, kissé pontosabban ≈ 25,96°
2494. ≈ 10 %-os az emelkedő.
2495. ≈ 6°50′ szöggel hajlik az út a vízszinteshez képest.
2496. ≈ 1°31′ szöget zár be a huzal a vízszintessel.
2497. ≈ 4,30 cm a téglalap ismeretlen oldalának a hossza.
2498. ≈ 13,13 cm, illetve ≈ 5,66 cm a téglalap oldalainak hossza.
2499. ≈ 53 m magas a templomtorony. Mint a fizikából tudjuk, a beesési szög a beesési merőleges és a beeső fénysugár hajlásszöge.
2500. ≈ 19°39′-es szöget zárnak be a napsugarak a talajjal. Itt nem a beesési szöget keressük, hanem annak pótszögét.
2501. ≈ 67,38° a napsugarak beesési szöge a talajhoz képest. Itt a beesési szöget keressük.
2502. ≈ 55 m széles a folyó.
2503. $AB \approx 150$ m a folyó szélessége.
2504. ≈ 1424 m távol van tőlünk légvonalban a vitorlás.
2505. $a \approx 3{,}26$ m; $b \approx 15{,}35$ m; $c \approx 6{,}81$ m; $d \approx 16{,}47$ m a négyszög oldalainak a hossza.
2506. *a)* $x \approx 6{,}37$ cm; $y \approx 10{,}02$ cm; $z \approx 17{,}17$ cm a négyszög ismeretlen oldalhosszai.
b) $x \approx 5{,}17$ cm; $y \approx 6{,}80$ cm a négyszög ismeretlen oldalhosszai; $\beta \approx 106°42'$ az ismeretlen szög nagysága.

Hegyesszög megszerkesztése valamely szögfüggvényének értékéből

2507. Megfelelő derékszögű háromszögeket kell szerkesztenünk. Például az *a)* feladatnál szerkesszünk egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek 1 egység az átfogója és egyik befogója $\frac{1}{2}$ egység! Ekkor az $\frac{1}{2}$ egység hosszúságú befogóval szemközti szög szinusza éppen $\frac{1}{2}$.

A *c)* feladatnál $\sqrt{2}$ hosszúságú szakaszt könnyen szerkesztünk, ha veszünk egy 1 egység szárhosszúságú egyenlő szárú derékszögű háromszöget. A *d)* feladatnál nincsen olyan szög, amelynek szinusza 2 lenne.

2508. Hasonlóan járunk el, mint az előző feladatnál. A *b)* feladatnál szakaszt könnyen harmadolhatunk, ha emlékszünk a párhuzamos szelők tételére. A *c)* feladatnál nincs olyan szög, amelynek koszinusza $\frac{3}{2}$ lenne. A *d)* feladatnál $\frac{\sqrt{3}}{2}$ egység hosszúságú szakaszt könnyen szerkeszthetünk, ha tekintjük az egységnyi oldalhosszúságú szabályos háromszög magasságát.

2509. Hasonlóan járunk el, mint az előző két feladatnál. A *d)* feladatnál $\sqrt{5}$ hosszúságú szakaszt például úgy szerkeszthetünk, hogy egy kör átmérőjének vesszük az 1 + 5 egység hosszúságú szakaszt, majd merőlegest állítunk a két szakasz közös pontjában az átmérőre. E merőleges egy pontban metszi a kört. Ezen pont és az átmérő két végpontja derékszögű háromszöget alkot. Miért? Ezután alkalmazzuk a magasságtételt a derékszögű háromszögre és megkapjuk a $\sqrt{5}$ hosszúságú szakaszt.

2510. Hasonlóan járunk el, mint az előző három feladatnál.

2511. Hasonlóan járunk el, mint az előző négy feladatnál.

Nevezetes hegyesszögek szögfüggvényei

2512. *a)* 2; *b)* $\sqrt{3} - 1$; *c)* 1; *d)* 2 a kifejezések pontos értéke.

2513. *a)* 1; *b)* 8; *c)* 1; *d)* $\sqrt{3}$ a kifejezések pontos értéke.

2514. *a)* 4; *b)* 1; *c)* 3 a kifejezések pontos értéke.

2515. *a)* $\frac{5}{4}$; *b)* $\frac{1}{4}$; *c)* $\frac{3}{2}$; *d)* $\frac{3}{8}$ a kifejezések pontos értéke.

2516. *a)* ; $2 - \sqrt{3}$ *b)* 2 a kifejezések pontos értéke.

2517. *a)* $\frac{\sqrt{6}}{2}$; *b)* $5 - 2 \cdot \sqrt{6}$ a kifejezések pontos értéke.

Hegyesszögű trigonometriai feladatok

Egyenlő szárú háromszögek

2518. $\approx 2{,}8$ cm az egyenlő szárú háromszög alapja.

2519. $\approx 28{,}2°$ a kettőslétra nyílásszöge.

2520. $x \approx 174{,}5$ cm magasan állunk a talajhoz képest.

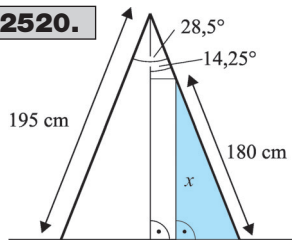
2521. $\approx 14{,}51°$ szöget zár be a fonálinga a két szélső helyzet között.

2522. $\approx 20{,}88$ cm a kúp alapkörének átmérője.

2523. $\approx 26{,}85°$ a kúp nyílásszöge.

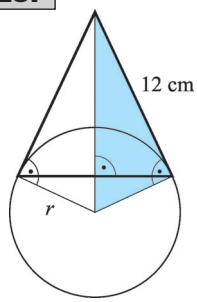
2524. $\approx 9{,}5$ cm az alapkör sugara.

2520.

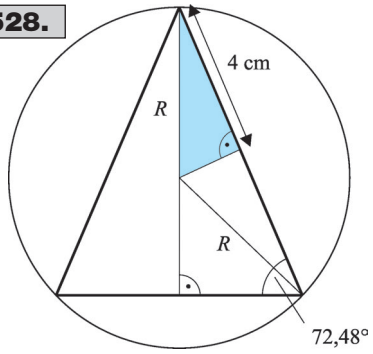


IV

2525.



2528.



2525. $r \approx 9{,}61$ cm a kör sugara.

2526. Az alap és a szár hajlásszöge $\approx 55{,}96°$, míg a szárak hajlásszöge $\approx 68{,}08°$. Vegyük figyelembe az ismert tételt, miszerint a háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást és ez a pont éppen a háromszögbe írható kör középpontja. Vegyük azt a derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója az alap fele, míg a másik befogója a kör sugara.

2527. $r \approx 2{,}62$ cm. Vegyük figyelembe az előző feladat megoldásához való útmutatást.

2528. $R \approx 4{,}2$ cm. Először számítsuk ki a szárak hajlásszögét! Bocsássunk merőleges szakaszt a körülírt kör középpontjából a háromszög egyik szárára! Majd vegyük észre, hogy ezen szög fele szerepel az ábrán megjelölt derékszögű háromszögben. E háromszögre felírt megfelelő szögfüggvény segítségével kiszámíthatjuk a körülírt kör sugarát.

2529. $r \approx 5{,}06$ cm a beírt kör sugara és $R \approx 10{,}8$ cm a körülírt kör sugara. Mint tudjuk a háromszög szögfelezője átmegy a beírt kör középpontján. Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelyiknek egyik befogója az alap fele, másik befogója a beírt kör sugara. Ekkor ezzel a beírt kör sugárral szemközti szög 34°-os az előzőek miatt. Megfelelő szögfüggvénnyel kiszámíthatjuk a beírt kör sugarát ezen derékszögű háromszögből. Tekintsük most azt a másik derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója az alap fele, míg másik befogója az alaphoz tartozó magasság! Ekkor megfelelő szögfüggvényt felírva ezen derékszögű háromszögre, kiszámíthatjuk a derékszögű háromszög átfogóját, ami nem más, mint az eredeti háromszög szára. Ezután tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelyet az előző feladat megoldási útmutatásában jelöltünk meg. Kiszámítjuk ezen derékszögű háromszög megfelelő szögét, ami nem más, mint az eredeti háromszög szárai szögének a fele. Ezután a megfelelő szögfüggvényt alkalmazva a megjelölt háromszögre, kiszámíthatjuk az eredeti háromszög köré írható kör sugarát.

Téglalapok, rombuszok, paralelogrammák

2530. **1. eset:** $\approx 1{,}57$ m a téglalap ismeretlen oldala. Ha az átlók hajlásszögével szemben a téglalap ismeretlen oldala van, akkor húzzunk párhuzamost az átlók metszéspontján át a téglalap adott oldalával!

2. eset: $\approx 13{,}49$ m a téglalap ismeretlen oldala. Ha az átlók hajlásszögével szemben a téglalap ismert oldala van, akkor húzzunk párhuzamost az átlók metszéspontján át a téglalap ismeretlen oldalával!

2531. $\approx 7{,}19$ cm hosszú az átlók hajlásszögével szemközti oldal hossza, míg $\approx 22{,}48$ cm hosszú a téglalap másik oldala. Húzzunk párhuzamost az átlók metszéspontján át a téglalap „másik” oldalával!

2532. $\approx 26{,}19$ m; $\approx 9{,}38$ m a téglalap oldalai. Írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt a két oldalból, mint befogóból álló derékszögű háromszögre! Majd írjuk fel a téglalap területképletét! Ezután oldjuk meg a két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszert!

2533. $\approx 7{,}55$ cm hosszú a rombusz oldala, $\approx 69{,}49°$ és $\approx 110{,}51°$ a rombusz szögei.

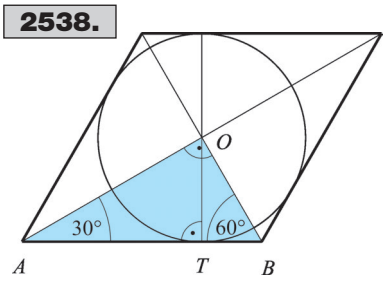
2534. $\approx 30{,}2$ cm hosszú a rombusz oldala, míg $\approx 22{,}63$ cm hosszú a rombusz ismeretlen átlója.

2535. $60°$ és $120°$ a rombusz szögei.

2536. $\approx 34{,}77$ dm a rombusz oldala. Mint tudjuk a rombusz átlói felezik a szögeit. Írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt az átlók által négy derékszögű háromszögre osztott rombusz egyik derékszögű háromszögére. Másrészt az oldal és a kisebbik átló összegéből kapunk egy második egyenletet. Oldjuk meg a két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszert!

2537. $\approx 13{,}64$ cm a rombusz oldalhossza.

2538.



2538. $a = \dfrac{8 \cdot \sqrt{3}}{3} \approx 4{,}62$ cm a rombusz oldala. Vegyük figyelembe, hogy $OT = 2$ cm, majd az ATO derékszögű háromszögre alkalmazzunk egy megfelelő szögfüggvényt. Ennek segítségével kiszámíthatjuk, hogy $AT = 2 \cdot \sqrt{3}$. Majd a BTO derékszögű háromszögre írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt és ebből megkaphatjuk, hogy $BT = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$. Ezután

$a = AT + BT = \dfrac{8 \cdot \sqrt{3}}{3}$.

2539. $\alpha \approx 73{,}74°$ és $\beta \approx 106{,}26°$ a rombusz szögei, $a = 5$ cm a rombusz oldalának hossza, $t = 24$ cm^2 a rombusz területe. $AB = a$. A Pitagorasz-tétel segítségével: $BO = \sqrt{a^2 - 4^2}$.

(1) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{OT}{AO} = \dfrac{2{,}4}{4}$; másrészt (2) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 - 4^2}}{a}$, ezekből $\dfrac{\sqrt{a^2 - 4^2}}{a} = \dfrac{2{,}4}{4}$. (Ezen egyenletet hasonló háromszögek segítségével is indokolhatjuk.) Ebből $a = 5$ cm. Másrészt (1)-ből kaphatjuk az α szöget, ebből pedig a β szöget. A területet a és r segítségével könnyen kaphatjuk.

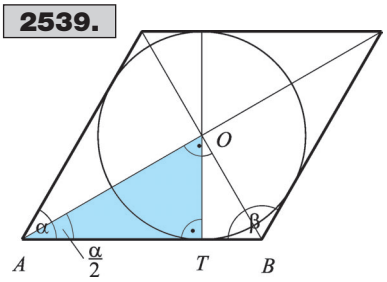
2540. **1. eset:** $e = 40$ m; $f = 42$ m a két átló hossza. $\alpha \approx 87{,}2°$ és $\beta \approx 92{,}8°$. Határozzuk meg a rombusz oldalának hosszát: $a = 29$ m. A rombusz területéből kaphatjuk ez első egyenletet. Majd Pitagorasz tételéből kaphatjuk a második egyenletet. A két egyenletből álló egyenletrendszerből egy másodfokú egyenletet kapunk. A szögeket megfelelő szögfüggvények segítségével kaphatjuk.

A **2. eset** ugyanaz, mint az első, csak megfordítva vannak az átlók hosszai és a szögek.

2541. $\approx 6{,}36$ cm. Húzzuk be a magasságot az ismeretlen oldal egyik végpontjából!

2542. $\approx 1100{,}66$ cm^2 a paralelogramma területe. Alkalmazzuk azt a háromszög területképletet, amely a két oldal és a közbezárt szög segítségével adja meg a háromszög területét. A paralelogramma átlói négy egyenlő területű háromszögre vágják a paralelogrammát. Mint tudjuk egy háromszög súlyvonala két egyenlő területű részre osztja a háromszöget. Miért?

2539.



2543. $t = \dfrac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}$ a paralelogramma területe. Vegyük figyelembe az előző feladat megoldásának útmutatását!

IV

Szabályos sokszögek

2544. $\approx 13{,}86$ cm a szabályos háromszög oldala. Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelyben az átfogó a kör sugara, míg az egyik befogó a szabályos háromszög oldalának a fele!
2545. $\approx 8{,}23$ cm a szabályos ötszög oldala. Nem kell lerajzolni a szabályos ötszöget a körbe írva, hanem elég egy oldalára épített háromszöget lerajzolni, amelynek harmadik csúcspontja a körülírt kör középpontja. Ezen egyenlő szárú háromszög szárai által bezárt szögét megkapjuk, ha 360°-ot elosztjuk a szabályos sokszög oldalszámával. Itt 72°-os középponti szöget kaptunk. Húzzuk be az egyenlő szárú háromszög magasságát, ez felezi a középponti szöget!
2546. $\approx 11{,}52$ cm a kör sugara. Vegyük figyelembe az előző útmutatást!
2547. $\approx 7{,}31$ cm a kör sugara. Vegyük figyelembe a 2545. feladat megoldásához való útmutatást!
2548. $\approx 84{,}3$ cm^2 a szabályos ötszög területe. Először számítsuk ki az ötszög köré írható kör sugarát az előbbi módon: $\approx 5{,}95$ cm. Majd alkalmazzuk a háromszög azon területképletét, amely a háromszög két oldalának és a közbezárt szögüknek a segítségével adja meg a háromszög területét. A szabályos ötszög területe ötször akkora, mint a megfelelő egyenlő szárú háromszög területe.
2549. $\approx 1086{,}4$ cm^2 a szabályos nyolcszög területe. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.
2550. $\approx 492{,}43$ cm^2 a szabályos tízszög területe. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.
2551. $\approx 92{,}97$ cm a kerülete és $\approx 669{,}04$ cm^2 a területe a szabályos tizenegyszögnek. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előzőeket.
2552. $\approx 62{,}22$ cm a kerülete és $\approx 302{,}07$ cm^2 a területe a szabályos tizenháromszögnek. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előzőeket.
2553. $\approx 394{,}04$ cm^2 a területe és $\approx 72{,}89$ cm a kerülete a szabályos hétszögnek. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előzőeket.
2554. $\approx 20{,}61$ cm a beírt és $\approx 21{,}93$ cm a körülírt kör sugara. A beírt kör sugara éppen a megfelelő egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága. Míg az átfogója éppen a körülírt kör sugara.
2555. $\approx 12{,}19$ cm a beírt és $\approx 15{,}07$ cm a körülírt kör sugara.
2556. $\approx 8{,}15$ cm az oldal hossza. Először a háromszög szinuszos területképletéből számítsuk ki a szabályos hétszög köré írható kör sugarát: $\approx 9{,}39$ cm.
2557. $\approx 7{,}43$ cm az oldal hossza. Először a háromszög szinuszos területképletéből számítsuk ki a szabályos tizenkétszög köré írt kör sugarát: $\approx 14{,}35$ cm.
2558. $\approx 43{,}26$ cm a kerülete, $\approx 128{,}73$ cm^2 a területe a szabályos ötszögnek. Először számítsuk ki a szabályos ötszög szögeit: 108°-ot kapunk. Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelynek átfogója az ötszög egyik oldala, egyik befogója az átló fele: 7 cm , és a 7 cm-rel szemközti szög az ötszög szögének a fele: 54°. Ebből kiszámíthatjuk az ötszög oldalhosszát: $\approx 8{,}65$ cm. Ebből kapjuk a kerületet. Míg a szabályos ötszög területét hasonlóan számíthatjuk ki, mint ahogyan az előző feladatok szabályos sokszögeinek a területét számítottuk. Keressünk másik megoldást! Például azt észrevéve, hogy ha az ötszög egyik csúcsából meghúzzuk a két átlót, akkor e két átló három egyenlő nagyságú szögre osztotta fel a szabályos ötszög 108°-os szögét. Miért? Folytassuk!
2559. *a)* $\approx 4{,}34$ cm az oldala, $\approx 30{,}37$ cm a kerülete, $\approx 68{,}41$ cm^2 a területe a szabályos hétoldalú húrsokszögnek.
b) $\approx 4{,}82$ cm az oldala, $\approx 33{,}71$ cm a kerülete, $\approx 84{,}29$ cm^2 a területe a szabályos hétoldalú érintősokszögnek.
2560. *a)* $k_n = 2 \cdot n \cdot r \cdot \sin\frac{180°}{n}$ vagy másképpen $k_n = 2 \cdot n \cdot r \cdot \sin\frac{\pi}{n}$ az r sugarú körbe írt n oldalú szabályos húrsokszög kerülete. $t_n = n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{180°}{n} \cdot \cos\frac{180°}{n}$, illetve $t_n = n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \cos\frac{\pi}{n}$

az r sugarú körbe írt n oldalú szabályos húrsokszög területe. Akik már most ismerik a kétszeres szögek szinuszára vonatkozó azonosságot, azok könnyen megmutathatják, hogy e képletek más formája: $t_n = \frac{n \cdot r^2}{2} \cdot \sin\frac{360°}{n}$, illetve $t_n = \frac{n \cdot r^2}{2} \cdot \sin\frac{2 \cdot \pi}{n}$. *b)* $K_n = 2 \cdot n \cdot r \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$, illetve $K_n = 2 \cdot n \cdot r \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ az r sugarú kör köré írt n oldalú érintősokszög kerülete. $T_n = n \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$, illetve $T_n = n \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ az r sugarú kör köré írt n oldalú érintősokszög területe. *c)* $k_n < k_{kör} < K_n$, vagyis $2 \cdot n \cdot r \cdot \sin\frac{180°}{n} < k_{kör} < 2 \cdot n \cdot r \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$. $t_n < t_{kör} < T_n$, vagyis $\frac{n \cdot r^2}{2} \cdot \sin\frac{360°}{n} < t_{kör} < n \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$. *d)* Ha a kör kerületét ismertnek vesszük, akkor egy becslést kaphatunk π-re, az előző eredményeket felhasználva. $2 \cdot n \cdot r \cdot \sin\frac{180°}{n} < k_{kör} < 2 \cdot n \cdot r \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$, vagyis $2 \cdot n \cdot r \cdot \sin\frac{180°}{n} < 2 \cdot r \cdot \pi < 2 \cdot n \cdot r \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$. Ebből $n \cdot \sin\frac{180°}{n} < \pi < n \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$. Ha ide behelyettesítjük a feladatban javasolt $n = 180$-at, akkor azt kapjuk, hogy $180 \cdot \sin 1 < \pi < 180 \cdot \operatorname{tg} 1$ (itt az 1 radiánban van), ebből $3{,}141\,43 < \pi < 3{,}141\,92$ becslést kaphatjuk. Amúgy $\pi = 3{,}141\,592\,65...$ irracionális szám.

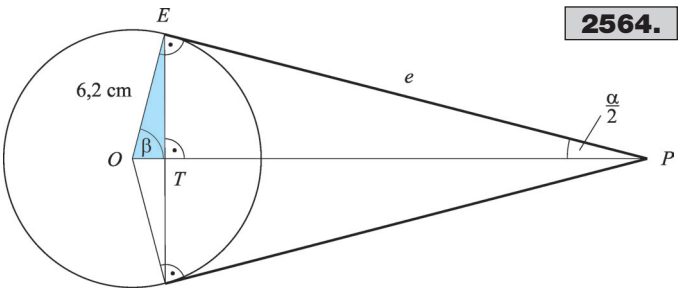
2561. $T_{gyűrű} = \pi \cdot T_n \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}{n}$ a körgyűrű területe. Vegyük észre, hogy $T_{gyűrű} = T_{kör} - t_{kör}$, ha alkalmazzuk Pitagorasz tételét, akkor kaphatjuk, hogy $T_{gyűrű} = \frac{a^2}{4} \cdot \pi$, ahol a azon szabályos n-szög oldalának hossza, amely köré írt kör területe $T_{kör}$, míg a beírt körének területe $t_{kör}$.

Körök érintői, körívek, körcikkek, körszeletek, húrok

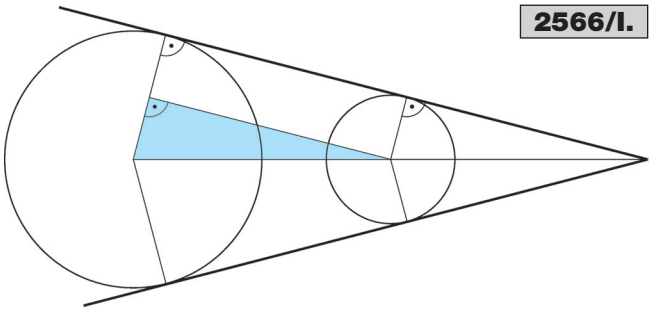
2562. $\approx 0{,}42$ m a lámpa átmérője. A 6,5 m távolság legyen egy megfelelő derékszögű háromszög átfogója. Míg a gömb sugara legyen ezen derékszögű háromszög egyik befogója, amellyel szemközti szög fele akkora, mint a megadott szög.

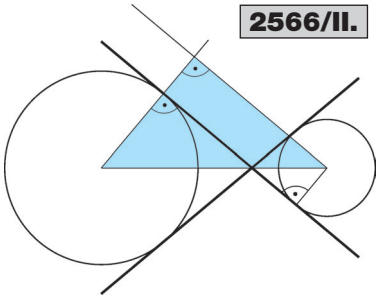
2563. $\approx 3462{,}7$ km a Hold átmérője. (Ez csak egy becslés, a Hold átmérője pontosabban kb. ≈ 3476 km.) Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2564. $\approx 54{,}98°$ az érintők hajlásszöge és $\approx 11{,}92$ cm az érintőszakaszok hossza. Az ETO háromszögben $ET = 5{,}5$ cm, megfelelő szögfüggvényt felírva megkapjuk a β szöget: $\beta \approx 62{,}51°$.



IV


2566/I.


2566/II.

Ebből kaphatjuk az $\frac{\alpha}{2}$ szöget, ebből pedig az $\alpha \approx 54{,}98°$ szöget. Például az ETP háromszögre megfelelő szögfüggvényt felírva kapjuk, hogy $e \approx 11{,}92$ cm.

2565. $\approx 45{,}2$ cm a P pont távolsága a kör középpontjától, $\approx 42{,}63$ cm az érintőszakasz hossza, $\approx 28{,}3$ cm az érintési pontok távolsága. Hasonló ábrát készítve, mint az előző feladatnál, szögfüggvények segítségével megoldhatjuk a feladatot.

2566. *a)* $\approx 19{,}19°$ a külső érintők hajlásszöge. Tekintsük 2566/I. ábrán megjelölt derékszögű háromszöget, amelynek egyik megfelelő hegyesszöge éppen a külső érintők hajlásszögének a fele. *b)* $\approx 75{,}34°$ a belső érintők hajlásszöge. Tekintsük a 2566/II. ábrán megjelölt derékszögű háromszöget!

2567. $\approx 39{,}22°$ az érintők hajlásszöge. Mutassuk meg, hogy $\varepsilon = \beta + \gamma$ (β és γ az érintők közös átmérővel bezárt szöge!) Megfelelő derékszögű háromszögekre felírt szögfüggvényekből könnyen kaphatjuk β, illetve γ értékeit. $\beta \approx 16{,}6°$ és $\gamma \approx 22{,}62°$.

2568. $h \approx 12{,}72$ cm a húr hossza.

2569. $\approx 7{,}25$ m a kör sugara. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2570. $\approx 109{,}27°$ a keresett középponti szög. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

2571. ≈ 8 cm. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előzőeket.

2572. $\approx 44{,}05°$ a keresett középponti szög.

2573. $\approx 40{,}23°$ a keresett kerületi szög. Használjuk fel a kerületi és középponti szögek tételét.

2574. $\approx 29{,}2$ cm a húr hossza. Használjuk fel a kerületi és középponti szögek tételét.

2575. $\approx 4{,}56$ cm a körülírt kör sugara.

2576. $\approx 41{,}54°$ a keresett kerületi szög nagysága.

2577. $\approx 3{,}875$ m a kör sugara.

2578. $\approx 232{,}04$ m a keresett húr hossza. Először az ívhossz képletének segítségével számítsuk ki a kör sugarát: $\approx 204{,}73$ m.

2579. $\approx 21{,}64$ dm a húr hossza. Először az ívhossz képletének segítségével számítsuk ki a húrhoz tartozó középponti szöget: $\approx 121{,}52°$.

2580. $\approx 10{,}04$ m a húr hossza. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2581. $\approx 1{,}94$ m^2 a körszelet területe. Vegyük észre, hogy a körszelet területét megkapjuk, hogy ha a megfelelő körcikk területéből kivonjuk a megfelelő háromszög területét. A körcikk területe: $\approx 9{,}88$ m^2, míg a háromszög területe: $\approx 7{,}94$ m^2.

2582. $\approx 47{,}9$ cm^2 a körszelet területe. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot. A középponti szög nagysága $\approx 77{,}36°$, a körcikk területe $\approx 172{,}82$ cm^2, a háromszög területe $\approx 124{,}9$ cm^2.

2583. $\approx 77{,}4$ cm^2 a körszelet területe. A kör sugara $\approx 13{,}42$ cm, a húr hossza $\approx 21{,}25$ cm, a körcikk területe $\approx 164{,}52$ cm^2, a háromszög területe $\approx 87{,}12$ cm^2.

2584. $\approx 64{,}21$ cm^2 az egyik körszelet területe és $\approx 642{,}65$ cm^2 a másik körszelet területe. A húrhoz pontosan 90°-os középponti szög tartozik.

2585. $\approx 8{,}4\%$ a kisebbik körszelet területe a körlemez területének. Először számítsuk ki a kisebbik körszelethez tartozó középponti szög felét, ebből kapjuk a középponti szöget. Majd határozzuk meg a megfelelő háromszög területét: $\approx 161{,}85\ \text{cm}^2$. A körcikk területe $\approx 247{,}46\ \text{cm}^2$. Ezekből kapjuk a körszelet területét: $\approx 85{,}61\ \text{cm}^2$. Ebből és a kör területéből kaphatjuk a megfelelő százalékos eredményt.

Trapézok

IV

2586. $\approx 36{,}6$ cm a trapéz másik alapja, míg $\approx 21{,}97$ cm a trapéz másik szára. Húzzuk meg a trapéz magasságát a kisebbik alap azon csúcsából, amelyiknél a tompaszög van.
2587. $\approx 3{,}81$ cm hosszú a trapéz derékszögű szára, $\approx 3{,}81$ cm a trapéz merőleges szára, illetve $\approx 5{,}59$ cm hosszú a trapéz másik szára, $\approx 39{,}43\ \text{cm}^2$ a trapéz területe. Hasonlóan indulunk el, mint az előző feladatnál. A derékszögű szár meghatározása után – mivel ez éppen a trapéz magassága –, felírhatjuk a trapéz területének képletét.
2588. $\approx 12{,}77$ cm a másik szár hossza és $\approx 8{,}07$ cm a másik alap hossza. Hasonlóan indulhatunk el, mint az előző két feladatnál.
2589. $\approx 21{,}51$ cm a trapéz másik szára, $\approx 20{,}85$ cm a trapéz másik szárának hossza, $\approx 431{,}3\ \text{cm}^2$ a trapéz területe. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző három feladatot.
2590. $\approx 8{,}32$ cm a trapéz hosszabbik alapja, $\approx 2{,}33$ cm a trapéz rövidebbik alapja, $\approx 9{,}98$ cm az egyik szár, $\approx 7{,}984$ cm a trapéz másik szára. Legyen a a hosszabbik alap, míg c a rövidebbik alap hossza, $m = d$ a trapéz magassága, illetve a merőleges szár hossza, b a másik szárának a hossza. A trapéz területképletét felírva és 2-vel szorozva kapjuk, hogy (1) $85 = (a + c) \cdot m$. Másrészt a rövidebbik alap másik végpontjából is meghúzva a magasságot kapunk egy derékszögű háromszöget, amelyből $m = b \cdot \sin 53{,}13°$, azaz (2) $m \approx 0{,}8 \cdot b$. Pitagorasz tételét felírva kapjuk, hogy (3) $(a - c)^2 + m^2 = b^2$. Legyen a rövidebbik átló hossza e. A feltétel szerint $e = a$. Ismét Pitagorasz tételét alkalmazva kapjuk, hogy $m^2 + c^2 = e^2$, illetve az előzőt figyelembe véve (4) $m^2 + c^2 = a^2$. A (2) és a (4) egyenletekből, most már egyenlőségjeleket használva a közelítő egyenlőségeknél is, kapjuk, hogy (5) $a - c = 0{,}6 \cdot b$. Az (1) és (2) egyenletekből kaphatjuk, hogy (6) $106{,}25 = (a + c) \cdot b$. Az (5) és a (6) egyenletekből kaphatjuk, hogy (7) $a^2 - c^2 = 63{,}75$. Ámde a (4) egyenletből következik, hogy $a^2 - c^2 = m^2$, használjuk fel a (2) egyenletet: (8) $a^2 - c^2 = 0{,}64 \cdot b^2$. Ezt összevetve a (7) egyenlettel, kapjuk, hogy: $b \approx 9{,}98$ cm. Majd (2)-ből kapjuk $m = d$-t. Tekintsük a b alapú és a szárhosszúságú egyenlő szárú háromszöget, amelynek az alapon fekvő szöge az adott 53,13°-os szög. Ebben egy megfelelő szögfüggvényt alkalmazva megkapjuk az a hosszúságot. Majd a (8) egyenletből kapjuk c-t.
2591. $\approx 66{,}04°$, illetve $\approx 113{,}96°$ a szimmetrikus trapéz szögei. Húzzuk be a rövidebbik alap végpontjainál a két magasságot!
2592. $\approx 63{,}43°$, illetve $\approx 116{,}57°$ a szimmetrikus trapéz szögei. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.
2593. $\approx 30{,}96°$ a töltés oldalának a hajlásszöge a vízszinteshez képest.
2594. **1. eset:** $\approx 7{,}04$ m a másik alap hossza. Az 1. esetben a trapéz nagyobbik alapja az adott 24 m-es alap. **2. eset:** $\approx 40{,}96$ m másik alap hossza. A 2. esetben a trapéz rövidebbik alapja az adott 24 m hosszú alap.
2595. **1. eset:** $\approx 8{,}13$ cm a másik alap hossza. **2. eset:** $\approx 51{,}86$ cm a másik alap hossza. Az első esetben a hosszabbik alap az adott alap, míg a második esetben a rövidebbik alap az adott alap.
2596. $\approx 89{,}44$ m a szár hossza, 110 m a másik alapja, $\approx 63{,}43°$ az egyik szöge, míg $\approx 116{,}57°$ a másik szöge. Húzzuk be a rövidebbik alap végpontjainál a magasságokat és keressünk megfelelő derékszögű háromszögeket.
2597. $\approx 85{,}55\ \text{cm}^2$ a trapéz területe, $\approx 19{,}46°$ az átló alappal bezárt szöge.
2598. $\approx 33{,}25$ cm a hosszabbik alap hossza, $\approx 14{,}75$ cm a rövidebbik alap hossza, $\approx 20{,}24$ cm a szárak hossza.

2599. **1. eset:** Ha az egyenlő szárú trapéz szimmetrikus trapéz. ≈ 28,4 cm a hosszabbik alap, ≈ 13,6 cm a rövidebbik alap, ≈ 14,1 cm a szárak hossza.
2. eset: Ha az egyenlő szárú trapéz paralelogramma. 21 cm a trapéz alapjainak hossza, ≈ 14,1 cm a trapéz szárainak hossza.
2600. ≈ 19,79° a félkúpszög. Tekintsük a csonkakúp tengelyét tartalmazó síkot, amely szimmetrikus trapézt vág ki a csonkakúpból! A trapéz rövidebbik alapjának végpontjaiból húzzuk meg a trapéz magasságait! Tekintsük az egyik megfelelő derékszögű háromszöget! Ennek egyik hegyesszöge éppen a félkúpszög.

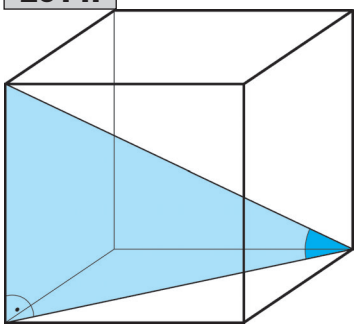
IV

2601. ≈ 52,9 %-kal nagyobb az alaplap sugara, mint a fedőlapé. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.
2602. ≈ 91,4 cm a másik alap hossza, ≈ 3994,6 cm^2 a trapéz területe.
2603. $R \cdot \sqrt{3}$ a trapéz negyedik oldalának hossza, 75°, illetve 105° a trapéz szögei.Vegyük észre, hogy a trapéz rövidebbik alapjának két végpontja és a körülírt kör középpontja szabályos háromszöget alkot. Másrészt a trapéz szárának két végpontja és a kör középpontja által alkotott egyenlő szárú háromszögnek húzzuk meg a trapéz szárához, mint alaphoz tartozó magasságát. Ekkor meghatározhatjuk, a trapéz szárához tartozó középponti szög felét, illetve a középponti szöget. 90°-os ez a középponti szög. Ezután meghatározhatjuk a trapéz hosszabb alapjához tartozó középponti szöget: 120°. Innen már könnyen kaphatjuk a trapéz szögeit.
2604. ≈ 53,13° illetve ≈ 126,87° a trapéz szögei, 32 egység a hosszabbik alap hossza, 20 egység a trapéz szára. Használjuk fel azt az egyszerű tételt, miszerint egy körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak. Ezt alkalmazva kapjuk, hogy a szár hossza egyenlő az alapok összegének a felével. Húzzuk be szokás szerint a rövidebb alap végpontjaiból a trapéz magasságát. Az egyik kapott derékszögű háromszögre írjuk fel Pitagorasz tételét! Ebből kaphatjuk a hosszabbik alap hosszát, majd a szár hosszát számíthatjuk ki. Szögfüggvénnyel kaphatjuk a trapéz kisebbik szögét.
2605. ≈ 7,78 cm a trapéz rövidebbik alapja, ≈ 8,02 cm a trapéz másik szára. A trapéz rövidebbik alapjának két végpontjaiból húzzuk meg a trapéz magasságát! Kaptunk két derékszögű háromszöget, amelyekből könnyen meghatározhatjuk a keresett oldalakat.
2606. ≈ 23318,4 m^2 a trapéz területe. Húzzuk be a rövidebbik alap két végpontjából a trapéz magasságát!
2607. **1. eset:** Ha a 42 cm-es szár mellett van a 73,6°-os szög. ≈ 67,37 cm a trapéz másik alapja, ≈ 49,71 cm a trapéz másik szára, ≈ 1889 cm^2 a trapéz területe.
2. eset: Ha a trapéz 42 cm-es szára mellett az 54,15°-os szög van. ≈ 61,02 cm a trapéz másik alapja, ≈ 35,48 cm a trapéz másik szára, ≈ 1487,9 cm^2 a trapéz területe.
2608. **1. eset:** Ha a 81,2 cm-es szár mellett a 48,6°-os szög van. ≈ 153,21 cm a másik alap, ≈ 86,14 cm a másik szár, ≈ 5841,57 cm^2 a trapéz területe.
2. eset: Ha a 81,2 cm-es szár mellett a 45°-os szög van. ≈ 146,64 cm a másik alap, ≈ 76,55 cm a másik szár, ≈ 5318,24 cm^2 a trapéz területe.
2609. ≈ 24,63 cm az ismeretlen oldal hossza, ≈ 76,31°, illetve ≈ 103,69° a trapéz szögei.
2610. ≈ 46,7 cm, illetve ≈ 49,03 cm a trapéz szárai.
2611. ≈ 71,04°, illetve ≈ 35,76° a trapéz hegyesszögei, ≈ 108,96°, illetve ≈ 144,24° a trapéz másik két szöge, ≈ 1908,36 m^2 a trapéz területe.
2612. ≈ 1637,35 cm^2 a trapéz területe. Vegyük észre, hogy a trapéz kisebbik alapja éppen középvonal a kialakuló nagy háromszögben. Ezért a háromszög középvonalára vonatkozó tételből kapjuk, hogy hossza fele az 58 cm-es alapnak. A két alap között állítsunk fel egy egyenletet, amelyből meghatározhatjuk a magasságot. Ezután kaphatjuk a területet.
2613. ≈ 75,52°, ≈ 104,48° , ≈ 28,96°, ≈ 151,04° a trapéz szögei. Húzzuk be a trapéz magasságát a rövidebbik oldal két végpontjából! Írjunk fel két Pitagorasz-tételt a keletkező két derékszögű háromszögre. Majd alkalmazzunk megfelelő szögfüggvényt a derékszögű háromszögekre!

Térelemek hajlásszöge

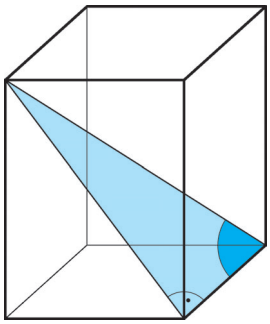
2614. ≈ 35,26° a testátló hajlásszöge az oldallapokkal.
2615. *a)* ≈ 74,24° a testátló hajlásszöge egy szomszédos alapéllel (2615/I.). *b)* ≈ 22,58° a testátló hajlásszöge egy szomszédos oldaléllel (2615/II.). *c)* ≈ 67,41° a testátló hajlásszöge az alaplappal (2615/III.). *d)* ≈ 15,76° a testátló hajlásszöge az oldallappal (2615/IV.).
2616. *a)* ≈ 74,98°-os szöget zár be a testátló a 3 cm-es éllel, ≈ 64,41°-os szöget zár be a testátló az 5 cm-es éllel, ≈ 30,25°-os szöget zár be a testátló a 10 cm-es éllel. *b)* ≈ 59,75°-os szöget zár be a testátló a 3 cm × 5 cm-es oldallappal, ≈ 15,02°-os szöget zár be a testátló az 5 cm × 10 cm-es oldallappal, ≈ 25,59°-os szöget zár be a testátló a 3 cm × 10 cm-es oldallappal.
2617. ≈ 8,81 cm a gúla magassága.
2618. *a)* ≈ 40° az oldalél és az alaplap hajlásszöge. Tekintsük az előző feladat útmutatását! *b)* ≈ 49,9° az oldallap és az alaplap hajlásszöge. Tekintsük a következő ábrát!
2619. *a)* ≈ 53,28° az oldalélnek az alaplappal bezárt szöge. Először számítsuk ki a felszínből egy oldallap területét, ez 105 cm^2, majd számítsuk ki az oldallap alapélhez tartozó magasságát, ez 15 cm. Ezután Pitagorasz tételének segítségével kiszámíthatjuk a gúla magasságát, ez ≈ 13,27 cm. *b)* ≈ 62,18° az oldallap alaplappal bezárt szöge.

2614.

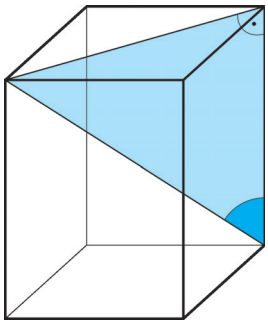


IV

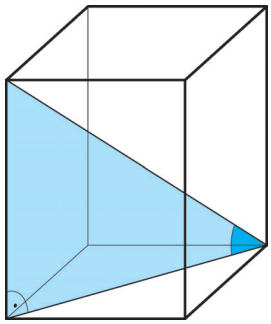
2615/I.



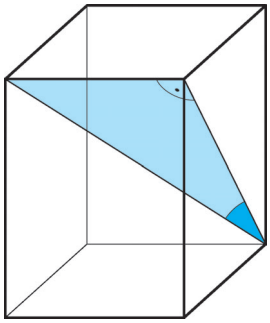
2615/II.



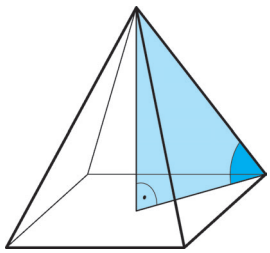
2615/III.



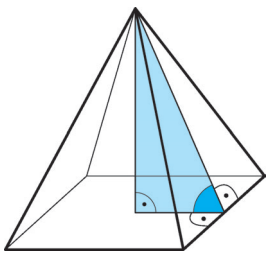
2615/IV.



2617.

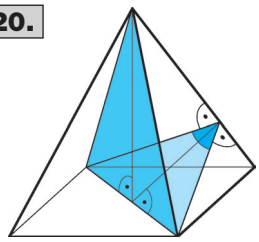


2618.

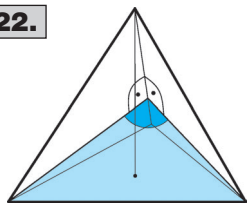


IV

2620.



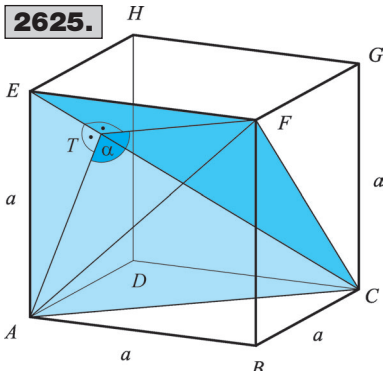
2622.



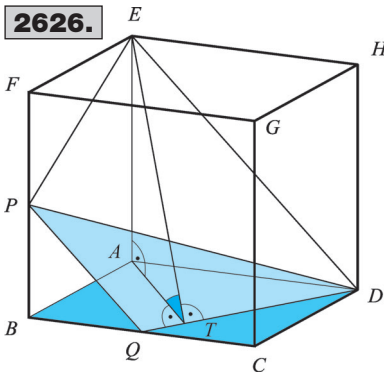
2620. *a)* ≈ 69,63° az alapél szomszédos oldaléllel bezárt szöge. *b)* ≈ 68,20° az oldallap alaplappal bezárt szöge. *c)* ≈ 60,50° az oldalél alaplappal bezárt szöge. *d)* ≈ 48,96° két szomszédos oldallap hajlásszöge. A korábban meghatározott oldallapmagasságból, amely az alapélhez tartozik, Pitagorasz tételének segítségével meghatározhatjuk a gúla oldalélének hosszát: ≈ 11,49 cm, míg az előző oldallapmagasság ≈ 10,77 cm. Írjuk fel kétféleképpen az oldallap területét, egyrészt az alapélhez tartozó oldallapmagassággal, másrészt az oldallap szárához, azaz a gúla oldaléléhez tartozó oldalélmagassággal! Ebből meghatározhatjuk az oldalélhez tartozó oldallapmagasságot, ez ≈ 7,50 cm. Ezen két megfelelő oldalélhez tartozó oldalélmagasság által bezárt szög éppen a két oldallap hajlásszöge, amelyet a következő ábrán jelöltünk meg. A továbbiakban húzzuk be ezen egyenlő szárú háromszög magasságát, amely felezi a keresett szöget. A kapott egybevágó derékszögű háromszögek bármelyikéből meghatározhatjuk a keresett szöget.

2621. ≈ 70,53° a szabályos tetraéder két oldallapjának hajlásszöge. Vegyük figyelembe, hogy a magasság talppontja éppen az alaplap súlypontja. Másrészt ismert tétel szerint a háromszög súlypontja 2 : 1 arányban osztja fel a súlyvonalakat úgy, hogy az oldalhoz közelebbi rész a kisebb. Egyszerűbb megoldás felé indulhatunk, ha meghúzzuk két oldallap magasságát.

2625.



2626.



2622. *a)* ≈ 74,66° az alapél szomszédos oldaléllel bezárt szöge. *b)* ≈ 80,89° az alaplap és egy oldallap hajlásszöge. *c)* ≈ 72,22° az oldalél és az alaplap hajlásszöge. *d)* ≈ 62,41° két oldallap hajlásszöge. Hasonló módon oldhatjuk meg, mint a 2620. *d)* feladatot.

2623. ≈ 63,61° az oldallapnak az alaplappal bezárt szöge.

2624. *a)* ≈ 73,64° az alapél szomszédos oldaléllel bezárt szöge. *b)* ≈ 55,71° az oldalél alaplappal bezárt szöge. *c)* ≈ 59,44° az alaplap oldallappal bezárt szöge. *d)* ≈ 129,03° két szomszédos oldallap hajlásszöge.

2625. $\alpha = 120°$. Mutassuk meg, hogy az ACE háromszög egybevágó a CEF háromszöggel. Ebből következik, hogy az A-ból, illetve az F-ből induló magasságaik talppontja egybeesik.

$AT = FT = x$. Írjuk fel az ACE háromszög területét kétféleképpen! Ebből megkaphatjuk, hogy: $x = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Tekintsük az ATF egyenlő szárú háromszöget és húzzuk meg T-ből ezen háromszög AF alapjához tartozó magasságát! Ez felezi a keresett szöget. Kapunk két egybevágó derékszögű háromszöget. Az egyikre felírt megfelelő szögfüggvényből megkaphatjuk a keresett szög felét, s így a keresett szöget is.

2626. ≈ 48,19° a két sík hajlásszöge. A DPQ sík az ED szakaszban metszi az $ADHE$ oldallapot, míg az $ABFE$ oldallapot a PE szakaszban metszi. $PQDE$ négyszög egy

szimmetrikus trapéz. Miért? Az A-ból és E-ből a QD-re bocsátott merőlegesek talppontja azonos: a T pont. Miért? Így az ATE szög az $ABCD$ és a DPQ síkok hajlásszöge. Az ATD háromszög hasonló a QCD háromszöghöz. Miért? Mivel e két háromszög hasonló, ezért megfelelő oldalaik aránya egyenlő. Azaz $\frac{AT}{AD} = \frac{DC}{DQ}$, ebből kaphatjuk, hogy $AT = \frac{2 \cdot a}{\sqrt{5}}$, ahol a a kocka élének hossza, persze előbb kiszámítjuk a DQ hosszát a kocka élével kifejezve. Másrészt $\operatorname{tg} ATE\sphericalangle = \frac{AE}{AT} = = \frac{\sqrt{5}}{2}$; ebből kaphatjuk a keresett szöget. $ATE\sphericalangle \approx 48{,}19°$.

IV

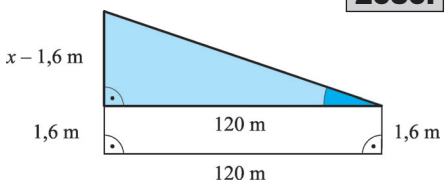
Vegyes, illetve összetettebb hegyesszögű trigonometriai feladatok

Vegyes feladatok

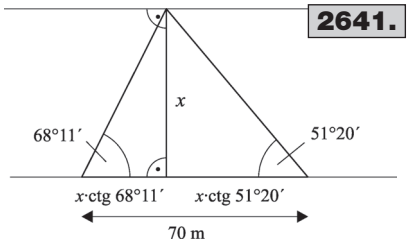
2627. $\approx +32{,}2$ m-rel van magasabban a végpont, mint a kiindulási pont.
2628. $\approx 454{,}7$ m az út valódi hossza.
2629. $\approx 605{,}3$ m a tereppontok közötti út hossza és $\approx 7{,}59°$ az út emelkedési szöge.
2630. ≈ 282 m az út valódi hossza.
2631. $\approx 201{,}2$ m az ABC út hossza, $\approx 9{,}46°$ az AB út hajlásszöge, $\approx 4{,}09°$ a BC út hajlásszöge.
2632. 51 N az eredő erő nagysága, $\approx 61°55'$-os szöget zár be az eredő erő iránya a 24 N-os erő irányával.
2633. $\approx 3°\,24'$ a menetemelkedés szöge. Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója a csavarmenet kerületének hossza (középkerülete), míg másik befogója a menetemelkedés, és a menetemelkedéssel szemközti hegyesszöget keressük.
2634. $\approx 4{,}94$ mm a menetemelkedés. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.
2635. $\approx 3°\,46'$ a menetemelkedés szöge.
2636. ≈ 32 m az épület magassága.
2637. ≈ 80 m messze van a két épület egymástól. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.
2638. *a)* $\approx 26{,}57°$, illetve $\approx 18{,}43°$ a keresett két szög. *b)* $\approx 18°\,26'$, $\approx 15°15'$, illetve $\approx 11°19'$ a keresett három szög.
2639. *a)* $\approx 41{,}42$ cm, illetve $\approx 58{,}58$ cm a keresett két hosszúság. *b)* $\approx 26{,}79$ cm, $\approx 30{,}95$ cm, illetve $\approx 42{,}26$ cm a keresett három hosszúság.
2640. $\approx 343{,}92 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Győr középpontjának sebessége a Föld tengelye körüli forgásban. Először számítsuk ki, hogy mekkora sugarú körpályán kering a város, ez $\approx 4716{,}12$ km. Majd alkalmazzuk az itt érvényes sebesség $= \frac{\text{út}}{\text{idő}}$ összefüggést.
2641. $\approx 58{,}3$ m széles a folyó. Fejezzük ki x-szel a 70 m-es szakasz két rész szakaszát, ezeket adjuk össze, 70 m-t kapunk és ebből az egyenletből kiszámíthatjuk x-et.

$$x = \frac{70}{\operatorname{ctg} 68'11'' + \operatorname{ctg} 51°20'}, \quad x \approx 58{,}3 \text{ m}.$$

2636.



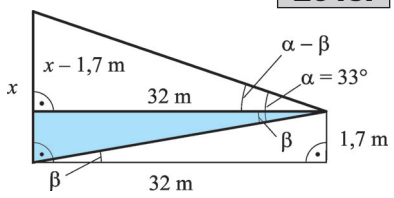
2641.



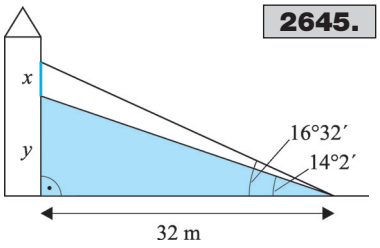
IV

Tornyok, hegycsúcsok és egyéb magasan levő tárgyak

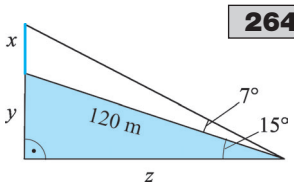
2643.



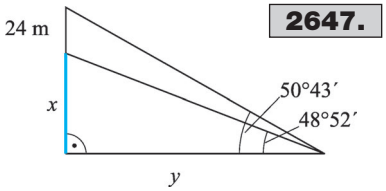
2645.



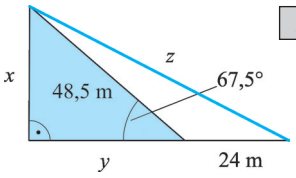
2646.



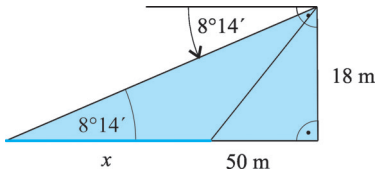
2647.



2648.



2649.



2642. ≈ 220 m magas a toronyantenna.

2643. ≈ 20,14 m magas a nyárfa. Először számítsuk ki a β szöget, ez ≈ 3,041°. Ebből $\alpha - \beta = 33° - 3{,}041° \approx 29{,}959°$. Majd számítsuk ki az $x - 1{,}7$ m-t, és ebből kapjuk, hogy $x \approx 20$ m. $x - 1{,}7 = 32 \cdot \operatorname{tg} 29{,}959 \Rightarrow \approx 20{,}14$ m.

2644. ≈ 33 m magas a markotabödögei templomtorony. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2645. $x \approx 1{,}5$ m hosszú az ablak. Először számítsuk ki y értékét, ez ≈ 8 m. Majd az $x + y$ befogójú derékszögre felírva egy megfelelő szögfüggvényt, ebből megkaphatjuk x értékét.

2646. $x \approx 16$ m magas a kápolna. Először számítsuk ki az y értékét, ez ≈ 31,06 m. Majd számítsuk ki z értékét, ez ≈ 115,91 m. (Persze a sorrend fordított is lehet.) Ezután írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt az $x + y$ befogójú derékszögű háromszögre, ebből megkaphatjuk x-et, vagyis a kápolna magasságát.

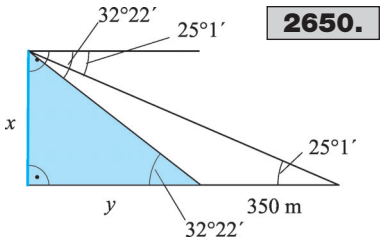
2647. $x \approx 354{,}5$ m magasan van a hegytető a völgy fölött. Írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt az x és y befogójú derékszögű háromszögre, majd írjunk fel egy hasonló egyenletet, az $x + 24$ m és y befogójú derékszögű háromszögre. Ekkor két egyenletünk van két ismeretlennel. Ha elosztjuk egymással a két egyenlet megfelelő oldalait, akkor y kiesik, s így marad x-re egy törtes elsőfokú egyenlet, amelyet könnyen megoldhatunk. Így kaphatjuk, hogy $x \approx 354{,}5$ m.

2648. $z \approx 61{,}8$ m hosszú drótkötélre van szükség. Számítsuk ki x-et egy megfelelő szögfüggvényt alkalmazva, az x befogójú és 48,5 m átfogójú derékszögű háromszögre. Kapjuk, hogy $x \approx 44{,}81$ m. Majd számítsuk ki az y értékét, kapjuk, hogy $y \approx 18{,}56$ m. (Fordított sorrendben is dolgozhatunk.) Majd Pitagorasz tételének segítségével kiszámíthatjuk z-t, azaz a drótkötél hosszát.

2649. $x \approx 74{,}4$ m széles a folyó. Alkalmazzunk egy megfelelő szögfüggvényt a 18 m, illetve az $x + 50$ m hosszú befogókkal rendelkező derékszögű háromszögre, ebből kiszámíthatjuk x-et, vagyis a folyó szélességét.

2650. $x \approx 420$ m magasan van a hegycsúcs a folyó felett. Az x és y befogójú derékszögű háromszögre írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt, majd ugyanígy írjunk fel egy ugyanolyan szögfüggvényt az x és $y + 350$ m befogójú

2650.



derékszögű háromszögre. A kapott két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszert oldjuk meg és megkapjuk x értékét. Az egyenletrendszer megoldását például úgy is elvégezhetjük, hogy elosztjuk a két egyenlet megfelelő oldalait egymással, majd ekkor x kiesik és y-ra kapunk egy egyismeretlenes egyenletet. Ebből meghatározzuk y-t, majd ezt visszahelyettesítjük az eredeti két egyenlet valamelyikébe, és ebből kifejezhetjük x-et.

$\frac{x}{y} = \text{tg}\, 32°22' \Rightarrow x = y \cdot \text{tg}\, 32°22'$, $\frac{x}{y + 350} = \text{tg}\, 25°1' \Rightarrow$

$\Rightarrow x = (y + 350) \cdot \text{tg}\, 25°1'$, $y \approx 550$ m, $x \approx 420$ m.

2651. $x \approx 82$ m magas az antenna. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2652. $x \approx 27$ m magas a templomtorony. Mindkét derékszögű háromszögre írjunk fel egy-egy megfelelő szögfüggvényt. Ezen egyenletekből külön-külön megkapjuk y, illetve a z értékét. $y \approx 4{,}34$ m és $z \approx 22{,}62$ m. Ezeket összeadva kapjuk a templomtorony x magasságát.

2653. $x \approx 79$ m széles a folyó. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint a 2650., illetve a 2651. feladatot.

2654. $\approx 9{,}86$ m magasan van az első ablak és $\approx 19{,}86$ m magasan a második ablak, $\approx 429{,}2$ m távolságban a tereppont. Készítsünk hasonló ábrát, mint az előző feladatnál, és oldjuk meg hasonlóan a feladatot, mint a 2650., 2651., illetve 2653. feladatot.

2655. $x \approx 134$ m. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint a 2650., 2651., 2653., illetve a 2654. feladatot. Írjunk fel két megfelelő szögfüggvényt az $x - 25$ m és y befogójú derékszögű háromszögre, majd az x és y befogójú derékszögű háromszögre! Ezután oldjuk meg a két egyenletből álló egyenletrendszert például úgy, hogy elosztjuk az egyenletek megfelelő oldalait egymással, ekkor y kiesik és a kapott törtes egyenletből x kifejezhető!

2656. $v \approx 34{,}14 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a hajó sebessége.

Vegyük észre, hogy $s = 40 \text{ km} + y$, másrészt $\frac{y}{s} = \text{tg}\, 22{,}5°$.

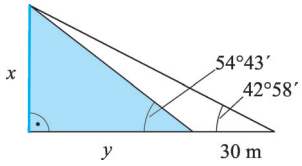
E kétismeretlenes két egyenletből álló egyenletrendszerből meghatározhatjuk az s értékét. $s \approx 68{,}28$ km.

Majd az $s = v \cdot t$ egyenletből kaphatjuk a v sebességet.

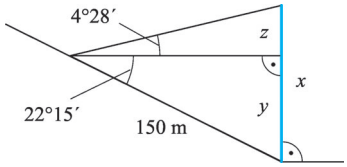
2657. $v \approx 28{,}3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a hajó sebessége.

Számítsuk ki az α szöget, ez 22,5°. Vegyünk észre egy alkalmas egyenlő szárú háromszöget, amelyből következtessünk arra, hogy $x = 40$ km! Alkalmazzunk egy megfelelő szögfüggvényt az s befogójú és x átfogójú derékszögű háromszögre! Ebből kiszámíthatjuk, hogy $s \approx 28{,}3$ km. Majd az $s = v \cdot t$ egyenletből kaphatjuk a v sebességet.

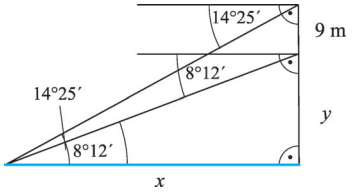
2651.



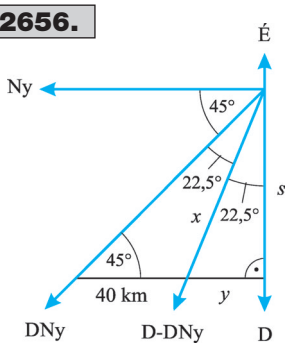
2652.



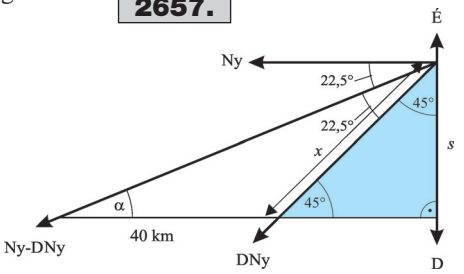
2653.



2656.



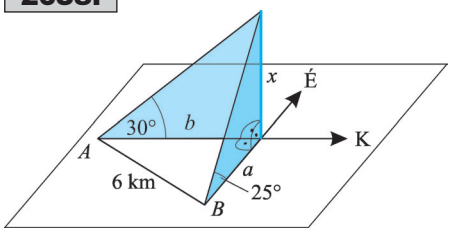
2657.



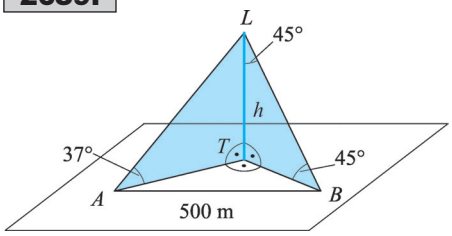
IV

IV

2658.



2659.



2658. $x \approx 2{,}18$ km magasan van a hőlégballon.

Egyrészt $\frac{x}{a} = \operatorname{tg} 25°$ és $\frac{x}{b} = \operatorname{tg} 30°$, másrészt a Pitagorasz-tételt alkalmazva kapjuk, hogy $a^2 + b^2 = 6^2$. Ezen egyenletrendszerből meghatározhatjuk az x magasságot. Az első két egyenletből fejezzük ki a-t, illetve b-t x-szel, majd ezeket helyettesítsük be a harmadik egyenletbe, amelyben már csak x lesz az ismeretlen. $x = \sqrt{\dfrac{36 \cdot \operatorname{tg}^2 25° \cdot \operatorname{tg}^2 30°}{\operatorname{tg}^2 30° + \operatorname{tg}^2 25°}}$.

2659. $h \approx 301$ m magasan lebeg a léggömb.

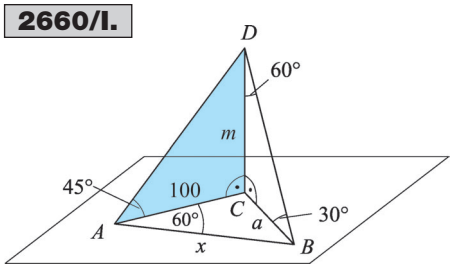
Vegyük észre, hogy $LT = TB$, ezért $TB = h$. Egyrészt $\frac{h}{AT} = \operatorname{tg} 37°$, másrészt alkalmazzuk Pitagorasz tételét az ABT derékszögű háromszögre. Fejezzük ki az előző egyenletből AT-t, majd ezt helyettesítsük be a Pitagorasz-tétel alapján felírt egyenletbe. Itt már csak h lesz az ismeretlen, amelyet könnyen meghatározhatunk kis számolás után. $h = \dfrac{500 \operatorname{tg} 37°}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 37°}} \approx 301$ m. Adjunk egy második megoldást, például úgy, hogy észrevesszük , hogy az ATL háromszög egybevágó az ABT háromszöggel. Miért? Az egybevágóságból következik, hogy $AB = AL$. Folytassuk!

2660. *a)* eset: $AB = 200$ m, (2660/I.); *b)* eset: $AB^* = 100$ m. (2660/II.)

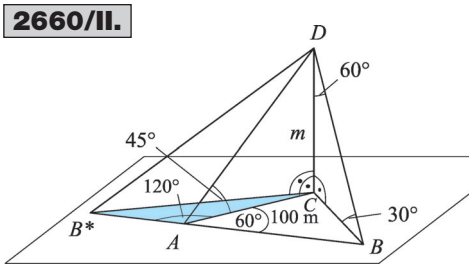
Vegyük észre, hogy az ACD háromszög egyenlő szárú, ebből $CD = 100$ m. Alkalmas szögfüggvény alkalmazásával számítsuk ki a értékét a BCD háromszögből! Azt kapjuk, hogy $a = 100 \cdot \sqrt{3} \approx 173{,}2$ m. Tekintsük az ABC háromszöget! Vegyük észre, hogy ez egybevágó a BCD háromszöggel! Miért? Ebből következik, hogy az ACB szög derékszög. Ebből következik, hogy $AB = 200$ m. Miért?

A B^*BC háromszög egyenlő szárú, ebből következik, hogy CB^*A szög 30°-os. Miért? A B^*AC háromszög is egyenlő szárú (miért?), ebből következik, hogy $AB^* = AC$, azaz $AB^* = 100$ m.

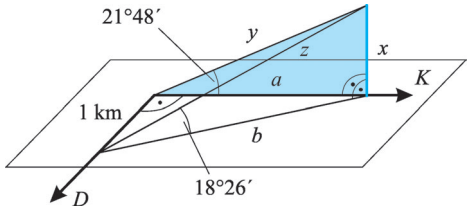
2660/I.



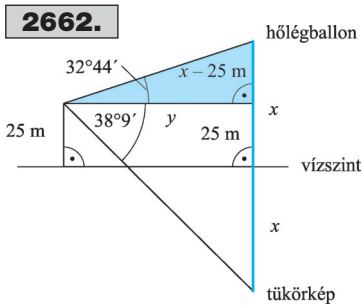
2660/II.



2661.



2662.



2661. $x \approx 0{,}6$ km magasra emelkedik a hegy a síkság fölé, $y \approx 1{,}6$ km távolságra, illetve $z \approx 1{,}9$ km távolságra vagyunk az egyes helyeken a hegy csúcsától.

Alkalmazzunk egy megfelelő szögfüggvényt az x és a befogójú derékszögű háromszögre $\operatorname{tg} 21°48' = \frac{x}{a}$, majd innen fejezzük ki a-t x segítségével $a = \frac{x}{\operatorname{tg} 21°48'}$! Majd ugyanezt a szögfüggvényt alkalmazzuk az x és b befogójú derékszögű háromszögre, majd innen fejezzük ki b-t x segítségével $b = \frac{x}{\operatorname{tg} 18°26'}$! Ezután alkalmazzuk Pitagorasz tételét a síkságon levő derékszögű háromszögre $1^2 + \left(\frac{x}{\operatorname{tg} 21°48'}\right)^2 = \left(\frac{x}{\operatorname{tg} 18°26'}\right)^2$! Ebbe az egyenletbe helyettesítsük be az előbb kifejezett értékeket, és x-re kapunk egy egyismeretlenes egyenletet, ebből kisebb számítások után megkaphatjuk a hegy x magasságát. Az y, illetve z meghatározását megfelelő szögfüggvény segítségével végezhetjük el.

2662. $x \approx 250$ m magasan van a hőlégballon a tó fölött.

Írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt az $x - 25$ m és y befogójú derékszögű háromszögre, majd egy ugyanilyen szögfüggvényt az $x + 25$ m és y befogójú derékszögű háromszögre! Oldjuk meg a két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszert, például úgy, hogy elosztjuk a két egyenlet megfelelő oldalait egymással, majd ekkor y kiesik és x meghatározható.

$$\operatorname{tg} 32°44' = \frac{x-25}{y},\quad \operatorname{tg} 38°9' = \frac{x+25}{y},\quad x = \frac{25 \cdot (\operatorname{tg} 38°9' + \operatorname{tg} 32°44')}{\operatorname{tg} 38°9' - \operatorname{tg} 32°44'},\quad x \approx 250 \text{ m}.$$

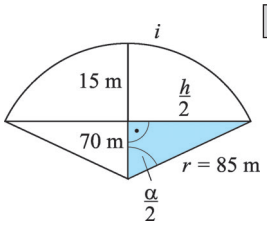
2663. $x \approx 2286$ m magasan van a felhő a hegycsúcs fölött. Készítsünk hasonló ábrát, mint az előző feladatnál, és hasonló módon oldhatjuk meg, mint az előző feladatot!

2664. $\approx 210{,}6$ m magas a domb és ≈ 1051 m magasan volt a villámlás a víz színe fölött. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

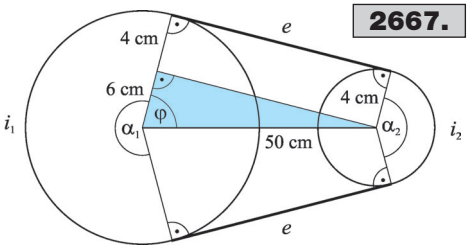
IV

Körívek, körcikkek, körszeletek

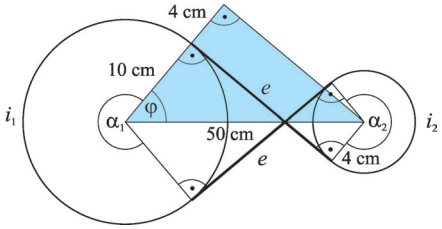
2665.



2667.



2669.



2665. $h \approx 96{,}4$ m a hídpillérek távolsága és $i \approx 102{,}5$ m az ívhossz.

2666. $\approx 131{,}8$ m az ívhossz. Készítsünk hasonló ábrát, mint az előző feladatnál!

2667. $x \approx 45{,}4$ cm a tapadási felületek összhossza.

Először számítsuk ki a φ szöget, majd ebből az α_1 szöget, ebből pedig az i_1 ívhosszat! Vegyük észre, hogy $\alpha_2 = 2 \cdot \varphi$, ebből pedig számítsuk ki az i_2 ívhosszat! $x = i_1 + i_2$ a tapadási felületek összhossza.

2668. $x \approx 175{,}5$ cm a szíj hossza. Készítsünk hasonló ábrát, mint az előző feladatnál! Az előzőhöz hasonló módon számítsuk ki az i_1 és az i_2 ívhosszat! Majd számítsuk ki az e érintőszakasz hosszát! $x = i_1 + i_2 + 2 \cdot e$ a szíj hossza.

2669. $x \approx 51{,}9$ cm a tapadási felületek összhossza. A 2669. ábra alapján hasonlóan oldhatjuk meg, mint a 2667. feladatot.

2670. $\approx 182{,}3$ cm a szíj hossza. A 2669. ábrát felhasználva, hasonlóan oldhatjuk meg, mint a 2668. feladatot.

2671. $\approx 252{,}8$ cm^2 a keresett körlaprész területe. A keresett területet megkapjuk, ha a félkör területéből levonjuk a megfelelő körszelet területét. A körszelet területét megkapjuk, ha a megfelelő körcikk területéből levonjuk a megfelelő háromszög területét.

2672. $\approx 108{,}1$ cm^2 a keresett terület.

2673. $\approx 88{,}2$ cm^2 a keresett terület. A keresett területet megkapjuk, hogy ha a megfelelő deltoid területéből levonjuk a megfelelő körcikk területét.

2674. ≈ 223 cm^2 a kétszeresen fedett rész területe. Vegyük észre, hogy a keresett terület éppen a megfelelő körszelet területének a kétszerese!

2675. ≈ 815 m^3 térfogatú a kitermelt kőzet. Pitagorasz tételével számítsuk ki a körhenger sugarát, ez $r \approx 5{,}32$ m. Majd számítsuk ki a körszelethez tartozó háromszög területét, ez $\approx 9{,}1$ m^2, majd a megfelelő körcikk területét, ez $\approx 34{,}57$ m^2, ebből a megfelelő körszelet területe $\approx 25{,}47$ m^2! Mint tudjuk, a keresett térfogatot megkapjuk, ha a körszelet területét szorozzuk az alagút hosszával.

2676. $\approx 51{,}6$ liter olaj van a tartályban. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2677. ≈ 1449 liter olaj van a tartályban. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

2678. $\approx 3536{,}4$ liter víz van a tartályban. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző három feladatot.

Egyenlő szárú háromszögek, derékszögű háromszögek, négyszögek

2679. $a \approx 14{,}6$ cm az alap hossza, $b \approx 8{,}1$ cm a szárak hossza, $t \approx 25{,}62$ cm^2 a háromszög területe. Húzzuk be az alaphoz tartozó magasságot! Írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt! Ebből és az $a - b = 6{,}5$ egyenletből álló egyenletrendszert megoldva kapjuk a-t, illetve b-t. Ezután számítsuk ki az alaphoz tartozó magasságot, majd a területet!

2680. $a \approx 8{,}3$ cm az alap hossza, $b \approx 7{,}7$ cm a szár hossza, $t \approx 26{,}9$ cm^2 a háromszög területe. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2681. $a \approx 9{,}2$ cm az alap hossza, $b \approx 16{,}32$ cm a szár hossza. Írjunk fel a területre egy egyenletet, majd alkalmazzunk egy megfelelő szögfüggvényt az alaphoz tartozó magasság behúzása után! Ezután oldjuk meg az egyenletrendszert!

2682. $a \approx 11{,}07$ cm az alap hossza, $b \approx 18{,}77$ cm a szárak hossza, $t \approx 99{,}3$ cm^2 a háromszög területe.

2683. $\alpha \approx 25{,}28°$ az alappal szemközti szög, $\beta \approx 77{,}36°$ a szárakkal szemközti szög. A háromszögben húzzuk meg az alaphoz tartozó magasságot és az egyik szárhoz tartozó magasságot! Egyrészt $\frac{m_b}{a} = \sin\beta$, másrészt $\frac{m_a}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$. Ezen egyenletrendszerből meghatározhatjuk $\cos\beta$, illetve β értékét.

2684. $a = 4 \cdot \sqrt{5}$ cm $\approx 8{,}94$ cm, $b = 8 \cdot \sqrt{5}$ cm $\approx 17{,}89$ cm a derékszögű háromszög befogói, $\alpha \approx 26{,}57°$ és $\beta \approx 63{,}43°$ a két hegyesszöge. A magasságtétellel számítsuk ki az átfogóhoz tartozó magasságot, $m = 8$ cm! Majd megfelelő szögfüggvény segítségével kaphatjuk meg az egyik szöget, amelyből megkaphatjuk a másik szöget. Pitagorasz tételének segítségével számíthatjuk ki a befogókat.

2685. $a = 2 \cdot \sqrt{5}$ cm $\approx 4{,}47$ cm, és $b = 4 \cdot \sqrt{5}$ cm $\approx 8{,}94$ cm a két befogó hossza, $\alpha \approx 26{,}57°$ és $\beta \approx 63{,}43°$ a két hegyesszöge. Az átfogóhoz tartozó magasság két szeletre osztja az átfogót. E két szeletre kapunk ebből egy egyenletet. A másik egyenletet a magasságtételből kaphatjuk. Megoldva az egyenletrendszert, egy másodfokú egyenlethez jutunk. Megoldva kaphatjuk, hogy a két szelet 2 cm, illetve 8 cm, illetve fordítva. Pitagorasz tételével kiszámíthatjuk a befogókat. Szögfüggvény segítségével számíthatjuk ki a szögeket.

2686. $R = 2 + 2 \cdot \sqrt{3} \approx 5{,}46$ egység a háromszög köré írható kör sugara. Például szögfüggvény segítségével kaphatjuk, hogy $BC = R$. Számítsuk ki a beírt kör sugarát, amely 2 egység lesz! Vegyük figyelembe, hogy a B-ből a C-felé induló érintőszakasz hosszát például szögfüggvénnyel megkaphatjuk, hiszen a beírt kör középpontja rajta van a szögfelezőkön. Ehhez hozzáadva a beírt kör sugarának hosszát, megkapjuk a BC távolságot, vagyis R hosszát.

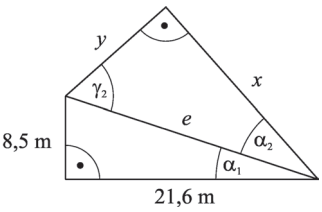
2687. $a = 5$ cm, $b = 12$ cm a befogók hossza, illetve fordítva. $\alpha \approx 22{,}62°$ és $\beta \approx 67{,}38°$, a hegyesszögek, illetve fordítva. Pitagorasz tételének segítségével kaphatunk egy egyenletet. Ha alkalmazzuk a körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok tételét, akkor ebből kaphatjuk, hogy az átfogó hossza egyenlő $a - 2$ cm és $b - 2$ cm összegével. Ebből nyertük a második egyenletet. Oldjuk meg az egyenletrendszert, amely másodfokú egyenletre vezet! Ebből kaphatjuk a befogókat. Szögfüggvény segítségével számíthatjuk ki a szögeket.

2688. $c = 40$ cm az átfogó hossza. $a = 24$ cm és $b = 32$ cm a befogók hossza, illetve fordítva. $\alpha \approx 36{,}87°$ és $\beta \approx 53{,}13°$, a hegyesszögek, illetve fordítva. Vegyük észre, hogy $c = 2 \cdot R$! Miért? Alkalmazzuk Pitagorasz tételét és a körhöz húzott érintőszakaszok tételét! Ebből két egyenletet kapunk a két befogóra. Megoldva az egyenletrendszert – amely egy másodfokú egyenletre vezet –, megkaphatjuk a befogókat. Szögfüggvénnyel megkaphatjuk a szögeket.

2689. $\alpha \approx 22{,}62°$ és $\beta \approx 67{,}38°$ a hegyesszögek, vagy fordítva. Készítsünk egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek beírt körének sugara 4 egység és a körülírt kör sugara pedig 13 egység! Ez hasonló háromszög ahhoz, mint ami a feladatban szerepel. Ezután például úgy oldhatjuk meg a feladatot, mint az előzőt.

2690. $\approx 6{,}31$ cm a négyszög ismeretlen oldala. Bocsássunk merőlegest a 11,5 cm-es szakasz megfelelő végpontjából a 15 cm-es oldalra! Ezt szögfüggvénnyel kiszámíthatjuk. A 11,5 cm-es oldal merőleges vetületét a 15 cm-es oldalra szintén szögfüggvénnyel számíthatjuk. A 4,7 cm-es oldal megfelelő végpontjából húzzunk párhuzamost a 15 cm-es oldallal! Így kaptunk egy olyan derékszögű háromszöget is, amelynek átfogója az ismeretlen oldal. Erre a háromszögre alkalmazzuk Pitagorasz tételét!

2691.



2691. $x \approx 21{,}22$ cm és $y \approx 9{,}41$ cm az ismeretlen oldalak hossza. Először számítsuk ki $\alpha_1 + \alpha_2$ értékét $\alpha_1 + \alpha_2 = 180° - 134{,}6°$, majd az α_1 értékét szögfüggvénnyel, és ebből kapjuk α_2 értékét. Pitagorasz tételével kaphatjuk e-t. Az x és y az e és α_2 ismeretében szögfüggvénnyel számolható.

2692. $a \approx 39{,}84$ cm és $c \approx 3{,}33$ cm az alapok hossza. A rövidebbik alap két végpontjából húzzuk meg a trapéz magasságait! A szárak merőleges vetületeit a nagyobbik alapra, szögfüggvénnyel számíthatjuk ki. Számítsuk ki a magasságot! Állítsunk fel egy egyenletet az alapokra! Majd írjunk fel egy egyenletet a területre! Oldjuk meg az egyenletrendszert!

2693. **1. eset:** A szimmetrikus trapéz esete. $a \approx 52{,}36$ cm és $c \approx 26{,}57$ cm az alapok hossza, $\alpha \approx 71{,}19°$ **és** $\beta \approx 108{,}81°$. Húzzuk meg a trapéz egyik átlóját! Alkalmazzunk szögfüggvényt, illetve Pitagorasz tételét!

2. eset: A paralelogramma esete. $a = c = 52{,}36$ cm az alapok hossza, a szögek ugyanazok, mint az első esetben.

2694. $\approx 14{,}39$ cm az ismeretlen oldal, $\approx 40{,}12°$, illetve $\approx 171{,}68°$ az ismeretlen szögek. Állítsunk merőlegest a 18 cm-es, illetve a 7 cm-es oldal megfelelő végpontjából a 13 cm-es oldalra! Ekkor a 18, illetve a 7 cm-es oldalak 13 cm-es oldalra való merőleges vetületei alkalmas szögfüggvényekkel számolhatók, valamint a vetítő szakaszok hosszai is számolhatók. A 7 cm-es oldal megfelelő végpontjából merőlegest állítunk a 18 cm-es oldalt vetítő egyenesre, s így kapunk egy derékszögű háromszöget, amelyből az ismeretlen oldal számítható.

2695. $\approx 31{,}22$ cm, $\approx 34{,}68$ cm, $\approx 26{,}97$ cm, illetve $\approx 18{,}9$ cm a négyszög ismeretlen oldalai. Húzzuk meg az AC átlót! Állítsunk merőlegest C-ből AB-re és állítsunk merőlegest D-ből az AC átlóra! A keletkező megfelelő derékszögű háromszögekre alkalmazzunk megfelelő szögfüggvényeket, majd Pitagorasz tételét!

Trigonometrikus kifejezések

2696. *a)* $\sin^2\alpha$; *b)* $\cos\alpha$; *c)* 1.

2697. *a)* $\operatorname{ctg}^2\alpha$; *b)* $\cos^2\alpha$; *c)* $-\operatorname{tg}^2\alpha$.

2698. *a)* 0; *b)* $2 \cdot \sin\beta$; *c)* $-\operatorname{ctg}^2\alpha$.

2699. *a)* $\sin^2\alpha$; *b)* 2; *c)* $\dfrac{2}{\sin^2\alpha}$.

2700. *a)* $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{3}{4}$. *b)* $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

c) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; $\operatorname{tg}\alpha = t$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{t}$. *d)* $\cos\alpha = \dfrac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = 2\cdot\sqrt{2}$.

e) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. *f)* $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{12}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{12}{5}$.

g) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$. *h)* $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{ctg}\alpha = 1$.

i) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. *j)* $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{2}$.

k) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$. *l)* $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha=1$.
m) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{17}}{17}$; $\cos\alpha=\frac{4\cdot\sqrt{17}}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}$.

2701. $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{15}$. **2702.** *a)* 1; *b)* $\frac{1}{\sin^2\alpha}$. **2703.** *a)* 1; *b)* 2; *c)* 1. **2704.** *a)* 1; *b)* 1.
2705. *a)* Végezzük el a bal oldalon a szorzásokat és a jobb oldalon a négyzetre emelést! *b)* Szorozzunk be a nevezőkkel!
2706. Alakítsuk szorzattá a bal oldal számlálóját, másrészt vegyük figyelembe, hogy $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. $\cos^3\alpha-\sin^3\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos^2\alpha+\cos\alpha\cdot\sin\alpha+\sin^2\alpha)$.
2707. Végezzük el a bal oldalon a kijelölt műveleteket!
2708. Végezzük el a bal oldalon a kijelölt műveleteket!
2709. Végezzük el a bal oldalon a kijelölt műveleteket, majd alkalmazzuk a tangens definícióját, és hozzunk közös nevezőre.
2710. *a)* és *b)* használjuk a definíciókat és hozzunk közös nevezőre!
2711. *a)* 1; *b)* 1; *c)* 1; *d)* 1. **2712.** $\sin^2\alpha$.
2713. *a)* $-\operatorname{ctg}^6\alpha$; *b)* $\cos^2 x$; *c)* $\operatorname{tg}^2 x$; *d)* 1.
2714. A bal oldal számlálójában is és nevezőjében is hozzunk közös nevezőre!
2715. *a)* 1. Emeljük köbre a $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ egyenlőséget! *b)* -1. Használjuk fel az előző feladat eredményét és a $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ négyzetre emelésével kapott eredményt!
2716. *a)* m^2-2. Emeljük négyzetre a $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=m$ egyenletet! *b)* $m^3-3\cdot m$. Alakítsuk szorzattá a $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x$ kifejezést!
2717. A kifejezés pontos értéke 1. Vegyük figyelembe, hogy $\sin 75^\circ=\cos(90^\circ-75^\circ)$, másrészt $\cos 75^\circ=\sin(90^\circ-75^\circ)$, alkalmazzuk még a kotangens definícióját. Majd végezzük el a műveleteket!
2718. A kifejezés pontos értéke 2. Vegyük figyelembe, hogy $\sin 53^\circ=\cos 37^\circ$, másrészt $\sin 73^\circ=\cos 17^\circ$! Miért?
2719. A kifejezés pontos értéke 1. Vegyük figyelembe, hogy $\sin\frac{3\cdot\pi}{7}=\cos\frac{\pi}{14}$ és $\cos\frac{3\cdot\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{14}$! Miért?
2720. A kifejezés pontos értéke 1. Vegyük figyelembe, hogy $\sin(45^\circ-\alpha)=\cos(\alpha+45^\circ)$ és $\cos(30^\circ+\alpha)=\sin(60^\circ-\alpha)$! Miért?

Szögfüggvények általánosítása

2721. *a)* $\sin\alpha$; *b)* $-\cos\alpha$; *c)* $-\operatorname{tg}\alpha$; *d)* $-\operatorname{ctg}\alpha$.
2722. *a)* $-\sin\alpha$; *b)* $-\cos\alpha$; *c)* $\operatorname{tg}\alpha$; *d)* $-\operatorname{ctg}\alpha$; *e)* $-\sin\alpha$; *f)* $\cos\alpha$; *g)* $\operatorname{tg}\alpha$; *h)* $\operatorname{ctg}\alpha$.
2723. *a)* $\cos\alpha$; *b)* $\sin\alpha$; *c)* $\cos\alpha$; *d)* $-\sin\alpha$; *e)* $\sin\alpha$; *f)* $-\operatorname{tg}\alpha$; *g)* $\operatorname{ctg}\alpha$; *h)* $-\operatorname{ctg}\alpha$; *i)* $\operatorname{tg}\alpha$; *j)* $-\cos\alpha$.
2724. *a)* $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. *b)* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. *c)* -1; 1; -1; -1; 1; -1. *d)* $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 1.
2725. Mindegyik részfeladat eredménye 0.
2726. *a)* $-\frac{1}{2}$; *b)* $-\frac{1}{2}$; *c)* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; *d)* -1; *e)* $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; *f)* $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

IV

2727. A kifejezés pontos értéke 1. **2728.** Mindegyik részfeladat eredménye 0.

2729. Mindegyik részfeladat eredménye 0. **2730.** *a)* $-\frac{1}{2}$; *b)* 3; *c)* $\frac{3}{4}$.

2731. Vegyük figyelembe, hogy a szinuszfüggvény periódusa 360°, másrészt $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$!

2732. A kifejezés pontos értéke -8. Vegyük figyelembe, hogy a tangensfüggvény periódusa π, másrészt $\operatorname{tg}(-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$! Ezeket alkalmazva igazolhatjuk, hogy $\operatorname{tg}\frac{2003\cdot\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{3\cdot\pi}{4}$, másrészt $\operatorname{tg}\frac{3\cdot\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

2733. A kifejezés pontos értéke $\frac{1}{4}$. Vegyük figyelembe, hogy a koszinuszfüggvény periódusa $2\cdot\pi$, másrészt a tangensfüggvény periódusa π. Ezt felhasználva mutassuk meg, hogy a négyzetre emelendő tört számlálója $\cos\frac{\pi}{6}$, míg a nevezője $\operatorname{tg}\frac{2\cdot\pi}{3}$. Az utóbbi pedig egyenlő $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$-mal! Folytassuk!

2734. *a)* Végeredmény: 1. Vegyük figyelembe, hogy $\cos(\pi + x) = -\cos x$ és $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$! *b)* Végeredmény: 1. Vegyük figyelembe, hogy $\sin(180° - x) = \sin x$ és $\sin(270° - x) = \sin(-90° - x) = -\sin(x + 90°)$!

2735. *a)* Végeredmény: 1. Vegyük figyelembe, hogy az első szorzat mindkét tényezője $-\sin x$, míg a második szorzat mindkét tényezője $\cos x$! *b)* Végeredmény: 1. Igazoljuk, hogy az első szorzat mindkét tényezője $\sin x$, míg a második szorzat első tényezője $\cos x$, a második tényezője $-\cos x$!

2736. *a)* $\operatorname{ctg}\alpha$; *b)* $-\cos\alpha$; *c)* $-\cos\alpha$. **2737.** $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$; $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

2738. Végeredmény: $\sin x\cdot\cos x = \frac{12}{25}$. Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, másrészt $\sin x\cdot\cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$!

2739. Használjuk fel, hogy $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$, ezután a négyzetgyök alatt alakítsunk ki teljes négyzetet! Gondoljuk meg, hogy a feltételek miatt $|1 + \operatorname{ctg}\alpha| = -1 - \operatorname{ctg}\alpha$!

2740. A kifejezés pontos értéke: 0. Használjuk fel, hogy $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, ezért $\operatorname{tg}177° = -\operatorname{tg}3°$. Hasonló módon $\operatorname{ctg}157° = -\operatorname{ctg}23°$.

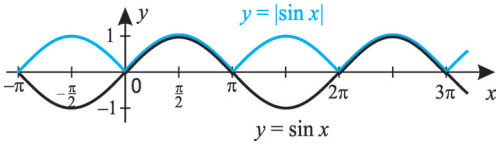
Trigonometrikus függvények grafikonjai

2741. *a)* Vegyük figyelembe: $\sin(-x) = -\sin x$! *b)* Gondoljuk meg: $\cos(-x) = \cos x$!

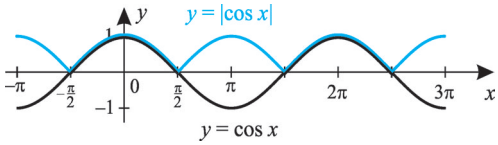
2742. *a)* (2742/I.) *b)* (2742/II.)

2743. *a)* Gondoljuk meg, hogy $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}x$, ezért tükrözzük a tg függvény grafikonját az x tengelyre. *b)* Vegyük figyelembe, hogy $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg}x$, ezért tükrözzük a ctg függvény grafikonját az x tengelyre.

2742/I.



2742/II.



2744. *a)* (2744/I.) *b)* (2744/II.)

2745. *a)* Vegyük észre, hogy $f(x) = 1$ minden valós x-re! *b)* Gondoljuk meg, hogy $g(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2$.

2746. *a)* Igazoljuk, hogy $f(x) = 0$. *b)* Igazoljuk, hogy $g(x) = 0$.

2747. *a)* Vegyük figyelembe, hogy $f(x) = -\cos x$. *b)* Gondoljuk meg, hogy $g(x) = \cos x$.

2748. *a)* Vegyük észre, hogy $f(x) = -\sin x$. *b)* Vegyük figyelembe, hogy $g(x) = \sin x$.

2749. *a)* A tg függvény grafikonját toljuk el $\frac{\pi}{2}$-vel az x tengely irányában a pozitív irányba.

b) A tg függvény grafikonját toljuk el $\frac{\pi}{2}$-vel az x tengely irányában a negatív irányba.

2750. *a)* A ctg függvény grafikonját toljuk el $\frac{\pi}{2}$-vel az x tengely irányában a negatív irányba!

b) A ctg függvény grafikonját toljuk el $\frac{\pi}{2}$-vel az x tengely irányában a pozitív irányba!

2751. *a)* $f(x) = \operatorname{tg} x$; *b)* $g(x) = \operatorname{tg} x$.

2752. *a)* Igazoljuk, hogy $f(x) = 0$. *b)* Igazoljuk, hogy $g(x) = 2 \cdot \sin x$.

2753. *a)* Gondoljuk meg, hogy $f(x) = 2 \cdot \sin x$, ha $\sin x \geq 0$ és $f(x) = 0$, ha $\sin x < 0$!

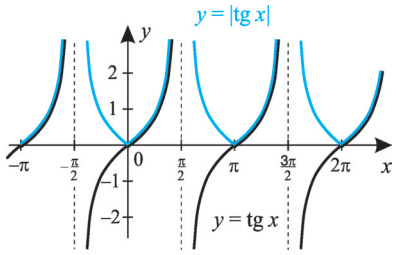
b) Vegyük figyelembe, hogy $g(x) = 2 \cdot \cos x$, ha $\cos x \geq 0$ és $g(x) = 0$, ha $\cos x < 0$!

2754. *a)* Vegyük észre, hogy $f(x) = -2 \cdot \sin x$, ha $\sin x < 0$ és $f(x) = 0$, ha $\sin x \geq 0$! *b)* Vegyük figyelembe, hogy $g(x) = 0$, ha $\cos x \geq 0$ és $g(x) = -2 \cdot \cos x$, ha $\cos x < 0$!

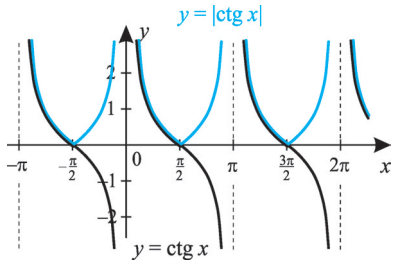
2755. *a)* Gondoljuk meg, hogy $f(x) = 1$, ha $\sin x > 0$ és $f(x) = -1$, ha $\sin x < 0$. *b)* Figyeljük meg, hogy $g(x) = 1$, ha $\cos x > 0$ és $g(x) = -1$, ha $\cos x < 0$.

2756. Lásd az ábrát!

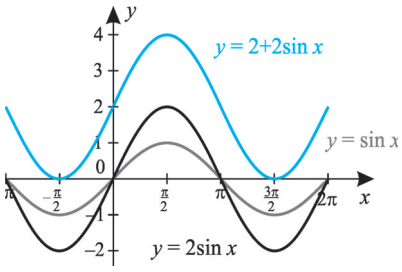
2744/I.



2744/II.



2756.

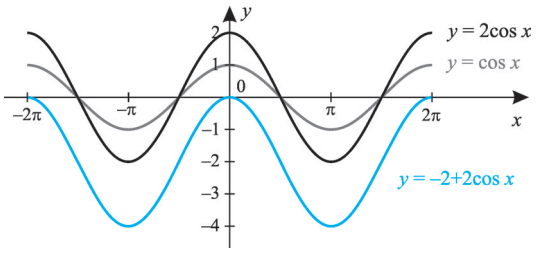


IV

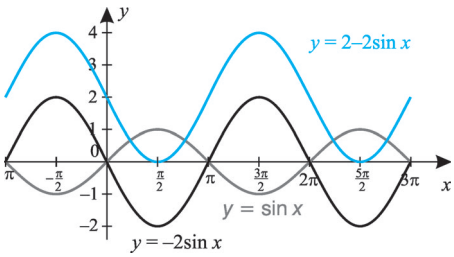
2757. 2758. 2759. 2760. 2761. 2762. 2763. 2764. Lásd az ábrákat!

IV

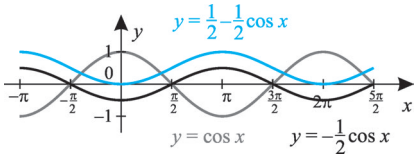
2757.



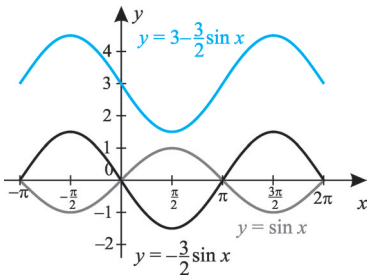
2758.



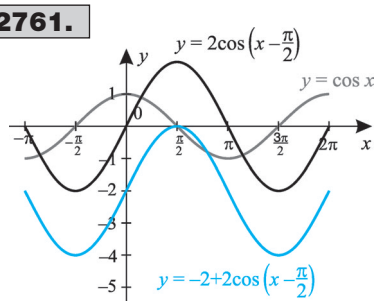
2759.



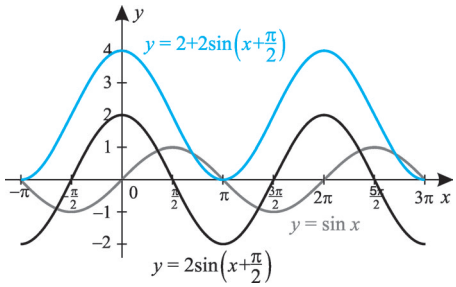
2760.



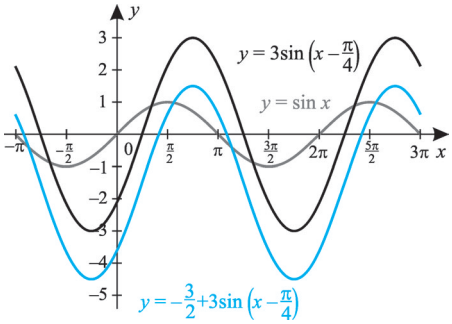
2761.



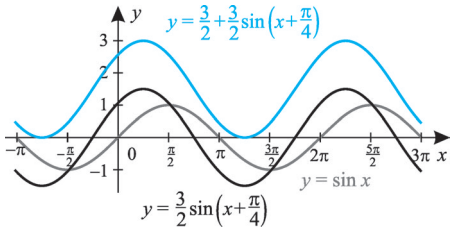
2762.



2763.

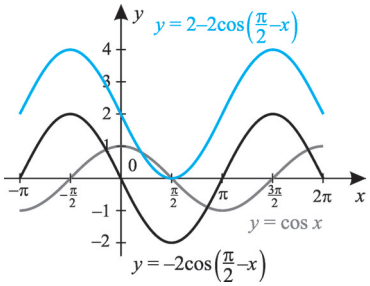


2764.

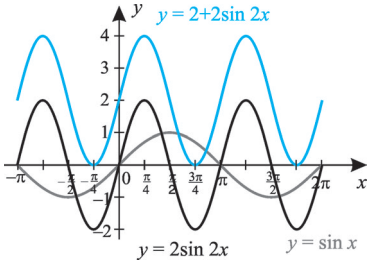


2765. 2766. 2767. 2768. *a)* (2768/I.); *b)* (2768/II.); *c)* (2768/III.)
2769. *a)* (2769/I.); *b)* (2769/II.); *c)* (2769/III.) Lásd az ábrákat!

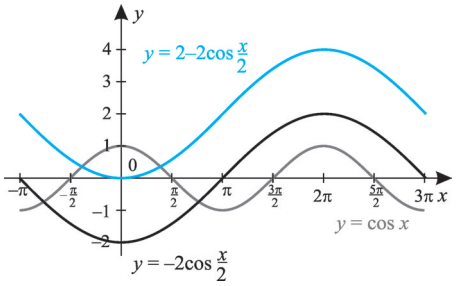
2765.



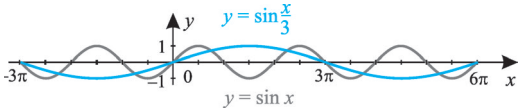
2766.



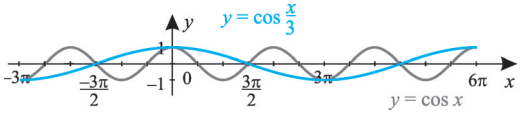
2767.



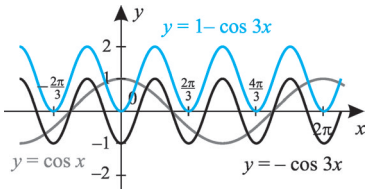
2768/I.



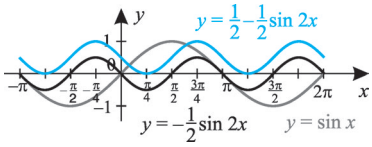
2768/II.



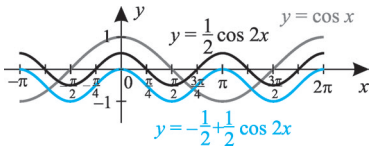
2768/III.



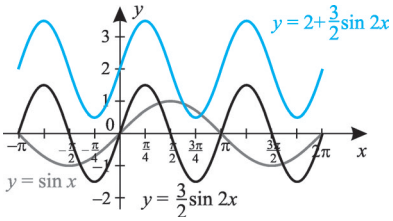
2769/I.



2769/II.



2769/III.

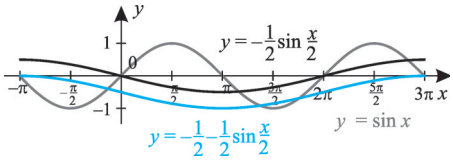


IV

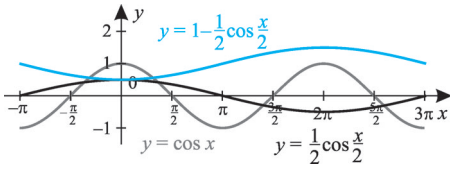
2770. *a)* (2770/I.); *b)* (2770/II.); *c)* (2770/III.)
2771. *a)* (2771/I.); *b)* (2771/II.) **2772.** *a)* (2772/I.); *b)* (2772/II.)
2773. *a)* (2773/I.); *b)* (2773/II.) **2774.** Lásd az ábrákat!

IV

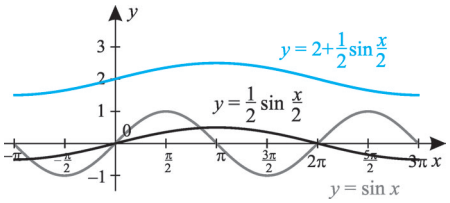
2770/I.



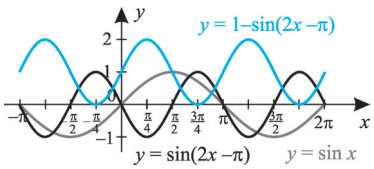
2770/II.



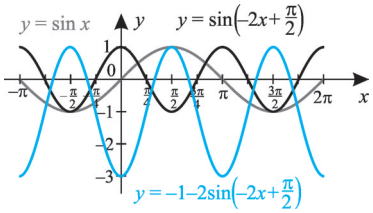
2770/III.



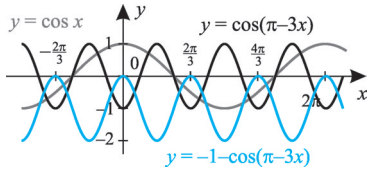
2771/I.



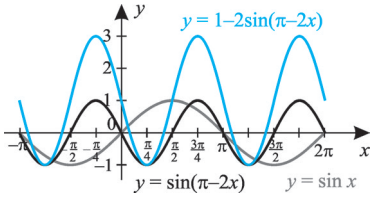
2771/II.



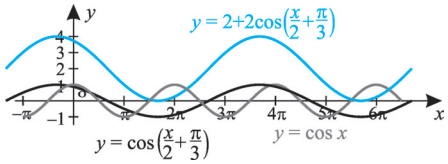
2772/I.



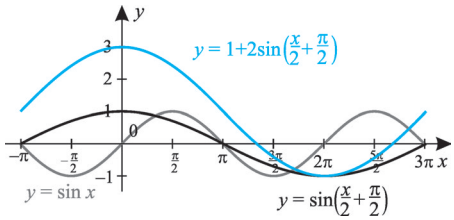
2772/II.



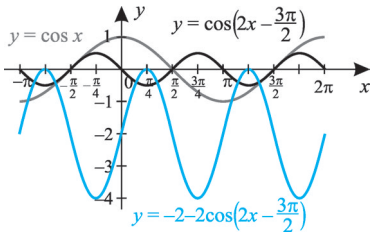
2773/I.



2773/II.

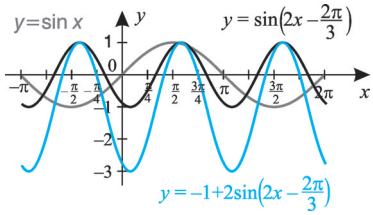


2774.

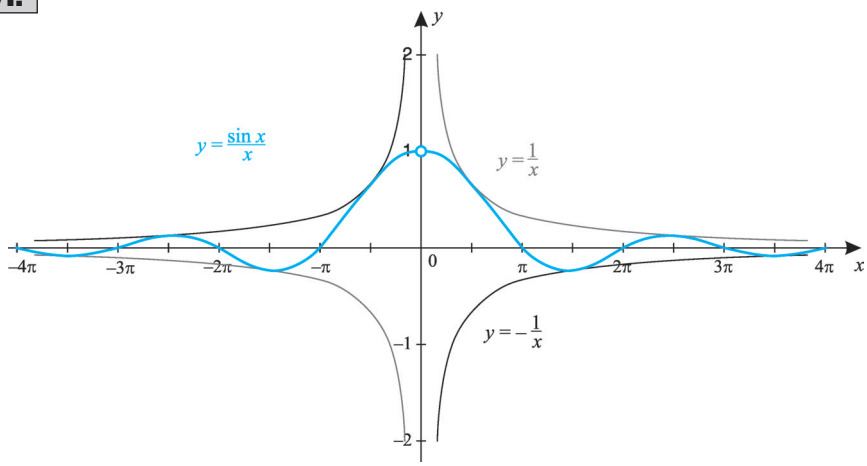


2775. 2776. *a)* (2776/I.); *b)* (2776/II.) Lásd az ábrákat!

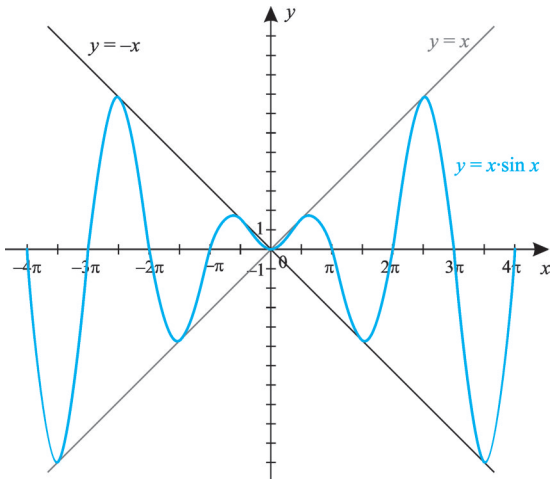
2775.



2776/I.



2776/II.



Trigonometrikus egyenletek I. rész

Bevezető feladatok

A következőkben k, illetve az m tetszőleges egész számokat jelent.

IV

2777. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 30° + k \cdot 360°$; $x_2 = 150° + m \cdot 360°)$.

b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 60° + k \cdot 360°$; $x_2 = 120° + m \cdot 360°)$.

c) $x_1 = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = -30° + k \cdot 360°$; $x_2 = 210° + m \cdot 360°)$.

d) $x_1 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{4 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = -60° + k \cdot 360°$; $x_2 = 240° + m \cdot 360°)$.

e) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = x_1$. $(x_1 = 90° + k \cdot 360°)$. *f)* $x_1 = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{2} +$ $+ m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = -90° + k \cdot 360°$; $x_2 = 270° + m \cdot 360°)$. (A két megoldás megegyezik.)

g) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 45° + k \cdot 360°$; $x_2 = 135° + m \cdot 360°)$.

h) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = -45° + k \cdot 360°$; $x_2 = 225° + m \cdot 360°)$.

i) $x_1 = 0 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \pi + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = k \cdot 360°$; $x_2 = 180° + m \cdot 360°)$. A két megoldássorozatot össze lehet vonni a következőbe: $x = n \cdot \pi$, ahol n tetszőleges egész szám. *j)* Nincs megoldás a valós számok halmazán. *k)* $x_1 \approx 0{,}9273 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx 2{,}2143 + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 \approx 53{,}13° + k \cdot 360°$; $x_2 \approx 126{,}87° + m \cdot 360°)$. *l)* Nincs megoldás a valós számok halmazán.

2778. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 60° + k \cdot 360°$; $x_2 = -60° + m \cdot 360°)$.

b) $x_1 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 120° + k \cdot 360°$; $x_2 = -120° + m \cdot 360°)$.

c) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 30° + k \cdot 360°$; $x_2 = -30° + m \cdot 360°)$.

d) $x_1 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 150° + k \cdot 360°$; $x_2 = -150° + m \cdot 360°)$.

e) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 45° + k \cdot 360°$; $x_2 = -45° + m \cdot 360°)$.

f) $x_1 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{3 \cdot \pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 135° + k \cdot 360°; x_2 = -135° + m \cdot 360°)$.

g) $x_1 = 0 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = x_1$. $(x_1 = k \cdot 360°)$. *h)* $(x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\pi + m \cdot 2 \cdot \pi)$. (A két megoldás ugyanaz.) *i)* Nincs megoldás a valós számok halmazán. *j)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(x_1 = 90° + k \cdot 360°$; $x_2 = -90° + m \cdot 360°)$. A két megoldást összefoglalhatjuk a következőbe: $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, ahol n tetszőleges egész szám. *k)* Nincs megoldás a valós

számok halmazán. *l)* $x_1 \approx 1{,}23096 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx -1{,}23096 + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 \approx 70{,}53° + k \cdot 360°$; $x_2 \approx -70{,}53° + m \cdot 360°$).

2779. *a)* $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. ($x = 45° + k \cdot 180°$). *b)* $x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. ($x = -45° + k \cdot 180°$). *c)* $x = 0 + k \cdot \pi = k \cdot \pi$. ($x = k \cdot 180°$). *d)* $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$. ($x = 60° + k \cdot 180°$). *e)* $x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$. ($x = -60° + k \cdot 180°$). *f)* $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. ($x = 30° + k \cdot 180°$). *g)* $x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. ($x = -30° + k \cdot 180°$). *h)* $x \approx 1{,}1685 + k \cdot \pi$. ($x \approx 66{,}95° + k \cdot 180°$).

2780. *a)* $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. ($x = 45° + k \cdot 180°$). *b)* $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. ($x = 30° + k \cdot 180°$). *c)* $x = \frac{\pi}{3} + + k \cdot \pi$. ($x = 60° + k \cdot 180°$). *d)* $x \approx 0{,}8548 + k \cdot \pi$. ($x \approx 48{,}98° + k \cdot 180°$).

Alapvető feladatok

A következőkben *k, l, m, n* tetszőleges egész számokat jelentenek.

2781. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + n \cdot 2 \cdot \pi$.

b) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{4} + n \cdot 2 \cdot \pi$.

c) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. *d)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$.

2782. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$.

c) $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. *d)* $x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$.

2783. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. ($x_1 = 15° + k \cdot 180°$); ($x_2 = -45° + l \cdot 180°$).

b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_2 = -\frac{\pi}{9} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$.

2784. *a)* $x = \frac{7 \cdot \pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. *b)* $x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{10} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$.

2785. *a)* $x = \frac{11 \cdot \pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. *b)* $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$.

2786. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = -\frac{\pi}{12} + l\frac{\pi}{2}$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \pi + l \cdot \pi$.

2787. *a)* $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_2 = \frac{4 \cdot \pi}{9} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_3 = \frac{\pi}{9} + m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_4 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$.

2788. *a)* $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{2}$. *b)* $x_1 = \frac{5 \cdot \pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{24} + l \cdot \frac{\pi}{2}$.

2789. *a)* **1. eset:** $2x = x + \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$, ebből $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$. **2. eset:** $2x + x = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi$, ebből

$x_2 = \frac{\pi}{3} + m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. *b)* $x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_2 = \frac{\pi}{5} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$.

2790. *a)* $x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{85}$; $x_2 = \frac{\pi}{115} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{115}$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4}$; $x_2 = -\frac{\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{6}$.

2791. *a)* **1. eset:** $2x = x + k \cdot 2 \cdot \pi$, ebből $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$. **2. eset:** $2x + x = l \cdot 2 \cdot \pi$, ebből $x_2 = l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. *b)* $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{4}$; $x_2 = l \cdot \frac{\pi}{6}$.

2792. *a)* $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{450}$; $x_2 = l \cdot \frac{\pi}{550}$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{7} + k \cdot \frac{\pi}{7}$; $x_2 = -\frac{\pi}{18} + l \cdot \frac{\pi}{9}$.

2793. *a)* $2x = x + k \cdot \pi$, ebből $x = k \cdot \pi$. Meg kell vizsgálni, hogy a tangensek nevezői mikor nem nullák. Ha ezt megtesszük, akkor azt kapjuk, hogy a kizárt valós számok nem esnek bele az előbb megadott megoldásjelöltbe, ezért az valóban megoldás. Behelyettesítéssel is ellenőrizhetjük, hogy kielégíti az egyenletet. *b)* $x = k \cdot \frac{\pi}{4}$ megoldásjelöltet kapjuk, ha megoldjuk az egyenletet. De ezen sorozat nem minden eleme megoldás. Ha a tangensek nevezőit megvizsgáljuk, miszerint azok nem lehetnek nullák, akkor azt kapjuk, hogy csak a következő részsorozatai megoldások az előbb kapott megoldásjelöltnek: $x_1 = l \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + m \cdot \pi$; $x_3 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + n \cdot \pi$.

2794. *a)* $x = \frac{\pi}{20} + k \cdot \frac{\pi}{10}$. *b)* $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{4}$.

2795. *a)* $x = k \cdot \pi$ megoldásjelöltet kapjuk, ha megoldjuk az egyenletet. Ámde, ha megvizsgáluk a kotangensek nevezőit, miszerint azok nem lehetnek nullák, akkor azt kapjuk, hogy a megoldásjelölt számok esetén nulla lenne a nevező. Ez nem lehet, ezért az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán. *b)* $x = k \cdot \frac{\pi}{3}$ megoldásjelöltet kapunk, de ha megvizsgáljuk a kotangensek nevezőit, miszerint azok nem lehetnek nullák, akkor azt kapjuk, hogy csak a következő részsorozatok a megoldások: $x_1 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot \pi$.

2796. *a)* $\sin 4x = \sin(-x)$, ezt pedig megoldva: $x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$.

b) $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{2}$.

2797. *a)* $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{16} + l \cdot \frac{\pi}{8}$. *b)* $x_1 = \frac{11 \cdot \pi}{48} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = -\frac{17 \cdot \pi}{24} + l \cdot \pi$.

2798. *a)* **1. eset:** $2x - x = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$, ebből $x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$. **2. eset:** $2x + x = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi$, ebből $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{8} + l \cdot \frac{\pi}{4}$.

2799. *a)* $x_1 = \frac{7 \cdot \pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3}$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{20} + l \cdot \frac{\pi}{5}$. *b)* $x_1 = \pi + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{16} + l \cdot \frac{\pi}{4}$.

2800. *a)* $x = k \cdot \frac{\pi}{4}$ a megoldásjelölt, de ebből csak a következő részsorozatok a megoldások: $x_1 = l \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + m \cdot \pi$; $x_3 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + n \cdot \pi$. *b)* $x = k \cdot \frac{\pi}{3}$ a megoldásjelölt, de ebből csak a

következő részsorozatok a megoldások: $x_1 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot \pi$.

2801. *a)* Vegyük figyelembe, hogy $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; ezt felhasználva, átírhatjuk az egyenletet a következő alakba: $\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, ez pedig már korábban tárgyalt típusú. A megoldások: $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{8} + l \cdot \frac{\pi}{2}$.

2802. *a)* $x_1 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{3}$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{96} + k \cdot \frac{\pi}{8}$; $x_2 = -\frac{\pi}{120} + l \cdot \frac{\pi}{10}$.

2803. *a)* $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3}$; $x_2 = \frac{\pi}{8} + l \cdot \frac{\pi}{2}$. *b)* $x_1 = -\frac{\pi}{20} + k \cdot \frac{\pi}{5}$; $x_2 = -\frac{\pi}{12} - l \cdot \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} + m \cdot \frac{\pi}{3}$, ahol $m = -l$ vagy $x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{3}$.

2804. *a)* $x_1 = -\frac{5 \cdot \pi}{48} + k \cdot \frac{\pi}{4}$; $x_2 = -\frac{\pi}{24} + l \cdot \frac{\pi}{2}$.

b) $x_1 = \frac{\pi}{10} - k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} - l \cdot 2 \cdot \pi$.

2805. *a)* Rendezzük nullára az egyenletet, ezután alakítsuk szorzattá! Használjuk fel, hogy egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla! $\sin^2 x \cdot (\sin x - 1) = 0$. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \pi + m \cdot 2 \cdot \pi$. (Összefoglalhatjuk a következő egyenletbe: $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$, ahol n tetszőleges egész szám.)

2806. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$, összefoglalva: $x = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$. *b)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$, összefoglalva: $x = m \cdot \pi$.

2807. *a)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$.

2808. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$.

2809. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$; *b)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$.

2810. *a)* $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. *b)* $x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$.

2811. *a)* $x \approx 1{,}1071 + k \cdot \pi$, $(x \approx 63{,}43° + k \cdot 180°)$. *b)* $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$.

2812. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$.

2813. *a)* $x_1 = -\frac{3 \cdot \pi}{10} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{13 \cdot \pi}{10} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{10} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{9 \cdot \pi}{10} + n \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$. A $\sin x = 2$-ből nincs valós megoldás.

2814. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx -0{,}3398 + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 \approx 3{,}4814 + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = 90° + k \cdot 360°$; $x_2 \approx -19{,}47° + l \cdot 360°$; $x_3 \approx 199{,}47° + m \cdot 360°$). *b)* $x_1 \approx 0{,}9945 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx 2{,}1471 + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 \approx -0{,}2408 + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 \approx 3{,}3824 + n \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 \approx 56{,}98° + k \cdot 360°$; $x_2 \approx 123{,}02° + l \cdot 360°$; $x_3 \approx -13{,}80° + m \cdot 360°$; $x_4 = 193{,}80° + n \cdot 360°$).

2815. *a)* $x = 0 + k \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 \approx 0{,}4205 + l \cdot \pi$; $x_3 \approx -0{,}4205 + m \cdot \pi$.

2816. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 1{,}2490 + l \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$.

IV

2817. *a)* $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{3 \cdot \pi}{8} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{8} + l \cdot \pi$.

2818. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{5 \cdot \pi}{12} + l \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{6} + m \cdot \pi$; $x_4 = -\frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$.

2819. *a)* $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$.

2820. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$. $\cos x = 2$-ből nem kapunk megoldást. *b)* $x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$.

2821. *a)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = 0 + l \cdot 2 \cdot \pi$.

2822. *a)* $x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$. $\sin x = -2$-ből nem kapunk megoldást.

2823. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$.

b) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -1{,}1071 + k \cdot \pi$. ($x_2 \approx -63{,}43° + k \cdot 180°$). $\left(\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.\right)$ Alakítsuk át az egyenletet például a következő alakúra: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$!

2824. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{4 \cdot \pi}{3} + n \cdot 2 \cdot \pi$. Rövidebben: $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 \approx 1{,}2309 + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 \approx -1{,}2309 + n \cdot 2 \cdot \pi$.

2825. *a)* Az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán. $1 + \cos 2x \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos 2x \neq -1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; ellentmondás. *b)* $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.

2826. *a)* $x = \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi$. *b)* Nincs megoldása a valós számok halmazán.

2827. *a)* Nincs megoldása a valós számok halmazán. *b)* $x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$.

2828. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$.

2829. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$. $\cos x = 2$-ből nincs megoldás.

b) $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$.

2830. Azonosság, tehát minden valós szám megoldása az egyenletnek. Egyrészt emeljük négyzetre a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot, másrészt emeljük az előző azonosságot harmadik hatványra és a kapott eredményeket használjuk fel.

2831. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$.

2832. $x = 0$. Vázoljuk az $f(x) = \cos x$ és a $g(x) = x^2 + 1$ függvény grafikonját közös koordináta-rendszerben!

2833. Nincs megoldás a valós számok halmazán. Vázoljuk az $f(x) = \sin x$ és a $g(x) = -(x-1)^2$ függvény grafikonját közös koordináta-rendszerben!

2834. $x = \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $y = \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi$. Alakítsunk ki teljes négyzetet az x-es tagokból, az y-os tag már teljes négyzet.

2835. $\{x = 1;\ y = k \cdot 2 \cdot \pi\}$, $\{x = -1;\ y = \pi + l \cdot \pi\}$.

Hozzuk a következő alakra: $x^2 - 2 \cdot x \cdot \cos y + 1 = 0$. Tekintsük ezt x-re másodfokú egyenletnek! Ennek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív.

Összetettebb feladatok

2836. $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$.

2837. $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$.

2838. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$.

2839. $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$.

2840. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{4} + n \cdot 2 \cdot \pi$.

2841. $x_1 \approx 0{,}6610 + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 0{,}7484 + l \cdot \pi$. Vezessünk be új változót, például: $y = \sqrt[3]{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}}$. Ekkor másodfokú egyenletre vezethetjük vissza az eredeti egyenletet.

2842. $x_1 \approx -0{,}3218 + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -0{,}1651 + l \cdot \pi$. Vegyük észre, hogy: $\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x$. Így az egyenlet: $\operatorname{tg} x + \frac{1}{9} \cdot \operatorname{ctg} x = |\operatorname{tg} x| - 1$. Különböztessünk meg két esetet, egyrészt amikor $\operatorname{tg} x > 0$, másrészt amikor negatív (nulla nem lehet).

2843. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$; $x_5 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + p \cdot 2 \cdot \pi$. Itt k, l, m, n, p tetszőleges egész számok. Vegyük észre, hogy $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

2844. $x_1 \approx 1{,}7794 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx -1{,}7794 + l \cdot 2 \cdot \pi$. Különböztessünk meg két esetet, egyrészt amikor $\cos x$ nemnegatív, másrészt amikor negatív.

2845. $x_1 = \frac{1}{6} + k$; $x_2 = -\frac{1}{6} + l$. Alakítsuk át tangensre a kotangenst! Ebből kapjuk, hogy $\frac{\pi}{3} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x) = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. Ebből következik, hogy $\cos(2 \cdot \pi \cdot x) = \frac{1}{2}$. ($k = 0$ lehet csak.)

2846. $x_1 = -2$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = -3{,}5 + \sqrt{11{,}25}$; $x_4 = -3{,}5 - \sqrt{11{,}25}$; $x_5 = x_6 = 1$.

$\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{x^2 + x + 1} = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$, ebből $0 = (3k - 1) \cdot x^2 + (3k - 7) \cdot x - 1 + 3k$. Ennek a diszkriminánsa nemnegatív kell hogy legyen, ebből következik, hogy: $0 \geq 3k^2 + 2k - 5$. Ezt oldjuk meg, majd vegyük figyelembe, hogy k egész! Ebből következik, hogy k lehetséges értékei -1, 0, 1.

2847. $x_1 = 1 + \sqrt{2k + 1}$; $x_2 = 1 - \sqrt{2k + 1}$, ahol k nemnegatív egész szám.

$x_3 = -1 + \sqrt{2l + 1}$; $x_4 = -1 - \sqrt{2l + 1}$, ahol l nemnegatív egész szám.

2848. $x_1 = k \cdot \pi + \sqrt{k^2 \cdot \pi^2 + 1}$; $x_2 = k \cdot \pi - \sqrt{k^2 \cdot \pi^2 + 1}$. Itt k tetszőleges egész szám.

$x_3 = l \cdot \pi + \sqrt{l^2 \cdot \pi^2 - 1}$; $x_4 = l \cdot \pi - \sqrt{l^2 \cdot \pi^2 - 1}$. Itt l tetszőleges nem nulla egész szám.

A továbbiakban *k, l, m, n, p, q, r, s* tetszőleges egész számokat jelent.

2849. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -1{,}1071 + l \cdot \pi$. Osszuk el az egyenletet $\cos^2 x$-szel, amikor ez nem nulla! Ezzel $\operatorname{tg} x$-re másodfokú egyenletet kapunk.

2850. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 0{,}4636 + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2851. $x_1 \approx 0{,}6319 + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -1{,}2199 + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot, ha előbb felhasználjuk, hogy $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

2852. $x_1 \approx 1{,}0591 + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -0{,}2737 + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2853. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -0{,}2450 + l \cdot \pi$.

2854. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -1{,}1071 + l \cdot \pi$. Szorozzunk be a nevezővel, ezután olyan típusú lesz, mint az előző feladatokban megoldottak!

2855. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 1{,}4289 + l \cdot \pi$; $x_3 \approx 1{,}2490 + m \cdot \pi$.

2856. $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{6} + m \cdot \pi$; $x_4 = -\frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$.

2857. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$;

$x_4 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$; $x_5 = \frac{\pi}{3} + p \cdot 2 \cdot \pi$; $x_6 = -\frac{\pi}{3} + q \cdot 2 \cdot \pi$; $x_7 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + r \cdot 2 \cdot \pi$;

$x_8 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + s \cdot 2 \cdot \pi$. Emeljük harmadik hatványra a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot! Ezt felhasználva előbb-utóbb $\cos x$-re negyedfokú egyenletet kapunk, amely másodfokú egyenletre vezethető vissza. (Lehet $\sin x$-re negyedfokú is az egyenlet.)

2858. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{8} + l \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{8} + m \cdot \pi$. Osszuk el az egyenletet a nem nulla $\cos^4 x$-szel! Majd vegyük figyelembe, hogy $\frac{1}{\cos^4 x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2$, ezt felhasználva kapjuk, hogy: $\operatorname{tg}^4 x - 4 \cdot \operatorname{tg}^3 x + 4 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$; ezt alkalmas módon alakítsuk szorzattá. Azt kapjuk, hogy $(\operatorname{tg} x - 1)^2 \cdot (\operatorname{tg}^2 x - 2 \cdot \operatorname{tg} x - 1) = 0$.

2859. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Szorozzunk a nevezővel, a $\sin^2 x$ -et alakítsuk át $\cos^2 x$-re, majd rendezzük nullára az egyenletet, ezután alakítsuk szorzattá!

2860. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2861. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot, csak most a $\cos^2 x$-et alakítjuk át $\sin^2 x$ segítségével.

2862. $x \approx -0{,}3218 + k \cdot \pi$. A jobb oldalon emeljünk ki $\sin x$-et, vegyük észre amit ezután észre kell venni. Majd az egyenletet tangensre alakíthatjuk át, ha $\cos x$-szel osztunk.

2863. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. Rendezzünk nullára, majd alakítsuk szorzattá az egyenletet!

2864. $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Alakítsuk át a tangenst, szorozzunk koszinusszal, rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

2865. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2866. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$. Rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá, például úgy, hogy $(\sin x - 1)$-et kiemelünk.

2867. $x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. Rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá úgy, hogy $(1 + \cos x)$-et emeljünk ki!

2868. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Alakítsuk át a kotangenst, szorozzunk szinusszal, majd rendezzük nullára az egyenletet! Ezután alakítsuk szorzattá, például úgy, hogy kiemeljük a $(\sin x + \cos x)$-et.

2869. $x_1 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$. Alakítsuk át a tangenst, szorozzunk a nevezőkkel, egyszerűsítsünk, majd a nullára rendezett egyenletet alakítsuk szorzattá!

2870. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$; $x_5 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + p \cdot 2 \cdot \pi$. Az első két tagból emeljünk ki $2 \cdot \sin x$-et, ezután láthatjuk, hogy szorzattá alakíthatjuk a bal oldalt, ha $\left(\sin x - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} x\right)$-et kiemelünk.

2871. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot \pi$. Rendezzük nullára az egyenletet. Az első két tagból emeljünk ki $\operatorname{tg}^2 x$-et, a második két tagból emeljünk ki (-3)-at! Ezután láthatjuk, hogy a bal oldalt szorzattá alakíthatjuk.

IV

2872. Nincs megoldása az egyenletnek a valós számok halmazán. Hozzuk az egyenletet a következő alakra: $\operatorname{tg}^2 x \cdot (\operatorname{tg} x + 1)^2 + (\operatorname{tg} x - 1)^2 = 0$. Ez akkor és csak akkor igaz, ha az egyes tagok külön-külön nullák.

2873. $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{4 \cdot \pi}{5} + n \cdot 2 \cdot \pi$; $x_5 = -\frac{4 \cdot \pi}{5} + p \cdot 2 \cdot \pi$; $x_6 = \frac{2 \cdot \pi}{5} + q \cdot 2 \cdot \pi$; $x_7 = -\frac{2 \cdot \pi}{5} + r \cdot 2 \cdot \pi$. Az első két tagból emeljük ki a $\cos^2 x$-et. Ezután láthatjuk, hogy szorzattá alakíthatjuk az egyenletet, ha kiemelünk $(\cos x - 1)$-et: $(\cos x - 1) \cdot \left(8 \cdot \cos^2 x \cdot (\cos x + 1) - 1\right) = 0$. A második tényező további szorzattá alakítása: $8 \cdot \cos^3 x + 8 \cdot \cos^2 x - 1 = (8 \cdot \cos^3 x + 1) + 8 \cdot \cos^2 x - 2 =$

$$= 8 \cdot \left(\cos^3 x + \frac{1}{2^3}\right) + 8 \cdot \left(\cos^2 x - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 8 \cdot \left(\cos x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\cos^2 x - \cos x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) + 8 \cdot \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = \ldots \text{ Folytassuk!}$$

2874. $x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. Alakítsuk át a kotangenst és a tangenst a definícióikat használva! Emeljünk ki a bal oldalon $(\sin x + \cos x)$-et! Majd ugyanezt végezzük el a jobb oldalon is, ezután rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

2875. $x_1 \approx 2{,}4754 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$. Alakítsuk át a $\sin^2 x$-et $\cos^2 x$ segítségével! Majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá! $\cos x + \sqrt{\sin x} = \cos^2 x - \sin x$, $\left(\cos x - \sqrt{\sin x}\right)\left(\cos x + \sqrt{\sin x}\right) - \left(\cos x + \sqrt{\sin x}\right) = 0$. A trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldásánál célszerű felvázolni a megfelelő függvény grafikonját, vagy alkalmazni a szögfüggvény egységkörös definícióját.

Trigonometrikus egyenlőtlenségek I. rész

Bevezető feladatok

2876. *a)* $0 + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$. *c)* $0 + k \cdot \pi \le x < \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$. *d)* $0 + k \cdot \pi < x \le \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.

2877. *a)* $\pi + k \cdot 2 \cdot \pi < x < 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$. *c)* $-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < x < 0 + k \cdot \pi$. *d)* $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < x < \pi + k \cdot \pi$.

2878. *a)* $-\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{5 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$. *c)* $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$. *d)* $0 + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$. Másképpen: $\frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{13 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2879. *a)* $\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$. *b)* $0+k\cdot 2\cdot\pi\le x<\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi<x\le 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$. Rövidebben: $\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{7\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$. *c)* $\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{11\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi$. *d)* $0+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{11\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi<x<2\pi+k\cdot 2\cdot\pi$. Rövidebben: $-\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi$.

2880. *a)* $\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$. *b)* $0+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi<x<2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$ vagy $\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{9\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$. *c)* $0+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{7\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$ vagy $-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$. *d)* $\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{7\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$.

2881. *a)* $0+k\cdot\pi\le x<\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$. *b)* $-\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi<x\le\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$. *c)* $\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$. *d)* $-\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi<x<\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi$.

2882. *a)* $\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi<x<\pi+k\cdot\pi$. *b)* $0+k\cdot\pi<x\le\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$. *c)* $0+k\cdot\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$. *d)* $0+k\cdot\pi<x\le\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi$.

Alapvető feladatok

2883. *a)* $x=k\cdot 2\cdot\pi$. *b)* $x=\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$. *c)* Nincs megoldása a valós számok halmazán. *d)* Nincs megoldása a valós számok halmazán.

2884. *a)* $\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{2\pi}{3}+k\pi$. *b)* $\frac{\pi}{8}+k\cdot\pi<x<\frac{3\cdot\pi}{8}+k\cdot\pi$. *c)* $k\cdot\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{2}$. *d)* $-\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}<x\le-\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{2}$.

2885. *a)* $-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\pi+k\cdot 2\cdot\pi$. *b)* $\frac{5\cdot\pi}{8}+k\cdot\pi<x<\frac{7\cdot\pi}{8}+k\cdot\pi$.

2886. *a)* $\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi\le x\le\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot\pi$. *b)* $\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot\pi\le x\le\frac{5\cdot\pi}{4}+k\cdot\pi$.

2887. *a)* $-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$. *b)* $\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$; $-\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi<x<-\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi$.

2888. *a)* $0+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\pi+k\cdot 2\cdot\pi$. Alakítsuk át az egyenletet: $|\sin x|=\sin x$, ebből következik, hogy $\sin x\ge 0$. *b)* $\pi+k\cdot 2\cdot\pi<x\le 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$. Az egyenlet átalakítása és a következtetés után: $\sin x\le 0$. *c)* $-\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi<x\le 0+k\cdot\pi$.

2889. *a)* Minden x valós számra értelmezett a kifejezés, tehát az értelmezési tartomány a valós számok halmaza. *b)* $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$. *c)* $x = k \cdot \pi$. *d)* $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.

2890. *a)* $\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \le x \le \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi$. *b)* $x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_2 = k \cdot \frac{\pi}{3} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$.

c) $2k \le x \le 1 + 2k$. *d)* $-\frac{1}{2} + 2k \le x \le \frac{1}{2} + 2k$.

IV

2891. *a)* $x \ne k \cdot \pi$. *b)* $x \ne \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$. *c)* $x \ne \frac{1}{k}$, (ahol $k \in \mathbf{Z}$). *d)* $x \ne \frac{1}{\frac{1}{2} + k}$, (ahol $k \in \mathbf{Z}$).

2892. *a)* Minden x valós számra értelmezett, tehát a valós számok halmaza az értelmezési tartomány. *b)* $x = 2k$. *c)* $x_1 = \frac{1}{2} + 2k$; $x_2 = \frac{3}{2} + 2l$. *d)* $-\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \le x \le \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$.

2893. *a)* $\pi + k \cdot 4 \cdot \pi \le x \le 2 \cdot \pi + k \cdot 4 \cdot \pi$. *b)* $\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \le x < \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.

c) $0 + k \cdot \pi < x \le \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. *d)* $x_1 = 4k$; $x_2 = 4l + 2$.

Összetettebb feladatok

2894. *a)* $\frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{5 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$.

b) Nincs megoldása az egyenlőtlenségrendszernek a valós számok halmazán.

c) $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{5 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2895. *a)* $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\pi + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \frac{7 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$.

b) $0 + k \cdot \pi < x \le \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < x < \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot \pi$.

c) $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2896. *a)* $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\pi + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd alakítsuk szorzattá!

b) $0 + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$, vagy rövidebben $-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$. *c)* $0 + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2897. *a)* $0 + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{5 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; másképpen $-\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$.

b) $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\pi + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.

c) $\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi;\quad \pi+k\cdot 2\cdot\pi<x<2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi.$

2898. *a)* $0+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi;\quad \frac{5\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi;$ $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$. Oldjuk meg először a $\sin x$-re másodfokú egyenlőtlenséget!

b) $0+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi;\quad \frac{5\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi.$

2899. *a)* $\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{4\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi;\quad 0+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi;$ $\frac{7\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$. *b)* $0+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi;$ $\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{7\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi;\quad \frac{11\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi.$

2900. *a)* $\frac{7\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{11\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi$. A $\cos^2 x$-et alakítsuk át $\sin^2 x$ segítségével, majd ekkor $\sin x$-re egy másodfokú egyenlőtlenséget kapunk, amelyet oldjunk meg!

b) $\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{5\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi.$

2901. *a)* $\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{5\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi;\quad -\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi.$

b) $0+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi;\quad \frac{5\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi;$ $\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi.$

2902. *a)* $\frac{4\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{5\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi;\quad \frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi.$

b) $\frac{5\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{7\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi;\quad -\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi.$

2903. *a)* $\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi\le x\le\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot\pi;\quad -\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi.$

b) $0+k\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi;\quad \frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot\pi\le x\le\pi+k\cdot\pi;\quad \frac{\pi}{3}+k\cdot\pi\le x\le\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot\pi.$

2904. *a)* $-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$. *b)* $\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi\le x\le\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot\pi.$

2905. *a)* $0+k\cdot\pi\le x<\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi;\quad -\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi<x\le-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi.$

b) $-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi<x<\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi.$

2906. *a)* $0+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\pi+k\cdot 2\cdot\pi$. *b)* $\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi.$

c) $0+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\pi+k\cdot 2\cdot\pi$. *d)* $0+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi;$ $\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi.$

IV

2907. *a)* $0+k\cdot 2\cdot\pi\le x<\pi+k\cdot 2\cdot\pi$. *b)* $\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$. *c)* $\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$. *d)* $0+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\pi+k\cdot 2\cdot\pi$.

2908. *a)* $\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$; $0+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{5\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi<x<2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$. *b)* $0+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{11\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{7\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$. *c)* $\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi<x\le\frac{11\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi<x\le\frac{7\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi$. *d)* $\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{4\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{5\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$.

2909. *a)* $\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\pi+k\cdot 2\cdot\pi$; $\pi+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$. *b)* $0+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\pi+k\cdot 2\cdot\pi$. *c)* $0+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\pi+k\cdot 2\cdot\pi$. *d)* $\pi+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\pi+k\cdot 2\cdot\pi$.

2910. *a)* $0+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi<x<2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$. Használjuk a tangens definícióját, majd rendezzük nullára az egyenlőtlenséget! Ezután kapunk egy törtet, ha közös nevezőre hozunk.

b) $\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi\le x<\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{5\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi\le x<\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$. Hasonló módon járhatunk el, mint az előző feladat megoldásánál. *c)* $\pi+k\cdot 2\cdot\pi<x<2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$. *d)* $\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi\le x<\pi+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{7\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi\le x<2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$.

2911. *a)* $0+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\pi+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$. *b)* $0+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi<x\le\pi+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi<x\le\frac{5\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$. *c)* $0+k\cdot 2\cdot\pi<x\le\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\pi+k\cdot 2\cdot\pi<x\le\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$. *d)* $\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi<x\le\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi\le x<2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi\le x<\pi+k\cdot 2\cdot\pi$.

2912. *a)* Az egyenlőtlenség minden x valós számra fennáll. Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $x = k \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $0 + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.
c) $\pi + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.
d) $0 + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.
e) $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $0 + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$;
$\pi + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{5 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{3 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \frac{5 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$.
f) $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $0 + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$;
$\frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{7 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$;
$\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2913. $-2 \le x \le 3$; $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2914. $-\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi < x < \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$.
A $\sin^2 x$-et alakítsuk át $\cos^2 x$ segítségével! Az egyenlőtlenséget alakítsuk át a következő alakra: $0 < 4 \cdot |\cos x|^2 + 4 \cdot |\cos x| - 3$. E $|\cos x|$-re másodfokú egyenlőtlenség megoldásából $|\cos x| > \frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget kapjuk.

2915. $-\frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{5 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk a tangens definícióját, majd alakítsuk át az egyenlőtlenséget a következő alakúra: $0 < 2 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \sqrt{8} \cdot \sin x + 3$. Oldjuk meg ezen $\sin x$-re másodfokú egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy: $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x$.

2916. $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x = \pm \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget úgy, hogy $\sin^2 x$-et alakítjuk át $\cos^2 x$ segítségével. Azt kapjuk, hogy $\frac{(2 \cdot \cos x - 1)^2}{\cos x} \le 0$.

2917. $x \ne k \cdot \frac{\pi}{2}$. Ha $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, akkor $|\sin x| + |\cos x| = 1$, tehát ezekre a számokra nem teljesül az egyenlőtlenség. Ha $x \ne k \cdot \frac{\pi}{2}$, akkor $|\sin x| > \sin^2 x$ és $|\cos x| > \cos^2 x$, így $|\sin x| + |\cos x| > \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Az egyenlőtlenség $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ kivételével minden valós számra igaz.

2918. $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ esetén $x > \sin x$, ezért $x \cdot \sin x > \sin^2 x$, másrészt $\cos x > \cos^2 x$. Adjuk össze a két egyenlőtlenséget!

2919. $2 - \cos^2 x - x \cdot \sin x = (1 - \sin x)^2 + (2 - x) \cdot \sin x > 0$.

Szélsőértékfeladatok

2920. *a)* $f_{max} = 5,\ x_{max} = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi;\quad f_{min} = -1,\ x_{min} = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi.$

b) $g_{max} = 2,\ x_{max} = k \cdot 2 \cdot \pi;\quad g_{min} = -6,\ x_{min} = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi.$

2921. *a)* $f_{max} = 4,\ x_{max} = k \cdot \pi;\quad f_{min} = 1,\ x_{min1} = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi,\ x_{min2} = -\frac{\pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi.$

IV

b) $g_{max} = 1,\ x_{max1} = 0 + k \cdot 2 \cdot \pi,\ x_{max2} = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi;\quad g_{min} = -1,\ x_{min} = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi.$

2922. *a)* $f_{max} = 3,\ x_{max1} = k \cdot 2 \cdot \pi,\ x_{max2} = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi;\quad f_{min} = 2,\ x_{min} = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi.$

b) $g_{max} = 2,\ x_{max} = k \cdot \pi;\quad g_{min} = 1,\ x_{min1} = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi,\ x_{min2} = -\frac{\pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi.$

c) $h_{max} = \frac{3}{2},\ x_{max} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi;\quad h_{min} = 1,\ x_{min1} = l \cdot 2 \cdot \pi,\ x_{min2} = -\pi + m \cdot 2 \cdot \pi.$

2923. $f_{max} = 3,\ x_{max} = k \cdot \pi;\quad f_{min} = 2,\ x_{min1} = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi,\ x_{min2} = -\frac{\pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi.$

2924. $f_{max} = 1,\ x_{max} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi;\quad f_{min} = -1,\ x_{min} = \frac{3 \cdot \pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi.$ Ha felhasználjuk a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, azonosság négyzetre emelésével kapott azonosságot, akkor megmutathatjuk, hogy: $f(x) = \sin x$.

2925. $f_{max} = \frac{17}{8},\ x_{max1} \approx 0{,}8480,\ x_{max2} \approx 2{,}2935;\quad f_{min} = -4,\ x_{min} = \frac{3 \cdot \pi}{2}.$

Alakítsunk ki teljes négyzetet! $f(x) = -2 \cdot \left(\sin x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{17}{8}$. A minimum a $\sin x$ függvény vizsgálatával kapható meg.

2926. $f_{max} = 3 \cdot \sqrt{3} + 7,\ x_{max} = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi;\quad f_{min} = \frac{7}{4},\ x_{min1} = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi,$

$x_{min2} = -\frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Alakítsunk ki teljes négyzetet! $f(x) = \left(\sqrt{3} \cdot \cos x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$.

2927. $f_{min} = 1,\ x_{min} = k \cdot \pi$. Vegyük figyelembe, hogy: $\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$, ezt felhasználva megmutathatjuk, hogy: $f(x) = 2 \cdot \operatorname{tg}^4 x + 1$.

2928. $f_{max} = \frac{1}{2},\ x_{max} = k \cdot 2 \cdot \pi;\quad f_{min} = -\frac{1}{2},\ x_{min} = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget 1-re és $\cos^2 x$-re! $\frac{1 + \cos^2 x}{2} \geq \sqrt{1 \cdot \cos^2 x} = |\cos x|$, ebből mutassuk meg, hogy: $-\frac{1}{2} \leq \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} \leq \frac{1}{2}$.

2929. $f_{min} = 12$. Alakítsuk át f-et a következő alakúra: $f(x) = 9 \cdot x \cdot \sin x + \frac{4}{x \cdot \sin x}$! Ha ezen összeg két tagjára alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget, akkor megkaphatjuk a minimális értéket.

A szinusztétel alkalmazása

Bevezető alapfeladatok

2930. $\approx 52{,}71°$; $\approx 43{,}29°$ a háromszög ismeretlen szögei, $\approx 6{,}89$ cm a háromszög ismeretlen oldala.
2931. $\approx 3{,}11$ cm a háromszög ismeretlen oldala, $\approx 42{,}72°$; $\approx 15{,}28°$ a háromszög ismeretlen szögei.
2932. $\approx 15{,}44$ cm a háromszög ismeretlen oldala, $\approx 27{,}31°$; $\approx 117{,}69°$ a háromszög ismeretlen szögei.
2933. Ez a háromszög nem létezik.
2934. **1. eset:** $\approx 14{,}25$ cm a háromszög ismeretlen oldala, $\approx 42{,}91°$; $\approx 104{,}09°$ a háromszög ismeretlen szögei.
2. eset: $\approx 2{,}53$ cm a háromszög ismeretlen oldala, $\approx 137{,}09°$; $\approx 9{,}91°$ a háromszög ismeretlen szögei.
2935. $\approx 8{,}5$ cm; $\approx 9{,}34$ cm a háromszög ismeretlen oldalai.
2936. ≈ 12 cm; $\approx 9{,}47$ cm a háromszög ismeretlen oldalai.

Alapvető feladatok

2937. Nem létezik ez a háromszög.
2938. **1. eset:** $\approx 71{,}21°$; $\approx 46{,}53°$ a háromszög ismeretlen szögei, $\approx 7{,}05$ cm a háromszög ismeretlen oldala.
2. eset: $\approx 108{,}79°$; $\approx 8{,}96°$ a háromszög ismeretlen szögei, $\approx 1{,}51$ cm a háromszög ismeretlen oldala.
2939. **1. eset:** $\approx 37°12'$; $\approx 108°23'$ a háromszög ismeretlen szögei, $\approx 14{,}44$ cm a háromszög ismeretlen oldala.
2. eset: $\approx 142°48'$; $\approx 2°47'$ a háromszög ismeretlen szögei, $\approx 0{,}74$ cm a háromszög ismeretlen oldala.
2940. **1. eset:** $\approx 85°28'$; $\approx 35°50'$ a háromszög ismeretlen szögei, $\approx 4{,}1$ cm a háromszög ismeretlen oldala.
2. eset: $\approx 94°32'$; $\approx 26°46'$ a háromszög ismeretlen szögei, $\approx 3{,}16$ cm a háromszög ismeretlen oldala.
2941. $\approx 6{,}94$ cm; $\approx 5{,}06$ cm; $\approx 5{,}79$ cm a háromszög ismeretlen oldalai.
2942. $\approx 10{,}62$ cm; $\approx 18{,}12$ cm; $\approx 17{,}43$ cm a háromszög ismeretlen oldalai.
2943. $\approx 3{,}81$ cm; $\approx 4{,}97$ cm; $\approx 5{,}22$ cm a háromszög ismeretlen oldalai.
2944. $\approx 4{,}64$ cm; $\approx 6{,}25$ cm; $\approx 7{,}11$ cm a háromszög ismeretlen oldalai.
2945. Alkalmazzuk a háromszög oldalaira az $a = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$ összefüggést!
2946. Alkalmazzuk a $t = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ képletet, és alkalmazzuk a szinusztételt az a és b oldalakra!
2947. $\approx 7{,}87$ cm; $\approx 6{,}1$ cm a paralelogramma oldalainak a hossza.
2948. $\approx 12{,}69$ cm; $\approx 8{,}87$ cm a paralelogramma oldalainak a hossza.
2949. $\approx 81{,}23$ N; $\approx 212{,}66$ N az összetevők nagysága.
2950. $\approx 24°36'$-es szöget bezáró irányban evezzünk a víz folyásirányához képest.
2951. $\approx 3{,}47$ cm; 3,05 cm; 3,47 cm hosszúságú részekre osztják az egyenesek a szöggel szemközti oldalt.

Összetettebb feladatok

2952. ≈ 13 cm; ≈ 15 cm; ≈ 14 cm a háromszög oldalainak a hossza. Alkalmazzuk a háromszög megfelelő területképletét, ebből kapjuk, hogy $a \cdot b \approx 195$! Alkalmazzuk a szinusztételt a-ra és b-re, majd oldjuk meg az egyenletrendszert!

2953. $a \approx 116$ cm; $b \approx 89$ cm; $c \approx 123$ cm a háromszög oldalainak a hossza, $\beta_1 \approx 43{,}6°$; $\gamma_1 \approx 72{,}39°$ a háromszög másik két szöge, illetve $\beta_2 \approx 8{,}38°$ és $\gamma_2 \approx 107{,}61°$. Alkalmazzuk a háromszög megfelelő területképletét és a feltételi egyenletet! Ebből kapjuk a γ szöget, majd ebből a β szöget. Alkalmazzuk a szinusztételt a-ra és b-re, ebből és a feltételi egyenletből kapjuk a-t és b-t. Írjunk fel egy újabb szinusztételt c-re és például a-ra, ebből kapjuk c-t.

2954. $CD \approx 9{,}66$ cm; $AC = 5 \cdot \sqrt{2} \approx 7{,}07$ cm; $AD = 5$ cm. A kerületi szögek tételéből következik, hogy az $ADC\sphericalangle = 45°$. Ebből következik, hogy $CAD\sphericalangle = 105°$. Alkalmazzuk a szinusztétel következő változatát $a = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$, az ACD háromszög oldalaira!

2955. $\approx 18{,}23$ cm; $\approx 38{,}41$ cm a trapéz alapjai, $\approx 21{,}35$ cm a trapéz szára.

2956. $\approx 5{,}41$ dm a trapéz szára, $\approx 6{,}54$ dm a trapéz hosszabbik alapja, $\approx 23{,}02$ dm^2 a trapéz területe.

2957. $\approx 29{,}1$ cm a trapéz szára, $\approx 4{,}32$ cm a trapéz rövidebbik alapja. Toljuk el önmagával párhuzamosan a 17,5 cm-es szárat úgy, hogy a rövidebbik alap másik végpontjából induljon ki. Ekkor kaptunk egy olyan háromszöget, amelynek egyik oldala 17,5 cm, másik oldala b, harmadik oldala $(38 \text{ cm} - c)$. Gondoljuk meg, hogy ezen háromszögnek ismerjük a szögeit. Ezért két szinusztételt felírva megkaphatjuk a keresett oldalakat.

2958. $\approx 13{,}22$ cm a trapéz rövidebbik alapja, $107{,}2°$; $\approx 40°24'$; $\approx 139°36'$ a trapéz ismeretlen szögei. Toljuk el önmagával párhuzamosan a 7,6 cm hosszú szárat úgy, hogy az a rövidebbik alap másik végpontjából induljon ki. Ekkor kaptunk egy alkalmas háromszöget, amelyre alkalmazzuk a szinusztételt.

2959. ≈ 7 cm a trapéz másik szára, $\approx 78{,}34$ cm^2 a trapéz területe. Toljuk el a 12,5 cm hosszúságú szárat önmagával párhuzamosan úgy, hogy a rövidebbik alap másik végpontjából induljon ki! Ekkor kaptunk egy megfelelő háromszöget, amelynek egy oldalát ismerjük, és ismerjük a szögeit.

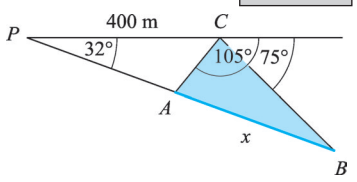
2960. $\approx 11{,}2$ cm; $\approx 13{,}09$ cm; $\approx 7{,}62$ cm a háromszög oldalai, $\approx 35°30'$; $\approx 85°54'$ a háromszög ismeretlen szögei. Először határozzuk meg a magasság és a szögfelező hajlásszögét, az ezt tartalmazó derékszögű háromszögből. Ennek segítségével megkaphatjuk az eredeti háromszög ismeretlen szögeit. Ezután szinusztételekkel számíthatjuk a háromszög oldalait.

2961. $\approx 19{,}57$ cm; $19{,}85$ cm; $\approx 12{,}12$ cm; $\approx 16{,}76$ cm a négyszög ismeretlen oldalai. Alkalmazzuk a szinusztételt négyszer, a két háromszögre, amelyek az ismert átló megrajzolásával keletkeznek!

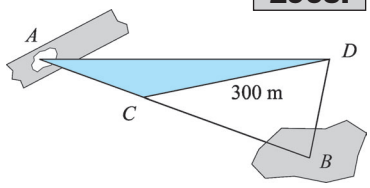
2962. $\approx 162{,}5$ m messze van egymástól a két épület. Határozzuk meg a PCA szöget, majd a PAC szöget! Ezután alkalmazzuk a szinusztételt a PCA háromszögre! Ekkor megkapjuk az AC szakasz hosszát. Majd számítsuk ki az ABC háromszög szögeit. Ezután alkalmazzuk a szinusztételt az ABC háromszögre!

2963. ≈ 480 m a két fa távolsága. Számítsuk ki a háromszögek szögeit! Írjunk fel egy szinusztételt az ACD háromszögre, ebből megkaphatjuk az AC távolságot. Majd írjunk fel egy szinusztételt a BCD háromszögre! Ebből megkaphatjuk a BC szakasz hosszát. Majd $AB = AC + BC$.

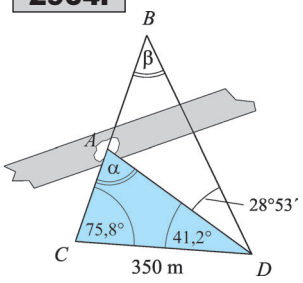
2962.



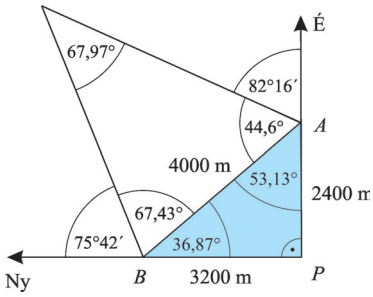
2963.



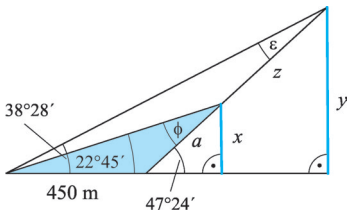
2964.



2965.



2966.



2964. $AB \approx 328$ m a két tereptárgy távolsága. $CBD\sphericalangle = 34°7'$, $CAD\sphericalangle = 63°$. Alkalmazzuk a szinusztételt az ACD háromszögre! Ebből megkaphatjuk az AD szakaszt. $\frac{AD}{350} = \frac{\sin 75{,}8°}{\sin 63°} \Rightarrow$ $\Rightarrow AD \approx 380{,}8$ m. Majd alkalmazzuk a szinusztételt az ABD háromszögre! Ebből számíthatjuk az AB szakaszt. $AB \approx 328$ m.

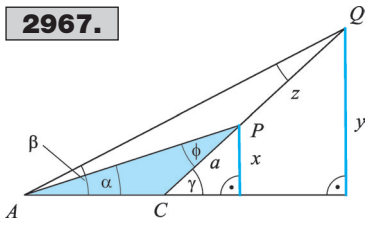
2965. $BC \approx 3030$ m; $AC \approx 3985$ m. Pitagorasz tételével kiszámíthatjuk az AB távolságot. Majd szögfüggvény segítségével számítsuk ki az ABP háromszög szögeit. Ezután kiszámíthatjuk az ABC háromszög szögeit. Majd az ABC háromszögre felírt szinusztétel segítségével kiszámíthatjuk a-t, majd egy másik szinusztétel felírásából kiszámíthatjuk b-t.

$$\frac{BC}{4000} = \frac{\sin 44{,}6°}{\sin 67{,}97°}; \quad \frac{AC}{4000} = \frac{\sin 67{,}43°}{\sin 67{,}97°}.$$

2966. $x \approx 307$ m a közelebbi hegycsúcs magassága; $y \approx 1327$ m; $z \approx 1386$ m a hegycsúcsok távolsága. Először számítsuk ki a Φ szöget, majd alkalmazzunk egy szinusztételt az a oldalra és a 450 m-es oldalra, amelyből kiszámíthatjuk a-t. Ezután szögfüggvénnyel kiszámíthatjuk x-et. Számítsuk ki az ε szöget, majd írjunk fel egy szinusztételt a $z + a$ oldalra és a 450 m-es oldalra, ebből kiszámíthatjuk z-t. Ezután szögfüggvény segítségével kapjuk az y távolságot.

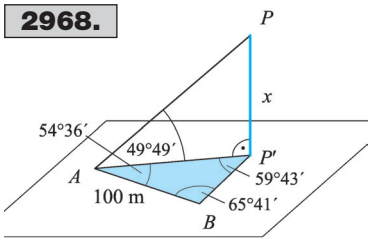
2967. $x = \frac{t \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sin(\gamma - \alpha)}$; $y = \frac{t \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin(\gamma - \beta)}$; $x \approx 349$ m; $y \approx 522$ m magasan vannak a hegycsúcsok a síkság felett. Írjunk fel egy szinusztételt az ACP háromszögre! Másrészt vegyük észre, hogy $\Phi = \gamma - \alpha$, ezekből kapjuk a PC távolságot. Szögfüggvény segítségével ebből kaphatjuk x képletét. Vegyük még figyelembe, hogy $\varepsilon = \gamma - \beta$. Másrészt alkalmazzuk a szinusztételt az ACQ háromszögre, ebből kapjuk a CQ távolságot! Ebből szögfüggvény segítségével kaphatjuk az y képletét.

2967.



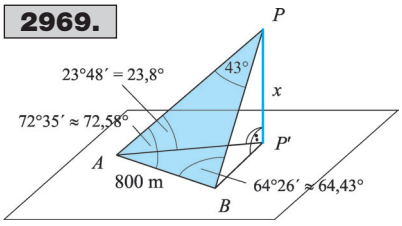
2968. $x \approx 125$ m magas az antenna. Az ABP' háromszögre írjunk fel a szinusztételt az AP' és az $AB = 100$ m-es oldalra, ebből kaphatjuk az AP' szakasz hosszát. Ezután az APP' háromszögre felírva egy megfelelő szögfüggvényt, meghatározhatjuk az $PP' = x$ szakasz hosszát. $\frac{AP'}{100} = \frac{\sin 65°41'}{\sin 59°43'}$, $AP' \approx 105{,}5$ m. $x \approx 105{,}5 \cdot \operatorname{tg} 49°49'$.

2968.

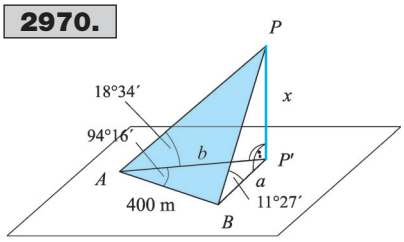


IV

2969.



2970.



2969. $PP' \approx 427$ m magasra emelkedik a hegy a síkság fölé. Alkalmazzuk a szinusztételt az AP és a 800 m-es oldalra, ebből kapjuk AP értékét. Az APP' derékszögű háromszögre alkalmazzunk egy megfelelő szögfüggvényt és ekkor megkaphatjuk a PP' értékét. $\frac{AP}{800} = \frac{\sin 64{,}43°}{\sin 43°}$, $AP \approx 1058$ m.

2970. $x \approx 107{,}4$ m magas az antenna.
Fejezzük ki x-szel az a és a b távolságokat szögfüggvényt alkalmazva! Ezután alkalmazzuk a szinusztételt az ABP' háromszögre! Ekkor x kiesik és az egyenletből meghatározhatjuk az ABP' szöget. Ezen szög segítségével meghatározhatjuk az $AP'B$ szöget. Írjuk fel a szinusztételt az $AP'B$ háromszögben az a és az $AB = 400$ m-es oldalra. Ebből kaphatjuk az $a \approx 530{,}42$ m hosszúságot. A BPP' háromszögre egy megfelelő szögfüggvényt alkalmazva kiszámíthatjuk x-et.

IV

Nehezebb feladatok

2971. $BC = \sqrt{3}$.

2972. $BK = \sqrt{\frac{6}{5}}$.

2973. $AK = \frac{6}{23}$.

2974. $\frac{AB}{AC} = \frac{a}{b} = \frac{5}{9}$.

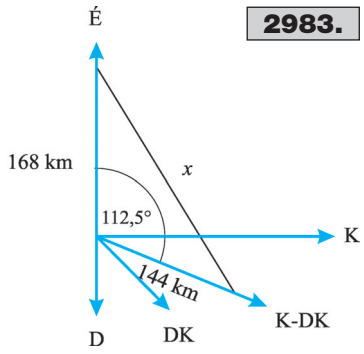
2975. $QM < RS$.

A koszinusztétel alkalmazása

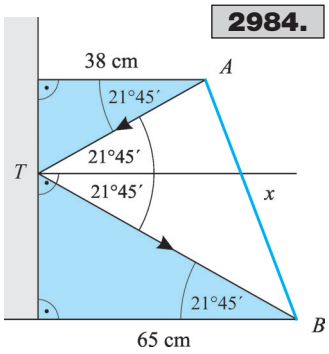
Alapvető feladatok

2976. *a)* $\approx 8{,}1$ cm a harmadik oldal hossza. *b)* $\approx 73{,}4°$ a háromszög legnagyobb szöge. *c)* $\approx 42{,}6°$ a háromszög legkisebb szöge. *d)* $\approx 112{,}41°$; $\approx 29{,}54°$; $\approx 38{,}05°$ a háromszög szögei.
2977. *a)* $\approx$ 26°49′ szög alatt látjuk a két távvezetékoszlop távolságát. *b)* $\approx 11{,}36$ cm az óramutatók végpontjainak távolsága. *c)* **1. eset:** ≈ 154 m az őrházak távolsága. **2. eset:** ≈ 324 m az őrházak távolsága. *d)* $\approx 37{,}3$ N az eredő erő nagysága, $\approx 13{,}31°$ az eredő erő hajlásszöge a 24 N-os erővel. *e)* $\approx 18{,}78$ cm; $\approx 9{,}13$ cm a paralelogramma oldalai; $\approx 45°34'$ és $\approx 134°26'$ a paralelogramma szögei. *f)* $\approx 590{,}88$ cm^2 a paralelogramma területe, $\approx 26{,}93$ cm a paralelogramma keresett átlójának hossza.
2978. $\approx 60{,}31$ cm a másik oldal hossza, $\approx 72{,}71$ cm a hosszabbik átló hossza.
2979. **1. eset:** 5 cm a harmadik oldal hossza; **2. eset:** $\approx 12{,}37$ cm a harmadik oldal hossza.

2983.



2984.

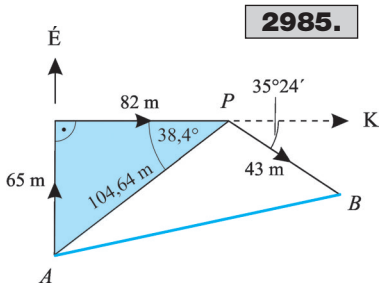


2980. $\approx 42{,}75$ m; $\approx 33{,}47$ m a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 88{,}07°$; $\approx 53{,}14°$ a háromszög ismeretlen szögei.
2981. 6 cm^2 a háromszög területe. Írjuk fel a koszinusztételt a BC szakaszra! Legyen például $AC = x$, ekkor $BC = 7 - x$. A koszinusztételből kaphatjuk, hogy $x = 4$. Ekkor a háromszög oldalhosszai 3 cm, 4 cm, 5 cm. Vegyük észre, hogy e háromszög derékszögű. Miért?
2982. Alkalmazzuk a koszinusztételt a c oldalra, ebből fejezzük ki $\cos\gamma$-t és helyettesítsük be a bizonyítandó egyenletbe.
2983. $x \approx 260$ km lesz a két hajó távolsága 4 óra múlva.
2984. $AB \approx 49{,}2$ cm.

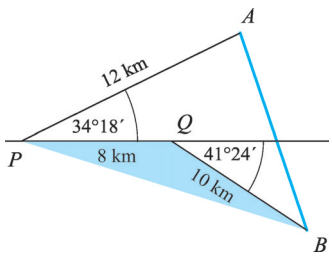
Összetettebb feladatok

2985. $AB \approx 123{,}73$ m. Számítsuk ki először az AP távolságot, majd a BP távolságot és az APB szöget. Ezután alkalmazzuk a koszinusztételt az ABP háromszögben az AB oldalra!
2986. $AB \approx 14{,}5$ km a két község távolsága légvonalban. Először számítsuk ki a PQB szöget, majd a PB szakaszra írjuk fel a koszinusztételt a PQB háromszögben. Szinusztétellel vagy koszinusztétellel számítsuk ki QBP szöget. Ezután az AB szakaszra írjuk fel a koszinusztételt az APB háromszögben.
2987. 15 cm és 8 cm hosszúak az óramutatók. Legyen a nagymutató hossza a, a kismutató hossza b. 2 órakor 60°-os szöget zárnak be az óramutatók, írjuk fel a koszinusztételt: $13^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 60°$. Másrészt 9 órakor az óramutatók derékszöget zárnak be, írjuk fel Pitagorasz tételét: $a^2 + b^2 = 17^2$. Oldjuk meg az egyenletrendszert!

2985.



2986.



2988. $\approx 5{,}92$ cm a rövidebbik alap hossza, $\approx 17{,}34$ cm a szárak hossza, $\approx 50°27'$; $\approx 129°33'$ a trapéz szögei. Számítsuk ki először a trapéz szárát koszinusztétellel. Majd számítsuk ki a trapéz hosszabbik alapján levő szögét, szintén koszinusztétellel. Húzzuk be a trapéz magasságait a rövidebbik alap végpontjainál. Folytassuk!

2989. $\approx 38{,}05$ cm a trapéz ismeretlen szára, $\approx 43°29'$; $\approx 136°31'$ a trapéz ismeretlen szögei. Toljuk el a 27,5 cm-es szárat önmagával párhuzamosan úgy, hogy a rövidebbik alap másik végpontjából induljon ki. Ekkor kapunk egy olyan háromszöget, amelyre felírva egy koszinusztételt, megkaphatjuk az ismeretlen szárat. Ugyanerre a háromszögre felírt egy másik koszinusztétellel kaphatjuk a hosszabbik alapon levő ismeretlen szöget.

IV

2990. $\approx 29°47'$; $\approx 150°13'$; $\approx 124°44'$; $\approx 55°16'$; a trapéz szögei. Toljuk el önmagával párhuzamosan az 52 m-es szárat, úgy, hogy a rövidebbik alap másik végpontjából induljon ki. Ekkor kaptunk egy alkalmas háromszöget, amelyre alkalmazhatjuk a koszinusztételt.

2991. $\approx 15{,}83$ cm a háromszög ismeretlen oldala. Először számítsuk ki az ismeretlen oldallal szemközti szöget koszinusztétel segítségével, amelyet az ismert súlyvonalra írunk fel. Majd alkalmazzuk a koszinusztételt az eredeti háromszögben az ismeretlen oldalra!

2992. $\approx 11{,}83$ cm a harmadik oldal hossza. Tükrözzük a háromszöget az ismeretlen oldal felezőpontjára! Ekkor egy paralelogrammát kapunk, ha az eredeti háromszöget és a tükörképét együtt tekintjük. Tekintsük ennek a paralelogrammának azt a részháromszögét, amelynek egyik oldala az ismert súlyvonal kétszerese, vagyis 20,8 cm, a többi oldala 8,2 cm és 14,8 cm. Koszinusztétel segítségével meghatározhatjuk ennek a háromszögnek azt a szögét, amely a 14,8 cm-es oldallal van szemben. Ezután írjunk fel egy újabb koszinusztételt arra a háromszögre, amelyben az ismeretlen oldal fele, a 8,2 cm és a 10,4 cm-es oldalak, illetve az előbb meghatározott szög, szerepel.

2993. $\approx 27{,}66$ cm a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal hossza. Tükrözzük a háromszöget a harmadik oldal felezőpontjára! Ekkor kapunk egy paralelogrammát. Írjunk fel egy koszinusztételt a paralelogramma azon részháromszögére, amelynek egyik oldala az ismeretlen súlyvonal kétszerese, másik két oldala 28 cm, illetve 45 cm. Ezen két oldal által bezárt szöget előbb persze könnyen kiszámítjuk.

2994. $\approx 16{,}54$ cm; $\approx 9{,}46$ cm a paralelogramma oldalai. Írjunk fel egy koszinusztételt a 18 cm-es oldalra. Az a és b a háromszög másik két oldala. Másrészt a feltételből $a + b = 26$ cm. Oldjuk meg az egyenletrendszert!

2995. 7 cm, illetve 9 cm a két átló hossza. Írjunk fel egy koszinusztételt az x hosszúságú átlóra, majd az $x + 2$ hosszúságú átlóra! Használjuk fel, hogy $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. Oldjuk meg ezután az egyenletrendszert. Például úgy, hogy összeadjuk az egyenletek megfelelő oldalait, ekkor $\cos\alpha$ kiesik és egy másodfokú egyenletet kapunk x-re, amelyet könnyen megoldunk.

2996. Mindegyik oldalra írjunk fel egy-egy koszinusztételt! Mégpedig azon háromszögekben, amelyeknek oldalai az ismeretlen oldal és az átlók félhosszúságai. Legyen φ az átlók hajlásszöge, ekkor használjuk fel, hogy $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$. Adjuk össze az előbb felírt két koszinusztételt, használjuk fel az előbbi összefüggést és rendezés után megkapjuk a bizonyítandó állítást.

2997. *a)* Írjunk fel két koszinusztételt, az egyiket az a, $\frac{c}{2}$, s_c oldalakkal bíró háromszögben az a oldalra. A másikat a b, $\frac{c}{2}$, s_c oldalú háromszögben a b oldalra. Legyen φ az s_c és a c oldal hajlásszöge, ekkor használjuk ki, hogy $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$. Adjuk össze a két koszinusztétel megfelelő oldalait, ekkor a φ-t tartalmazó tagok kiesnek, és rendezés után megkapjuk s_c keresett képletét. *b)* Az előbb igazolt súlyvonalképlet segítségével írjuk fel a súlyvonalak hosszának négyzeteit, majd adjuk ezeket össze és megkapjuk a bizonyítandó összefüggést.

2998. Írjunk fel két koszinusztételt az s_a, illetve s_b súlyvonalakra:

$s_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot b \cdot \cos\gamma$; $\quad s_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos\gamma$. Képezzük a két egyenlet kü-

lönbségét, majd használjuk fel, hogy a feltétel szerint $a < b$! $s_a^2 - s_b^2 = \frac{3}{4}\left(b^2 - a^2\right) \Rightarrow s_a > s_b$. Hiszen $b^2 - a^2$ pozitív szám $b > a$ miatt.

2999. $72\,\text{cm}^2$ a háromszög területe. Legyen ABC a keresett területű háromszög, ahol $AC = 10\,\text{cm}$, és F az AB oldal felezőpontja, míg E a BC oldal felezőpontja. Legyen S az ABC háromszög súlypontja. Ekkor $AS = 8\,\text{cm}$, $CS = 6\,\text{cm}$. Miért? $t_{ABC} = 2 \cdot t_{ACF}$. Miért? Alkalmazzuk az ASC háromszögre a koszinusztételt, mégpedig az AS oldalra felírva! Legyen φ az AS oldallal szemközti szög az említett háromszögben. Ekkor az előző koszinusztételből kaphatjuk, hogy $\cos\varphi = \frac{3}{5}$. Ebből $\sin\varphi = \frac{4}{5}$, miért? Írjuk fel az ACF háromszög területképletét, amelyből kaphatjuk, hogy $t_{ACF} = 36\,\text{cm}^2$. Ebből pedig $t_{ABC} = 72\,\text{cm}^2$.

3000. $BC = \sqrt{40}\ \text{cm} \approx 6{,}32\,\text{cm}$. Az ABF háromszögben és a BCE háromszögben írjunk fel egy-egy koszinusztételt az AF szakaszra, illetve a CE szakaszra. Itt F a BC oldal felezőpontja és E az AB oldal felezőpontja. Oldjuk meg az egyenletrendszert, amelyben az egyik ismeretlen $BC = a$, míg a másik ismeretlen $\cos\beta$.

3001. $AD = 2$ egység. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt, amelyből kaphatjuk, hogy $\frac{DB}{CD} = 2$. Legyen $CD = x$ és így $DB = 2x$. Alkalmazzuk a koszinusztételt a CAD háromszögre és a DAB háromszögre! Az egyenletrendszert megoldva kaphatjuk, hogy $AD = y = 2$. Keressünk elemibb megoldást, amely nem használ koszinusztételt. Legyen az E pont olyan, hogy BE párhuzamos DA-val és ABE szabályos háromszög. Ekkor a BEC háromszög hasonló a DAC háromszöghöz. Miért?

3002. $r = \frac{56}{9} \approx 6{,}22$ egység a keresett kör sugara. Legyen a 13 és a 14 egység hosszúságú oldalak által bezárt szög γ. Legyen O a keresett sugarú kör középpontja, ekkor O rajta van a γ szög szögfelezőjén. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt erre a szögfelezőre! Ebből megkaphatjuk, hogy az O pont $\frac{65}{9}$ és $15 - \frac{65}{9}$ egységnyi részekre osztja fel a 15 egység hosszúságú oldalt. Írjuk fel a koszinusztételt az eredeti háromszögre, mégpedig a 14 egység hosszúságú oldalra! Ebből megkaphatjuk, hogy a 13 egység és a 15 egység hosszúságú oldalak α szögére fennáll, hogy: $\cos\alpha = \frac{33}{65}$. Ebből következik, hogy $\sin\alpha = \frac{56}{65}$. Miért? Másrészt $\frac{r}{x} = \sin\alpha$, ahol $x = \frac{65}{9}$.

3003. **1. eset:** $2 \cdot \sqrt{\frac{64}{17}} \approx 3{,}88$ egység; $5 \cdot \sqrt{\frac{64}{17}} \approx 9{,}70$ egység a másik két oldal hossza.

2. eset: $2 \cdot \sqrt{\frac{64}{41}} \approx 2{,}50$ egység; $5 \cdot \sqrt{\frac{64}{17}} \approx 6{,}25$ egység a másik két oldal hossza.

Legyen γ az AB oldallal szemközti szög. Alkalmazzuk az $\alpha = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$ képletet! Ebből $\sin\gamma = \frac{4}{5}$, és ebből $\cos\gamma = \frac{3}{5}$ vagy $\cos\gamma = -\frac{3}{5}$. Legyen a másik két oldal hossza $2x$, illetve $5x$. Írjunk fel egy koszinusztételt a 8 egység hosszúságú oldalra! Ekkor x-re kapunk egy egyenletet, amelyből x-et könnyen kifejezhetjük.

3004. $\frac{3}{2}$ a paralelogramma két szomszédos oldalának aránya, vagy $\frac{2}{3}$, de ez ugyanaz a paralelogramma. Írjunk fel az átlókra egy-egy koszinusztételt, majd képezzük az átlók négyzeteinek

a hányadosát! Az a és b oldalakat tartalmazó kapott tört számlálóját és nevezőjét osszuk el b^2-tel. S így olyan egyenletet kapunk, amelyben $\frac{a}{b}$ lesz az ismeretlen. Oldjuk meg erre az egyenletet! Kapjuk, hogy $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, illetve ennek a reciprokát.

3005. $\approx 67{,}96$ m a trapéz hosszabbik alapja és ugyanekkora a trapéz egyik szára; $\approx 54{,}37$ m a trapéz rövidebbik alapja; $\approx 62{,}29$ m a trapéz másik szára. Határozzuk meg először a szabályos háromszög, illetve a másik háromszög területét. Kapjuk, hogy a szabályos háromszög területe 2000 m^2. Írjuk fel erre a szabályos háromszögre a trigonometrikus területképletet! Ebből kaphatjuk, hogy $a = \sqrt{\frac{8000}{\sqrt{3}}} \approx 67{,}96$ m a trapéz hosszabbik alapja, illetve az egyik szára. A másik háromszögre felírt trigonometrikus területképletből kaphatjuk, hogy a trapéz rövidebbik alapja $c \approx 54{,}37$ m hosszú. Az ismeretlen b szárra írjunk fel egy koszinusztételt!

3006. $\approx 57°34'$; $\approx 142°21'$ a négyszög ismeretlen szögei, $\approx 12{,}14$ cm a négyszög ismeretlen oldala. Húzzuk be a négyszög azon átlóját, amely a 8 cm-es és a 13 cm-es oldalak közös csúcspontjából indul ki. Számítsuk ki ezen átló hosszát koszinusztétellel! Majd az ismeretlen oldalt, illetve az egyik ismeretlen szöget egy-egy koszinusztétellel számíthatjuk ki.

3007. $\approx 114°10'$; $\approx 83°29'$; $\approx 86°33'$ a négyszög ismeretlen szögei. Húzzuk meg a négyszög azon átlóját, amely a 8 cm-es és az 5 cm-es oldalak közös csúcspontjából indul ki. Számítsuk ki koszinusztétellel ezen átló hosszát! Ezután három koszinusztételt felírva meghatározhatjuk a négyszög két ismeretlen szögét. Az utolsó szöget ezután könnyen kaphatjuk.

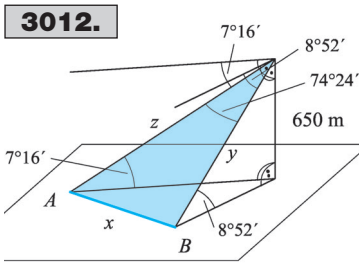
3008. $AC = 7$ egység, $t_{ABCD} = 5 \cdot \sqrt{6} + \frac{15}{4} \cdot \sqrt{3} \approx 18{,}74$ területegység. Írjuk fel a koszinusztételt az ABC háromszögben az AC oldalra! Ebből kaphatjuk, hogy $AC = 7$. Vegyük észre, hogy az ADC háromszög derékszögű! Miből következik ez? Eztán számítsuk ki az ACD háromszög területét és az ABC háromszög területét!

3009. $\approx 82°51'$; $\approx 97°9'$; $\approx 113°19'$; $\approx 66°41'$ a húrnégyszög szögei. Húzzuk meg a húrnégyszög átlóit! Tekintsük azt az e átlót, amely a 42 cm-es és a 35 cm-es oldalak közös csúcspontjából indul ki. Ez két háromszögre vágja a húrnégyszöget. Alkalmazzuk a koszinusztételt mindegyik háromszögben az e átlóra! Ekkor oldjuk meg az egyenletrendszert, felhasználva, hogy $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 82°51'$. Ebből kapjuk, hogy $\gamma \approx 97°9'$. Írjunk fel most az f átlóra két koszinusztételt! Használjuk fel, hogy $\cos(180° - \beta) = -\cos\beta$. Az egyenletrendszer megoldásából kapjuk, hogy: $\beta \approx 113°19'$. Ebből kapjuk, hogy $\delta \approx 66°41'$.

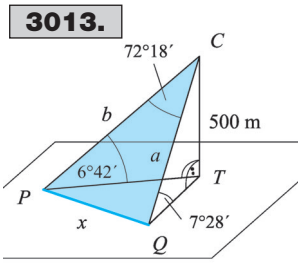
3010. Legyen $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Írjunk fel négy koszinusztételt az átlók behúzása után keletkezett négy háromszögre! Legyen φ az átlók hajlásszöge, x és $e - x$ az e átló két szakasza, y és $f - y$ az f átló két szakasza. Ekkor $a^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos(180° - \varphi)$;
$c^2 = (e-x)^2 + (f-y)^2 - 2 \cdot (e-x) \cdot (f-y) \cdot \cos(180° - \varphi)$; $b^2 = x^2 + (f-y)^2 - 2 \cdot x \cdot (f-y) \cdot \cos\varphi$;
$d^2 = y^2 + (e-x)^2 - 2 \cdot y \cdot (e-x) \cdot \cos\varphi$. Ezeket helyettesítsük be az $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ egyenletbe! Addig facsarjuk a kapott egyenletet, amíg például a következőt nem kapjuk:
$(e \cdot f - x \cdot y) \cdot \cos\varphi = 0$. Ebből következik, hogy $\cos\varphi = 0$, vagyis $\varphi = 90°$, tehát a négyszög átlói merőlegesek egymásra.

3011. $\varphi \approx 19{,}47°$. Legyen $AB = 1$, és legyen az O pont az AC szakasz felezőpontja. A Pitagorasz-tételt felhasználva kaphatjuk, hogy $OB = \frac{\sqrt{2}}{2}$, másrészt $OH = \sqrt{\frac{3}{2}}$ és $HB = \sqrt{3}$. Vegyük észre, hogy a BHO szög a keresett szög! Alkalmazzuk a koszinusztételt a HOB háromszögben az OB oldalra! Ekkor megkaphatjuk, hogy a φ-vel jelölt BHO szögre: $\cos\varphi = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$, ebből $\varphi \approx 19{,}47°$.

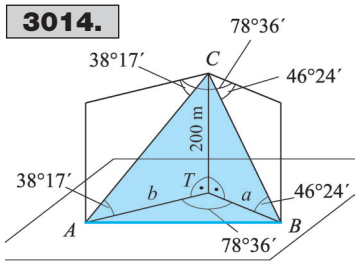
3012.



3013.



3014.

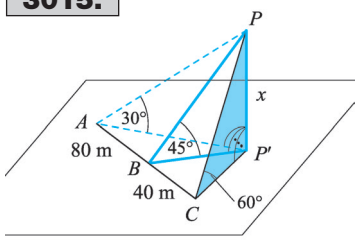


3012. ≈ 5704 m a két hajó távolsága. Megfelelő szögfüggvény segítségével számítsuk ki az y távolságot, majd a z távolságot! Ezután írjunk fel egy koszinusztételt az x, y, z oldalú háromszögben az x oldalra!

3013. $x \approx 4800$ m a két helység távolsága. Először számítsuk ki a $QC = a$ és a $PC = b$ távolságokat. Majd alkalmazzuk a koszinusztételt a PQC háromszögre!

3014. $AB = x \approx 295{,}3$ m a keresett távolság hossza. Számítsuk ki megfelelő szögfüggvény segítségével a $BT = a$ és az $AT = b$ távolságokat. Írjuk fel a koszinusztételt az ABT háromszögre!

3015.



3015. $PP' = x = 120$ m magas az antenna. $BP' = x$, miért? Az egyes derékszögű háromszögekre tangens szögfüggvényt alkalmazva kaphatjuk, hogy: $AP' = x \cdot \sqrt{3}$, $CP' = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$. Írjunk fel egy-egy koszinusztételt az ABP' háromszögben, illetve a BCP' háromszögben az AP' oldalra, illetve a CP' oldalra! Legyen az ABP' szög röviden φ-vel jelölve. Ekkor: $\left(x \cdot \sqrt{3}\right)^2 = 80^2 + x^2 - 2 \cdot 80 \cdot x \cdot \cos\varphi$, másrészt $\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 = 40^2 + x^2 - 2 \cdot 40 \cdot x \cdot \cos(180° - \varphi)$. Használjuk fel, hogy $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$. Ezután oldjuk meg az egyenletrendszert! Például úgy, hogy az egyik egyenletből kifejezzük $x \cdot \cos\varphi$ -t és ezt behelyettesítjük a másik egyenletbe. Ekkor már csak x lesz az ismeretlen, amelyet könnyen meghatározhatunk a kapott egyenletből.

3016. Alkalmazzuk kétszer a koszinusztételt egyrészt a c oldalra felírva, másrészt a b oldalra felírva. Fejezzük ki ezekből $\cos\gamma$-t, illetve $\cos\beta$-t , majd ezeket helyettesítsük be a megadott feltételi egyenletbe. Ebből kapjuk, hogy $b = c$, vagyis a háromszög egyenlő szárú.

3017. Alkalmazzuk kétszer a koszinusztételt egyrészt az a oldalra felírva, másrészt a b oldalra felírva. Majd fejezzük ki ezekből $\cos\alpha$-t, illetve $\cos\beta$-t, majd ezeket helyettesítsük be a megadott egyenletbe. Kapjuk, hogy $a = b$, vagyis a háromszög egyenlő szárú.

3018. Alkalmazzuk kétszer a koszinusztételt egyrészt a c oldalra felírva, másrészt a b oldalra felírva. Fejezzük ki ezekből $\cos\gamma$-t, illetve $\cos\beta$-t , majd ezeket helyettesítsük be a bizonyítandó egyenlőség bal oldalába. Átalakítások után kaphatjuk, hogy teljesül a bizonyítandó egyenlőség.

3019. Alkalmazzuk háromszor a koszinusztételt az a, b, illetve a c oldalra. Ezekből fejezzük ki a szögek koszinuszait és helyettesítsük be a bizonyítandó egyenlőség bal oldalába. A megfelelő átalakítások után kapjuk, hogy valóban teljesül a bizonyítandó egyenlőség.

3020. Vegyük figyelembe, hogy $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, másrészt a koszinusztételből $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$, így $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4 \cdot t}$. Folytassuk!

IV

3021. Alkalmazzuk a koszinusztételt az egyes oldalakra és mindegyikből fejezzük ki a szög koszinuszát! A kapott képleteket helyettesítsük be a bizonyítandó egyenlőség bal oldalába, majd ezt addig alakítsuk amíg meg nem kapjuk a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalát.

3022. Kissé egyszerűsítsük a feltételi egyenlőség bal oldalát úgy, hogy elvégezzük a kijelölt műveleteket! Majd alkalmazzuk a koszinusztételt az a oldalra felírva. Ezt helyettesítsük be az előző egyenletbe, a rendezés után kapjuk, hogy $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, ebből $\alpha = 60°$.

IV

3023. Hozzunk közös nevezőre a bal oldalon, majd szorozzunk a bal oldal és a jobb oldal nevezőjével. Az átalakítások után kapjuk, hogy $a^2 - ac + c^2 = b^2$. Alkalmazzuk most a koszinusztételt a b oldalra, majd az így kapott b^2 kifejezését helyettesítsük be az előző egyenletbe. Ezután kaphatjuk, hogy $\cos\beta = \frac{1}{2}$, és ebből $\beta = 60°$.

3024. Szorozzunk be a nevezőkkel, az átalakítások után kaphatjuk, hogy $a^2 + c^2 + ac = b^2$. Alkalmazzuk a koszinusztételt a b oldalra! A b^2-re kapott képletet helyettesítsük be az előző egyenletbe, amelyből kaphatjuk, hogy $\cos\beta = -\frac{1}{2}$, ebből $\beta = 120°$.

3025. Alkalmazzuk a koszinusztételt a b oldalra és a c oldalra is! Ezekből fejezzük ki a megfelelő szögek koszinuszait, majd ezeket helyettesítsük be feltételi egyenlet bal oldalába. A kapott egyenletnél szorozzunk a nevezőkkel, majd rendezés után kaphatjuk, hogy: $a^2 \cdot b + a^2c - (b^3 + c^3) = b^2c + bc^2 \Rightarrow a^2\,(b + c) - (b + c)(b^2 - bc + c^2) = bc\,(b + c) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \alpha = 90°$.

3026. Alkalmazzuk a koszinusztételt az a, illetve a b oldalra! Ezekből fejezzük ki a megfelelő szögek koszinuszait, majd ezeket helyettesítsük be a feltételi egyenletbe! Szorozzunk a nevezőkkel, rendezzük az egyenletet és például azt kaphatjuk, hogy:
$0 = (a^4 - b^4) + (b^2c^2 - a^2c^2)$, ebből $0 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - c^2(a^2 - c^2)$, ebből
$0 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$, ebből pedig az következik, hogy $a = b$ vagyis a háromszög egyenlő szárú, vagy pedig a háromszög derékszögű. Miért? (Vigyázat! Itt a „vagy” természetesen nem kizáró „vagy”, ezért a háromszög lehet egyenlő szárú derékszögű háromszög is.)

3027. A két egyenletből egyrészt (1) $\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot a^2 = b^2 + c^2$. Másrészt a második megadott egyenletet négyzetre emelve: (2) $\frac{4}{3} \cdot a^2 = (b + c)^2$. Végezzük el itt a négyzetre emelést, majd a kapott egyenletből vonjuk ki az (1) egyenletet. Kapjuk, hogy (3) $bc = \frac{a^2}{3} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)$. Alkalmazzuk most a koszinusztételt az a oldalra! A kapott egyenletbe helyettesítsük be bc képletét a (3) egyenletből, ezenkívül helyettesítsük be $b^2 + c^2$ képletét az (1) egyenletből! Majd oszthatjuk a kapott egyenletet a^2-tel, ekkor a kiesik. Az egyenletből kifejezhetjük, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = 30°$.

3028. Szorozzunk be a nevezővel! Emeljünk ki mindegyik oldalon $(b + c)$-t, majd osszunk ezzel a nem nulla kifejezéssel, kapjuk, hogy $b^2 - bc + c^2 = a^2$. Alkalmazzuk a koszinusztételt az a oldalra! Az a^2-re kapott kifejezést helyettesítsük be az előző egyenletbe. Rendezés és bc-vel való osztás után kaphatjuk, hogy $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, ebből $\alpha = 60°$.

3029. $t = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ területegység a háromszög területe. Alkalmazzuk a koszinusztételt az a oldalra, majd helyettesítsük be ide a megadott $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ értéket! Egyrészt azt kapjuk, hogy (1) $bc = b^2 + c^2 - 6$. Másrészt a megadott egyenlet négyzetre emelése után azt kaphatjuk, hogy

(2) $b^2+c^2=12+6\cdot\sqrt{3}-2\cdot bc$. (2)-ből helyettesítsük be (1)-be a b^2+c^2 képletét! Kapjuk, hogy (3) $bc=2+2\cdot\sqrt{3}$. Másrészt $t=\frac{bc\cdot\sin\alpha}{2}$, ide behelyettesítve bc-t (3)-ból és az $\alpha=60°$-os szöget, kapjuk, hogy $t=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ területegység a háromszög területe.

3030. $t=6\cdot\sqrt{3}$ területegység a legkisebb kerületű megfelelő háromszög területe. Alkalmazzuk a c oldalra a koszinusztételt! A feltételi egyenletből: $c=5a-b$, ezt helyettesítsük be az előbb felírt koszinusztételbe. Kapjuk, hogy $24a^2-9ab=0$, ebből $8a=3b$, mert $a>0$. Legyen $a=3\cdot k$ és $b=8\cdot k$, ahol k tetszőleges pozitív egész szám. A legkisebb oldalak akkor lesznek, ha $k=1$, ekkor $a=3$ és $b=8$. A feltételi egyenletből $c=7$. A $t=\frac{ab\cdot\sin\gamma}{2}$ egyenletből kaphatjuk a keresett területet.

3031. Alkalmazzuk a koszinusztételt az a oldalra! Fejezzük ki innen a megfelelő szög koszinuszát, miután behelyettesítettük az a megadott képletét, kapjuk, hogy: egyrészt $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2}{2\cdot bc}-\frac{1}{2}$, másrészt $\frac{b^2+c^2}{2}\geq bc$. Miért? Ezeket felhasználva kapjuk, hogy: $\cos\alpha\geq\frac{1}{2}$. Ebből következik, hogy: $\alpha\leq 60°$. Tehát a feladat kérdésére a válasz: igaz.

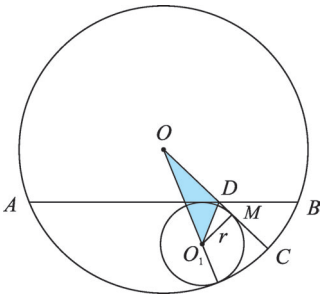
3032. $\alpha\leq 30°$ következik a háromszög α szögére. Alkalmazzuk a koszinusztételt az a oldalra! Majd a kapott a^2-re való képletet helyettesítsük be a megadott egyenletbe. Ezután fejezzük ki a megfelelő szög koszinuszát, kapjuk, hogy: $\cos\alpha=\frac{b^2+3\cdot c^2}{4\cdot bc}$, ebből $\cos\alpha=\frac{b}{4\cdot c}+\frac{3\cdot c}{4\cdot b}$. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az előző összeg két pozitív tagjára! Kapjuk, hogy $\frac{\frac{b}{4\cdot c}+\frac{3\cdot c}{4\cdot b}}{2}\geq\sqrt{\frac{b}{4\cdot c}\cdot\frac{3\cdot c}{4\cdot b}}=\sqrt{\frac{3}{4^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. Ebből $\cos\alpha\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$, innen pedig $\alpha\leq 30°$ következik.

3033. $\alpha\leq 60°$ következik a háromszög α szögére. Alkalmazzuk a koszinusztételt a háromszög a oldalára! Majd az itt a^2-re kapott képletet helyettesítsük be a megadott egyenletbe. Innen kifejezve a megfelelő szöget, kapjuk, hogy: $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2}{4\cdot bc}$. Ebből $\cos\alpha=\frac{b}{4\cdot c}+\frac{c}{4\cdot b}$. Alkalmazzuk most az előző összeg két tagjára a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget! Kapjuk, hogy: $\frac{\frac{b}{4\cdot c}+\frac{c}{4\cdot b}}{2}\geq\sqrt{\frac{b}{4\cdot c}\cdot\frac{c}{4\cdot b}}=\frac{1}{4}$. Ebből $\cos\alpha\geq\frac{1}{2}$, innen pedig $\alpha\leq 60°$ következik.

Nehezebb feladatok

3034. Vegyük észre, hogy $a>b>c$. Miért? Ebből következik, hogy az α a legnagyobb szög ebben a háromszögben. Írjuk fel az a oldalra a koszinusztételt és az egyenletből fejezzük ki a szög koszinuszát! A rendezés és egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, ebből pedig $\alpha=120°$ következik.

3038.



3035. A háromszög legnagyobb oldala x^2+x+1. Miért? Írjuk fel a legnagyobb oldalra a koszinusztételt! $(x^2+x+1)^2 = (2x+1)^2+(x^2-1)^2-2\cdot(2x+1)(x^2-1)\cdot\cos\gamma$.
Ebből $\cos\gamma = \dfrac{-2\left(x^3-x\right)-\left(x^2-1\right)}{2\cdot(2x+1)\left(x^2-1\right)} = -\dfrac{1}{2}$. Miért? Ebből következik, hogy $\alpha = 120°$.

3036. $t = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ területegység a háromszög területe.

3037. 44 egység a háromszög kerülete.

3038. $r = 2\cdot\sqrt{21}-9 \approx 0{,}165$ egység a keresett kör sugara.

3039. $V_{max} = 8\cdot\sqrt{6}$ térfogategység a gúla maximális térfogata.

3040. 8 egység az e és f egyenesek távolsága.

IV

A szinusztétel és a koszinusztétel alkalmazása

Alapvető feladatok

3041. $b \approx 33{,}52$ cm a másik oldal hossza, $f \approx 23{,}8$ cm a másik átló hossza. Írjunk fel egy koszinusztételt a paralelogramma ismeretlen oldalára! Kapjuk, hogy $b \approx 33{,}52$ cm. Majd írjunk fel egy szinusztételt az $a \approx 28$ cm, a b oldal és az $e = 57$ cm oldal alkotta háromszögre! Kapjuk, hogy a 28 cm-es oldallal szemközti szög $\delta = 20{,}1°$. Ezután könnyen megkaphatjuk a paralelogramma szögeit: $\approx 44{,}4°$, illetve $\approx 135{,}6°$. Az ismeretlen átlóra írjunk fel például egy újabb koszinusztételt!

3042. $\approx 5{,}43$ cm a másik oldal hossza, $\approx 24{,}47$ cm^2 a területe, $\approx 69{,}87°$ és $\approx 110{,}13°$ a szögei. Koszinusztétellel számíthatjuk az ismeretlen oldalt. Majd szinusztételt alkalmazva kaphatjuk a paralelogramma egyik szögét, majd ebből a másik szögét. Ezután számíthatjuk a paralelogramma területét.

3043. $\approx 7{,}53$ cm a kör sugara. Alkalmazzuk a koszinusztételt a megadott szöggel szemközti háromszögoldalra. Ebből kapjuk, hogy $\approx 10{,}136$ cm az adott szöggel szemközti húr. Majd használjuk fel az $\alpha = 2\cdot R\cdot\sin\alpha$ változatát a szinusztételnek. Ebből kaphatjuk a sugarat.

3044. $\approx 79{,}89$ cm^2 a körszelet területe. Koszinusztétellel kaphatjuk a 15 cm-es oldallal szemközti szöget: $\gamma \approx 85{,}46°$. A szinusztétel $c = 2\cdot R\cdot\sin\gamma$ változatával kaphatjuk a kör sugarát: $R \approx 7{,}52$ cm. Számítsuk ki a megfelelő körcikk területét: $\approx 84{,}35$ cm^2, majd számítsuk ki a megfelelő háromszög területét: $t_\Delta = \dfrac{R^2\cdot\sin(2\cdot\gamma)}{2} \approx 4{,}46$ cm^2. Majd vonjuk ki a körcikk területéből a háromszög területét és megkapjuk a körszelet területét.

3045. ≈ 8 cm; ≈ 10 cm a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 41{,}41°$; $\approx 55{,}77°$ a háromszög ismeretlen szögei. Írjuk fel az ismert $a = 12$ cm-es oldalra a koszinusztételt:
$12^2 = b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos 82{,}82°$. Másrészt tudjuk, hogy $b+c = 12$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! $b \approx 8$ cm; $c \approx 10$ cm, illetve fordítva. Írjuk fel a szinusztételt az a és a b oldalra. Ebből kapjuk a $b \approx 41{,}41°$ szöget és ebből a $\gamma \approx 55{,}77°$ szöget, illetve fordítva.

3046. ≈ 19 cm, ≈ 13 cm a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 104{,}39°$; $\approx 41{,}5°$ a háromszög ismeretlen szögei. Legyen $a = 11$ cm, ekkor $b-c = 6$ cm a feltétel szerint. Írjuk fel a koszinusztételt az a oldalra! $11^2 = b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos 34{,}11°$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! Kapjuk,

hogy: $c \approx 13$ cm, és ebből $b \approx 19$ cm. Írjuk fel a szinusztételt az a és a b oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\beta \approx 75{,}61°$ vagy $\beta \approx 104{,}39°$. Az első lehetőség nem lehet. Miért? Ezért $\beta \approx 104{,}39°$, ebből $\gamma \approx 41{,}5°$.

3047. ≈ 14 cm; ≈ 23 cm; a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 26{,}2°$; $\approx 133{,}5°$ a háromszög ismeretlen szögei. A feltétel szerint $a + b = 37$. Másrészt írjuk fel a koszinusztételt az ismert oldalra: $11^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 20{,}3°$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! $a \approx 14$ cm; $b \approx 23$ cm , illetve fordítva. Alkalmazzuk a szinusztételt az a és c oldalra! Ebből kapjuk az $\alpha \approx 26{,}2°$szöget, ebből pedig a $\beta \approx 133{,}5°$ szöget, illetve fordítva.

3048. ≈ 18 cm; ≈ 24 cm a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 43{,}04°$; $\approx 65{,}52°$ a háromszög ismeretlen szögei. A feltételből: $a + b = 42$. Másrészt a koszinusztételt felírva az ismert oldalra: $25^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 71{,}44°$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! Kapjuk, hogy $a \approx 18$ és $b \approx 24$, illetve fordítva. Írjuk fel a szinusztételt az a és c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 43{,}04°$, ebből $\beta \approx 65{,}52°$, illetve fordítva.

3049. $\approx 7{,}4$ cm; $\approx 14{,}6$ cm; ≈ 11 cm a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 29{,}56°$; $\approx 103{,}27°$ a háromszög ismeretlen szögei. Először a $c = 2 \cdot R \cdot \sin\gamma$ összefüggéssel számítsuk ki a c oldalt: $c \approx 11$ cm. A feltétel szerint $a + b = 22$. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra!
$11^2 \approx a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 47{,}17°$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! $a \approx 7{,}4$; $b \approx 14{,}6$, illetve fordítva. Írjuk fel, hogy $\alpha = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$, ebből kapjuk, hogy: $\alpha \approx 29{,}56°$, majd ebből $\beta \approx 103{,}27°$, illetve fordítva.

3050. ≈ 61 cm; ≈ 102 cm a háromszög többi oldalának a hossza, $\approx 33°23'$; $\approx 79°38'$ a háromszög többi szöge. Legyen $\gamma = 66°59'$ és $a = 109$ cm. Ekkor a $t = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ területképletből kapjuk, hogy $b \approx 61$ cm. Írjuk fel a koszinusztételt a háromszög c oldalára! Ebből kapjuk, hogy $c \approx 102$ cm. Írjuk fel a szinusztételt a háromszög b és c oldalára! Ebből kapjuk, hogy $\beta \approx 33°23'$, ebből pedig $\alpha \approx 79°38'$.

3051. **1. megoldás:** ≈ 84 cm a harmadik oldal hossza, $\approx 67{,}38°$; $\approx 36{,}87°$; $\approx 75{,}75°$ a háromszög szögei. $t = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$. Legyen $a = 80$; $b = 52$, ekkor a területképletből: $\gamma \approx 75{,}75°$. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $c \approx 84$. Írjuk fel a szinusztételt az a és c oldalakra! Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 67{,}38°$, ebből pedig $\beta \approx 36{,}87°$.
A **2. megoldás:** $\gamma \approx 104{,}25°$; $c \approx 105{,}6$ cm, $\approx 47{,}25°$; $\approx 28{,}5°$.

3052. ≈ 16 cm; ≈ 12 cm; $\approx 14{,}32$ cm a háromszög oldalai, $\approx 46{,}22°$; $\approx 74{,}29°$ a háromszög többi szöge. A feltétel szerint $a + b = 28$. A háromszög $t = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ területképletéből: $a \cdot b \approx 195$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! Ebből $a \approx 16$ cm és $b \approx 12$ cm, illetve fordítva. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! Ebből $c \approx 14{,}32$. Írjuk fel a szinusztételt az a és c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 46{,}22°$ ebből pedig $\beta \approx 74{,}29°$, illetve fordítva.

3053. ≈ 100 cm; ≈ 65 cm; ≈ 105 cm a háromszög oldalainak hossza, $\approx 67°23'$; $\approx 36°52'$ a háromszög többi szöge. A feltételből $a - b = 35$ és $\gamma = 75°45'$. Ekkor a háromszög trigonometrikus területképletéből $a \cdot b \approx 6500$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! Ebből $a \approx 100$ és $b \approx 65$. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $c \approx 105$. Írjunk fel egy szinusztételt a b és c oldalakra! Ebből kapjuk, hogy: $\beta \approx 36°52'$, ebből pedig $\alpha \approx 67°23'$.

3054. $\approx 8{,}85$ cm; $\approx 6{,}64$ cm; 7 cm a háromszög oldalai, $\approx 80{,}91°$; $\approx 47{,}77°$ a háromszög ismeretlen szögei. Legyen $a = 7$, $\alpha = 51{,}32°$. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt! Ebből $\dfrac{b}{c} = \dfrac{4}{3}$. Ezért legyen $b = 4x$ és $c = 3x$. Írjuk fel az a oldalra a koszinusztételt!
$7^2 = (4x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3x \cdot \cos 51{,}32°$. Ebből $x \approx 2{,}2135$, s innen $b \approx 8{,}85$; $c \approx 6{,}64$. Írjuk fel a szinusztételt a c és az a oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\gamma \approx 47{,}77°$, ebből pedig $\beta \approx 80{,}91°$.

Összetettebb feladatok

IV

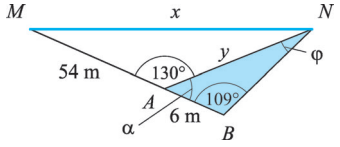
3055. $\approx 6{,}7\ \text{cm}^2$ a három kör közötti síkidom területe. Kössük össze a körök középpontjait, így kapunk egy háromszöget. Legyen $a = 12$ cm, $b = 13$ cm, $c = 15$ cm. Számítsuk ki koszinusztétellel például e háromszög azon szögét, amelynek az 5 cm sugarú kör középpontja a csúcsa. Kapjuk, hogy $\gamma \approx 73{,}62°$. Például szinusztétellel számíthatjuk az α szöget. $\alpha \approx 50{,}13°$. Ebből kapjuk, hogy $\beta \approx 56{,}25°$. Számítsuk ki a háromszög területét! $t_\triangle = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$, ebből $t_\triangle \approx 74{,}83\ \text{cm}^2$. Most számítsuk ki az egyes körcikkek területét, majd vonjuk ki ezeket a háromszög területéből és megkapjuk a keresett síkidom területét. $t_\alpha \approx 27{,}99\ \text{cm}^2$; $t_\beta \approx 24{,}05\ \text{cm}^2$; $t_\gamma \approx 16{,}06\ \text{cm}^2$. Így $t_{\text{idom}} \approx 6{,}7\ \text{cm}^2$.

3056. 16 egység; 12 egység; ≈ 18 egység a háromszög oldalainak a hossza, $\approx 60{,}61°$; $\approx 40{,}81°$ a háromszög ismeretlen szögei. Oldjuk meg a feladatban megadott egyenletrendszert! Ekkor kapjuk, hogy $a = 16$; $b = 12$, illetve fordítva. Írjuk fel a c oldalra a koszinusztételt! Ebből kapjuk, hogy: $c \approx 18$. Írjunk fel egy szinusztételt az a és c oldalra!

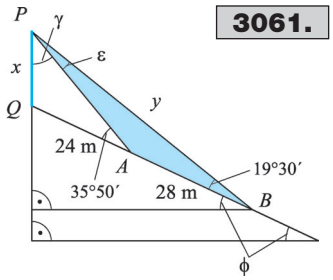
3057. ≈ 109 cm; ≈ 61 cm a háromszög ismeretlen oldalainak a hossza; $\approx 79{,}61°$; $\approx 33{,}4°$ a háromszög ismeretlen szögei. Legyen $c = 102$ és $\gamma = 66{,}99°$. A háromszög trigonometrikus területképletéből: (1) $a \cdot b \approx 6649$. Írjuk fel a c oldalra a koszinusztételt! (2) $102^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 66{,}99°$. Ha felhasználjuk az előző egyenletet, akkor azt kapjuk, hogy: (3) $a^2 + b^2 \approx 15\,602$. Oldjuk meg az (1) és (3) egyenletekből álló egyenletrendszert! Ha egy kicsit ravaszabbak vagyunk, akkor megkönnyíthetjük a megoldást, ha észrevesszük, hogy: $(a + b)^2 - 2 \cdot a \cdot b \approx 15\,602$. Ebből $(a + b)^2 \approx 28\,900$, s így (4) $a + b \approx 170$. Az (1) és (4) egyenletekből álló egyenletrendszert már egy kicsit könnyebb megoldani. (Kihasználtuk, hogy a háromszög oldalai pozitív számok.) Kapjuk, hogy $a \approx 109$; $b \approx 61$, illetve fordítva. Alkalmazzuk a szinusztételt a b és c oldalakra! Ebből kapjuk, hogy $\beta \approx 33{,}4°$, ebből pedig $\alpha \approx 79{,}61°$, illetve fordítva.

3058. ≈ 12 cm; ≈ 7 cm a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 27{,}27°$; $\approx 51{,}75°$ a háromszög ismeretlen szögei. Legyen $c = 15$ és $\gamma = 100{,}98°$. Ekkor a feltétel szerint (1) $a^2 + b^2 = 193$. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! (2) $15^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 100{,}98°$. Felhasználva (1)-et, ebből azt kapjuk, hogy (3) $a \cdot b \approx 84$. Oldjuk meg az (1) és (3) egyenletből álló egyenletrendszert! Kicsit könnyebb a megoldás, ha észrevesszük, hogy $(a + b)^2 - 2 \cdot a \cdot b \approx 193$, azaz $(a + b)^2 \approx 361$, vagyis (4) $a + b \approx 19$. Oldjuk meg inkább a (3) és (4) egyenletből álló egyenletrendszert! Kapjuk, hogy $a \approx 12$; $b \approx 7$, illetve fordítva. Írjunk fel egy szinusztételt az a és c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 51{,}75°$, ebből pedig $\beta \approx 27{,}27°$, illetve fordítva.

3060.



3061.



3059. $\approx 5{,}69$ dm; $\approx 3{,}76$ dm; 6,34 dm a háromszög oldalainak a hossza. Az $\alpha = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$ képlet alapján számíthatjuk a értékét. $a \approx 5{,}69$ dm. A háromszög trigonometrikus területképletéből kapjuk, hogy (1) $b \cdot c \approx 23{,}853$. Írjuk fel a koszinusztételt az a oldalra! Kapjuk, hogy (2) $32{,}376 \approx b^2 + c^2 - b \cdot c \cdot 0{,}916\,68$. Használjuk fel az (1) egyenletet, kapjuk, hogy (3) $b^2 + c^2 \approx 54{,}24$. Oldjuk meg az (1) és (3) egyenletből álló egyenletrendszert! Kapjuk, hogy $b \approx 3{,}76$; $c \approx 6{,}34$, illetve fordítva.

3060. $MN = x \approx 65{,}3$ m a tereppontok távolsága. Számítsuk ki az α szöget: $\alpha = 50°$, majd ebből a φ szöget: $\varphi = 21°$. Alkalmazzuk a szinusztételt az ABN háromszögre! Ebből kapjuk, hogy $\gamma \approx 15{,}83$ m. Alkalmazzuk most a koszinusztételt az MNA háromszögre! Kapjuk, hogy $x \approx 65{,}3$ m.

3061. $x \approx 19{,}7$ m az épület magassága, $\varphi \approx 8°41'$ a lejtő hajlásszöge. Számítsuk ki az ABP háromszög A-nál levő szögét! Majd írjuk fel a szinusztételt az ABP háromszögre! Ebből kaphatjuk, hogy $y \approx 58{,}3$ m. Majd alkalmazzuk a koszinuszté-

telt a PQA háromszögre! Ebből kapjuk, hogy $x \approx 19{,}7$ m. Számítsuk ki a γ szöget, például úgy, hogy szinusztételt írunk fel a PQA háromszögben. Kapjuk, hogy $\gamma \approx 45°29'$. Ebből és a $19°30'$-es szög segítségével kaphatjuk a lejtő hajlásszögét: $\varphi \approx 8°41'$.

3062. $\approx 10{,}72$ cm; $\approx 15{,}72$ cm a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 60{,}22°$; $\approx 83{,}5°$ a háromszög ismeretlen szögei. Legyen $c = 18$ cm és $s_c = 10$ cm, $\alpha = 36{,}28°$. Az s_c súlyvonal két részre vágja a γ szöget. Legyen γ_1 azon része γ-nak, amely a b oldal felé esik. Szinusztétellel kiszámíthatjuk ezt a szöget. $\frac{\sin\gamma_1}{\sin 36{,}28°} = \frac{\frac{c}{2}}{s_c}$. Jelöljük φ-vel azt a szöget, amely az AFC háromszögben az F-nél van, ahol F az AB oldal felezőpontja. Ekkor φ-t könnyen kiszámíthatjuk: $\varphi \approx 111{,}54°$. Írjuk fel a koszinusztételt az AFC háromszögben az $AC = b$ oldalra! Kapjuk, hogy $b \approx 15{,}72$ cm. Írjuk fel most a koszinusztételt a BFC háromszögben a $BC = a$ oldalra! Kapjuk, hogy $a \approx 10{,}72$ cm. Írjuk fel a szinusztételt az ABC háromszögben az a és c oldalakra! Ebből kapjuk, hogy $\gamma \approx 83{,}5°$, ebből pedig $\beta \approx 60{,}22°$.

3063. $\approx 12{,}09$ cm; $\approx 9{,}26$ cm a háromszög ismeretlen oldalai; $\approx 49{,}96°$; $\approx 88{,}63°$ a háromszög ismeretlen szögei. Legyen $c = 8$ cm, $\gamma = 41{,}41°$, $s_c = 10$ cm. Jelöljük φ-vel a BFC háromszögben F-nél levő szöget, ahol F az AB oldal felezőpontja. Ekkor az AFC háromszögben $180° - \varphi$ szög van az F csúcsnál. Írjuk fel a koszinusztételt a BFC háromszögben a $BC = a$ oldalra, majd az AFC háromszögben az $AC = b$ oldalra! Használjuk fel, hogy $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$. Majd adjuk össze a két egyenletet! Kapjuk, hogy $a^2 + b^2 = 2 \cdot s_c^2 + \frac{c^2}{2}$, ha behelyettesítjük az ismert adatokat, akkor kapjuk, hogy (1) $a^2 + b^2 = 232$. A következőkben írjuk fel a koszinusztételt az ABC háromszögben a c oldalra és helyettesítsük be ide az ismert adatokat, majd használjuk fel az (1) egyenletet, és azt kaphatjuk, hogy (2) $a \cdot b \approx 112$. Oldjuk meg az (1) és (2) egyenletből álló egyenletrendszert! Kicsit könnyebb a megoldás, ha észrevesszük, hogy $(a + b)^2 - 2 \cdot a \cdot b = 232$ és felhasználva (2)-t: (3) $a + b \approx 21{,}35$. Így elég megoldani az (1) és (3) egyenletből álló egyenletrendszert. Azt kapjuk, hogy $a \approx 12{,}09$; $b \approx 9{,}26$, illetve fordítva. Írjuk fel a szinusztételt az ABC háromszögben a b és c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\beta \approx 49{,}96°$, ebből pedig $\alpha \approx 88{,}63°$, illetve fordítva.

3064. $\approx 16{,}38$ cm; $\approx 6{,}35$ cm a háromszög ismeretlen oldalai; $\approx 82{,}04°$; $\approx 22{,}58°$ a háromszög ismeretlen szögei. Legyen $c = 16$ cm, $\gamma = 75{,}38°$, $s_c = 9{,}5$ cm. Az előző feladat megoldásához hasonlóan kaphatjuk, hogy $a^2 + b^2 = 2 \cdot s_c^2 + \frac{c^2}{2}$. Ebből pedig (1) $a^2 + b^2 = 308{,}5$. Írjuk fel a koszinusztételt az eredeti háromszögben a c oldalra, ha ide behelyettesítjük az adatokat, akkor kaphatjuk, hogy (2) $a \cdot b \approx 104$. Oldjuk meg az (1) és (2) egyenletből álló egyenletrendszert! Vagy az előző útmutatásban szereplő fogással konstruálunk egyszerűbb egyenletrendszert és azt oldjuk meg. Akár így, akár úgy csináljuk, azt kapjuk, hogy $a \approx 16{,}38$ cm; $b \approx 6{,}35$ cm, illetve fordítva. Írjuk fel a szinusztételt az eredeti háromszögben a b és c oldalra! Kapjuk, hogy $\beta \approx$ $\approx 22{,}58°$, ebből pedig $\alpha \approx 82{,}04°$, illetve fordítva.

3065. $4 \cdot \sqrt{13}$ egység $\approx 14{,}42$ egység a háromszög harmadik oldalának a hossza, $120°$; $\approx 13{,}9°$; $\approx 46{,}1°$ a háromszög szögei. Legyen $AC = b = 4$, $AB = c = 12$, $AE = s_a = 3$. Legyen $CE = x$ és ekkor $BE = \alpha - x$. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt! $\frac{x}{a - x} = \frac{4}{12}$, ebből $\alpha = 4x$, s így $a - x = 3x$. Alkalmazzuk a koszinusztételt az AEC háromszögre, majd az ABE háromszögre! $x^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$, $(3x)^2 = 3^2 + 12^2 - 2 \cdot 3 \cdot 12 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! $x = \sqrt{13}$ és $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$. Ebből $\alpha = 120°$, és $a = 4 \cdot \sqrt{13}$. Szinusztétellel számíthatjuk a β szöget. $\beta \approx$ $\approx 13{,}9°$, ebből $\gamma \approx 46{,}1°$.

IV

3066. $\approx 33{,}06°; \approx 54{,}91°; \approx 92{,}03°$ a háromszög szögei, $\approx 43{,}97$ cm a háromszög ismeretlen oldala. Legyen $a = 24$, $b = 36$, $f_c = 20$. A szögfelező x, illetve $c - x$ hosszúságú szakaszokra osztja fel a c oldalt. Legyen az x szakasz az a oldal mellett és így a $c - x$ szakasz a b oldal mellett. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt! Kapjuk, hogy $\frac{x}{c-x} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$. Írjunk fel két koszinusztételt a két részháromszögre! Kapjuk, hogy $x^2 = f_c^2 + a^2 - 2 \cdot f_c \cdot a \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$ és $(c-x)^2 = f_c^2 + b^2 - 2 \cdot f_c \cdot b \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$. Osszuk el a két egyenletet egymással és alkalmazzuk a szögfelezőtételből kapott összefüggést, ezenkívül helyettesítsük be az adatokat! Ekkor $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20^2 + 24^2 - 2 \cdot 20 \cdot 24 \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{20^2 + 36^2 - 2 \cdot 20 \cdot 36 \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}$. Ebből $\cos\frac{\gamma}{2} \approx 0{,}6944$, s így $\gamma \approx 92{,}03°$. Alkalmazzuk most a koszinusztételt az eredeti háromszögben a c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $c \approx 43{,}97$ cm. Alkalmazzuk most a szinusztételt az eredeti háromszögben az a és c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 33{,}06°$, és ebből pedig $\beta \approx 54{,}91°$.

3067. Alakítsuk át a feltételi egyenletet a következő alakúra: $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = 2 \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$. A továbbiakban pedig alkalmazzuk az $\alpha = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$ összefüggést mindhárom oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} = 2 \cdot \frac{\cos\gamma}{c}$. Alkalmazzuk most a koszinusztételt mindegyik oldalra! A három felírt koszinusztétel mindegyikéből fejezzük ki a szög koszinuszát és helyettesítsük be az előző egyenletbe! Átalakítások után könnyen kaphatjuk a bizonyítandó egyenlőséget.

3068. $b^2 + c^2 = 5 \cdot a^2$ összefüggés van az oldalak között. Alkalmazzuk a kotangens definícióját, majd a feltételi egyenletet hozzuk a következő alakúra: $\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha = \cos\beta \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \cos\gamma \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$. Alkalmazzuk itt a szinusztételt majd a koszinusztételt háromszor.
$\frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{a}{b} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{a}{c}$. Ezt pedig addig alakítsuk, amíg azt nem kapjuk, hogy $b^2 + c^2 = 5 \cdot a^2$.

3069. Alkalmazzuk a szinusztételt és a $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ azonosságot! Kapjuk, hogy $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = \frac{2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta}{\sin\beta} = 2 \cdot \cos\beta$. Ebből (1) $\cos\beta = \frac{a}{2b}$. Alkalmazzuk most a koszinusztételt a b oldalra és használjuk fel még az (1) összefüggést! $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \frac{a}{2b}$. Ebből kapjuk, hogy $b \cdot (b-c) \cdot (b+c) = a^2 \cdot (b-c)$. **1. eset:** ha $b - c \neq 0$, akkor lehet osztani vele, s így $b \cdot (b+c) = a^2$, ebből pedig $a^2 - b^2 = bc$. **2. eset:** ha $b - c = 0$, ekkor $b = c$, ebből következik, hogy $\beta = \gamma$. Felhasználva, hogy $\alpha = 2 \cdot \beta$, kapjuk, hogy $\beta = \gamma = 45°$ és $\alpha = 90°$. Alkalmazzuk Pitagorasz tételét e derékszögű háromszögre: $a^2 = b^2 + c^2$, ebből $a^2 - b^2 = c^2$, de mivel a 2. esetben $b = c$, ezért $a^2 - b^2 = bc$, tehát a 2. esetben is igaz az állítás.

3070. A feltételi egyenlet bal oldalán alkalmazzuk kétszer a szinusztételt, kapjuk, hogy:
$\frac{c}{b} + \frac{b}{c} = 2 \cdot \sin\alpha$! Alkalmazzuk most a koszinusztételt az a oldalra és fejezzük ki a szög koszinuszát! $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Használjuk fel, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$! Helyettesítsük be ide az

előzőkben kapott képletekből a szögfüggvényeket! $\left(\frac{b^2+c^2}{2bc}\right)^2+\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=1$! Alakítsuk át ezt az egyenletet a következő alakúra: $\left(b^2-c^2\right)^2+\left(b^2+c^2-a^2\right)^2=0$! Ebből következik, hogy $b=c$, vagyis a háromszög egyenlő szárú. Ezenkívül még az következik, hogy $b^2+c^2=a^2$, ebből pedig következik, hogy a háromszög derékszögű is. Miért? Tehát a háromszög egyenlő szárú és derékszögű.

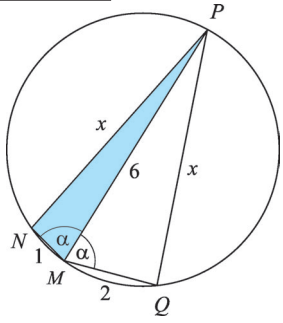
Nehezebb feladatok

3071. $a:b:c=\sqrt{5}:\sqrt{8}:3$ a háromszög oldalainak az aránya. A feltételekből kapjuk, hogy $\frac{1}{2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$, ebből $\frac{1}{2}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$. Alkalmazzuk a szinusztételt, majd kétszer a koszinusztételt, amelyekből fejezzük ki a szögek koszinuszait! A behelyettesítés után:

$\frac{1}{2}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ac}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$. Ezen egyenletet kissé átalakítva, kapjuk, hogy (1) $3\cdot a^2-3\cdot b^2+c^2=0$.

A feltételből kapjuk, hogy $\frac{2}{3}=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}$, ebből $\frac{2}{3}=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$. Alkalmazva a szinusztételt és kétszer a koszinusztételt, kaphatjuk, hogy $\frac{2}{3}=\frac{b}{c}\cdot\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}$, ebből kaphatjuk, hogy (2) $a^2+5\cdot b^2-5\cdot c^2=0$. Vizsgáljuk meg az (1) és (2) egyenletből álló egyenletrendszert! Például fejezzük ki (1)-ből c^2-et és ezt helyettesítsük be (2)-be! Ebből azt kapjuk, hogy $\frac{a^2}{b^2}=\frac{5}{8}$, s így $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$. Másrészt a^2-et innen kifejezve és behelyettesítve c^2 kifejezésébe és ezt átalakítva kapjuk, hogy $\frac{b^2}{c^2}=\frac{8}{9}$, ebből $\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{8}}{3}$.

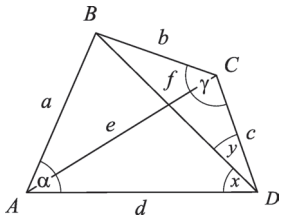
3072.



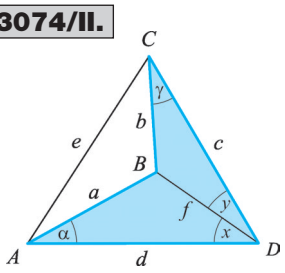
3072. $R=2\cdot\sqrt{\frac{34}{15}}$ egység a kör sugara. $PQ=2\cdot R\cdot\sin\alpha$ és $PN=2\cdot R\cdot\sin\alpha$, ebből következik, hogy $PQ=PN=x$, vagy használjuk ki a kerületi szögek tételét. Alkalmazzuk a koszinusztételt az MNP háromszögre, majd az MPQ háromszögre, mindkettőben az x oldalra! Az egyenletrendszerből kaphatjuk, hogy $\cos\alpha=\frac{1}{4}$ és $x=\sqrt{34}$. Az $x=2\cdot R\cdot\sin\alpha$-ból következik, hogy $R=2\cdot\sqrt{\frac{34}{15}}$.

IV

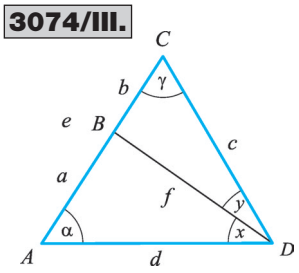
3074/I.



3074/II.



3074/III.



3073. $R = 4 \cdot \sqrt{\frac{14}{55}}$ egység a kör sugara. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

3074. Alkalmazzuk kétszer a szinusztételt: (1) $\frac{\sin x}{\sin\alpha} = \frac{a}{f}$ és (2) $\frac{\sin y}{\sin\gamma} = \frac{b}{f}$. Ezekből $\sin x \cdot \sin y = \frac{a \cdot b}{f^2} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma$. Átalakítva $\sin x \cdot \sin y = \frac{a \cdot b}{f^2} \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\gamma - \cos(\alpha + \gamma))$. Alkalmazva kétszer a koszinusztételt, kapjuk, hogy: $\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - f^2}{2 \cdot a \cdot d}$ és $\cos\gamma = \frac{b^2 + c^2 - f^2}{2 \cdot b \cdot c}$. Ezeket behelyettesítve az előző egyenletbe, kapjuk, hogy:

(*) $\sin x \cdot \sin y = \frac{a \cdot b}{f^2} \cdot \left(\frac{a^2 + d^2 - f^2}{2 \cdot a \cdot d} \cdot \frac{b^2 + c^2 - f^2}{2 \cdot b \cdot c} - \cos(\alpha + \gamma) \right)$. Másrészt $\sin x \cdot \sin y =$

$= \cos x \cdot \cos y - \cos(x + y)$. Háromszor alkalmazva a koszinusztételt, kapjuk, hogy:

$\cos x = \frac{f^2 + d^2 - a^2}{2 \cdot f \cdot d}$; $\cos y = \frac{f^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot f \cdot c}$; $\cos(x + y) = \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2 \cdot c \cdot d}$. Ezeket beírva az előző egyenletbe, kapjuk, hogy: (**) $\sin x \cdot \sin y = \frac{f^2 + d^2 - a^2}{2 \cdot f \cdot d} \cdot \frac{f^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot f \cdot c} - \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2 \cdot c \cdot d}$.

A (*) és (**) egyenletből kapjuk, hogy: $\frac{f^2 + d^2 - a^2}{2 \cdot f \cdot d} \cdot \frac{f^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot f \cdot c} - \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2 \cdot c \cdot d} =$

$= \frac{a \cdot b}{f^2} \cdot \left(\frac{a^2 + d^2 - f^2}{2 \cdot a \cdot d} \cdot \frac{b^2 + c^2 - f^2}{2 \cdot b \cdot c} - \cos(\alpha + \gamma) \right)$. A továbbiakban addig facsarjuk az egyenletet, amíg ki nem jön belőle *Bretschneider tétele:* $e^2 \cdot f^2 = a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot d^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos(\alpha + \gamma)$.

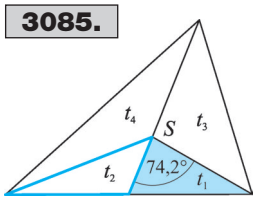
3075. Alkalmazzuk Bretschneider tételét: $e^2 \cdot f^2 = a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot d^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos(\alpha + \gamma)$. Mivel $-1 \le \cos(\alpha + \gamma) \le 1$, ezért $2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \ge -2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos(\alpha + \gamma) \ge -2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy $e^2 \cdot f^2 \le a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot d^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d$, azaz $e^2 \cdot f^2 \le (a \cdot c + b \cdot d)^2$, ebből pedig következik, hogy $e \cdot f \le a \cdot c + b \cdot d$, ezzel igazoltuk az általánosított *Ptolemaiosz-tételt*. Itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $\cos(\alpha + \gamma) = -1$, azaz ha $\alpha + \gamma = 180°$, vagyis ha a négyszög húrnégyszög. Ha van kedvünk, akkor könnyen igazolhatjuk azt is, az előzőeket figyelembe véve, hogy $e \cdot f \ge |a \cdot c - b \cdot d|$. Keressünk más bizonyítást is az általánosított Ptolemaiosz-tételre!

Néhány könnyű területszámítási feladat

Szinusztételt, illetve koszinusztételt nem igénylő könnyű feladatok

3076. $\approx 48{,}8\ \text{cm}^2$ a háromszög területe.
3077. **1. eset:** $\approx 43{,}34°$-os; **2. eset:** $\approx 136{,}66°$-os szöget zárnak be az adott oldalak.
3078. $\approx 8{,}3$ cm az adott szög melletti ismeretlen oldal hossza.
3079. $\approx 22{,}7\ \text{cm}^2$ a rombusz területe.
3080. $\approx 1314{,}4\ \text{cm}^2$ a paralelogramma területe.
3081. $\approx 240{,}5\ \text{cm}^2$ a paralelogramma területe.
3082. Vegyük figyelembe, hogy az átlók négy egyenlő területű háromszögre vágják a paralelogrammát! Miért? Másrészt tudjuk, hogy $\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$. Alkalmazzuk a háromszög trigonometrikus területképletét!
3083. A konvex négyszög f átlója x és $e - x$ hosszúságú szakaszokra osztja az e átlót, míg az e átló y és $f - y$ hosszúságú szakaszokra osztja az f átlót. Legyen φ az átlók hajlásszöge. A négy részháromszög területének összege megegyezik a négyszög területével. $t = \frac{x \cdot y \cdot \sin(180° - \varphi)}{2} + \frac{x \cdot (f - y) \cdot \sin\varphi}{2} + \frac{(f - y) \cdot (e - x) \cdot \sin(180° - \varphi)}{2} + \frac{y \cdot (e - x) \cdot \sin\varphi}{2}$. Vegyük figyelembe, hogy $\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$, majd alakítsuk a képletet és hamarosan megkapjuk, hogy $t = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}$.
3084. $\approx 9{,}8$ cm; $\approx 6{,}8$ cm; $\approx 5{,}97$ cm a háromszög oldalai. Az $a - b = 3$ egyenletből és a háromszög trigonometrikus területképletére felírt egyenletből álló egyenletrendszert oldjuk meg. Ez másodfokú egyenletre vezet, amelyet könnyen megoldhatunk. Kapjuk, hogy $b \approx 6{,}8$. Ebből $a \approx 9{,}8$. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! Ebből $c \approx 5{,}97$.
3085. $t \approx 28{,}06\ \text{cm}^2$ a háromszög területe. $t_1 = t_2$, $t_3 = 2 \cdot t_1$, $t_4 = 2 \cdot t_2$, így $t = 6 \cdot t_1$. Miért?

3085.



3086. $\approx 42{,}59\ \text{cm}^2$ a háromszög területe. Számítsuk ki a megfelelő középponti szögeket, majd az egyes középponti szögekhez tartozó részháromszögek területét, amelyeket összeadva kapjuk a háromszög területét.
3087. A körülírt kör középpontját kössük össze a háromszög csúcspontjaival! Így három részháromszöget kapunk. Alkalmazzuk a középponti és kerületi szögek tételét, amelyből kapjuk, hogy a részháromszögeknek az a szöge, amely a kör középpontjánál van, megegyezik az eredeti háromszög megfelelő szögének kétszeresével. Írjuk fel a részháromszögek területeit a trigonometrikus területképlettel, majd ezeket összeadva megkapjuk a háromszög területére a bizonyítandó összefüggést. Három esetet különböztessünk meg: a hegyesszögű, a derékszögű és a tompaszögű háromszög esetét.

Szinusztételt, illetve koszinusztételt igénylő könnyű feladatok

3088. $\approx 101{,}3\ \text{cm}^2$ a háromszög területe. Használjuk a szinusztételt és a háromszög trigonometrikus területképletét!
3089. 12 cm; 16 cm; $\approx 22{,}8$ cm a háromszög oldalai, 30°; $\approx 41{,}81°$; $\approx 108{,}19°$ a háromszög szögei.
Legyen $a = 3x$, $b = 4x$, ekkor $t = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ és $t = \frac{c \cdot m_c}{2}$, ahol $m_c = 8$ cm. Másrészt $c = 2 \cdot R \cdot \sin\gamma$,

ahol $R = 12$ cm. Ezekből meghatározhatjuk, hogy $x = 4$ cm. Ebből pedig $a = 12$ cm és $b = 16$ cm. Az $\alpha = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$-ból kapjuk, hogy $\alpha = 30°$. Ugyanilyen módon kapjuk, hogy $\beta = 41{,}81°$. Ezekből következik, hogy $\gamma = 108{,}19°$. A c értékét a $c = 2 \cdot R \cdot \sin\gamma$ egyenletből kaphatjuk: $c \approx 22{,}8$ cm.

3090. $\approx 184{,}72$ m; $\approx 167{,}82$ m; ≈ 216 m a háromszög oldalai. 1 hektár = 10 000 m^2.

$t = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}$, és a szinusztétel: $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$, ezekből: $t = \dfrac{c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{2 \cdot \sin\gamma}$. Innen megkaphatjuk, hogy $c \approx 216$. Az a és c oldalra felírt szinusztételből: $a \approx 184{,}72$. A b és c oldalra felírt szinusztételből: $b \approx 167{,}82$.

IV

3091. Az előző feladat megoldásához való útmutatásában lényegében levezettük e feladat képletét.

3092. $t = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ és $\alpha = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$, $b = 2 \cdot R \cdot \sin\beta$, ezekből kaphatjuk a bizonyítandó képletet.

3093. $t = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ és $c = 2 \cdot R \cdot \sin\gamma$, ezekből kaphatjuk a bizonyítandó képletet.

3094. 4 cm; 8 cm; $\approx 4{,}96$ cm a háromszög oldalai. Egyrészt $a + b = 12$ a feltétel szerint, másrészt a háromszög trigonometrikus területképletéből kaphatjuk, hogy $a \cdot b = 32$. Oldjuk meg az egyenletrendszert, azt kapjuk, hogy $a = 4$ és $b = 8$, illetve fordítva. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $c \approx 4{,}96$ cm.

3095. ≈ 293 cm^2 a négyszög területe. Húzzuk be a négyszög azon átlóját, amely a 25 m-es és a 18 m-es oldalak közös csúcspontjából indul ki. Ekkor annak a háromszögnek könnyen kiszámíthatjuk a területét, amelynek a 14 m-es és 25 m-es oldalai vannak és ismert ezek hajlásszöge is. Ezután számítsuk ki a koszinusztétellel az előbb meghúzott átló hosszát! Ekkor a másik részháromszögre felírva a koszinusztételt, megkaphatjuk a 15 m-es és a 18 m-es oldalak közötti szöget. Ennek segítségével kiszámíthatjuk ezen részháromszög területét is. Adjuk össze a részháromszögek területeit és megkapjuk a négyszög területét.

3096. $\approx 21{,}05$ cm; $\approx 35{,}08$ cm; $\approx 24{,}26$ cm, a háromszög oldalai. Legyen $\alpha = 3x$, $b = 5x$, $\gamma = 42{,}7°$. A $t = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ képletből kiszámíthatjuk x-et. $x \approx 7{,}02$. Ebből $a \approx 21{,}05$; $b \approx 35{,}08$ cm. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $c \approx 24{,}26$ cm.

3097. **1. eset:** $\approx 34{,}35°$; $\approx 81{,}63°$; $\approx 64{,}02°$ a háromszög szögei, $\approx 11{,}63$ cm a harmadik oldala. A háromszög trigonometrikus területképletéből kiszámíthatjuk, hogy $\gamma \approx 64{,}02°$. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $c \approx 11{,}63°$. Alkalmazzuk a szinusztételt az a oldalra és a c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 34{,}35°$, ebből pedig: $\beta \approx 81{,}63°$. **2. eset:** $\gamma_2 \approx 116°$; $c_2 \approx 17{,}3$ cm; $\alpha_2 \approx 41{,}68°$; $\beta_2 \approx 22{,}32°$.

3098. $\approx 14{,}68$ dm; $\approx 19{,}87$ dm a háromszög ismeretlen oldalai; $\approx 23{,}43°$; $\approx 114{,}42°$ a háromszög ismeretlen szögei. Legyen $a = 8{,}7$ dm, $\beta = 42{,}15°$, $t = 58$ dm^2. A β szögre felírt területképletből kapjuk, hogy $c \approx 19{,}87$ dm. Alkalmazzuk a koszinusztételt a b oldalra! Ebből kapjuk, hogy $b \approx 14{,}65$ dm. Alkalmazzuk a szinusztételt az a és b oldalakra! Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 23{,}43°$ és ebből pedig, felhasználva a másik ismert szöget is, kapjuk, hogy $\gamma \approx 114{,}42°$.

3099. ≈ 16 cm; ≈ 25 cm; $\approx 25{,}12$ cm a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 37{,}23°$; $\approx 70{,}97°$ a háromszög ismeretlen szögei. $a^2 + b^2 = 881$ a feltételből, míg a háromszög trigonometrikus területképletéből kaphatjuk, hogy $190 = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin 71{,}8°}{2}$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! Azt kapjuk, hogy $a \approx 16$; $b \approx 25$, illetve fordítva. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $c \approx 25{,}12$ cm. Alkalmazzuk a szinusztételt az a és c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 37{,}23°$ és ezután könnyen kaphatjuk, hogy $\beta \approx 70{,}97°$, illetve fordítva.

3100. ≈ 2 dm; ≈ 3 dm a háromszög ismeretlen oldalai. Egyrészt (1) $a^2 + b^2 = 13$, másrészt a háromszög területképletéből kaphatjuk, hogy (2) $a \cdot b \cdot \sin\gamma = 6$, harmadrészt a koszinusztételt

felírva az ismert oldalra: (3) $3{,}6^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$. Ezen egyenletrendszerből kaphatjuk a következő egyenletrendszert: (I) $a \cdot b \cdot \sin\gamma \approx 13$; (II) $a \cdot b \cdot \cos\gamma \approx 0{,}02$. Ha elosztjuk a két egyenlet megfelelő oldalait egymással, akkor azt kapjuk, hogy $\operatorname{tg}\gamma \approx 650$, ebből $\gamma \approx 89{,}91°$. Ha visszahelyettesítjük ezt az (I) egyenletbe, akkor kapjuk, hogy: (III) $a \cdot b \approx 6$. Oldjuk meg az (I) és (III) egyenletből álló egyenletrendszert! Kapjuk, hogy $a \approx 2$, $b \approx 3$, illetve fordítva.

Összegzési tételek alkalmazása

IV

Bevezető alapfeladatok

3101. *a)* $\sin\alpha$; *b)* $-\cos\alpha$; *c)* $\sin\alpha$; *d)* $-\cos\alpha$; *e)* $-\sin\alpha$; *f)* $\sin\alpha$; *g)* $-\cos\alpha$; *h)* $\cos\alpha$.
3102. *a)* $-\sin\alpha$; *b)* $-\cos\alpha$; *c)* $\sin\alpha$; *d)* $-\sin\alpha$.
3103. *a)* $\cos\alpha$; *b)* $\sin\alpha$; *c)* $-\cos\alpha$; *d)* $-\sin\alpha$.
3104. *a)* $\cos\alpha$; *b)* $-\sin\alpha$; *c)* $-\cos\alpha$; *d)* $\sin\alpha$.
3105. *a)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *b)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$; *c)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *d)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3106. *a)* $\frac{1}{2}$; *b)* 0; *c)* $-\frac{1}{2}$; *d)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3107. *a)* $-\operatorname{tg}\alpha$; *b)* $\operatorname{tg}\alpha$; *c)* $\operatorname{tg}\alpha$; *d)* $-\operatorname{tg}\alpha$;
3108. *a)* Alkalmazzuk a $\sin(\alpha+\beta)$-ra való összegzési képletet, ha $\alpha = \beta = x$. *b)* Alkalmazzuk a $\cos(\alpha+\beta)$-ra való összegzési képletet, ha $\alpha = \beta = x$.
3109. Alkalmazzuk az előző feladatban bizonyított képleteket x helyett $\frac{x}{2}$-re!

Alapvető feladatok

3110. *a)* $\sqrt{3}\cdot\cos\alpha$; *b)* $\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$; *c)* $\cos\alpha$; *d)* $\cos\alpha$.
3111. *a)* $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$; *b)* $\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.
3112. *a)* 1; *b)* 0.
3113. Alkalmazzuk a bizonyítandó azonosságok bal oldalaira a tanult összegzési (addíciós) tételeket!
3114. Az előző feladat azonosságaiban végezzük el az $\alpha = \frac{x+y}{2}$ és $\beta = \frac{x-y}{2}$ helyettesítést! Ekkor $\alpha + \beta = x$ és $\alpha - \beta = y$. Így az ottani *a)*, *b)*, *c)*, *d)* azonosságokból rendre következnek az itteni *a)*, *b)*, *c)*, *d)* azonosságok.
3115. A bizonyítandó azonosságok bal oldalaira alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket, és használjuk fel, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ minden valós x-re teljesül.
3116. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{19}{8}$. Alkalmazzuk a tangensnél tanult megfelelő összegzési tételt!
3117. *a)* $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 1$; *b)* $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{1}{7}$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket!
3118. *a)* $\cos x$; *b)* 1; *c)* 1; *d)* $\cos x$; *e)* $\cos x$; *f)* 1.

3119. *a)* Helyettesítsük be $\cos 2x$ megfelelő képletét, majd rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, a $\cos^2 x$-et alakítsuk át $\sin^2 x$ segítségével! Ezután alakítsunk ki teljes négyzetet és azt kapjuk, hogy $0 \le (\sin x - 1)^2$, ez pedig minden x valós számra teljesül. *b)* Hasonlóan bizonyíthatjuk, mint az előző feladatot, csak itt $\sin^2 x$-et alakítjuk át $\cos^2 x$ segítségével. Azt kapjuk, hogy $0 \le (\cos x - 1)^2$.

3120. *a)* $\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha)^2$. Alkalmazzuk most a megfelelő összegzési tételt, majd használjuk fel $\sin 2\alpha$ és $\cos 2\alpha$ ismert képleteit, másrészt azt, hogy $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Kapjuk, hogy $\sin 3\alpha = 3 \cdot \sin \alpha - 4 \cdot \sin^3 \alpha$. *b)* Hasonló módon oldhatjuk meg. Kapjuk, hogy $\cos 3\alpha = 4 \cdot \cos^3 \alpha - 3 \cdot \cos \alpha$. *c)* $\sin 4\alpha = 8 \cdot \cos^3 \alpha \cdot \sin \alpha - 4 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$. *d)* $\cos 4\alpha = 8 \cdot \cos^4 \alpha - 8 \cdot \cos^2 \alpha + 1 = 1 - 8 \cdot \sin^2 \alpha + 8 \cdot \sin^4 \alpha$.

3121. *a)* Végeredmény –1. Alkalmazzuk $\cos 3\alpha$ előbb kapott képletét és a $\sin 2\alpha$ képletét! *b)* Végeredmény 1. Alkalmazzuk $\sin 3\alpha$ előzőekben kapott képletét és a $\sin 2\alpha$ képletét!

3122. *a)* Alkalmazzuk a $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$-ra tanult összegzési képletet $\alpha = \beta = x$-re! Másrészt vegyük figyelembe a második egyenlőségnél, hogy $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ a megfelelő értelmezési tartományban.

b) $\operatorname{ctg} 2x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x}$ és vegyük figyelembe az előző feladat eredményét! *c)* $\dfrac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$-et addig alakítjuk a tangens definíciójának a felhasználásával, közös nevezőre hozással, egyszerűsítéssel, amíg $\sin 2x$-et nem kapunk. Másrészt $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$ felhasználásával mutassuk meg, hogy $\dfrac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{2 \cdot \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg}^2 x + 1}$. *d)* Addig alakítsuk a középső képletet a tangens definíciójának a felhasználásával, közös nevezőre való hozással, egyszerűsítéssel, amíg $\cos 2x$-et nem kapunk. Másrészt $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$ alkalmazásával addig alakítsuk más módon, mint az előbb, a középső képletet, amíg a harmadik képletet meg nem kapjuk.

3123. *a)* $\dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ kifejezést alakítsuk, $\cos 2x$ képletét felhasználva! *b)* $\dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ kifejezést alakítsuk, $\cos 2x$ képletét felhasználva! *c)* Az $\dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$ kifejezést alakítsuk, amíg $\operatorname{tg} x$ nem lesz. Másrészt mutassuk meg, hogy $\dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$, szorozzunk be itt a nevezőkkel! *d)* $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ és vegyük figyelembe az előző feladat állítását! *e)* Az $\dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ kifejezést alakítsuk addig, amíg $\operatorname{tg}^2 x$ nem lesz. *f)* $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ és vegyük figyelembe az előző feladat állítását!

3124. **1. eset:** $\sin 2\alpha = \dfrac{24}{25}$; $\cos 2\alpha = \dfrac{7}{25}$; $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{24}{7}$; $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{7}{24}$.

2. eset: $\sin 2\alpha = -\dfrac{24}{25}$; $\cos 2\alpha = \dfrac{7}{25}$; $\operatorname{tg} 2\alpha = -\dfrac{24}{7}$; $\operatorname{ctg} 2\alpha = -\dfrac{7}{24}$.

3125. **1. eset:** $\sin 2\alpha = \dfrac{120}{169}$; $\cos 2\alpha = \dfrac{119}{169}$; $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{120}{119}$; $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{119}{120}$.

2. eset: $\sin 2\alpha = -\dfrac{120}{169}$; $\cos 2\alpha = \dfrac{119}{169}$; $\operatorname{tg} 2\alpha = -\dfrac{120}{119}$; $\operatorname{ctg} 2\alpha = -\dfrac{119}{120}$.

IV

3126. $\sin 2x = \frac{20}{29}$; $\cos 2x = \frac{21}{29}$; $\operatorname{tg} 2x = \frac{20}{21}$; $\operatorname{ctg} 2x = \frac{21}{20}$.

3127. *a)* Alkalmazzuk a $\sin 2\alpha$-ra tanult képletet $\alpha = \frac{x}{2}$-re! *b)* Alkalmazzuk a $\cos 2\alpha$-ra tanult képletet $\alpha = \frac{x}{2}$-re! *c)* Alkalmazzuk a $\operatorname{tg} 2\alpha$-ra tanult képletet $\alpha = \frac{x}{2}$-re! Másrészt vegyük figyelembe, hogy $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$. *d)* Vegyük figyelembe, hogy $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, majd alkalmazzuk az előző eredményt! *e)* $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$ kifejezésből induljunk ki, majd alkalmazzuk az *a)* és *b)* feladatok eredményeit! Másrészt $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$, itt szorozzunk a nevezőkkel! *f)* Vegyük figyelembe, hogy $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$, majd alkalmazzuk az előző feladat eredményét. *g)* $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ kifejezésből induljunk ki, majd alkalmazzuk az *a)* és a *b)* feladatok eredményeit! *h)* Vegyük figyelembe, hogy $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$, majd alkalmazzuk az előző feladat eredményét!

3128. **1. eset:** $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$; $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$; **2. eset:** $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$; $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{4}$. **3. eset:** $\sin \frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{5}$; $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{4}$; **4. eset:** $\sin \frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{5}$; $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$.

3129. $\sin \alpha = \frac{720}{1681}$; $\cos \alpha = \frac{1519}{1681}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{720}{1519}$.

Gyakorlófeladatok

3130. A bizonyítandó azonosságok bal oldalaiba helyettesítsük be a megfelelő összegzési tételekből kapott képleteket, majd vegyük figyelembe, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
Az *e)* és az *f)* feladatoknál a jobb oldalon érdemes még elvégezni a kijelölt szorzást.
A *g)* és a *h)* feladatoknál a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot esetleg kétszer érdemes alkalmazni.

3131. Végeredmény: 1. A bal oldalon alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket, végezzük el a műveleteket, majd a két csoportba osztott tagoknál mindkét csoportból végezzünk kiemelést. Majd használjuk fel, hogy $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, ezután ugyanezt használjuk fel mégegyszer, de most β-ra alkalmazva.

3132. A bal oldalon alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket, majd végezzük el a beszorzást. Ezután írjuk be a megfelelő nevezetes hegyesszögek pontos értékeit!
Majd alkalmazzuk a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ azonosságot és ezután a bizonyítandó állítást kapjuk.

3133. Végeredmény: $\frac{1}{4}$. Alkalmazzuk a kifejezésre a megfelelő összegzési tételeket, majd végezzük el a kijelölt műveleteket! A kapott kifejezésben levő $\sin^2 x$-et alakítsuk át $\cos^2 x$-re, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság segítségével. Ezután emeljünk ki $\cos^2 x$-et azon tagokból, amelyek-

ben ezenkívül még 30° szögfüggvénye is szerepel. Majd alkalmazzuk a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot 30°-ra, s végül írjuk be a megfelelő nevezetes hegyesszög szögfüggvényének értékét és megkapjuk a végeredményt.

3134. Végeredmény: -1. Alkalmazzuk a kifejezésre a megfelelő összegzési tételeket, majd végezzük el a kijelölt műveleteket. Ezután helyettesítsük be a 45°-os nevezetes hegyesszög megfelelő szögfüggvényeinek az értékeit. Az egyszerűsítések után megkapjuk a végeredményt.

3135. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket, végezzük el a kijelölt műveleteket és egyszerűsítsünk!

IV

a) 1; *b)* 0; *c)* 0; *d)* 1; *e)* 1; *f)* 0; *g)* 0; *h)* 1.

3136. $\alpha = 45°$, ezért elég igazolni, hogy $\beta + \gamma = 45°$. $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}$ és $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{3}$. Alkalmazzuk $\operatorname{tg}(\beta + \gamma)$-ra a megfelelő összegzési tételt. Azt kapjuk, hogy $\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = 1$, ebből pedig következik, hogy $\beta + \gamma = 45°$. Keressünk elemi megoldást, amely nem használ szögfüggvényt! Érdemes megtalálni a szép elemi megoldást, mert van ilyen.

3137. Végeredmény: 2. Vegyük észre, hogy $\alpha + \beta = 45°$, így $1 = \operatorname{tg} 45° = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$. Alkalmazzuk most a megfelelő összegzési tételt, szorozzunk a nevezővel, rendezzük nullára az egyenletet, majd adjunk mindkét oldalhoz 1-et. Ezután szorzattá alakítva kaphatjuk, hogy:
$(1 + \operatorname{tg}\alpha) \cdot (1 + \operatorname{tg}\beta) = 2$.

3138. *a)* $\frac{1}{2}$. *b)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$. *c)* $-\frac{1}{2}$. *d)* $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. *e)* $-\frac{1}{2}$. *f)* $\frac{1}{4}$.

3139. *a)* $\frac{1}{2}$. *b)* 0. *c)* 2. *d)* 0.

3140. *a)* $\operatorname{tg} x$. *b)* $\sin x$. *c)* $\operatorname{ctg} x$. *d)* $\operatorname{ctg}^2 x$.

3141. Az *a)* és a *b)* feladatoknál alkalmazzuk a kijelölt műveleteket és az ismert összefüggéseket a kétszeres szögekre! A *c)* feladatnál használjuk fel az $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ azonosságot, amelynek segítségével alakítsuk szorzattá a bal oldalt. A *d)* feladatnál használjuk fel kétszer a $\sin 2\alpha$-ra vonatkozó azonosságot!

3142. Alkalmazzuk a kotangens, illetve a tangens definícióját, hozzunk közös nevezőre, alkalmazzuk a kétszeres szögekre ismert képleteket! Illetve használjuk a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot.

3143. $\sin 2x = \frac{120}{169}$; $\cos 2x = -\frac{119}{169}$; $\operatorname{tg} 2x = -\frac{120}{119}$; $\operatorname{ctg} 2x = -\frac{119}{120}$.

3144. $\sin 2x = \frac{60}{61}$. *Vázlat:* Mutassuk meg, hogy $\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$; $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$, majd használjuk ezeket fel a $\sin 2x$ képletében. Keressünk másik megoldást is!

3145. Az $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mutassuk meg, hogy $\cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$; $\cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$ és ezeket felhasználva kaphatjuk az eredményt!

3146. $\cos 2x = \frac{3}{5}$. A másodfokú egyenletet megoldva és a két jelölt közül kiválasztva a megfelelőt, kapjuk, hogy: $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$. Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója 1, a másik befogója 2 egység, ekkor számítsuk ki az átfogó hosszát, illetve az x szög szinuszát és a koszinuszát! Majd alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét!

3147. **1. eset:** $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{5}$; **2. eset:** $\operatorname{tg} x = -\sqrt{5}$. Alkalmazzuk tg $2x$ képletét! Majd behelyettesítés után kapunk egy másodfokú egyenletet tg x-re. Ezt megoldva kapjuk az eredményeket.

3148. **1. eset:** $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; **2. eset:** $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Alkalmazzuk a tangens és a kotangens definícióját. Használjuk fel, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és a $\sin 2x$ képletét. Kapjuk, hogy $\sin 2x = \frac{1}{2}$. Ebből számítsuk ki, hogy $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Használjuk fel, hogy $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Ebből számíthatjuk a végeredményeket.

3149. $\operatorname{tg} \frac{x}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ismert, hogy $|\operatorname{tg} x| = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$, lásd például a 3123. *e)* feladatot! Alkalmazzuk ezt $\frac{x}{4}$-re és vegyük figyelembe, hogy $\operatorname{tg} \frac{x}{4} > 0$! Másrészt vegyük észre, hogy $\cos \frac{x}{2} < 0$! Ismert, hogy $\left|\cos \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

3150. $\sin 4x = \frac{24}{25}$. Egyrészt $\sin 4x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)$. Osszunk $\cos^4 x$-szel, ami nem nulla, ekkor kapjuk, hogy: $\frac{\sin 4x}{\cos^4 x} = 4 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \left(1 - \operatorname{tg}^2 x\right)$. Másrészt mutassuk meg, hogy $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$! Ezeket felhasználva, tg x-ekből felépített kifejezést kapunk. Keressünk egy második megoldást, amely egy olyan derékszögű háromszögön alapszik, amelynek az x szöggel szemközti befogója 1 egység, míg a másik befogója 3 egység!

3151. Szorozzunk 2-vel, majd alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét!

3152. Bővítsük a bal oldalt $\sin 10°$-kal és alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét többször is.

$$\frac{8 \cdot \sin 10° \cdot \cos 10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40°}{\sin 10°} = \frac{4 \cdot 2 \cdot \sin 10° \cdot \cos 10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40°}{\sin 10°} =$$

$$= \frac{4 \cdot \sin 20° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40°}{\sin 10°}.$$ Folytassuk! A végén használjuk fel, hogy $\sin 80° = \cos(90° - 80°)$!

3153. Szorozzuk meg az egyenletet $\sin \alpha$-val, majd alkalmazzuk a $\sin 2\alpha$ képletét többször is, majd az előző feladat megoldásához hasonló módon egyre rövidítsük a bal oldalt, egészen addig amíg meg nem kapjuk a kívánt eredményt.

3154. Végeredmény: $\frac{1}{64}$. Legyen K a kifejezés. Használjuk fel $\sin 2x$ képletét többször is. Induljunk ki abból, hogy $K = \frac{2 \cdot \sin \frac{\pi}{65} \cdot K}{2 \cdot \sin \frac{\pi}{65}} =$

$$= \frac{2 \cdot \sin \frac{\pi}{65} \cdot \cos \frac{\pi}{65} \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi}{65} \cdot \cos \frac{4 \cdot \pi}{65} \cdot \cos \frac{8 \cdot \pi}{65} \cdot \cos \frac{16 \cdot \pi}{65} \cdot \cos \frac{32 \cdot \pi}{65}}{2 \cdot \sin \frac{\pi}{65}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{2\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{2\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{4\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{8\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{16\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{32\cdot\pi}{65}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{65}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{4\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{4\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{8\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{16\cdot\pi}{65}\cdot\cos\frac{32\cdot\pi}{65}}{2^2\cdot\sin\frac{\pi}{65}}$$

. Folytassuk! A végén használjuk fel, hogy $\sin\frac{64\cdot\pi}{65} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{65}\right) = \sin\frac{\pi}{65}$.

IV

3155. Használjunk teljes indukciót! $n = 0$-ra: $\cos x = \frac{\sin 2x}{2\cdot\sin x}$ ez pedig igaz. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra! Ekkor fennáll, hogy $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos\left(2^k\cdot x\right) = \frac{\sin\left(2^{k+1}\cdot x\right)}{2^{k+1}\cdot\sin x}$. Szorozzuk ezt $\cos\left(2^{k+1}\cdot x\right)$-szel! Így $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos\left(2^k\cdot x\right)\cdot\cos\left(2^{k+1}\cdot x\right) =$

$= \frac{\sin\left(2^{k+1}\cdot x\right)\cdot\cos\left(2^{k+1}\cdot x\right)}{2^{k+1}\cdot\sin x}$. Mutassuk meg, hogy a kapott egyenlet jobb oldala éppen: $\frac{\sin\left(2^{k+2}\cdot x\right)}{2^{k+2}}$. Ha ezt megmutatjuk, akkor igazoltuk az állítást $n = k + 1$-re, s a teljes indukció elvének megfelelően igazoltuk minden nemnegatív n egész számra.

3156. Alkalmazzuk a bal oldalra a megfelelő összegzési tételt és $\sin 2\alpha$ képletét és $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$! Kapjuk, hogy : $\frac{1}{2} + \sin\alpha\cdot\cos\alpha$. A jobb oldalra szintén alkalmazzuk az összegzési tételt és a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ képletet! Kapjuk, hogy $\frac{1}{2} + \sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

3157. *a)* Végeredmény: 0. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket és $\sin 2\alpha$ képletét, ezenkívül a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ azonosságot! *b)* Végeredmény: 0. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket és $\cos 2\alpha$ képletét! Majd osszuk el a harmadik tört számlálóját is és nevezőjét is $\cos^2\alpha$-val s így alakítsuk át tangenseket tartalmazó kifejezéssé a harmadik törtet. Ehhez használjuk fel, hogy $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$. Az első két törtet hozzuk közös nevezőre! Vegyük észre hogy az első két tört összegéből kivonva a harmadik tört átalakított kifejezését, éppen nullát kapunk.

c) Végeredmény: $\sin 2\alpha$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket, majd a számlálóban és a nevezőben hozzunk közös nevezőre, majd egyszerűsítsünk! Majd a műveletek elvégzése után alkalmazzuk a tangens definícióját, a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ azonosságot és $\sin 2\alpha$ képletét!

3158. *a)* Végeredmény: $\frac{3}{2}$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési képleteket és a megfelelő nevezetes hegyesszögek szögfüggvényeinek értékeit helyettesítsük be! Használjuk fel a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ azonosságot! *b)* Végeredmény: $\frac{3}{2}$. Hasonlóan járjunk el, mint az előző feladatban.

3159. *a)* $\operatorname{tg}^2\left(45° + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{90° + x}{2}\right)$. Alkalmazzuk most a következő képletet: $|\operatorname{tg} x| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$. Lásd a 3123. *e)* feladatot! Használjuk fel, hogy $\cos(90° + x) = -\sin x$! *b)* $\operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{90° - x}{2}\right)$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot. Használjuk fel, hogy $\cos(90° - x) = \sin x$. *c)* $\operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{90° - x}{2}\right)$. Alkalmazzuk a következő képletet: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$. Lásd a 3123. *c)* feladatot! Majd használjuk fel, hogy $\cos(90° - x) = \sin x$. *d)* $\operatorname{tg}\left(45° + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{90° + x}{2}\right)$. Használjuk fel, hogy: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$ és $\cos(90° + x) = -\sin x$.

3160. Végeredmény: $\sin^2 \alpha$, ez tényleg nem függ x-től. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket! Ezután végezzük el a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ helyettesítést. Majd két megfelelő tagból emeljünk ki $\cos^2 x$ -et, ezután alkalmazzuk a következő azonosságot: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

3161. Végeredmények: $\sin 15° = \cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; $\cos 15° = \cos 75° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{tg} 15° = \operatorname{ctg} 75° = 2 - \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 15° = \operatorname{tg} 75° = 2 + \sqrt{3}$; $\sin 105° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$; $\cos 105° = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{tg} 105° = -2 - \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 105° = \sqrt{3} - 2$. Induljunk ki abból, hogy $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt és a megfelelő nevezetes hegyesszögek szögfüggvényeinek értékeit! Használjuk fel, hogy $\sin \alpha = \cos(90° - \alpha)$. Ugyanígy határozhatjuk meg $\cos 15°$ és a $\sin 75°$ értékeit. A $\operatorname{tg} 15°$ értékének meghatározására használjuk a tangens definícióját és az előzőekben kiszámított értékeket. Használjuk fel még, hogy $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$! A $\operatorname{ctg} 15°$ meghatározásánál a legegyszerűbb, ha $\operatorname{tg} 15°$-ből számítjuk ki. $\operatorname{tg} 105° = \operatorname{tg}(105° - 180°) = \operatorname{tg}(-75°) = -\operatorname{tg} 75°$. A $\operatorname{ctg} 105°$-ot hasonlóan számíthatjuk ki.

3162. $\sin 75° = \sin(45° + 30°)$ erre alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt, ezután pedig helyettesítsük be a megfelelő nevezetes szögfüggvények értékeit.
$\sin 15° = \sin(45° - 30°)$, ezt ahhoz hasonlóan alakítsuk át, mint az előzőt.

3163. $\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(60° - 45°)$. Alkalmazzuk erre a megfelelő összegzési tételt és a nevezetes hegyesszögek tangenseinek megfelelő értékeit. Majd használjuk fel, hogy $\operatorname{ctg} 15° = \frac{1}{\operatorname{tg} 15°}$!

3164. Használjuk fel, hogy $\sin 75° = \cos 15°$, $\cos 75° = \sin 15°$, $\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}(135° - 180°) = \operatorname{tg}(-45°) = -\operatorname{tg} 45° = -1$!

3165. $\sin 18° = \cos 72° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$; $\cos 18° = \sin 72° = \frac{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}{4}$; $\operatorname{tg} 18° = \operatorname{ctg} 72° = \frac{\sqrt{25 - 10 \cdot \sqrt{5}}}{5}$; $\operatorname{ctg} 18° = \operatorname{tg} 72° = \sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{5}}$. Tekintsünk egy olyan egyenlő

szárú háromszöget, amelynek szögei 72°; 72°; 36°, a szárainak hossza 1 egység és az alap hossza legyen x egység! Húzzuk meg az egyik 72°-os szög szögfelezőjét! Mutassuk meg, hogy ennek a hosszúsága is x ! Vegyük észre, hogy a szögfelező x és $1-x$ hosszúságú részre osztja fel a szárat. Miért? Alkalmazzuk a szögfelezőtételt: $\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}$. Ebből határozzuk meg x-et! $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ebből pedig: $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Számítsuk ki az említett egyenlő szárú háromszög magasságát a Pitagorasz-tétellel: $m=\frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4}$, ebből kiszámíthatjuk cos 18°-ot. A tg 18°-ot a tangens definíciójának és az előző eredmények felhasználásával kaphatjuk. Némely algebrai átalakításokat azért néhol végre kell hajtani, például a nevező gyöktelenítését, ha azokat az eredményeket szeretnénk kapni, amelyeket előbb megadtunk.

3166. $\cos 36°=\cos(2\cdot 18°)=\cos^2 18°=-\sin^2 18°$, másrészt használjuk fel az előző feladatból a megfelelő képleteket.

3167. Mutassuk meg, hogy $\sin 234°=-\cos 36°$, ezt pedig már az előző feladat megoldásában kiszámítottuk. Használjuk fel $\sin 18°$ pontos értékét és a megfelelő szorzás elvégzése után megkapjuk a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalát.

3168. Végeredmény: 4 a kifejezés pontos értéke. Használjuk fel, hogy $\cos 290°=\cos(270°+20°)$! Alkalmazzuk erre a megfelelő összegzési tételt és mutassuk meg, hogy $\cos 290°=\cos(270°+20°)=$ $=\sin 20°$! Másrészt $\sin 250°=\sin(270°-20°)$, ezt kifejtve a megfelelő összegzési tétellel, kaphatjuk, hogy $\sin 250°=\cos 20°$. Felhasználva az eddigieket, kaphatjuk, hogy a kiszámítandó kifejezés egyenlő a következő kifejezéssel: $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20°}-\frac{1}{\cos 20°}$. Ebből

$$2\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot\cos 20°-\sin 20°}{2\cdot\sin 20°\cdot\cos 20°}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20°-\frac{1}{2}\sin 20°}{2\cdot\sin 20°\cdot\cos 20°}=4\cdot\frac{\sin 60°\cdot\cos 20°-\cos 60°\cdot\sin 20°}{2\cdot\sin 20°\cdot\cos 20°}=$$

$$=4\cdot\frac{\sin(60°-20°)}{2\cdot\sin 20°\cdot\cos 20°}=\ldots=4$$

3169. $\gamma=\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$, ezt felhasználva: $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma\cdot(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)=$

$=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\cdot(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\cdot(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)$. Ezután alkalmazzuk a kotangensre való összegzési tételt! Ha ez éppen nem jut eszünkbe, akkor alakítsuk át a kotangenst tangensre és alkalmazzuk a tangensre ismert összegzési tételt.

3170. Használjuk a tangensre ismert összegzési tételt többször is. Számítsuk ki először, hogy $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{7}{24}$, másrészt számítsuk ki, hogy $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$. Ezután mutassuk meg, hogy $\operatorname{tg}(4\alpha+2\beta)=\operatorname{tg}\big(2\cdot(2\alpha+\beta)\big)=\frac{3}{4}$, majd ezután következik, hogy $\operatorname{tg}(5\alpha+2\beta)=$ $=\operatorname{tg}\big((4\alpha+2\beta)+\alpha\big)=1$. Ebből következik, hogy $5\alpha+2\beta=45°+k\cdot 180°$, ahol k tetszőleges egész szám. Mutassuk meg, hogy $0<\alpha<45°$, majd azt, hogy $0<2\alpha<45°$. Hasonlóan mutassuk meg, hogy β, $2\alpha+\beta$ és $4\alpha+2\beta$ is 0° és 45° közé esik, ezért $k=0$.

3171. Számítsuk ki először, hogy $\cos\beta = \frac{5}{\sqrt{28}}$, ezután pedig $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{5}$ következhet. Alkalmazzuk a tangensre ismert összegzési tételt! Kaphatjuk, hogy $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vegyük figyelembe, hogy $0 < \alpha + \beta < 180°$. Ebből és az előzőből következik, hogy $\alpha + \beta = 30°$.

3172. Számítsuk ki, hogy $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$, másrészt $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. Majd az utóbbiból $\operatorname{tg}2\beta = \frac{3}{4}$. Majd végül $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta) = 1$. Mutassuk meg, hogy $0 < \alpha + 2\beta < \pi$, így ezekből következik, hogy $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$.

IV

Geometriai feladatok

3173. $\approx 48°11'; \approx 96°22'; \approx 35°27'$ a háromszög szögei, $\approx 4{,}67$ cm a háromszög ismeretlen oldala. Alkalmazzuk a szinusztételt! Majd alkalmazzuk a $\sin 2\alpha$ képletét.

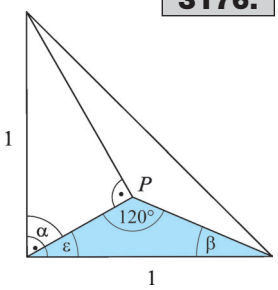
3174. $\approx 51°3'; \approx 68°57'$ a háromszög ismeretlen szögei. Alkalmazzuk a szinusztételt! Ezután alkalmazzuk a szögek különbségére a megfelelő összegzési tételt. Kapunk egy egyenletet, amelyben az egyik szög szinusza és koszinusza szerepel. Osszuk el az egyenletet a szög koszinuszával, ekkor olyan egyenletet kapunk, amelyben a szög tangense lesz. Ebből megkaphatjuk a megfelelő szöget.

3175. $\approx 6{,}09$ cm; $\approx 9{,}13$ cm a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 41°47'; \approx 88°13'$ a háromszög ismeretlen szögei. Hasonlóan számíthatjuk ki a szögeket, mint az előző feladatban. Ezután az ismeretlen oldalakat szinusztétellel számíthatjuk ki.

3176. $\approx 0{,}535$ egység a P pont távolsága a derékszögű csúcstól. Számítsuk ki, hogy $PC = \cos\alpha$. Másrészt $\beta = \alpha - 30°$. Alkalmazzuk a szinusztételt: $\frac{PC}{1} = \frac{\sin\beta}{\sin 120°}$. Ebből $\cos\alpha = \frac{\sin(\alpha - 30°)}{\sin 120°}$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt, utána osszunk $\cos\alpha$-val. Kapjuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$. Ebből számítsuk ki az α szöget, majd ebből pedig a PC szakasz hosszát.

3177. $x = 60$ m-re közelítettük meg a felhőkarcolót. Az út kezdetén α szögben látjuk a felhőkarcolót, ekkor $300\text{ m} + x$ távolságra vagyunk a felhőkarcolótól. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{120}{300+x}$, menjünk 300 méterrel közelebb a felhőkarcolóhoz: $\operatorname{tg}(\alpha+45°) = \frac{120}{x}$. Alkalmazzuk erre a megfelelő összegzési tételt. Majd oldjuk meg az egyenletrendszert! x-re másodfokú egyenletet kapunk, amelyet megoldva, kapjuk, hogy $x = 60$.

3176.



3178. $\approx 37{,}76°; \approx 113{,}28°; \approx 28{,}96°$ a háromszög ismeretlen szögei, $\approx 10{,}12$ cm; $\approx 15{,}18$ cm a háromszög ismeretlen oldalai. Alkalmazzuk a szinusztételt! $\frac{2}{3} = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$. Az összegzési tétel segítségével írjuk fel a $\sin 3\alpha$ kifejezést $\sin\alpha$, illetve $\cos\alpha$ segítségével, vagy használjuk fel a 3120. *a)* feladat eredményét. Ebből meghatá-

rozhatjuk az α szöget, ebből a β szöget, ezekből pedig a γ szöget. Majd a szinusztételt kétszer felírva, meghatározhatjuk a két ismeretlen oldal hosszúságát.

3179. Nincs ilyen háromszög. Alkalmazzuk a szinusztételt: $\frac{12}{8} = \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$. Majd fejezzük ki a megfelelő kifejezéseket $\sin\alpha$, illetve $\cos\alpha$ segítségével. Például a következő egyenletet kaphatjuk: $4 \cdot \cos^2 x - 3 \cdot \cos x - 1 = 0$, ebből olyan x-eket kapunk, amelyekre nem létezik a megfelelő háromszög.

IV

3180. $\approx 71°12'$; $\approx 72°32'$; $\approx 36°16'$ a háromszög ismeretlen szögei. Alkalmazzzuk a szinusztételt! $a = 8$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 2\beta$, ekkor $\alpha = 180° - 3\beta$. $\frac{8}{5} = \frac{\sin(180° - 3\beta)}{\sin\beta}$. Alakítsuk át ezt úgy, hogy csak $\sin\beta$, illetve $\cos\beta$ legyen az egyenletben. Ezt az összegzési tétel segítségével kaphatjuk meg vagy használjuk fel a 3120. *a)* feladat eredményét. A rendezés után kapjuk, hogy: $\cos^2\beta = 0{,}65$. Ebből kapjuk a $\beta \approx 36°16'$ szöget. S ebből pedig számíthatjuk a többi szöget.

3181. **1. megoldás:** $\alpha_1 \approx 83{,}28°$; $\beta_1 \approx 48{,}13°$; $\gamma_1 \approx 48{,}59°$ a háromszög ismeretlen szögei, $a_1 \approx 15{,}89$ cm; $b_1 \approx 11{,}91$ cm a háromszög ismeretlen oldalai. **2. megoldás:** $\alpha_2 \approx 28°$; $\beta_2 \approx 20{,}6°$; $\gamma_2 \approx 131{,}4°$, $a_2 \approx 7{,}51$ cm; $b_2 \approx 5{,}63$ cm. Legyen $c = 12$ cm, $R = 8$ cm, ekkor a $c = 2 \cdot R \cdot \sin\gamma$ képletből kaphatjuk a γ szöget: $\gamma_1 \approx 48{,}59°$, $\gamma_2 \approx 131{,}4°$, $a = 4 \cdot x$, $b = 3 \cdot x$. Írjuk fel a c oldalra a koszinusztételt! Ebből kapjuk, hogy: $x_1 \approx 3{,}97$, $x_2 \approx 1{,}877$. Ezekből kaphatjuk az ismeretlen oldalakat. Az α szöget például az $a = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$ egyenletből határozhatjuk meg.

3182. $\approx 26{,}57°$; $\approx 53{,}13°$; $\approx 100{,}3°$ a háromszög szögei; ≈ 5 cm; 8,94 cm a háromszög ismeretlen oldalai. Legyen m a háromszög 11 cm-es oldalához tartozó magassága. $\frac{m}{3} = \operatorname{tg} 2\alpha$; $\frac{m}{8} = \operatorname{tg}\alpha$. Alkalmazzuk a tg 2α képletét, majd oldjuk meg az egyenletrendszert! Kapjuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. $\left(\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2} \text{ nem lehet}\right)$ Ebből kapjuk, hogy: $\alpha \approx 26{,}57°$. A háromszög megfelelő oldalait megfelelő szögfüggvénnyel kaphatjuk.

3183. $\gamma = 135°$ a háromszög harmadik szöge. A feltételből következik, hogy $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$. Először mutassuk meg, hogy $1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \neq 0$. Ha ezt megmutattuk, akkor oszthatunk vele. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = 1$, ebből $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1$. Ebből következik, hogy $\alpha + \beta = 45°$, s innen $\gamma = 135°$.

3184. **1. eset:** 914,5 cm^2 a trapéz területe. **2. eset:** 85,4 cm^2 a trapéz területe. Legyen m a trapéz magassága. Húzzuk meg a trapéz egyik átlóját! Legyen $\beta + 26°34'$ a hosszabbik alapon fekvő szög. Ekkor $\frac{m}{5} = \operatorname{tg}(\beta + 26°34')$ és $\frac{m}{25} = \operatorname{tg}\beta$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt, majd oldjuk meg az egyenletrendszert! Ekkor tg β-ra kapunk egy másodfokú egyenletet, amelyet megoldva, kapjuk, hogy: **1. eset:** $\operatorname{tg}\beta \approx 1{,}4633$, $\beta \approx 55{,}65°$, $m \approx 36{,}58$, $t \approx 914{,}5$ cm^2, **2. eset:** $\operatorname{tg}\beta \approx 0{,}136675$, $\beta \approx 7{,}78°$, $m \approx 3{,}42$ cm, $t \approx 85{,}4$ cm^2.

3185. $\approx 23{,}865°$, $\approx 36{,}135°$, a középponti szög két része. A két szögre a feltétel: (1) $\alpha_1 + \alpha_2 = 60°$. A két megfelelő húrra: $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$. Húzzuk meg a megfelelő háromszög magasságait. Ekkor kaphatjuk, hogy $x = 2 \cdot r \cdot \sin\frac{\alpha_1}{2}$ és $y = 2 \cdot r \cdot \sin\frac{\alpha_2}{2}$. Ezeket behelyettesítve kapjuk, hogy: (2)

$\frac{2}{3}=\frac{\sin\frac{\alpha_1}{2}}{\sin\frac{\alpha_2}{2}}$. Oldjuk meg az (1) és (2) egyeletből álló egyenletrendszert! $\frac{2}{3}=\frac{\sin\left(30°-\frac{\alpha_1}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha_2}{2}}$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt! Majd oldjuk meg az egyenletet! Kapjuk, hogy $\alpha_1\approx 23{,}865°$.

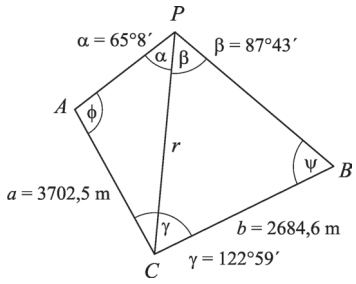
3186. A kifejezés pontos értéke 2. Írjuk fel a szinusztételt kétszer az ABC háromszögre! $\frac{1}{AC}=\frac{\sin 100°}{\sin 20°}$ és $\frac{BC}{1}=\frac{\sin 60°}{\sin 100°}$. Használjuk fel, hogy $\sin 100°=\cos 20°$ és $\sin 20°=$ $=2\cdot\sin 10°\cdot\cos 10°$. Majd a vége felé használjuk fel, hogy $\cos 10°-\sqrt{3}\cdot\sin 10°=$ $=2\cdot\sin(30°-10°)$.

3187. A keresett szögek: 30°; 60°; 90°. Legyenek a háromszög szögei $\alpha-d$, α, $\alpha+d$. Mutassuk meg, hogy $\alpha=60°$! A feltétel szerint $\sin(60°-d)+\sin 60°+\sin(60°+d)=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt, rendezés után kapjuk, hogy $\cos d=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ebből $d=30°$.

3188. $\frac{3}{\sqrt{14}}:\frac{4}{\sqrt{21}}:\frac{5}{\sqrt{30}}$ vagy más formában $\sqrt{27}:\sqrt{32}:\sqrt{85}$ a háromszög oldalainak aránya. Legyen $\operatorname{tg}\alpha=3x$, $\operatorname{tg}\beta=4x$, $\operatorname{tg}\gamma=5x$. Itt $\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}(180°-(\alpha+\beta))=-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=$ $=-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$. Ha ide behelyettesítjük a megfelelő kifejezéseket, akkor x-re kapunk egy egyenletet, amelynek a feladatnak megfelelő megoldása: $x=\sqrt{\frac{1}{5}}$. Ebből kaphatjuk a szögek szinuszait, ha felhasználjuk, hogy: $\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$. Majd alkalmazzuk a szinusztételt: $a:b:c=$ $=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$.

3189. $PC=r\approx 2193{,}7$ m, a P pont C ponttól való távolsága. Számítsuk ki először, hogy $\varphi+\psi=84°10'$! Írjuk fel kétszer a szinusztételt: $\frac{r}{a}=\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$ és $\frac{r}{b}=\frac{\sin\psi}{\sin\beta}$! Ezekből kapjuk, hogy: $\frac{\alpha\cdot\sin\varphi}{\sin\alpha}=\frac{b\cdot\sin\psi}{\sin\beta}$. Helyettesítsük be ide a megfelelő adatokat és kapjuk, hogy $1{,}252\,29\cdot\sin\varphi\approx$ $\approx\sin(84°10'-\varphi)$! Alkalmazzuk a megfelelő összegési tételt, majd osszunk $\cos\varphi$-vel és kapjuk, hogy $\operatorname{tg}\varphi\approx 0{,}734\,77$. Ebből határozzuk meg φ-t és helyettesítsük vissza a megfelelő egyenletbe és kapjuk, hogy: $r\approx 2193{,}7$ m.

3189.



A háromszög trigonometriájáról

3190. Hozzuk a feltételt a következő alakra: $\sin\gamma \cdot \cos\gamma = \sin\beta \cdot \cos\beta$, ebből $\sin 2\gamma = \sin 2\beta$. Ebből vonjuk le a megfelelő következtetéseket.

3191. $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, ebből $\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$. Így kaphatjuk, hogy $2 \cdot \cos\alpha = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \ldots = \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + \cos\alpha$. Ebből $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$. Egy második megoldást kaphatunk, ha alkalmazzuk a szinusztételt a b és a c oldalra, majd alkalmazzuk a koszinusztételt az a oldalra.

IV

3192. Végeredmény: Derékszögű a háromszög (és nem egyenlő szárú, hiszen ezt kizártuk.) Alkalmazzuk a szinusztételt! $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \ldots = \dfrac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \sin\beta}$. Ebből: $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$.

3193. $\sin(\alpha + \beta) = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt! Majd szorozzunk a nevezővel! Az átalakítások után $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot (\cos\alpha + \cos\beta) + \cos^2\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos^2\beta =$
$= \sin\alpha + \sin\beta$, $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot (\cos\alpha + \cos\beta) = \sin\alpha \cdot (1 - \cos^2\beta) + \sin\beta \cdot (1 - \cos^2\beta)$,
$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot (\cos\alpha + \cos\beta) = \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot (\sin\alpha + \sin\beta)$,
$(\sin\alpha + \sin\beta)(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) = 0$, $(\sin\alpha + \sin\beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) = 0$.
Ebből $\cos(\alpha + \beta) = 0$, mert $(\sin\alpha + \sin\beta) \neq 0$. Ebből következtessünk!

3194. Használjuk fel, hogy: $\sin\gamma = 2 \cdot \sin\dfrac{\gamma}{2} \cdot \cos\dfrac{\gamma}{2}$. Ebből kaphatjuk, hogy $-2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta =$
$= -2 \cdot \cos^2\dfrac{\gamma}{2}$. Ebből pedig $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \cdot \cos^2\dfrac{\gamma}{2}$, $-\cos\gamma - \cos(\alpha - \beta) =$
$= -2 \cdot \cos^2\dfrac{\gamma}{2}$. Ebből kaphatjuk, hogy $\cos(\alpha - \beta) = 1$. Ebből következik, hogy $\alpha - \beta = 0$.

3195. $\sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta$, ebből (1) $\sin\gamma = 2 \cdot \cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$, másrészt (2) $\sin\gamma = 2 \cdot \sin\dfrac{\gamma}{2} \cdot \cos\dfrac{\gamma}{2}$. A (2) egyenletből $\sin\gamma = 2 \cdot \cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}$. Az (1) és (2) egyenletből: $2 \cdot \cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} = 2 \cdot \cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \left(\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} - \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right) = 0$. Mutassuk meg, hogy $\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} = 0$ nem állhat fenn. Ebből következik, hogy $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} - \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = 0$. Tovább folytatva: $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \sin\left(90° - \dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$. Ebből **1. eset:** $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \dfrac{\alpha-\beta}{2}$, innen pedig $\alpha = 90°$. **2. eset:** $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 180° - \left(90° - \dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$, ebből pedig $\beta = 90°$.

3196. **1. eset:** $2 \cdot \sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cdot \cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$, ebből $\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} =$
$= \cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}$. Innen pedig $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha + \beta}{2} = 1$, ebből $\dfrac{\alpha + \beta}{2} = 1$. Innen következik, hogy $\gamma = 90°$.
2. eset: Ha $\gamma = 90°$, akkor $\sin\alpha = \cos\beta$ és $\sin\beta = \cos\alpha$, tehát $\sin\alpha + \sin\beta = \cos\alpha + \cos\beta$.

3197. $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$, így $2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2(\alpha+\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta + \cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta$. Ebből $(1-\sin^2\alpha) + (1-\sin^2\beta) = \sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta + \cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta + \cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta$, $0 = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta + \cos^2\beta\cdot(\sin^2\alpha - 1) + \cos^2\alpha\cdot(\sin^2\beta - 1)$, $0 = \sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta - \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta$, $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot(\sin\alpha\cdot\sin\beta - \cos\alpha\cdot\cos\beta) = 0$. Ebből kaphatjuk, hogy $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma = 0$.

3198. $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy: $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma = \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot(-\cos(\alpha+\beta)) \le \frac{1}{8}$, $0 \le 8\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta) + 1$.

$0 \le 8\cdot\frac{1}{2}\cdot(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))\cdot\cos(\alpha+\beta) + 1$,

$0 \le 4\cdot\cos^2(\alpha+\beta) + 4\cdot\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta)$.

$0 \le (2\cdot\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))^2 + \sin^2(\alpha-\beta)$. Vizsgáljuk meg az egyenlőség esetét is! Azt kapjuk, hogy akkor és csak akkor van egyenlőség, ha a háromszög szabályos.

3199. Használjuk majd fel a koszinuszok összegének a szorzattá alakítására ismert képletet.

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta) = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} +$$

$$+2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right) =$$

$$= 4\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} = 4\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

3200. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \cos\alpha + \cos\beta + \cos(180^\circ - (\alpha+\beta)) =$

$$= \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \left(\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= 1 + 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cdot\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 1 + 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= 1 + 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot(-2)\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) =$$

$$= 1 + 4\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} = 1 + 4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}.$$

3201. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}(180^\circ - (\alpha+\beta)) = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta +$

$$+\frac{\operatorname{tg}180^\circ - \operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{1 + \operatorname{tg}180^\circ\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \ldots =$$

$$= (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\cdot\frac{-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma.$$

3202. $-1 = \cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos((\alpha+\beta)+\gamma) = \cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma - \sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\gamma =$

$$= \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma - \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma - \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma - \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$$ Osszuk el az

IV

egyenletet $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$-val, kapjuk, hogy: $\frac{-1}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\gamma-$ $-\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha$. Ebből kapjuk a bizonyítandó állítást.

3203. $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin\big(360°-(\alpha+\beta)\big)=\sin2\alpha+\sin2\beta-$ $-\sin(2\alpha+2\beta)=2\cdot\sin\frac{2\alpha+2\beta}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha-2\beta}{2}-2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=\ldots=$ $=2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)=$ $=2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot(-2)\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\big((\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)\big)\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\big((\alpha-\beta)-(\alpha+\beta)\big)\right)=$ $=-4\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)=4\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$

3204. $\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma=\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos\big(360°-2\cdot(\alpha+\beta)\big)=$ $=\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos\big(2\cdot(\alpha+\beta)\big)=$ $=2\cdot\cos\frac{2\alpha+2\beta}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha-2\beta}{2}+\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha+\beta)=\ldots=$ $-1+2\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)=$ $=-1+2\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)=\ldots=$ $-1+4\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta=\ldots=-1-4\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma.$

3205. $\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}2\beta+\operatorname{tg}2\gamma=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}+\frac{\sin2\beta}{\cos2\beta}+\frac{\sin2\gamma}{\cos2\gamma}=\frac{\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\cos2\alpha\cdot\sin2\beta}{\cos2\alpha\cdot\cos2\beta}+$ $+\frac{\sin\big(360°-2\cdot(\alpha+\beta)\big)}{\cos2\gamma}=\ldots=\frac{\sin\big(2\cdot(\alpha+\beta)\big)}{\cos2\alpha\cdot\cos2\beta}+\frac{\sin2\gamma}{\cos2\gamma}=\ldots=\frac{-\sin2\gamma}{\cos2\alpha\cdot\cos2\beta}+\frac{\sin2\gamma}{\cos2\gamma}=$ $=\frac{-\sin2\gamma\cdot\cos2\gamma+\cos2\alpha\cdot\cos2\beta\cdot\sin2\gamma}{\cos2\alpha\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\gamma}=\frac{-\sin2\gamma\cdot(\cos2\gamma-\cos2\alpha\cdot\cos2\beta)}{\cos2\alpha\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\gamma}=$ $\frac{-\sin2\gamma\cdot\big(\cos\big(2\cdot(\alpha+\beta)\big)-\cos2\alpha\cdot\cos2\beta\big)}{\cos2\alpha\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\gamma}=\ldots=\frac{-2\sin2\gamma\cdot(-\sin2\alpha\cdot\sin2\beta)}{\cos2\alpha\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\gamma}=$ $=\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}2\beta\cdot\operatorname{tg}2\gamma.$

3206. Ismert, hogy $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$ ha a szögek egy háromszög szögei. Vegyük észre, hogy $\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)+\left(90°-\frac{\beta}{2}\right)+\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)=180°$. Ezért a zárójelekben levő szögek is egy háromszög szögei, ezért alkalmazhatjuk ezekre a megfelelő tételt. $\operatorname{tg}\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)+$ $+\operatorname{tg}\left(90°-\frac{\beta}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(90°-\frac{\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right).$

Ebből $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$. Keressünk másik megoldást! Alkalmazzuk a kotangens definícióját, majd az első két törtet hozzuk közös nevezőre! Alkalmazzuk majd a megfelelő helyeken a megfelelő összegzési tételt! Folytassuk! Jóval hosszabb megoldásra számítsunk, mint az előző.

3207. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2(180° - (\alpha+\beta)) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2(\alpha+\beta)$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt, majd végezzük el a négyzetre emelést, alakítsuk át a $\sin^2\beta$-t és a $\sin^2\alpha$-t és kapjuk, hogy: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\cdot(1-\cos^2\beta) + \sin^2\beta + \cos^2\beta\cdot(1-\cos^2\alpha) + 2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma = \ldots = 2 - 2\cdot\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta = 2 - 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta) = 2 - 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta) = \ldots = 2\cdot(1+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)$.

3208. Ismert, hogy: $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\cdot(1+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)$. Így $1-\cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta + 1 - \cos^2\gamma = 2 + 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$. Tehát $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$. Ha van kedvünk és időnk, akkor keressünk másik megoldást, amely nem használja fel az előző tételt. Ez kissé hosszabb megoldás lesz.

3209. Vegyük észre, hogy $\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) + \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = 180°$. Ezért a zárójelben levő szögek is egy háromszög szögei. Másrészt tudjuk, hogy: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$, tetszőleges háromszög szögeire.

Ide behelyettesítve $\cos^2\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(90° - \frac{\beta}{2}\right) + \cos^2\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) =$

$= 1 - 2\cdot\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(90° - \frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)$. Ebből kapjuk, hogy:

$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} = 1 - 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$.

3210. Ismert, hogy $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\cdot(1+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)$, tetszőleges háromszög szögeire. Vegyük észre, hogy $\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) + \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = 180°$. Tehát a zárójelekben levő szögek is egy háromszög szögei. Ezekre alkalmazva a szinuszok négyzetösszegére igazolt tételt, kapjuk, hogy: $\sin^2\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(90° - \frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) =$

$= 2\cdot\left(1 + \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(90° - \frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)\right)$. Ebből kapjuk, hogy

$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} = 2\cdot\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\right)$.

3211. Ismert, hogy $t = \frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$, másrészt alkalmazzuk a-ra is és b-re is a következő tételt: $\alpha = 2\cdot R\cdot\sin\alpha$!

3212. Ismert, hogy $t = 2\cdot R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$. Másrészt ismert, hogy $t = 4\cdot R\cdot r\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$. Majd használjuk fel, hogy $\sin\alpha = 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$, ezt alkalmazzuk β-ra és γ-ra is!

3213. Ismert, hogy $t = 4\cdot R\cdot r\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$, másrészt $r = 4\cdot R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$. Osszuk el a két egyenlet megfelelő oldalait egymással!

IV

3214. Tudjuk, hogy $t = 4 \cdot R \cdot r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$, másrészt ismert, hogy $r = 4 \cdot R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$. Osszuk el a második egyenletet az elsővel, majd szorozzuk r-rel, ezután t-vel a kapott egyenlet oldalait. Majd használjuk fel, hogy $t = s \cdot r$.

3215. Ismert, hogy $t = s \cdot r$, másrészt $t = 4 \cdot R \cdot r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$.

IV

3216. *a)* A koszinusztételből kapjuk, hogy $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$, másrészt tudjuk, hogy $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$, mert $\frac{\alpha}{2} < 90°$. Így $1 - \cos\alpha = \ldots = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2 \cdot b \cdot c}$, ezeket felhasználva kapjuk, hogy: $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4 \cdot b \cdot c}}$, ebből pedig $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b) \cdot (s-c)}{b \cdot c}}$. *b)* $1 + \cos\alpha = \ldots = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2 \cdot b \cdot c}$. Másrészt ismert, hogy $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$, mert $\frac{\alpha}{2} < 90°$. Ezekből kapjuk, hogy $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4 \cdot b \cdot c}}$, innen pedig $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s \cdot (s-a)}{b \cdot c}}$.

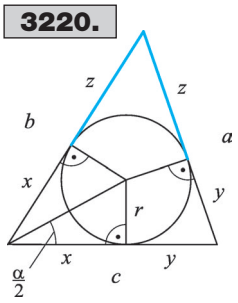
3217. Használjuk fel az előző két feladat végeredményét és használjuk a tangens definícióját!

3218. A szögfelező két részháromszögre osztja az eredeti háromszöget. Írjuk fel, hogy az eredeti háromszög területe egyenlő a részháromszögek területeinek az összegével! $\frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{b \cdot f_a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{2} + \frac{c \cdot f_a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{2}$. Másrészt használjuk fel, hogy $\sin\alpha = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$.

3219. Ismert, hogy $\sin\alpha = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$, másrészt $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b) \cdot (s-c)}{b \cdot c}}$ és $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s \cdot (s-a)}{b \cdot c}}$. Ezekből kaphatjuk a bizonyítandó összefüggést.

3220. Mutassuk meg, hogy $x = s - a$, ehhez használjuk fel, hogy a körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak. Így $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$.

3220.

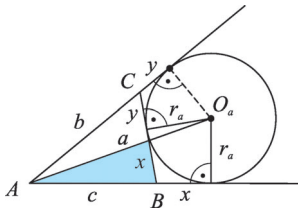


3221. Ismert, hogy $t = s^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, másrészt tudjuk, hogy $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$, harmadrészt $t = s \cdot r$.

3222. Ismert, hogy $t = s \cdot r$, másrészt tudjuk, hogy $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$. Egy második megoldást kaphatunk, ha

abból indulunk ki, hogy $t = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}$ és $\sin\alpha = \frac{2}{b \cdot c} \cdot \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}$. Keressünk további megoldásokat!

3223.



3223. *a)* $t_{ACO_a} = \frac{b \cdot r_a}{2}$; $t_{ABO_a} = \frac{c \cdot r_a}{2}$; $t_{BCO_a} = \frac{a \cdot r_a}{2}$;

$t = t_{ACO_a} + t_{ABO_a} - t_{BCO_a} = \frac{b + c - a}{2} \cdot r_a$. Ebből $r_a = \frac{t}{s-a}$.

b) $s = c + x$, így $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r_a}{s}$.

3224. Ismert, hogy $r_a = \frac{t}{s-a}$, másrészt $t = s \cdot r$, harmadrészt $t = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}$. Induljunk el a $\sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$ kifejezésből és ezt alakítsuk az előzőeket figyelembe véve.

3225. *a)* Tudjuk, hogy $\alpha = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$. Alkalmazzuk ezt b-re és c-re is, majd adjuk össze a három egyenletet. *b)* Ismert, hogy $\frac{r}{R} = 4 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$. Másrészt $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma =$. $= 4 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} + 1$. Ezekből megkaphatjuk a bizonyítandó állítást.

3226. Írjuk fel az a és b oldalra a szinusztételt! Majd adjunk az egyenlet mindkét oldalához 1-et! Hozzunk közös nevezőre és kapunk egy egyenletet. Induljunk ki újra az előbb felírt szinusztételből, de most az egyenlet mindkét oldalából vonjunk le 1-et. Ezután hozzunk közös nevezőre és így kaptuk a második egyenletet. Osszuk el a második egyenletet az első egyenlettel! Majd használjuk fel, hogy $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ és $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

3227. *a)* Írjuk fel a szinusztételt az a és b oldalra! Adjunk mindkét oldalhoz 1-et, majd hozzunk közös nevezőre. Majd írjuk fel a szinusztételt a b és c oldalra! Ezután szorozzuk össze a kapott két egyenlet megfelelő oldalait! Kapjuk, hogy $\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma}$. Használjuk fel, hogy $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$ és $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, másrészt $\sin(\alpha+\beta) = 2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. *b)* Induljunk ki az a és b oldalakra felírt szinusztételből, majd mindkét oldalból vonjunk le 1-et, ezután hozzunk közös nevezőre! Hasonló módon járjunk el, mint az *a)* feladatban, csak itt a $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságot használjuk fel.

Trigonometrikus egyenletek II. rész

IV

3228. *a)* Vegyük észre, hogy $f(x) = \sin x$, ha $\sin x \neq 0$, ha pedig $\sin x = 0$, azaz $x = k \cdot \pi$, ahol k tetszőleges egész szám, akkor ezeken a helyeken a függvény nincs értelmezve. *b)* Vegyük észre, hogy $f(x) = \cos x$, ha $\cos x \neq 0$. Ha pedig $\cos x = 0$, akkor $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, ahol k tetszőleges egész szám, és ezeken a helyeken a függvény nincsen értelmezve. *c)* Vegyük észre, hogy a függvény $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x$.

3229. *a)* Gondoljuk meg, hogy $f(x) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$.

b) Vegyük figyelembe, hogy $f(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$.

c) Alakítsuk át kissé a következő módon: $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) =$

$= \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x \right) = \sqrt{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

Alapvető feladatok

A következőkben szokás szerint k, l, m, n, p, q tetszőleges egész számokat jelöl.

3230. *a)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá a kapott kifejezést! Korábban tanult módszerrel is megoldhatjuk az egyenletet, miszerint

1. eset: $2x = x + k \cdot \pi$; **2. eset:** $2x = \pi - x + l \cdot \pi$.

b) $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladat első megoldását.

c) $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

3231. *a)* $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. Végezzük el a négyzetre emelést, majd használjuk fel, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$! *b)* $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + m \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

3232. *a)* $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. Szorozzuk 2-vel! *b)* $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + l \cdot 2 \cdot \pi$. Szorozzunk $\sin x$-szel, majd osszunk 2-vel.

3233. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$. Szorozzuk 2-vel!

3234. $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Szorozzuk 2-vel!

3235. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + n \cdot 2 \cdot \pi$; $x_5 = -\frac{3 \cdot \pi}{4} + p \cdot 2 \cdot \pi$. Rendezzük nullára, alkalmazzuk a tangens definícióját és $\sin 2x$ képletét, majd alakítsuk szorzattá a kifejezést!

3236. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá a kifejezést!

3237. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

3238. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét, majd alakítsuk csak szinuszokat tartalmazóvá az egyenletet. Ekkor $\sin x$-re egy másodfokú egyenletet kapunk, melyet könnyen megoldhatunk.

3239. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a kétszeres szögek megfelelő képleteit, majd alakítsuk szorzattá a kifejezést!

3240. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét, majd ezt bontsuk szorzattá. Ezután rendezzük nullára az egyenletet, majd az egész kapott kifejezést alakítsuk szorzattá.

3241. *a)* $x_1 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 4 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 4 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{4 \cdot \pi}{3} + m \cdot 4 \cdot \pi$; $x_4 = -\frac{4 \cdot \pi}{3} + p \cdot 4 \cdot \pi$. Használjuk fel, hogy $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

3242. $x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{4 \cdot \pi}{3} + l \cdot 4 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{4 \cdot \pi}{3} + m \cdot 4 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

3243. $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 4 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{7 \cdot \pi}{3} + m \cdot 4 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

3244. $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 4 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{3} + m \cdot 4 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző három feladatot.

3245. $x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 4 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 4 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző négy feladatot.

3246. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsunk szorzattá!

3247. $x_1 = -\frac{3 \cdot \pi}{8} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{8} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét és használjuk fel, hogy: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. A kapott egyenletet osszuk el $\cos^2 x$-szel, amikor ez nem nulla. Így $\operatorname{tg} x$-re egy másodfokú egyenletet kapunk, amelyet könnyen megoldhatunk. Mutassuk meg, hogy $\cos x$ nem lehet nulla!

3248. Az egyenlet azonosság és minden x valós számra fennáll az egyenlőség.
Vegyük figyelembe, hogy $\sin(x+\pi) = -\sin x$ és $\cos(x+\pi) = -\cos x$!

3249. $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. Alkalmazzuk a kétszeres szögekre vonatkozó megfelelő képleteket, majd alakítsuk szorzattá a megfelelő kifejezést! Csak az egyik tényezőből kapunk valós megoldást.

3250. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a $\sin 2x$-re való képletet, majd alakítsunk szorzattá!

3251. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{4} + n \cdot 2 \cdot \pi$.
Alkalmazzuk a $\sin 2x$-re való képletet, kapunk egy hiányos negyedfokú egyenletet, amelyet könnyen visszavezethetünk másodfokú egyenletre.

3252. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 0{,}9828 + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a kétszeres szögek megfelelő képleteit, majd rendezzük nullára, ezután pedig alakítsuk szorzattá!

3253. $x \approx 0{,}4636 + k \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét, majd a kapott egyenletet osszuk el $\cos^2 x$-szel, amikor ez nem nulla. Ekkor $\operatorname{tg} x$-re kapunk egy másodfokú egyenletet, amelyet nagyon könnyen megoldhatunk. Mutassuk meg, hogy $\cos 2x$ nem lehet nulla!

3254. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{2}$. Alkalmazzuk a tangens és a kotangens definícióit, a $\sin 2x$ képletét, majd a bal oldalon hozzunk közös nevezőre! Szorozzunk a nevezővel és vegyük észre, hogy a számláló 1-gyel egyenlő.

3255. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a tangens és a kotangens definícióit, majd végezzük el a szorzást. A bal oldalon hozzunk közös nevezőre! Vegyük észre, hogy a számláló értéke 1. Szorozzunk a bal oldal nevezőjével és osszunk 2-vel.

3256. *a)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét, majd rendezzük nullára az egyenletet, ezután pedig alakítsuk szorzattá! Közben használjuk fel, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
b) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 1{,}2490 + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét, majd a kapott egyenletet osszuk el $\cos^2 x$-szel, amikor ez nem nulla, kapunk $\operatorname{tg} x$-re egy másodfokú egyenletet, amelyet oldjunk meg. Mutassuk meg, hogy $\cos x$ nem lehet nulla.

3257. $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + l \cdot \pi$. Hasonló módon oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot. Egy második megoldáshoz jutunk, ha felhasználjuk, hogy $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

3258. $x_1 \approx 1{,}6891 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx -1{,}6891 + l \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét és ekkor kapunk $\cos x$-re egy másodfokú egyenletet, amelyet oldjunk meg!

3259. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{3} + m \cdot \pi$. Emeljünk ki a két megfelelő tagból $\sqrt{3}$-at, majd alkalmazzuk visszafelé $\cos 2x$ képletét. Ezután alakítsunk szorzattá!

3260. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{12} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{7 \cdot \pi}{12} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk visszafelé $\cos 2x$ képletét a bal oldalon, majd rendezzük nullára az egyenletet és ezután alakítsuk szor-

zattá. Az egyik tényező $\sqrt{2}\cdot(\cos x-\sin x)-1=0$, ezt alakítsuk át a következő alakúra: $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin x=\frac{1}{2}$, $\cos 45°\cdot\cos x-\sin 45°\cdot\sin x=\frac{1}{2}$, ebből $\cos(x+45°)=\frac{1}{2}$.
A továbbiakban is k, l, m, n, p, q, u, v tetszőleges egész számokat jelölnek.

3261. $x_1=\frac{\pi}{10}+k\cdot 2\cdot\pi$; $x_2=\frac{9\cdot\pi}{10}+l\cdot 2\cdot\pi$; $x_3=-\frac{\pi}{10}+m\cdot 2\cdot\pi$;
$x_4=\frac{11\cdot\pi}{10}+n\cdot 2\cdot\pi$; $x_5=\frac{3\cdot\pi}{10}+p\cdot 2\cdot\pi$; $x_6=\frac{7\cdot\pi}{10}+q\cdot 2\cdot\pi$; $x_7=-\frac{3\cdot\pi}{10}+u\cdot 2\cdot\pi$;
$x_8=\frac{13\cdot\pi}{10}+v\cdot 2\cdot\pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét és kapunk egy másodfokú egyenletre visszavezethető negyedfokú egyenletet!

3262. $x_1\approx 1{,}2490+k\cdot\pi$; $x_2\approx 0{,}2450+l\cdot\pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét, majd osszuk az egyenletet $\cos^2 x$-szel, amikor ez nem nulla. $\operatorname{tg} x$-re másodfokú egyenletet kapunk.
A végén mutassuk még meg, hogy $\cos x$ nem lehet nulla.

3263. $x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$; $x_2=-\frac{\pi}{4}+l\cdot 2\cdot\pi$. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét, majd osszunk $\cos^4 x$-szel. Ekkor egy olyan negyedfokú egyenletet kapunk, amelyet könnyen másodfokú egyenletre vezethetünk vissza. Mutassuk meg, hogy $\cos x$ nem lehet nulla.

3264. $x_1=k\cdot\pi$; $x_2=-\frac{\pi}{4}+l\cdot 2\cdot\pi$. Végezzük el a négyzetre emeléseket, majd alkalmazzuk a kétszeres szögekre való megfelelő képleteket, ezután rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

3265. Azonosság, az egyenletnek minden olyan x valós szám a megoldása, amelyre az egyenlet értelmezve van. Vagyis $x\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$.

3266. $x_1=\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi$; $x_2=-\frac{\pi}{6}+l\cdot 2\cdot\pi$. Vegyük észre, hogy $\frac{1+\cos 2x}{2}=\cos^2 x$, ha ezt felhasználjuk, akkor azt kapjuk, hogy $\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{3}$.

3267. $x_1=k\cdot\frac{\pi}{3}$; $x_2=\frac{\pi}{12}+l\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}$; $x_3=-\frac{\pi}{12}+m\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}$; $x_4=\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}$;
$x_5=-\frac{\pi}{4}+p\cdot 2\cdot\pi$. Alkalmazzuk a tangens definícióját, majd szorozzunk a nevezővel, rendezzünk nullára és alakítsunk szorzattá!

3268. $x_1=\pi+k\cdot 2\cdot\pi$; $x_2=\frac{\pi}{6}+l\cdot 2\cdot\pi$; $x_3=\frac{5\cdot\pi}{6}+m\cdot 2\cdot\pi$. Alakítsuk szorzattá!
$2\cdot\sin x\cdot(\cos x+1)-(\cos x+1)=0$. Folytassuk!

3269. $x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$; $x_2=\frac{\pi}{6}+l\cdot 2\cdot\pi$; $x_3=\frac{5\cdot\pi}{6}+m\cdot 2\cdot\pi$. Először használjuk fel, hogy $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, majd rendezzük nullára az egyenletet, ezután alakítsuk szorzattá!
$2\cdot\sin x\cdot(\cos x-\sin x)-(\cos x-\sin x)=0$. Folytassuk!

3270. $x_1=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$; $x_2=\frac{2\cdot\pi}{3}+l\cdot 2\cdot\pi$; $x_3=-\frac{\pi}{3}+m\cdot 2\cdot\pi$;
$x_4=\frac{4\cdot\pi}{3}+n\cdot 2\cdot\pi$; $x_5=\frac{\pi}{6}+p\cdot 2\cdot\pi$; $x_6=\frac{5\cdot\pi}{6}+q\cdot 2\cdot\pi$; $x_7=-\frac{\pi}{6}+u\cdot 2\cdot\pi$;

$x_8 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + v \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét, majd alakítsuk át például a $\cos^2 x$-et úgy, hogy kicseréljük $1 - \sin^2 x$-re. $16^{\sin^2 x} + 16^{1 - \sin^2 x} = 10$, ebből $16^{\sin^2 x} + \frac{16}{16^{\sin^2 x}} = 10$. Vezessünk be új ismeretlent, legyen $y = 16^{\sin^2 x}$! Ezt helyettesítsük be az egyenletbe, majd szorozzunk a nevezővel, y-ra kapunk egy másodfokú egyenletet, ezt oldjuk meg, majd számítsuk ki x-et!

IV

3271. *a)* $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$. Használjuk fel, hogy $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, majd a rendezés után osszuk az egyenletet $\cos 2x$-szel. Mutassuk meg, hogy $\cos 2x$ nem lehet nulla! *b)* $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. Használjuk fel, hogy $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. Ezután hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

3272. $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a tangens és a kotangens definícióját és szorozzunk a nevezőkkel! Alkalmazzuk visszafelé a kétszeres szögekre vonatkozó megfelelő képleteket! Ezután alakítsuk át az egyenletet úgy, hogy csak a $\cos 2x$ legyen benne szögfüggvény! Kaptunk erre egy másodfokú egyenletet, ezt oldjuk meg.

3273. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét, majd végezzük el a négyzetre emelést! Alakítsuk át a szinuszt koszinuszra! Kaptunk $\cos x$-re egy olyan negyedfokú egyenletet, amelyet másodfokú egyenletre vezethetünk vissza.

3274. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Emeljük négyzetre a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot! Ebből fejezzük ki $(\sin^4 x + \cos^4 x)$-et és helyettesítsük be a feladat egyenletébe! Majd használjuk fel visszafelé $\sin 2x$ képletét! *b)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 3 \cdot \pi$; $x_2 = \pi + l \cdot 3 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{2} + m \cdot 3 \cdot \pi$; $x_4 = 2 \cdot \pi + n \cdot 3 \cdot \pi$. Hasonlóan járjunk el, mint az előző feladatban, csak itt a $\sin^2\frac{x}{3} + \cos^2\frac{x}{3} = 1$ azonosságot emeljük négyzetre. *c)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$. Az egyenlet bal oldalát alakítsuk szorzattá, felhasználva, hogy $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Ezután használjuk fel még, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

3275. *a)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi$. Hasonlóan kezdhetjük el, mint a 3274. *a)* feladatot.
b) $x_1 \approx 0{,}4107 + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 1{,}1601 + l \cdot \pi$. Hasonlóan kezdhetjük el, mint a 3274. *a)* feladatot. Kapunk $\sin 2x$ -re egy másodfokú egyenletet, amelyet oldjunk meg.

3276. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$. Használjuk fel a tangens és a kotangens definícióját, majd szorozzunk a nevezőkkel! Használjuk fel visszafelé $\sin 2x$ képletét, ezenkívül a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot! Egy második megoldásnál fejezzünk ki a $\operatorname{ctg} 2x$ -et $\operatorname{tg} x$-szel!

3277. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot \pi$. Fejezzük ki $\operatorname{tg} 2x$ -et $\operatorname{tg} x$-szel! Majd alakítsuk szorzattá az egyenletet!

3278. $x_1 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{12} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a tangensre való összegzési képletet, majd kapunk egy egyenletet $\operatorname{tg} x$-re. Szorozzunk be a nevezővel és $\operatorname{tg} x$- re egy másodfokú egyenletet kapunk, amelyet oldjunk meg.

3279. $x_1 \approx 1{,}1503 + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -1{,}1503 + l \cdot \pi$. A $\operatorname{tg} 2x$-et fejezzük ki $\operatorname{tg} x$-szel, majd szorozzunk a nevezővel. Rendezés után alakítsuk szorzattá az egyenletet!

3280. *a)* $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt a bal oldalon, majd helyettesítsük be a megfelelő nevezetes hegyesszögek szögfüggvényeinek értékeit, ezután osszunk $\cos x$-szel, amikor ez nem nulla. Mutassuk meg, hogy $\cos x$ nem lehet nulla. *b)* $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. Hasonló módon járjunk el, mint az előző feladatnál! *c)* $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. Hasonló módon járjunk el, mint az előző két feladatnál! *d)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan kezdjük el, mint az előzőeket, majd rendezzük nullára és alakítsuk szorzattá! *e)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan járjunk el, mint az előző feladatnál. *f)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

3281. *a)* $x \approx 0{,}2318 + k \cdot \frac{\pi}{2}$. Vegyük figyelembe, hogy $\sin 4x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$, másrészt $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$, a kapott egyenletet osszuk el $\cos^2 2x$-szel, amikor ez nem nulla! Ekkor $\operatorname{tg} 2x$-re kapunk egy másodfokú egyenletet, amelyet oldjunk meg! Mutassuk meg, hogy $\cos 2x$ nem lehet nulla! *b)* $x_1 \approx -0{,}0477 + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $x_2 \approx 0{,}6760 + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$. Hasonló módon kezdhetjük megoldani, mint az előző egyenletet. Kapunk $\sin 5x$-re egy másodfokú egyenletet, ha $\cos^2 5x = 1 - \sin^2 5x$-et figyelembe vesszük.

3282. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Használjuk fel $\cos 2x$ képletét és a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot! Ezután alakítsunk szorzattá!
$2 \cdot \cos x \cdot (\sin x - \cos x) + (\sin x - \cos x) = 0$. Folytassuk! *b)* $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$.
Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét, majd alakítsunk szorzattá!
$2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0$. Folytassuk!

3283. *a)* $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *b)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot. *c)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot, csak itt 2-vel osszuk el az egyenletet! *d)* $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot. *e)* $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$;

$x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot. *f)* $x_1 = \frac{\pi}{24} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{7 \cdot \pi}{24} + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot. *g)* $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 \approx 0{,}5536 + l \cdot \frac{\pi}{2}$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatokat, csak itt $\sqrt{5}$-tel osszuk el az egyenletet!

IV

3284. *a)* $x_1 \approx 2{,}6516 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatokat, csak itt $\sqrt{34}$-gyel osszuk el az egyenletet! *b)* $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx 1{,}9656 + l \cdot 2 \cdot \pi$. $\sqrt{13}$-mal osszuk el az egyenletet! *c)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk a tangens definícióját, majd szorozzunk a nevezőkkel, ezután pedig osszuk az egyenletet 2-vel!

3285. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{4}$. Az egyenlet bal oldala egyenlő $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$-mal.

3286. $x_1 = -\frac{\pi}{32} + k \cdot \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{\pi}{72} + l \cdot \frac{\pi}{9}$. Osszuk az egyenletet $\sqrt{2}$-vel! Ezután vegyük észre, hogy a kapott egyenlet bal oldala egyenlő $\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$-gyel! Ez pedig tovább egyenlő $\cos\left(5x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)$-vel.

3287. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. Szorozzunk a nevezőkkel, majd osszuk az egyenletet $\sqrt{2}$-vel! Vegyük észre, hogy a kapott egyenlet bal oldala éppen $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$!

3288. $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{10}$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{24} + l \cdot \frac{\pi}{4}$. Adjunk az egyenlet mindkét oldalához $2 \cdot \cos 14x$-et! Majd vegyük észre, hogy a kapott egyenlet bal oldala éppen $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$-nak a négyzete! Erről pedig gondoljuk meg, hogy éppen egyenlő a következő kifejezéssel:

$$\frac{1 - \cos\left(2 \cdot \left(3x + \frac{\pi}{3}\right)\right)}{2}.$$

Összetettebb, illetve nehezebb trigonometrikus egyenletek

3289. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_3 = \frac{\pi}{10} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $x_4 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. Alkalmazzuk a tangens definícióját, másrészt vegyük figyelembe, hogy $\sin 4x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$! Harmadrészt a koszinuszok összegére vonatkozó azonosság segítségével alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát: $\cos x + \cos 3x = 2 \cdot \cos x \cdot \cos 2x$. Ezután rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

3290. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 0{,}6847 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 \approx -0{,}6847 + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 \approx 2{,}4569 + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_5 \approx -2{,}4569 + n \cdot 2 \cdot \pi$. Használjuk fel, hogy $\cos 3x = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x$. Ezt helyettesítsük be, majd rendezzük nullára az egyenletet és ezután alakítsuk szorzattá!

3291. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$. Használjuk fel, hogy $\sin 3x = 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x$ és $\cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$! Ezeket helyettesítsük be, majd rendezzük nullára az egyenletet és ezután alakítsuk szorzattá!
$\sin^2 x \cdot (2 \cdot \sin x - 1) - (2 \cdot \sin x - 1) = 0$. Folytassuk!

3292. $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a kotangens és a tangens definícióját, majd szorozzunk a nevezőkkel! Alkalmazzuk visszafelé a kétszeres szögek megfelelő szögfüggvényeire vonatkozó képleteket! Ezután alakítsuk át az egyenletet úgy, hogy csak $\cos 2x$ legyen benne a szögfüggvény, erre kapunk egy másodfokú egyenletet, amelyet oldjunk meg.

3293. $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$. Osszuk az egyenletet $\sqrt{2}$-vel, majd a kapott egyenletről vegyük észre, hogy a bal oldala éppen $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$! Vegyük figyelembe, hogy a kapott egyenlet bal oldala nem nagyobb 1-nél, míg a jobb oldala nem kisebb 1-nél. Ebből következik, hogy az egyenlet csak akkor állhat fenn, ha mindegyik oldala külön-külön 1-gyel egyenlő.

3294. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Vegyük figyelembe, hogy $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ és alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét! Ekkor észrevehetjük, hogy az egyenlet bal oldala éppen $\sin x + \cos x$ négyzete. Rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

3295. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot \pi$; $x_4 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + n \cdot \pi$. A bal oldalon hozzunk közös nevezőre, majd vegyük észre, hogy a kapott számláló értéke 1! Míg a kapott nevező éppen $\sin 2x$ fele.

3296. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi$. Alakítsuk szorzattá a bal oldalt még jobban! A jobb oldalon végezzük el a négyzetre emelést és használjuk fel, hogy $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$! Majd a kapott egyenletet rendezzük nullára és alakítsuk szorzattá!

3297. $x_1 = \frac{\pi}{10} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{9 \cdot \pi}{10} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{10} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{11 \cdot \pi}{10} + n \cdot 2 \cdot \pi$. Különböztessünk meg két esetet, az 1. esetben $\sin x \geq 0$, míg a 2. esetben $\sin x < 0$.

3298. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. Mutassuk meg először, hogy $\sin 2x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$. Ezután ezt helyettesítsük be az egyenletbe, majd szorozzunk a nevezővel! Ekkor kapunk $\operatorname{tg} x$-re egy harmadfokú egyenletet. Azt alakítsuk szorzattá a következő módon: $\operatorname{tg}^3 x - 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x + 3 \cdot \operatorname{tg} x - 2 = 0$,
$(\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x) - (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x) + 2 \cdot (\operatorname{tg} x - 1) = 0$. Folytassuk!

3299. $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 \approx 0{,}6435 + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 \approx 0{,}9273 + n \cdot 2 \cdot \pi$. Vezessünk be új változót: $y = \sin x + \cos x$. Ekkor y-ra egy másodfokú egyenletet kapunk, amelyet oldjunk meg! Utána a szokott módon megoldhatjuk a kapott két részegyenletet, ha mindegyiket osztjuk $\sqrt{2}$-vel.

IV

3300. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$. Használjuk fel, hogy $\sin 3x = 3 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x$ és $\cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$. Ezeket helyettesítsük be és rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!
$\left(2 \cdot \sin x - 2 \cdot \sin^3 x\right) - \left(1 - \sin^2 x\right) = 0$. Folytassuk!

3301. $x_1 = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$. Osszuk el az egyenletet 2-vel! A bal oldalon levő második és harmadik tag összege éppen $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. Így $\cos 3x = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, $\cos 3x = \sin\left(-x - \frac{\pi}{6}\right)$, $\cos 3x = \cos\left(-x - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)$.

3302. $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Összefoglalva a megoldásokat: $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$. Használjuk fel, hogy $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ és $1 - \cos^2 2x = \sin^2 2x$. Alakítsuk át ezután a szinuszok összegére vonatkozó tétellel az egyenlet jobb oldalát: $\sin 3x + \sin x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x$. Majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

3303. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$; $x_5 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + p \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk a tangens definícióját, másrészt $\sin 4x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \left(2 \cdot \cos^2 x - 1\right)$. Szorozzunk a nevezővel, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

3304. $x_1 \approx 0{,}4240 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx 1{,}9948 + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 \approx 0{,}4240 + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 \approx 4{,}2884 + n \cdot 2 \cdot \pi$. **1. eset:** $\pi \cdot \cos x = \frac{\pi}{2} - \pi \cdot \sin x + p \cdot 2 \cdot \pi$, ebből $\sin x + \cos x = \frac{1}{2} + 2 \cdot p$. Osszuk ezt az egyenletet $\sqrt{2}$-vel és gondoljuk meg, hogy csak $p = 0$ lehet. Kapjuk, hogy $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Folytassuk! A **2. esetben:** $\pi \cdot \cos x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \pi \cdot \sin x\right) + q \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonlóan folytathatjuk, mint az 1. esetnél.

3305. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = 2$. Az egyenlet a következőre vezet: $|3x - 5| \cdot \cos x = (1 - x) \cdot |\cos x|$. Alkalmazzuk az esetek szétválasztását! **1. eset:** $\cos x = 0$. **2. eset:** $\cos x > 0$. **3. eset:** $\cos x < 0$.

3306. $x_1 = -\frac{\pi}{66} + k \cdot \frac{\pi}{11}$; $x_2 = \frac{\pi}{9} + l \cdot \frac{\pi}{6}$. Osszuk el az egyenletet 2-vel! Az így kapott egyenlet második és harmadik tagjának összege $\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$; $\sin 17x + \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; $\sin 17x = -\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$; $\sin 17x = \sin\left(-5x - \frac{\pi}{3}\right)$.

3307. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk a tangens és a kotangens definícióját! Hozzunk közös nevezőre a bal oldal számlálójában, majd alkalmazzuk visszafelé a $\cos 2x$ képletét! Ezután szorozzunk $(\sin x \cdot \cos x)$-szel, majd rendezzük nullára az egyenletet, ezután pedig alakítsuk szorzattá!

3308. $x = 2 \cdot \pi + k \cdot 24 \cdot \pi$. Gondoljuk meg, hogy az egyenlet bal oldala nem nagyobb, mint 3. Ezért pontosan akkor teljesülhet az egyenlet, amikor az $\sin \frac{x}{4} = 1$ és $\cos\left(\frac{x - 2 \cdot \pi}{3}\right) = 1$.

3309. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$. Összefoglalva: $x = \frac{\pi}{6} + m \cdot \pi$. Osszuk el az egyenletet 2-vel! $\left(\frac{1}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x\right) \cdot \sin 3x = 1$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin 3x = 1$. Gondoljuk meg, hogy ez pontosan akkor lehet, ha mindkettő tényező 1-gyel egyenlő, vagy ha mindkét tényező (-1)-gyel egyenlő!

3310. $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. Adjunk mindkét oldalhoz 1-et, majd alakítsuk szorzattá a bal oldalt! $(\sin x + 1)(\cos x + 1) = 2$. Gondoljuk meg, hogy ez pontosan akkor lehet, ha az első tényező 1 és a második tényező 2, illetve fordítva! Miért nem lehetnek negatívak a tényezők?

3311. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -0{,}9117 + l \cdot \pi$; $x_3 \approx -0{,}9117 + m \cdot \pi$. Használjuk fel, hogy $\cos 3x = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x$, $\cos 6x = 4 \cdot \cos^3 2x - 3 \cdot \cos 2x$ és $\cos^6 x = \left(\cos^2 x\right)^3 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3$. Helyettesítsük be ezeket az egyenletbe, rendezzük az egyenletet és $\cos 2x$-re egy másodfokú egyenletet kapunk. $4 \cdot \cos^2 2x + 5 \cdot \cos 2x + 1 = 0$.

3312. $(k; 0)$ és $(k; 2)$ ahol k tetszőleges egész szám. Gondoljuk meg, hogy az egyenlet akkor és csak akkor állhat fenn, ha: $\sin(\pi \cdot x) = 0$ és $\log_2(y^2 - 2y + 1) = 0$!

3313. $x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ és $y = \frac{\pi}{6} + l \cdot \frac{\pi}{4}$. Gondoljuk meg, hogy az egyenlet akkor és csak akkor teljesülhet, ha $\operatorname{tg} 2x + \sqrt{3} = 0$ és $\operatorname{ctg}\left(4y - \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

3314. $x_1 = \frac{1}{2} + k$; $x_2 = \frac{1}{8}$. Az egyenletből a következő egyenlet következik: $8 \cdot x^2 \cdot \operatorname{ctg}(\pi \cdot x) + 15 \cdot x \cdot \operatorname{ctg}(\pi \cdot x) = 2 \cdot \operatorname{ctg}(\pi \cdot x)$. Ezt rendezzük nullára és alakítsuk szorzattá!

3315. $x_1 = \frac{\pi}{8} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{8} + l \cdot \pi$; $x_3 = \frac{3 \cdot \pi}{8} + m \cdot \pi$; $x_4 = -\frac{3 \cdot \pi}{8} + n \cdot \pi$. Használjuk fel, hogy $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ és $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ és ezeket helyettesítsük be az egyenletbe! Végezzük el az ötödik hatványra való emelést például a binomiális tétellel, rendezzük az egyenletet és kapjuk, hogy: $0 = 24 \cdot \cos^4 2x - 10 \cdot \cos^2 2x - 1$. Ezt másodfokú egyenletre vezethetjük vissza.

3316. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{3 \cdot \pi}{4} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(\alpha - \beta\right) - \cos\left(\alpha + \beta\right)\right)$ azonosságot! *b)* $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(\alpha - \beta\right) + \cos\left(\alpha + \beta\right)\right)$ azonosságot! *c)* $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. Alkalmazzuk a $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\sin\left(\alpha + \beta\right) + \sin\left(\alpha - \beta\right)\right)$ azonosságot! *d)* $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{7 \cdot \pi}{12} + l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a $\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\sin\left(\alpha + \beta\right) - \sin\left(\alpha - \beta\right)\right)$ azonosságot! *e)* $x = k \cdot \pi$. Alkalmazzuk a tangens definícióját, majd alkalmazzuk a következő két azonosságot: $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(\alpha - \beta\right) - \cos\left(\alpha + \beta\right)\right)$, $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(\alpha - \beta\right) + \cos\left(\alpha + \beta\right)\right)$.

3317. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{10} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $x_3 = \frac{\pi}{14} + m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{7}$. Alkalmazzuk a $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$ azonosságot! Rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá! *b)* $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. Alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát, a jobb oldalát, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá! *c)* $x_1 = \frac{\pi}{10} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{10}$; $x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$. Az egyenlet mindkét oldalát alakítsuk szorzattá, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

3318. *a)* $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{13}$; $x_2 = l \cdot \pi$. Alkalmazzuk a $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(\alpha - \beta\right) + \cos\left(\alpha + \beta\right)\right)$ azonosságot! Majd ezután a koszinuszok különbségének szorzattá alakítására való azonosságot. *b)* $x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{10}$; $x_2 = \frac{\pi}{22} + l \cdot \frac{\pi}{11}$. Alkalmazzuk mindkét oldalra a $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\sin\left(\alpha + \beta\right) + \sin\left(\alpha - \beta\right)\right)$ azonosságot!

3319. $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{3}$; $x_2 = \frac{\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_3 = -\frac{\pi}{12} + m \cdot \frac{\pi}{2}$. Alkalmazzuk az egyenlet bal oldalára a $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$ azonosságot! Majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

3320. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{18} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{18} + m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. Alkalmazzuk az első két tagra szinuszok összegének szorzattá alakítására való azonosságot! Majd vegyük figyelembe, hogy $2 \cdot \sin^2 x = 1 - \cos 2x$. Ezután rendezzük az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

3321. $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Az egyenlet első két tagja által alkotott összeget alakítsuk szorzattá! Ezután az egész egyenletet szorzattá alakíthatjuk.

3322. $x_1 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$; $x_4 = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$; $x_5 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + p \cdot \pi$; $(\sin 3x + \sin x) + \sin 2x = \cos x + (1 + \cos 2x)$, $2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = \cos x + 2 \cdot \cos^2 x$. Mindkét oldalt alakítsuk szorzattá, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

3323. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $x_3 = \pi + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(\sin 3x + \sin x) + (\sin 4x + \sin 2x) = 0$. Majd mindkét zárójeles kifejezést alakítsuk szorzattá! Ezután az egész egyenletet szorzattá alakíthatjuk.

3324. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{5} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $x_3 = \pi + m \cdot 2 \cdot \pi$. $(\cos 3x + \cos x) + (\cos 4x + \cos 2x) = 0$. Mindkét zárójeles kifejezést alakítsuk szorzattá! Ezután az egész egyenletet szorzattá alakíthatjuk.

3325. $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = l \cdot \frac{\pi}{2}$. Az egyenlet bal oldalát alakítsuk szorzattá!

3326. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{3}$; $(\sin 4x + \sin 2x) - (\cos 4x + \cos 2x) = 0$. Mindkét zárójeles kifejezést alakítsuk szorzattá! Ezután az egyenletet is szorzattá alakíthatjuk.

3327. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{4 \cdot \pi}{3}$; $x_2 = \frac{\pi}{10} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $(\sin 4x + \sin x) - (\cos 4x + \cos x) = 0$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot. *b)* $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_2 = -\frac{\pi}{10} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$. $(\sin 4x + \sin x) + (\cos 4x + \cos x) = 0$. *c)* $x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. $(\sin 2x + \sin x) - (\cos 2x + \cos x) = 0$.

3328. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. Alkalmazzuk a $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)$ és a $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right)$ azonosságokat!

3329. *a)* $x_1 \approx 0{,}2052 + k \cdot \frac{\pi}{3}$; $x_2 \approx -0{,}2052 + l \cdot \frac{\pi}{3}$. Alkalmazzuk a $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)$ azonosságot! A jobb oldalon végezzük el a következő átalakítást: $3 \cdot \sin^2 4x - 1 = 2 - 3 \cdot \cos^2 4x = 2 - 3 \cdot \frac{1 + \cos 8x}{2}$. A rendezés után az egyenletünk a következő alakúvá válik: $\cos 6x = \frac{1}{3}$. *b)* $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{8} + l \cdot \frac{\pi}{4}$. $\frac{1}{4} \cdot \sin 4x = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$. Ezután rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá! *c)* $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$. Használjuk fel, hogy $\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$ és

IV

$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. Majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá! *d)* $x_1=\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi$; $x_2=\frac{\pi}{3}+l\cdot\pi$. Használjuk fel, hogy $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ és $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$. *e)* $x_1=\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi$; $x_2=\frac{\pi}{3}+l\cdot\pi$. Használjuk fel, hogy $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ és $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$.

IV

3330. *a)* $x_1=\frac{\pi}{12}+k\cdot\frac{\pi}{2}$; $x_2=\frac{\pi}{3}+l\cdot\pi$. Szorozzunk a nevezőkkel és hozzuk az egyenletet a következő alakúra: $4\cdot\sin 2x\cdot\cos x=\sqrt{3}\cdot\cos x+\sin x$. Majd alkalmazzuk a $\sin\alpha\cdot\cos\beta=$ $=\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$ azonosságot! Rendezzük, majd pedig 2-vel osszuk el az egyenletet! Kapjuk, hogy $\sin 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x-\frac{1}{2}\cdot\sin x$, ebből $\sin 3x=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$. *b)* $x_1=\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{4}$; $x_2=\frac{\pi}{3}+l\cdot\pi$; $x_3=-\frac{\pi}{3}+m\cdot\pi$. Alkalmazzuk a $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ azonosságot háromszor, rendezés után kapjuk, hogy: $\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=0$. Alkalmazzuk most a $\cos\alpha+\cos\beta=$ $2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságot, mégpedig a $2x$-es tagra és a $6x$-es tagra. Ezután szorzattá alakíthatjuk az egyenletet! *c)* $x_1=\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{3}$; $x_2=\frac{\pi}{20}+l\cdot\frac{\pi}{10}$; $x_3=\frac{\pi}{2}+m\cdot\pi$. Alkalmazzuk a $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ azonosságot négyszer! Ekkor kaphatjuk rendezés után, hogy: $\cos 6x+\cos 8x+\cos 12x+\cos 14x=0$; $(\cos 12x+\cos 6x)+(\cos 14x+\cos 8x)=0$. Alkalmazzuk most a zárójeles összegekre a $\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságot! Ezután szorzattá alakíthatjuk az egyenletet.

3331. $x_1=-\frac{7}{4}$; $x_2=\frac{1}{4}$. Fogás:

$$\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}\cdot\left(\frac{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}{\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}\cdot\cos(\pi\cdot x)+\frac{1}{\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}\cdot\sin(\pi\cdot x)\right)=\sqrt{2}.$$

Ez azért lesz hasznos, mert: $\left(\frac{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}{\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}\right)^2=1.$

Így van olyan α szög, amelyre: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}{\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}$ és $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}}$.

Ezeket felhasználva kapjuk, hogy:

$$\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}\cdot\left(\sin\alpha\cdot\cos(\pi\cdot x)+\cos\alpha\cdot\sin(\pi\cdot x)\right)=\sqrt{2},$$

$\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}\cdot\sin(\pi\cdot x+\alpha)=\sqrt{2}$. Másrészt $\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}\le\sqrt{2}$ és $\sin(\pi\cdot x+\alpha)\le 1$. Így az egyenlet akkor és csak akkor teljesülhet, ha mindkét előző egyenlőtlenségben egyenlőség áll elő. Elég vizsgálni a $\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\cdot\pi\cdot x)}=\sqrt{2}$ egyenletet. Ezt megoldva, kapjuk, hogy $x=\frac{1}{4}+\frac{k}{2}$, ahol k tetszőleges egész szám. Az eredeti egyenlet gyökei ezek közül kerülhetnek ki. Ha a 4-gyel való oszthatóság szempontjából vizsgáljuk a k értékét és a négy esetet behelyettesítéssel kipróbáljuk az eredeti egyenletnél, akkor azt kapjuk, hogy pontosan akkor lesz megoldás, ha $k=4\cdot m$, ahol m tetszőleges egész szám. Tehát $x=\frac{1}{4}+2\cdot m$ a megoldás, de ezek közül a feladat csak azokat kéri, amely a $[-3;1]$ intervallumba esnek. Ezek pedig $m=0$-nál, illetve $m=-1$-nél vannak, azaz $x=\frac{1}{4}$, illetve $x=-\frac{7}{4}$.

IV

Paraméteres trigonometrikus egyenletek

3332. $x=\frac{\pi}{2}\cdot k\cdot\pi$ az egyenlet azon megoldása, amely tetszőleges a valós szám esetén megoldása az egyenletnek. Ismert, hogy $\cos 3x=4\cdot\cos^3 x-3\cdot\cos x$, ezt helyettesítsük be az egyenletbe, majd rendezzük nullára és alakítsuk szorzattá! $\cos x\cdot\left(4\cdot\cos^2 x-3-a\right)=0$.

1. eset: ha $\cos x=0$, ebből kapjuk, hogy $x=\frac{\pi}{2}\cdot k\cdot\pi$ és ez tetszőleges a valós szám esetén megoldása az egyenletnek.

2. eset: ha $4\cdot\cos^2 x-3-a=0$, ebből $\cos^2 x=\frac{3+a}{4}$, ennek csak akkor van megoldása a valós számok halmazán, ha $0\le\cos^2 x\le 1$ miatt $0\le\frac{3+a}{4}\le 1$, ebből pedig $-3\le a\le 1$. Tehát a második eset nem áll fenn minden a valós számra.

3333. $-1\le p<3$ értékekre van az egyenletnek olyan megoldása, amelyre $0<x<\pi$. Ismert, hogy $\sin 3x=3\cdot\sin x-4\cdot\sin^3 x$, ezt helyettesítsük be, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá! Kapjuk, hogy $\sin x\cdot\left(3-4\cdot\sin^2 x-p\right)=0$. 1**. eset:** $\sin x=0$, ebből $x=k\cdot\pi$, ez a feltétel miatt nem lehet, hiszen $0<x<\pi$.

2. eset: $3-4\cdot\sin^2 x-p=0$, ebből $\sin^2 x=\frac{3-p}{4}$, és $0<x<\pi$ miatt $0<\sin^2 x\le 1$.

Így $0<\frac{3-p}{4}\le 1$, ebből $-1\le p<3$.

3334. 1. eset: Ha $a\ne-\frac{\pi}{2}+(n-m)\cdot\pi$, ahol n és m tetszőleges egészek, akkor $x_1=k\cdot\pi$; $x_2=-a+n\cdot\pi$ a megoldások, ahol k tetszőleges egész szám.

2. eset: Ha $a=-\frac{\pi}{2}+(n-m)\cdot\pi$, akkor $x=k\cdot\pi$ a megoldás. $\cos x\cdot\cos(a+x)=\cos a$, alkalmazzuk a $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$ azonosságot.

$\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(a+x-x\right)+\cos\left(a+x+x\right)\right)=\cos a$, ebből $\cos\left(2x+a\right)=\cos a$. Ebből $x=k\cdot\pi$, illetve $x=-a+n\cdot\pi$ következik. $\cos x\neq 0$, ebből $x\neq\frac{\pi}{2}+m\cdot\pi$. Így $k\cdot\pi\neq\frac{\pi}{2}+m\cdot\pi$, ebből $k\neq\frac{1}{2}+m$, itt az egyenlőség nem is következhet be. Másrészt $\frac{\pi}{2}+m\cdot\pi\neq-a+n\cdot\pi$, ebből $a\neq-\frac{\pi}{2}+(n-m)\cdot\pi$.

IV

3335. $-1\leq m\leq 1$ paraméterértékek mellett van megoldása az egyenletnek a valós számok halmazán. Használjuk fel $\cos 2x$ képletét, ezután kapunk $\cos x$-re egy másodfokú egyenletet. Oldjuk meg! Azt kapjuk, hogy **1. eset:** $\cos x=\frac{3\cdot m}{2}$, ebből következik, hogy $-\frac{2}{3}\leq m\leq\frac{2}{3}$.

2. eset: $\cos x=-m$, ebből következik, hogy $-1\leq m\leq 1$. A két eset egyenlőtlenségeinek egyesítése (uniója): $-1\leq m\leq 1$.

3336. $-4\leq p\leq 2$ valós paraméter esetén van az egyenletnek valós megoldása. Tekintsük a $\cos x$-re másodfokú egyenletet! Ennek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív. Ebből következik, hogy (1) $\frac{9}{4}\geq p$. Másrészt tekintsük a megoldóképletből kapott $\cos x$ értékeket! Ezeknek a $[-1;1]$ intervallumba kell esni. Az egyik eset nem állhat fenn, a másik esetből (2) $-4\leq p\leq 2$ következik. Az (1) és (2) egyenlőtlenségnek egyaránt teljesülnie kell. Ez a közös rész pedig $-4\leq p\leq 2$.

3337. $-5\leq p\leq 3$ paraméterértékek esetén van az egyenletnek valós megoldása. A $\sin x$-re másodfokú egyenletnek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív. Ebből következik, hogy (1) $p\leq 4$. Másrészt az egyenlet gyökeinek a $[-1;1]$ intervallumba kell esniük. Az egyikből nem kapunk megoldást. Míg a másikból kapjuk, hogy (2) $-5\leq p\leq 3$. Az (1) és (2) egyenlőtlenség közös része: $-5\leq p\leq 3$.

3338. $\alpha_1=-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\alpha_2=\frac{5\cdot\pi}{12}+m\cdot 6\cdot\pi$ esetén lesz az egyenletnek két egyenlő valós gyöke. Feltételek: $\cos\alpha>0$ és $\sin\alpha\neq 0$, ezekből $-\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\cdot\pi<\alpha<0+2\cdot\pi$; $0+n\cdot 2\cdot\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\cdot\pi$. Az egyenletnek akkor és csak akkor van két egyenlő gyöke, amikor a diszkriminánsa nulla: $\left(\frac{2}{\sqrt{\sin\alpha}}\right)^2-4\cdot\left(\frac{1}{\sin\alpha}+2\cdot\sqrt{2}\right)=0$. Ennek a megoldásaiból válogassuk ki azokat, amelyek eleget tesznek a feltételeknek.

3339. Pontosan egy valós megoldása akkor van az egyenletnek, ha c irracionális szám. $x=0$ megoldása az egyenletnek. Tehát azt kell megállapítanunk, hogy mely c-re nincs az egyenletnek nullától különböző megoldása. Mivel $1+\sin^2(cx)\geq 1$ és $\cos x\leq 1$, ezért az egyenlet akkor és csak akkor teljesül, ha $\sin^2(cx)=0$ és $\cos x=1$. Tehát $x=\frac{k\cdot\pi}{c}$ és $x=m\cdot 2\cdot\pi$. Ezekből $\frac{k\cdot\pi}{c}=m\cdot 2\cdot\pi$, így $c=\frac{k}{2\cdot\pi}$, azaz c racionális szám. Ha viszont c racionális szám, akkor van az egyenletnek nem nulla megoldása. Legyen ugyanis $c=\frac{p}{q}$, ahol p és q egész számok, akkor mutassuk meg, hogy $x=2\cdot q\cdot\pi$ kielégíti az egyenletet. Ezekből következik, hogy az egyenletnek akkor és csak akkor van 0-tól különböző megoldása a valós számok halmazán, ha c racionális szám. Tehát az egyenletnek egyetlen megoldása ($x=0$) akkor van, ha c irracionális szám.

3340. $p \le 0$ vagy $p = 1$ vagy $p \ge 3$ paraméter értékeknél lesz gyöke az egyenletnek a valós számok halmazán. Először tekintsük a $p = 1$ esetet, erre azt kapjuk, hogy az egyenletnek minden valós szám megoldása. Ha $p \neq 1$, akkor oszthatjuk az egyenletet $(p-1)$-gyel. Tekintsük a kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsát, ez pedig pozitív lesz. Oldjuk meg az egyenletet, kapjuk, hogy **1. eset:** $\sin x = \frac{2}{p-1}$; **2. eset:** $\sin x = -(p+1)$. Valós gyök akkor van, ha ezek közül legalább az egyik a $[-1; 1]$ intervallumba esik. Oldjuk meg a két kettős egyenlőtlenséget!

3341. $(0; 0)$ vagy $(1; 0)$ azon számpárok, amelyekre az egyenlőség minden valós x számra teljesül. Először helyettesítsünk $x = \pi$-t, majd helyettesítsünk $x = 2 \cdot \pi$-t! A második kapott eredményből $b = 0$ következik. Ezt visszahelyettesítve az előző eredménybe, kapjuk, hogy $a = k$, ahol k egész szám. Vegyük figyelembe, hogy a $\cos(a \cdot \pi)$ a $[-1; 1]$ intervallumba esik, ebből következtessünk arra, hogy $a = 0$ vagy $a = 1$.

3342. $\frac{-1-\sqrt{10}}{2} \le p \le \frac{-1+\sqrt{10}}{2}$ paraméterértékek esetén van valós megoldása az egyenletnek. Alkalmazzuk a következő helyettesítést: $p = p \cdot \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$. A nullára rendezés után osszuk el az egyenletet $\cos x$-szel, amikor ez nem nulla. Ekkor $\operatorname{tg} x$-re kapunk egy egyenletet. Ha $p = 1$, akkor van az egyenletnek valós megoldása. Ha $p \neq 1$, akkor $\operatorname{tg} x$-re másodfokú egyenletünk van. Ennek pontosan akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív. Vizsgáljuk meg még azt az esetet, amikor $\cos x = 0$!

3343. $-\sqrt{2} \le p \le \sqrt{2}$ paraméterértékekre van az egyenletnek valós megoldása.

A $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ helyettesítést végrehajtva, egy olyan egyenletet kapunk, amely $\sin^2 x$-re másodfokú. Ennek pontosan akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív. Ebből kapjuk, hogy (1) $-\sqrt{3} \le p \le \sqrt{3}$. Oldjuk meg az egyenletet $\sin^2 x$-re! Használjuk fel, hogy $0 \le \sin^2 x \le 1$! Az egyik gyök nem eshet ide, a másikból viszont azt kapjuk, hogy (2) $-\sqrt{2} \le p \le \sqrt{2}$. Az (1) és (2) közös része a (2) egyenlőtlenség.

3344. $x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ az egyenlet megoldása tetszőleges p valós paraméter esetén. Alakítsuk szorzattá még jobban az egyenlet jobb oldalát az $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - a \cdot b + b^2\right)$ azonosság segítségével. **1. eset:** Ha $\sin x + \cos x = 0$, akkor $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$, minden p valós szám esetén. **2. eset:** Ha $\sin x + \cos x \neq 0$, akkor $0 = p \sin^2 x - (p+2) \cdot \sin x \cdot \cos x + p \cdot \cos^2 x$ alakra alakíthatjuk az egyenletet. **2.** *a)* **eset:** Ha $\cos x \neq 0$, akkor oszthatjuk az előző egyenletet $\cos x$-szel. Ekkor kapunk $\operatorname{tg} x$-re egyenletet, amelynek $p = 0$ esetén is van megoldása és ha $p \neq 0$, akkor a kapott másodfokú egyenletnek pontosan akkor van valós megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív. Ebből következik, hogy $-\frac{2}{3} \le p \le 2$ és $p \neq 0$. Tehát ebben az esetben nem minden valós p-re van megoldás. **2.** *b)* **eset:** Ha $\cos x = 0$, akkor az egyenletnek pontosan akkor van megoldása, ha $p = 0$.

3345. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, tetszőleges p valós paraméter esetén, $x_2 = \frac{\pi}{3 \cdot (p-1)} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{p-1}$, ha $p \neq 1$, $x_3 = -\frac{\pi}{3 \cdot (p-1)} + m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{p-1}$, ha $p \neq 1$. Használjuk fel a

$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságot! Ennek a segítségével a következő alakra hozhatjuk az egyenletet: $\cos x \cdot \left(2 \cdot \cos\left((p-1) \cdot x\right) - 1\right) = 0$.

3346. Alakítsuk át az egyenletet a következő alakúra: $\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=p$. Ebből kapjuk, hogy $\cos^2 2x=2\cdot p-1$. Ennek az egyenletnek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha $0\le 2\cdot p-1\le 1$, azaz ha $\frac{1}{2}\le p\le 1$.

3347. $p\le-\sqrt{2}$ vagy $\sqrt{2}\le p$ esetén 2 megoldása van az egyenletnek. $p=1$ esetén 5 megoldása van az egyenletnek. $-\sqrt{2}<p<\sqrt{2}$, de $p\neq 1$, akkor 4 megoldása van az egyenletnek. Az egyenletet a következő alakúra hozhatjuk: $(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=p\cdot(\cos x-\sin x)$, azaz $(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x-p)=0$, ebből következik, hogy *a)* $\cos x-\sin x=0$; *b)* $\cos x+\sin x-p=0$. Az *a)*-ból $x_1=\frac{\pi}{4}$; $x_2=\frac{5\cdot\pi}{4}$ gyökök esnek bele a $[0;2\cdot\pi]$ intervallumba. Tehát az eredeti egyenletnek bármely valós p-re legalább két megoldása van. A *b)*-ből következik, hogy $-\sqrt{2}\le p\le\sqrt{2}$ esetben van valós megoldása a *b)* egyenletnek, hiszen a *b)* egyenletet átalakíthatjuk a következő alakúra: $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{p}{\sqrt{2}}$. Ajánlatos felrajzolni az $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ grafikonját a $[0;2\cdot\pi]$ intervallumon, hogy a megfelelő következtetéseket könnyen levonhassuk.

3348. **1. eset:** $a=1$ esetén: $-\frac{\pi}{4}+m\cdot 2\cdot\pi\le x_3\le\frac{3\cdot\pi}{4}+m\cdot 2\cdot\pi$ a megoldás.

2. *a)* **eset:** $a\ge-1$ és $a\neq 1$ esetén $x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$ a megoldás.

2. *b)* **eset:** $a\le-1$ esetén $x_2=\frac{5\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$ a megoldás. Emeljük négyzetre az egyenletet, majd rendezzük nullára és alakítsuk szorzattá. Azt kapjuk, hogy: $(a-1)(\sin x-\cos x)=0$.
1. eset: $a=1$ esetén akkor teljesül az egyenlet, ha $\sin x+\cos x\ge 0$, ezt alakítsuk át a következő alakra úgy, hogy elosztjuk az egyenlőtlenséget $\sqrt{2}$-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt. Kapjuk, hogy $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ge 0$. Ezt az egyenlőtlenséget megoldva kapjuk az eredeti egyenlet egy megoldását.
2. eset: Ha $a-1\neq 0$, akkor $\sin x-\cos x=0$, ebből $\operatorname{tg} x=1$, $x=\frac{\pi}{4}+l\cdot\pi$, de teljesülnie kell, hogy $a\cdot\sin x+\cos x\ge 0$ és $a\cdot\cos x+\sin x\ge 0$, ezek $l=2\cdot k$-nél akkor állnak fenn, ha $a\ge-1$. Ha $l=2\cdot k+1$, akkor az egyenlőtlenségek akkor állnak fenn, ha $a\le-1$.

3349. **1. eset:** $p=\frac{20}{3}$; **2. eset:** $p=-\frac{20}{3}$ esetén van megoldása az egyenlőtlenségnek. Vizsgáljuk meg először az egyenlőtlenség bal oldalát! $\left|\frac{p^2\cdot\sin^2 x+16}{p\cdot\sin x}\right|=|p\cdot\sin x|+\frac{16}{|p\cdot\sin x|}$. Alkalmazzuk az összeg két tagjára a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget! Ebből kapjuk, hogy $\left|\frac{p^2\cdot\sin^2 x+16}{p\cdot\sin x}\right|=|p\cdot\sin x|+\frac{16}{|p\cdot\sin x|}\ge 8$. Ez pontosan akkor áll fenn, ha

$|p \cdot \sin x| = 4$. Nézzük most az egyenlőtlenség jobb oldalát! Ez $\cos x$-re másodfokú kifejezés. Határozzuk meg, hogy ez mikor veszi fel a maximumát! Azt kapjuk, hogy $\cos x = \frac{4}{5}$-nél lesz maximális a kifejezés. Mégpedig a maximum értéke 8. Tehát az egyenlőtlenség csak akkor teljesülhet, ha benne egyenlőség áll fenn. Ekkor viszont $|\sin x| = \frac{3}{5}$ és $|p \cdot \sin x| = 4$. Ebből azt kaphatjuk, hogy $|p| = \frac{20}{3}$.

IV

Trigonometrikus egyenlőtlenségek II. rész

3350. *a)* $-\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$. Használjuk fel $\cos 2x$ képletét, majd a $\sin^2 x$-et alakítsuk át $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ segítségével. A $\cos x$-re kapott másodfokú egyenlőtlenséget oldjuk meg! *b)* $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{13 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$. Használjuk fel $\cos 2x$ képletét, majd a $\cos^2 x$-et alakítsuk át $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ segítségével. A $\sin x$-re kapott másodfokú egyenlőtlenséget oldjuk meg!

3351. *a)* $-\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < 0 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $0 + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$. Használjuk fel $\cos 2x$ képletét, majd a $\sin^2 x$-et alakítsuk át $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ segítségével. A $\cos x$-re kapott másodfokú egyenlőtlenséget oldjuk meg! *b)* $-\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. Végezzük el a $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ és a $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ helyettesítést! Ekkor kapunk $\cos 2x$-re egy másodfokú egyenlőtlenséget, amelyet oldjunk meg! *c)* $\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \le x \le \frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot \pi$ Használjuk fel $\cos 2x$ képletét, majd a $\sin^2 x$-et alakítsuk át $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ segítségével. Rendezzük nullára a kapott egyenlőtlenséget, majd alakítsuk szorzattá!

3352. Hozzuk közös nevezőre a bal oldalon levő két törtet! Majd a számlálóban kapott negyedik hatványok összegét alakítsuk át a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság négyzetre emelésével kapott azonosság segítségével. A számlálóban alkalmazzuk visszafelé a $\sin 2x$ képletét. Ezt pedig alakítsuk át a $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ azonosság segítségével. A nevezőben szintén alkalmazzuk visszafelé $\sin 2x$ képletét! Kapjuk, hogy $\frac{8 \cdot \left(1 + \cos^2 2x\right)}{\sin^4 2x}$. E törtet csökkentjük, illetve nem növeljük, ha 8-at írunk a számláló helyett és a nevező helyett pedig 1-et.

3353. $-\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4}$. Vegyük figyelembe, hogy $\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x\right)^3 + \left(\cos^2 x\right)^3$. Ezt viszont már könnyen szorzattá alakíthatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy $a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - a \cdot b + b^2\right)$. Ezután használjuk fel a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot és alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét visszafelé! Majd használjuk fel, hogy $\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$, ezután rendezzük nullára az egyenlőtlenséget és azt kapjuk, hogy $\cos 4x > 0$.

3354. Hasonlóan járjunk el, mint az előző feladatban. Azt kapjuk, hogy elég igazolni a következő egyenlőtlenséget: $\frac{1}{4} \le 1 - \frac{3}{4} \cdot \sin^2 2x \le 1$.

3355. $2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos\left(2^n \cdot x\right) \le \frac{1}{2^{n-1}}$, $\sin 4x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos\left(2^n \cdot x\right) \le \frac{1}{2^{n-1}}$. Folytassuk! (Ha precízek vagyunk, akkor teljes indukcióval.) Kapjuk a végén, hogy $2 \cdot \sin\left(2^n \cdot x\right) \cdot \cos\left(2^n \cdot x\right) \le 1$, azaz $\sin\left(2^{n+1} \cdot x\right) \le 1$.

IV

3356. Alkalmazzuk a $2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos\left(\alpha + \beta\right) + \cos\left(\alpha - \beta\right)$ azonosságot! Majd alkalmazzuk a $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ azonosságot és még egyszer az előző azonosságot! Azt kaphatjuk, hogy a feladatbeli egyenlőtlenség ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel: $0 \le \sin^2\beta \le 1$.

3357. *a)* $\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi < x < \pi + k \cdot \pi$. Osszuk el az egyenlőtlenséget 2-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt és kapjuk, hogy $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$.

b) $\frac{13 \cdot \pi}{36} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3} < x < \frac{19 \cdot \pi}{36} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. Hasonlóan járjunk el, mint az előző feladatban.

c) $\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3} < x < \frac{5 \cdot \pi}{12} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd osszuk el $\sqrt{2}$-vel. Ezután hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

d) $-\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi < x < \frac{5 \cdot \pi}{12} + k \cdot \pi$. Alkalmazzuk a $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ azonosságot, majd vegyük figyelembe, hogy $-\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2x$. Azután osszuk el az egyenletet 2-vel! Ezután hasonlóan folytatható, mint az előző három feladat folytatása.

3358. *a)* $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{5 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$. Az egyenlőtlenségből következik, hogy $\sin x > \cos x$. Miért? Rendezzük nullára a kapott egyenlőtlenséget, majd osszuk el $\sqrt{2}$-vel! Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt és kapjuk, hogy $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

b) $-\frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$. A feladat egyenlőtlenségéből következik, hogy $\sin x < \cos x$. Miért? Ezután hasonlóan folytathatjuk, mint az előző feladat megoldását.

3359. $-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < x < 0 + k \cdot \pi$. A feladat egyenlőtlensége ekvivalens a következővel: $-1 < \sin x + \cos x < 1$. Osszuk el ezt az egyenlőtlenséget $\sqrt{2}$-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt és kapjuk, hogy: $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3360. *a)* $\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi < x < \frac{5 \cdot \pi}{12} + k \cdot \pi$. Az egyenlőtlenség bal oldalának számlálóját és nevezőjét egyaránt osszuk el $\sqrt{2}$-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket és kap-

juk, hogy: $\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}>\sqrt{3}$, azaz $\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>\sqrt{3}$. *b)* $0+k\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$. A feladat egyenlőtlenségével ekvivalens a következő: $-1\le\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\le 1$. Ezután hasonlóan járjunk el, mint az előző feladat megoldásában. Kapjuk, hogy $-1\le\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1$.

3361. *a)* $\frac{\pi}{12}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{17\cdot\pi}{12}+l\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{7\cdot\pi}{4}+l\cdot 2\cdot\pi$. Alkalmazzuk $\cos 2x$ képletét, majd alakítsuk szorzattá a jobb oldalt! Ezután rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd alakítsuk szorzattá az egyenlőtlenséget! Kapjuk, hogy $(\sin x+\cos x)\left(1-\sqrt{2}\cdot(\cos x-\sin x)\right)>0$. *b)* $x=\frac{\pi}{2}+(2\cdot k+1)\cdot 2\cdot\pi$. Osszuk el az egyenlőtlenséget $\sqrt{2}$-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt! Kapjuk, hogy (*) $2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\le\sin x-3$. Mutassuk meg, hogy a (*) egyenlőtlenségben csak az egyenlőség esete állhat fenn, mégpedig pontosan akkor, ha $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ és $\sin x=1$.

3362. $-\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$. Ha négyzetre emeljük az egyenlőtlenséget és felhasználjuk $\sin 2x$ képletét visszafelé, kapjuk rendezés után, hogy $\sin^2 x+3\cdot\cos^2 x=$ $=\sin^2 x+3\cdot\cos^2 x$. Ez azonosság, de nem minden valós x-re teljesül, hanem csak azokra, amelyekre fennáll, hogy (*) $\sin x+\sqrt{3}\cdot\cos x\ge 0$ és (**) $2+\cos 2x+\sqrt{3}\cdot\sin 2x\ge 0$. A (*) egyenlőtlenséget osszuk el 2-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt és kapjuk, hogy $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ge 0$. Ennek megoldása $-\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi\le x\le\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$. A (**) egyenlőtlenséget osszuk el 2-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt és kapjuk, hogy: $1+\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\ge -1$. Ez pedig minden x valós számra fennáll.

3363. $\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$. Használjuk fel, hogy $\sin 2x=\frac{2\cdot\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ (ha $x\ne\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$), majd szorozzunk be a nevezővel és kapjuk a következő egyenlőtlenséget: $\operatorname{tg}^3 x-2\cdot\operatorname{tg}^2 x+$ $+3\cdot\operatorname{tg}x-2\ge 0$. Alakítsuk szorzattá ezt az egyenlőtlenséget! $\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}^2 x-\left(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x\right)+$ $+(2\cdot\operatorname{tg}x-2)\ge 0$ Folytassuk!

3364. $-\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{3\cdot\pi}{4}+l\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{7\cdot\pi}{6}+l\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{5\cdot\pi}{4}+m\cdot 2\cdot\pi<x<\frac{7\cdot\pi}{4}+m\cdot 2\cdot\pi$. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd alkal-

mazzuk $\cos 2x$ képletét és kapjuk, hogy $4 \cdot \sin^3 x + 2 \cdot \sin^2 x - 2 \cdot \sin x - 1 < 0$. Alakítsuk szorzattá ezen egyenlőtlenséget! Kapjuk, hogy $4 \cdot \left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\sin x + \frac{1}{2}\right) < 0$, ebből

$\left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\sin x + \frac{1}{2}\right) < 0.$

IV

3365. $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \sin 2x \cdot \frac{\cos 2x - \cos 4x}{2} = \frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x - 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 4x}{2} =$

$\frac{\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x}{4} < \frac{3}{4}$. Miért? Mutassuk meg, hogy egyenlőség valóban nem állhat fenn.

3366. **1. megoldás vázlata:** Legyen $z = \cos \frac{x+y}{2}$, ekkor $4 \cdot z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos \frac{x-y}{2} + \frac{1}{4} =$

$= \left(2 \cdot z - \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \cos^2 \frac{x-y}{2}\right) \geq 0.$

2. megoldás vázlata: Az **a**, **b**, és **c** vektorok közös kezdőpontúak legyenek. Legyen x az **a** és a **b** vektorok hajlásszöge és y pedig a **b** és a **c** vektorok hajlásszöge, míg $x + y$ vagy $2 \cdot \pi - (x + y)$ a **c** és az **a** vektorok hajlásszöge. Ekkor $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 \geq 0$, azaz

$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + 2 \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos x + 2 \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos y + 2 \cdot |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos(x + y) \geq 0,$

és legyen $|\mathbf{a}| = |\mathbf{c}| = 1$ és $|\mathbf{b}| = \frac{1}{2}$.

3367. Alkalmazzuk $\sin 2x$ képletét x-re és y-ra is, majd emeljünk ki a két megfelelő tagból $\sin x \cdot \sin y$-t, kapjuk, hogy $8 \cdot \sin x \cdot \sin y \cdot (\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y) - 1 \leq 0$.

Ebből $8 \cdot \sin x \cdot \sin y \cdot \cos(x + y) - 1 \leq 0$, $0 \leq 1 - 8 \cdot \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \cdot \cos(x + y)$.

Tovább folytatva: $0 \leq \sin^2(x - y) + \cos^2(x - y) + 4 \cdot \cos^2(x + y) - 4 \cdot \cos(x + y) \cdot \cos(x - y)$,

$0 \leq (2 \cdot \cos(x + y) - \cos(x - y))^2 + \sin^2(x - y)$.

3368. Használjuk fel a megfelelő összegzési tételt a bal oldalon, végezzük el itt a négyzetre emelést és végezzük el a szorzást a jobb oldalon! Kissé rendezzük át a kapott egyenlőtlenséget a következő alakúra: $\cos^2 x \cdot \cos^2 y - 2 \cdot \sin x \cdot \sin y \cdot \cos x \cdot \cos y + \sin^2 x \cdot \sin^2 y \leq$

$\leq 4 - 4 \cdot (\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y)$. Ebből: $\cos^2(x + y) \leq 4 - 4 \cdot \sin(x + y)$,

$1 - \sin^2(x + y) \leq 4 - 4 \cdot \sin(x + y)$, $1 \leq \sin^2(x + y) - 4 \cdot \sin(x + y) + 4$,

$1 \leq (\sin(x + y) - 2)^2$. Ez miért teljesül minden valós x, y számra?

3369. $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$, $\sin 3x = 3 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x$. Felhasználva az előző azonosságokat, kapjuk, hogy: $\sin x + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{3} \cdot \sin 3x = \ldots = \frac{\sin x}{3} \cdot (2 + 3 \cdot \cos x + 4 \cdot \cos^2 x) =$

$= \frac{\sin x}{3} \cdot \left((1 + \cos x)^2 + (1 + \cos x) + 3 \cdot \cos^2 x\right) > 0$, mert $\sin x > 0$, ha $0 < x < \pi$, míg a második tényező tagjai nemnegatívak (és egyszerre mindhárom tag nem lehet nulla). Fejér Lipót (1880-1959) híres magyar matematikus igazolta, hogy bármely pozitív egész n-re teljesül, hogy $\sin x + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{3} \cdot \sin 3x + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \sin nx > 0$, ha $0 < x < \pi$ fennáll.

3370. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\cos x + 3 \cdot \cos 3x + 6 \cdot \cos 6x < -\frac{115}{16}$.
Ebből $\cos x + 3 \cdot \cos 3x + (6 \cdot \cos 6x + 6) < -\frac{19}{16}$, $\cos x + 3 \cdot \cos 3x + 12 \cdot \cos^2 3x < -\frac{19}{16}$,
$3 \cdot \left(4 \cdot \cos^2 3x + \cos 3x + \frac{1}{16}\right)^2 + \cos x < -1$, $3 \cdot \left(2 \cdot \cos 3x + \frac{1}{4}\right)^2 + \cos x < -1$. Ez nem teljesülhet, mert a zárójeles kifejezés nemnegatív, míg $\cos x \geq -1$. Tehát nem igaz a feltevésünk, ezért az eredeti egyenlőtlenség teljesül.

3371. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a bal oldali összeg két pozitív tagjára!

3372. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a bal oldali összeg két pozitív tagjára! Majd használjuk fel, hogy $\frac{\sin x + \cos x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Miért? Másrészt használjuk fel a következő becslést: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -1$.

3373. Megmutatjuk, hogy (*) $2^{-\cos^2 x} + 2^{-\sin^2 x} \geq \sqrt{2}$ és (**) $\sqrt{2} \geq \sin y + \cos y$. (*) mindkét bal oldali tagja pozitív , ezért alkalmazhatjuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget. Majd használjuk fel, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. (**)-nál osszuk el az egyenlőtlenséget $\sqrt{2}$-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt és kapjuk, hogy $1 \geq \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$, ez pedig teljesül. S mivel átalakításaink megfordíthatóak, ezért (**) is teljesül. (*)-ból és (**)-ból következik a feladat egyenlőtlenségének fennállása.

3374. $x = 2$ az egyenlőtlenség megoldása. Használjuk fel, hogy $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$, kapjuk, hogy $\left(x^2 - 4 \cdot x + 3\right) \cdot \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\cos^2(\pi \cdot x) + 1\right) \geq 2$. Ebből kaphatjuk, hogy
$-\left(x^2 - 4 \cdot x + 3\right) \cdot \log_2\left(\cos^2(\pi \cdot x) + 1\right) \geq 1$. Ha $x \leq 1$ vagy $x \geq 3$, akkor az előbbi egyenlőtlenség bal oldala negatív vagy nulla. Ezt az első tényező vizsgálatából nyerhetjük, hiszen a második tényező mindig nemnegatív. Tehát $1 < x < 3$-nak kell lennie, de $x = 2$ kivételével $-\left(x^2 - 4 \cdot x + 3\right) < 1$, míg $x = 2$-nél a másodfokú kifejezés értéke 1. Másrészt gondoljuk meg, hogy $1 \geq \log_2\left(\cos^2(\pi \cdot x) + 1\right) > 0$ fennáll, ha $1 < x < 3$. Ezt az 1 értéket a lehetséges intervallumban gondoljuk meg, hogy pontosan $x = 2$-nél veszi fel. Tehát az eredeti egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = 2$ és itt egyenlőség lép fel az egyenlőtlenségben.

3375. $x = \frac{1}{2}$ az egyenlőtlenség megoldása. $\log_{\sqrt{3}}\left(2 + 2 \cdot \cos^2 x - \cos 2x + 3 \cdot \cos^2(\pi \cdot x)\right) = \ldots =$
$= \log_{\sqrt{3}}\left(3 + 3 \cdot \cos^2(\pi \cdot x)\right) \geq \log_{\sqrt{3}} 3 = 2$.

Másrészt mutassuk meg, hogy $x-x^2-\frac{5}{4}\le -1$. Ebből $-\left(x-x^2-\frac{5}{4}\right)\ge 1$, így $-\left(x-x^2-\frac{5}{4}\right)\cdot\log_{\sqrt{3}}\left(2+2\cdot\cos^2 x-\cos 2x+3\cdot\cos^2(\pi\cdot x)\right)\ge 1\cdot 2=2$, tehát $\left(x-x^2-\frac{5}{4}\right)\cdot\log_{\sqrt{3}}\left(2+2\cdot\cos^2 x-\cos 2x+3\cdot\cos^2(\pi\cdot x)\right)\le -2$.

IV

Vegyük figyelembe az eredeti egyenlőtlenséget és azt kapjuk, hogy $\left(x-x^2-\frac{5}{4}\right)\cdot\log_{\sqrt{3}}\left(2+2\cdot\cos^2 x-\cos 2x+3\cdot\cos^2(\pi\cdot x)\right)=-2$. Gondoljuk meg, hogy ez az egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha $\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$, azaz ha $x=\frac{1}{2}$.

3376. $x=\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi$, ahol k tetszőleges negatív egész szám; $-\frac{\pi}{3}+l\cdot\pi\le x\le-\frac{\pi}{4}+l\cdot\pi$, ahol l tetszőleges nempozitív egész szám.

1. eset: Ha $x=\frac{1}{2}$, akkor könnyen kimutathatjuk, hogy ez megoldás.

2. eset: Ha $x\ne\frac{1}{2}$, akkor fenn kell állniuk a következő egyenlőtlenségeknek: *a)* $1-2\cdot x>0$, ebből $\frac{1}{2}>x$; *b)* $8\cdot\cos^2 x-2\ne 0$, ebből $x\ne\pm\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\cdot\pi$ és $x\ne\pm\frac{2\cdot\pi}{3}+n\cdot 2\cdot\pi$; *c)* $\sin x\ne 0$, ebből $x\ne n\cdot\pi$; *d)* $\sin x\ne\pm 1$, ebből összefoglalás után $x\ne\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi$.

e) $\log_{|\sin x|}\left(\frac{\left(3+|\operatorname{tg}x|\right)\cdot\cos^2 x}{8\cdot\cos^2 x-2}\right)<0$. Az *e)*-ből kapjuk, hogy $\frac{\left(3+|\operatorname{tg}x|\right)\cdot\cos^2 x}{8\cdot\cos^2 x-2}>1$. Ezt pedig alakítsuk a következő alakúra: $\frac{3+|\operatorname{tg}x|}{6-2\cdot\operatorname{tg}^2 x}\ge 1$. Rendezzük nullára, hozzunk közös nevezőre és kapjuk, hogy $\frac{2\cdot\operatorname{tg}^2 x+|\operatorname{tg}x|-3}{6-2\cdot\operatorname{tg}^2 x}\ge 0$, $\frac{2\cdot|\operatorname{tg}x|^2+|\operatorname{tg}x|-3}{6-2\cdot\operatorname{tg}^2 x}\ge 0$.

e) **1. eset:** Ha $2\cdot|\operatorname{tg}x|^2+|\operatorname{tg}x|-3\ge 0$ és $6-2\cdot\operatorname{tg}^2 x>0$. Itt az első egyenlőtlenségről mutassuk ki, hogy pontosan akkor teljesül, ha $|\operatorname{tg}x|\ge 1$. Míg a második egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $|\operatorname{tg}x|\le 3$. A két egyenlőtlenségnek egyszerre kell fennállnia: $1\le|\operatorname{tg}x|\le 3$. Ebből következik, hogy $1\le\operatorname{tg}x\le 3$, ennek a megoldása $\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi$, de itt figyelembe kell venni, hogy $x<\frac{1}{2}$, ezért k tetszőleges negatív egész szám lehet.

$-\sqrt{3}\le\operatorname{tg}x\le -1$, ennek a megoldása $-\frac{\pi}{3}+l\cdot\pi\le x\le-\frac{\pi}{4}+l\cdot\pi$, itt l-nek tetszőleges nempozitív egész számnak kell lennie, $x<\frac{1}{2}$ miatt.

2. eset: Ha $2\cdot|\operatorname{tg}x|^2+|\operatorname{tg}x|-3\le 0$ és $6-2\cdot\operatorname{tg}^2<0$. Ekkor az elsőből az következik, hogy (*) $-\frac{3}{2}\le|\operatorname{tg}x|\le 1$ és (**) $\sqrt{3}\le|\operatorname{tg}x|$ vagy $-\sqrt{3}\ge|\operatorname{tg}x|$. (*) és (**) közös része az üres halmaz, tehát ebben az esetben nem kapunk megoldást.

3377. $f_{max}=5$; $f_{min}=-5$. Osszuk el $f(x)$ kifejezését 5-tel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt!

3378. $f_{max}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, ezt akkor veszi fel a függvény, amikor $x=\frac{3\cdot\pi}{8}+k\cdot\pi$; $f_{min}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$, ezt akkor veszi fel a függvény, amikor $x=-\frac{\pi}{8}+l\cdot\pi$. Vegyük figyelembe, hogy $\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, másrészt $f(x)$ kifejezését osszuk el $\sqrt{2}$-vel, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt!

3379. $f_{max}=\frac{7}{6}$; $f_{min}=\frac{1}{6}$. Vegyük figyelembe, hogy $\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, majd hozzuk a következő alakra: $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\cos 2x-\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\sin 2x\right)$. Ezután alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt!

3380. Az egyenlő szárú derékszögű háromszögeknél lesz maximális a kerület.

$a+b=c\cdot\sin\alpha+c\cdot\cos\alpha=c\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos x\right)=\ldots=c\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Folytassuk egy következtetéssel!

3381. Akkor a legkisebb a beírt négyzet kerülete, amikor a csúcsai a nagy négyzet oldalfelező pontjain helyezkednek el. Legyen x a beírt négyzet oldalhossza, ekkor $1=x\cdot\cos\alpha+x\cdot\sin\alpha$, ebből $x=\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$. Így $k=4\cdot x=\frac{4}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\alpha}=\ldots=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$. Folytassuk!

3382. *a)* $f_{max}=1$, ezt akkor veszi fel, ha $x=k\cdot\frac{\pi}{2}$, $f_{min}=\frac{1}{2}$, ezt akkor veszi fel, amikor $x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$. Emeljük négyzetre a $\sin^2x+\cos^2x=1$ azonosságot és fejezzük ki a kapott eredményből a negyedik hatványok összegét, majd alkalmazzuk a $\sin 2x$ képletét visszafelé. *b)* $f_{max}=1$, ezt akkor veszi fel, ha $x=k\cdot\frac{\pi}{2}$, $f_{min}=\frac{1}{4}$, ezt akkor veszi fel, ha $x=\frac{\pi}{4}+l\cdot\pi$ vagy $x=-\frac{\pi}{4}+m\cdot\pi$. Induljunk ki abból, hogy $\sin^6x+\cos^6x=\left(\sin^2x\right)^3+\left(\cos^2x\right)^3$, ezt pedig alakítsuk szorzattá figyelembevéve az $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-a\cdot b+b^2\right)$ azonosságot. Használjuk

IV

fel, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, a negyedik hatványok összegével hasonlóan bánhatunk el, mint az előző feladatban. Kapjuk, hogy $f(x) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \sin^2 2x$.

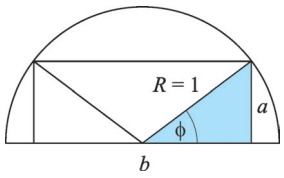
3383. $f_{max} = \frac{1}{4}$, és ezt $x = \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi$-nél veszi fel. $f_{min} = \frac{3}{8}$ és ezt $x = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$-nél veszi fel.

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{3 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 + 2 \sin x \cdot \cos x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 + \sin 2x}\right).$$

Kapjuk, hogy $f(x) \le \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 + (-1)}\right) = \frac{1}{4}$. Másrészt $f(x) \ge \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 + 1}\right) = \frac{3}{8}$.

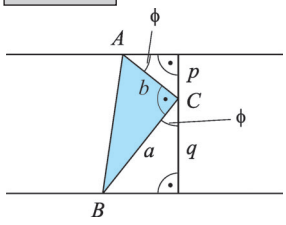
3384. $f_{max} = 1$, és ezt ott veszi fel, ahol $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$ vagy $x = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot \pi$, $f_{min} = -\frac{5}{4}$, és ezt ott veszi fel, ahol $x = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$. Használjuk fel, hogy $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ és $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. Kapjuk, hogy $f(x) = 1 - \left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)^2$.

3385.



3385. $a = R \cdot \sin\phi$ és $b = 2 \cdot R \cdot \cos\phi$, így $t = a \cdot b = \ldots = \sin 2\phi$, tehát $t_{max} = 1$ és ezt $\phi = 45°$-nál éri el.

3386.



3386. $a = \frac{q}{\cos\varphi}$; $b = \frac{p}{\sin\varphi}$. Így $t = \frac{a \cdot b}{2} = \ldots = \frac{p \cdot q}{\sin 2\varphi}$. Tehát $t_{min} = p \cdot q$ és ez akkor következik be, ha $\varphi = 45°$.

3387. *a)* $f_{min} = 4$, ezt akkor veszi fel, ha $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ vagy $x = \frac{3 \cdot \pi}{4} + l \cdot \pi$. Hozzunk közös nevezőre, alkalmazzuk a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot, majd alkalmazzuk visszafelé $\sin 2x$ képletét. Kapjuk előbb-utóbb, hogy $f(x) = \frac{4}{\sin^2 2x}$.

b) $g_{min} = 9$, ezt akkor veszi fel, ha $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ vagy $x = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$.

$$g(x) = 5 + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \ldots = 5 + \frac{4}{\sin^2 2x}.$$

3388. $f_{min} = 8$ és ezt $x = \frac{\pi}{4}$-nél veszi fel. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti összefüggést az összeg két pozitív tagjára! Kapjuk egy kis rendezés után, hogy

$$f(x) \ge \frac{2}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{8}{\sin^2 2x} \ge 8.$$

3389. $f_{min} = 2$, ezt akkor veszi fel, ha $x = \frac{\pi}{4}$. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \ldots = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$.

3390. *a)* $a_{\min} = 6$, ezt akkor veszi fel, ha $x = \frac{\pi}{4}$. Hozzunk közös nevezőre, alakítsuk át a következő alakúra: $a(x) = \frac{4}{4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \frac{2}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \frac{4}{\sin^2 2x} + \frac{2}{\sin 2x}$.

b) $b_{\min} = 2 \cdot \sqrt{2}$, ezt akkor veszi fel, ha $x = \frac{\pi}{4}$. Mivel $b(x) > 0$ a megadott intervallumon, ezért pontosan ott van a minimuma, ahol a négyzetének. $b^2(x) = \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}\right)^2 = \ldots =$

$= \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \frac{4}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = 4 \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 2x} + \frac{1}{\sin 2x}\right) \geq 8.$

c) $c_{\min} = 2 \cdot \sqrt{2} + 2$, ezt akkor veszi fel, ha $x = \frac{\pi}{4}$. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a pozitív $\frac{1}{\sin x}$ és $\frac{1}{\cos x}$-re! Kapjuk, hogy $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \geq$

$\geq \frac{2}{\sqrt{\sin x \cdot \cos x}}$. Itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$. Mutassuk meg, hogy ez $x = \frac{\pi}{4}$-nél teljesül! Tehát $c(x) \geq \frac{2}{\sqrt{\sin x \cdot \cos x}} + \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \ldots = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}} +$

$+ \frac{2}{\sin 2x} \geq 2 \cdot \sqrt{2} + 2$. *d)* $d_{\min} = 2 \cdot \sqrt{2} + 4$, ezt $x = \frac{\pi}{4}$-nél veszi fel. Hasonlóan járhatunk el, mint az előző feladat megoldásánál. *e)* A kifejezés minimuma $2 \cdot \sqrt{2} + 2$ és ezt $x = \frac{\pi}{4}$-nél veszi fel. A kifejezést hozzuk a következő alakúra: $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$. Alkalmazzuk az első két tagra a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget, kapjuk hogy $\frac{1}{\cos x} +$

$+ \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos x \cdot \sin x}} + \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}} + \frac{2}{\sin 2x} \geq 2 \cdot \sqrt{2} + 2.$

3391. $K_{\max} = \frac{n}{2}$ és ezt $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{\pi}{4}$-nél veszi fel. Alkalmazzuk az $a \cdot b \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ ismert és könnyen igazolható egyenlőtlenséget! $\sin x_1 \cdot \cos x_2 \leq \frac{\sin^2 x_1 + \cos^2 x_2}{2}$, $\sin x_2 \cdot \cos x_3 \leq$

$\leq \frac{\sin^2 x_2 + \cos^2 x_3}{2}$, …, $\sin x_{n-1} \cdot \cos x_n \leq \frac{\sin^2 x_{n-1} + \cos^2 x_n}{2}$, $\sin x_n \cdot \cos x_1 \leq \frac{\sin^2 x_n + \cos^2 x_1}{2}$.

Adjuk össze ezen egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy:

$K \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\sin^2 x_1 + \cos^2 x_1\right) + \left(\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2\right) + \ldots + \left(\sin^2 x_n + \cos^2 x_n\right)\right) =$

$= \frac{1}{2} \cdot (1 + 1 + \ldots + 1) = \frac{n}{2}$.

IV

3392. *a)* $a_{max}=\frac{1}{8}$ és ezt $x=\frac{\pi}{3}$-nál veszi fel. $a(x)=\cos x\cdot\cos x\cdot\left(\frac{3}{2}-2\cdot\cos x\right)$. Alkalmazzuk e három tényezőre a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget!

$\sqrt[3]{\cos x\cdot\cos x\cdot\left(\frac{3}{2}-2\cdot\cos x\right)}\le\frac{\cos x+\cos x+\frac{3}{2}-2\cdot\cos x}{3}$. Ebből következik, hogy $a(x)\le\frac{1}{8}$.

IV

Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $\cos x=\frac{3}{2}-2\cdot\cos x$. *b)* $b_{max}=\frac{8}{27}$, ezt akkor veszi fel a függvény, amikor $x=\arccos\frac{2}{3}\approx 0{,}8411$. $b(x)=\cos x\cdot\cos x\cdot(2-2\cdot\cos x)$, ezután hasonlóan járjunk el, mint az előző feladatnál. *c)* $c_{max}=\frac{8}{27}$, és ezt akkor veszi fel, ha $x=\arcsin\frac{2}{3}\approx 0{,}7297$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot. A következőkben is *k, l, m, n, p, q, u, v* tetszőleges egész számokat jelentenek.

Trigonometrikus egyenletrendszerek

3393. $x=(k-l)\cdot\frac{\pi}{2}$; $y=(k+l)\cdot\frac{\pi}{2}$.

3394. *a)* $\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi,\\ y_1=\frac{\pi}{2}+l\cdot\pi;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\frac{3\cdot\pi}{2}+m\cdot 2\cdot\pi,\\ y_2=\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi.\end{cases}$ Adjuk össze az egyenletrendszert!

b) $\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi,\\ y_1=l\cdot\pi;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-\frac{\pi}{4}+m\cdot 2\cdot\pi,\\ y_2=n\cdot\pi;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=\frac{3\cdot\pi}{4}+p\cdot 2\cdot\pi,\\ y_3=q\cdot\pi;\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=-\frac{3\cdot\pi}{4}+u\cdot 2\cdot\pi,\\ y_4=v\cdot\pi.\end{cases}$

Adjuk össze az egyenletrendszert!

3395. *a)* $\begin{cases}x_1=k\cdot\pi,\\ y_1=\frac{\pi}{4}+l\cdot\pi;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=m\cdot\pi,\\ y_2=\frac{3\cdot\pi}{4}+n\cdot\pi;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3\approx 0{,}2527+p\cdot 2\cdot\pi,\\ y_3=\frac{\pi}{2}+q\cdot\pi;\end{cases}\quad;\quad\begin{cases}x_4\approx 2{,}8889+u\cdot 2\cdot\pi,\\ y_4=\frac{\pi}{2}+v\cdot\pi.\end{cases}$

b) $\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi,\\ y_1=\frac{\pi}{2}+l\cdot\pi;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\frac{3\cdot\pi}{4}+m\cdot 2\cdot\pi,\\ y_2=\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi.\end{cases}$

3396. *a)* $\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi,\\ y=\frac{\pi}{6}-k\cdot\pi.\end{cases}$ Fejezzük ki a második egyenletből *y*-t és helyettesítsük be az első egyenletbe, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt! Használjuk fel a konstans eltün-

tetésére az $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ azonosságot, majd osszuk el az egyenletet $\cos^2 x$-szel, amikor ez nem nulla! Kapunk $\operatorname{tg} x$-re egy másodfokú egyenletet. (Mutassuk meg, hogy $\cos x$ nem lehet nulla!)

b) $\begin{cases} x_1 = k \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{3 \cdot \pi}{4} - k \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{4} + l \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{2} - l \cdot \pi. \end{cases}$

Hasonlóan járhatunk el, mint az előző feladatban, a végén kis eltéréssel. Ugyanis a végén rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

3397. *a)* $\begin{cases} x = \dfrac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot \pi, \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi. \end{cases}$ Hasonlóan kezdhetjük el, mint az előző két feladatot. A továbbiakban az összegzési tétel alkalmazása után $\cos y$-nal osszuk el az egyenletet (ha x-et fejeztük ki korábban)!

b) $\begin{cases} x = \dfrac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot \pi, \\ y = \dfrac{\pi}{6} - k \cdot \pi. \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \\ y = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot \pi. \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x = \dfrac{5 \cdot \pi}{60} + k \cdot \pi, \\ y = \dfrac{3 \cdot \pi}{4} - k \cdot \pi. \end{cases}$

3398. *a)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot \pi, \\ y_1 = 0 + k \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0 + l \cdot \pi, \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{3} + l \cdot \pi. \end{cases}$

Fejezzük ki x-et az első egyenletből és helyettesítsük be a második egyenletbe! Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt, szorozzunk a nevezővel, rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

b) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{7 \cdot \pi}{12} + k \cdot \pi, \\ y_1 = -\dfrac{5 \cdot \pi}{60} + k \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{5 \cdot \pi}{12} + l \cdot \pi, \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{4} + l \cdot \pi. \end{cases}$

Hasonlóan kezdhetjük el, mint az előzőeket, itt $\operatorname{tg} y$-ra másodfokú egyenletet kapunk. *c)* Az egyenletrendszernek nincs megoldása a valós számpárok halmazán. Hasonló módszerrel oldhatjuk meg, mint az előzőt. *d)* Az egyenletrendszernek nincs megoldása a valós számpárok halmazán.

3399. $\begin{cases} x_1 = k \cdot \pi, \\ y_1 = l \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{2} + m \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{2} + n \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases}$ $(\sin^2 x)^2 + \cos^4 x = \sin^2 y + \cos^2 y = 1$. Másrészt a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság négyzetre emelése után kaphatjuk, hogy $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x$. Így $1 - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1$. Folytassuk!

3400. $\begin{cases} x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}, \\ y_1=\frac{\pi}{4}+l\cdot 2\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}, \\ y_2=\frac{3\cdot\pi}{4}+m\cdot 2\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}, \\ y_3=-\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}, \\ y_4=\frac{5\cdot\pi}{4}+p\cdot 2\cdot\pi \end{cases}$

$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3=\ldots=\frac{1}{4}\cdot(\sin^2 y+\cos^2 y)=\frac{1}{4}$. Így $\begin{cases} \sin^6 x+\cos^6 x=\frac{1}{4}, \\ \sin^3 x=\frac{1}{2}\cdot\sin y. \end{cases}$

Használjuk fel, hogy $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ és $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, ezeket beírva az előbbi egyenletrendszer első egyenletébe, majd rendezve az egyenletet, azt kapjuk, hogy $\cos 2x=0$.

3401. $\begin{cases} x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi, \\ y_1=l\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2\approx 1{,}1071+m\cdot\pi, \\ y_2=\frac{\pi}{4}+n\cdot\pi. \end{cases}$ Vegyük figyelembe, hogy az első egyenlet a következő alakra hozható: $\sin(x+y)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-(x-y)\right)$.

3402. *a)* $\begin{cases} x_1=\frac{11\cdot\pi}{12}+k\cdot\pi, \\ y_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=\frac{3\cdot\pi}{4}+l\cdot\pi, \\ y_2=\frac{5\cdot\pi}{60}+l\cdot\pi. \end{cases}$

Fejezzük ki az első egyenletből x-et, majd ezt helyettesítsük be a második egyenletbe! Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt, majd szorozzunk a nevezővel és $\operatorname{tg} y$-ra kapunk egy másodfokú egyenletet.

b) $\begin{cases} x_1=-\frac{\pi}{12}+k\cdot\pi, \\ y_1=\frac{17\cdot\pi}{12}-k\cdot\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\frac{\pi}{4}+l\cdot\pi, \\ y_2=\frac{19\cdot\pi}{12}-l\cdot\pi. \end{cases}$

3403. $\begin{cases} x=\frac{\pi}{9}+2\cdot l\cdot\frac{\pi}{3}, \\ y=\frac{2\cdot\pi}{9}+2\cdot l\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}. \end{cases}$

3404. $\begin{cases} x_1=\frac{5\cdot\pi+\sqrt{25\cdot\pi^2-16}}{4}, \\ y_1=\frac{5\cdot\pi-\sqrt{25\cdot\pi^2-16}}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=\frac{5\cdot\pi-\sqrt{25\cdot\pi^2-16}}{4}, \\ y_2=\frac{5\cdot\pi+\sqrt{25\cdot\pi^2-16}}{4}. \end{cases}$

Az első egyenletből kaphatjuk, hogy $x\cdot y=1$. A második egyenletet rendezzük át úgy, hogy az 1 magányosan álljon a jobb oldalon! Majd alkalmazzuk a bal oldalra a megfelelő összegzési tételt! Vegyük majd figyelembe a megoldásnál, hogy $x>0$ és $y>0$, ezért az összegük is pozitív.

3405. $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{3 \cdot \pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{3 \cdot \pi}{4} + p \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_3 = \dfrac{5 \cdot \pi}{6} + q \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$

$\begin{cases} x_4 = -\dfrac{3 \cdot \pi}{4} + u \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_4 = -\dfrac{5 \cdot \pi}{6} + v \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases}$ A második egyenletből határozzuk meg x-et és ezt helyettesítsük be az első egyenletbe!

3406. $\begin{cases} x = -1, \\ y = -1, \\ z = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi. \end{cases}$ Fejezzük ki az első egyenletből y-t és helyettesítsük be a második egyenletbe! Szorozzunk a nevezővel és kapunk x-re egy másodfokú egyenletet. Ennek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív.

3407. $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \\ y_1 = -\dfrac{\pi}{3} + l \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{3} + m \cdot \pi. \end{cases}$ Használjuk fel, hogy $\cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$ és $\cos 2y = 2 \cdot \cos^2 \cdot y - 1$. Ezeket behelyettesítve, kapjuk, hogy $\sin^2 x - \cos^2 y = \dfrac{3}{4}$, ezt alakítsuk szorzattá, majd használjuk fel a másik egyenletet és kapjuk, hogy: $\sin x + \cos y = \dfrac{3}{2}$. Oldjuk meg a $\begin{cases} \sin x - \cos y = \dfrac{1}{2}, \\ \sin x + \cos y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ egyenletrendszert!

3408. $\begin{cases} x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = k \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{4} + l \cdot \pi. \end{cases}$ Az első egyenletből kapjuk, hogy $x = 2 \cdot y$, ezt helyettesítsük be a második egyenletbe és oldjuk meg az egyenletet!

3409. *a)* $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y = \dfrac{\pi}{12} - k \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases}$ A második egyenletet alakítsuk át a következő módon:

$2 \cdot \sin \dfrac{x+y}{2} \cdot \cos \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

b) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{2} - k \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{3} - l \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases}$ Fejezzük ki az első egyenletből y-t és helyettesít-

IV

sük be a második egyenletbe, alkalmazzunk egy megfelelő összegzési tételt, majd rendezés után osszuk el az egyenletet $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ -mal!

3410. *a)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2\cdot\pi}{3} + k\cdot 2\pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} + k\cdot 2\cdot\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{5\cdot\pi}{6} + l\cdot 2\cdot\pi, \\ y_2 = -\dfrac{7\cdot\pi}{6} + l\cdot 2\cdot\pi. \end{cases}$ Hasonló módon is megoldhatjuk, mint az előző feladatot.

b) $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\cdot 2\cdot\pi, \\ y = \dfrac{\pi}{12} + k\cdot 2\cdot\pi. \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x = \pi + k\cdot 2\cdot\pi, \\ y = \dfrac{2\cdot\pi}{3} + k\cdot 2\cdot\pi. \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\cdot\pi, \\ y = \dfrac{\pi}{6} - k\cdot 2\cdot\pi. \end{cases}$

3411. *a)* $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + (k+l)\cdot\pi, \\ y = \dfrac{\pi}{6} + (k-l)\cdot\pi. \end{cases}$ Adjuk össze a két egyenletet, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt! *b)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + (k+l)\cdot\pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} + (l-k)\cdot\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{\pi}{3} + (k+l)\cdot\pi, \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{3} + (k-l)\cdot\pi. \end{cases}$ Használjuk fel a tangens definícióját! Majd az első egyenletet használjuk fel a második egyenlet átalakításában és kapjuk, hogy: $\cos x\cdot\cos y = \dfrac{1}{4}$.

Ezt adjuk össze először az első egyenlettel, majd másodszor pedig vonjuk ki belőle az első egyenletet, kapjuk a következő egyenletrendszert:

$\begin{cases} \cos x\cdot\cos y + \sin x\cdot\sin y = 1 \\ \cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket, majd oldjuk meg az egyenletrendszert! *c)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{5\cdot\pi}{12} + (k+l)\cdot\pi, \\ y_1 = \dfrac{5\cdot\pi}{60} + (k-l)\cdot\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{7\cdot\pi}{12} + (k+l)\cdot\pi, \\ y_2 = -\dfrac{5\cdot\pi}{60} + (k-l)\cdot\pi. \end{cases}$ Először adjuk össze a két egyenletet, majd másodszor vonjuk ki egymásból a két egyenletet! Ekkor egy újabb egyenletrendszert kapunk. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket és ekkor ismét újabb egyenletrendszert kapunk, amelyet már könnyen megoldhatunk. *d)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{5\cdot\pi}{12} + (k+l)\cdot\pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} + (l-k)\cdot\pi; \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = -\dfrac{\pi}{3} + (k+l)\cdot\pi, \\ y_2 = -\dfrac{5\cdot\pi}{12} + (k-l)\cdot\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{\pi}{3} + (k+l)\cdot\pi, \\ y_3 = \dfrac{5\cdot\pi}{12} + (k-l)\cdot\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \dfrac{5\cdot\pi}{12} + (k+l)\cdot\pi, \\ y_4 = -\dfrac{\pi}{3} + (k-l)\cdot\pi. \end{cases}$ Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

3412. $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_3 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$

$\begin{cases} x_4 = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_4 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases}$ Az első egyenletet alakítsuk át a következő alakúra a megfelelő azonosság segítségével: $\frac{1}{2} \cdot (\cos x + \cos y) = \frac{1}{2}$. Fejezzük ki innen például $\cos y$ értékét és helyettesítsük be a második egyenletbe!

3413. *a)* $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_3 = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$

$\begin{cases} x_4 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_4 = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = -\frac{\pi}{3} + p \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_5 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = -\frac{\pi}{3} + p \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_6 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_7 = \frac{4 \cdot \pi}{3} + p \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_7 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$

$\begin{cases} x_8 = \frac{4 \cdot \pi}{3} + p \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_8 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases}$ Alkalmazzuk a következő azonosságokat: $\cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$; $\cos 2y = 2 \cdot \cos^2 y - 1$. Ezeket felhasználva az első egyenletből a következőt kapjuk: $\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{2}$. Oldjuk meg a második egyenletből és az új egyenletből kapott egyenletrendszert! *b)* $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + (k+m) \cdot \pi, \\ y_1 = -\frac{\pi}{12} + (k-m) \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{12} + (k+m) \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{4} + (k-m) \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{7 \cdot \pi}{12} + (p+m) \cdot \pi, \\ y_3 = -\frac{5 \cdot \pi}{12} + (p-m) \cdot \pi; \end{cases}$

$\begin{cases} x_4 = \frac{\pi}{4} + (p+m) \cdot \pi, \\ y_4 = \frac{7 \cdot \pi}{12} + (p-m) \cdot \pi. \end{cases}$ A második egyenletet a következő alakra hozhatjuk a szinuszok összegének szorzattá alakítására való azonosság segítségével: $2 \cdot \sin \frac{2x+2y}{2} \cdot \cos \frac{2x-2y}{2} = \frac{1}{2}$, ebből az első egyenlet felhasználásával kapjuk, hogy: $\cos(x-y) = \frac{1}{2}$.

3414. *a)* $\begin{cases} x_1 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + (m+n) \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{4} + (n-m) \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{4} + (n+m) \cdot \pi, \\ y_2 = -\frac{5 \cdot \pi}{12} + (n-m) \cdot \pi; \end{cases}$

IV

$\begin{cases} x_3 = \frac{17 \cdot \pi}{12} + (m+n) \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_3 = -\frac{3 \cdot \pi}{4} + (n-m) \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + (m+n) \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_4 = -\frac{17 \cdot \pi}{12} + (n-m) \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases}$ Mindkét egyenletet alakítsuk át a megfelelő azonosságok segítségével a következő alakúra: $2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Osszuk el egymással a két új egyenletet és kapjuk, hogy: $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = 2 - \sqrt{3}$. *b)* $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + (n+m) \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{6} + (m-n) \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{6} + (m+n) \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{3} + (m-n) \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$

$\begin{cases} x_3 = \frac{13 \cdot \pi}{6} + (m+p) \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_3 = \frac{\pi}{3} + (m-p) \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{\pi}{3} + (m+p) \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_4 = \frac{13 \cdot \pi}{6} + (m-p) \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases}$

3415. *a)* $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + (m+n) \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{5 \cdot \pi}{60} + (m-n) \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{60} + (m+n) \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{3} + (m-n) \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + (m+n) \cdot \pi, \\ y_3 = \frac{7 \cdot \pi}{12} + (m-n) \cdot \pi; \end{cases}$

$\begin{cases} x_4 = \frac{7 \cdot \pi}{12} + (m+n) \cdot \pi, \\ y_4 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + (m-n) \cdot \pi. \end{cases}$ Használjuk fel a tangens és a kotangens definícióját! Legyen $a = 2$ és $b = 2 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\right)$. Ekkor az első egyenletet a következő alakra hozhatjuk: $\sin(x+y) = a \cdot \cos x \cdot \cos y$. Míg a második egyenletet a következő alakra hozhatjuk: $\sin(x+y) = b \cdot \sin x \cdot \sin y$. Ezeket alakítsuk át még a következő módon:

(1) $\sin(x+y) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \cos(x-y) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \cos(x+y)$ és

(2) $\sin(x+y) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \cos(x-y) - \frac{1}{2} \cdot b \cdot \cos(x+y)$. Az (1) egyenletet szorozzuk b-vel, a (2) egyenletet szorozzuk a-val, majd a kapott első egyenletből vonjuk ki a kapott második egyenletet, kapjuk, hogy: $(b-a) \cdot \sin(x+y) = a \cdot b \cdot \cos(x+y)$, ebből (*)$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{a \cdot b}{b-a}$. Ha most összeadjuk a b-vel, illetve a-val való szorzás után kapott egyenleteket , akkor azt kapjuk, hogy (**) $(a+b) \cdot \sin(x+y) = a \cdot b \cdot \cos(x-y)$. A (*) és (**) egyenletekből álló egyenletrendszert már könnyebben megoldhatjuk, főleg, ha visszahelyettesítjük a, illetve b értékeit.

b) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + (n+m) \cdot \pi, \\ y_1 = -\frac{\pi}{12} + (m+n) \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + (m+n) \cdot \pi, \\ y_2 = -\frac{\pi}{4} + (m-n) \cdot \pi; \end{cases}$

$\begin{cases} x_3 = \dfrac{3 \cdot \pi}{4} + (m+n) \cdot \pi, \\ y_3 = \dfrac{5 \cdot \pi}{12} + (m-n) \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = \dfrac{11 \cdot \pi}{12} + (m+n) \cdot \pi, \\ y_4 = \dfrac{\pi}{4} + (m-n) \cdot \pi. \end{cases}$

3416. *a)* $\begin{cases} x = \pi + k \cdot \pi, \\ y = \dfrac{2 \cdot \pi}{3} - k \cdot \pi. \end{cases}$ A második egyenletet alakítsuk át a következő alakúra:

$\dfrac{1}{2} \cdot (\cos(x+y) + \cos(x-y)) = \dfrac{1}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)$. *b)* $\begin{cases} x = \dfrac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot \pi, \\ y = -\dfrac{5 \cdot \pi}{60} - k \cdot \pi. \end{cases}$ Alakítsuk át a második egyenletet a következő alakúvá: $\dfrac{1}{2} \cdot (\cos(x-y) - \cos(x+y)) = \dfrac{3 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$.

3417. *a)* $\begin{cases} x = \dfrac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi, \\ y = \dfrac{\pi}{12} - k \cdot \pi. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{4} - k \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\dfrac{\pi}{3} - m \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{3 \cdot \pi}{4} + m \cdot \pi. \end{cases}$

3418. *a)* $\begin{cases} x_1 = k \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} - k \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{3} + l \cdot \pi, \\ y_2 = -l \cdot \pi. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x = \dfrac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi, \\ y = \dfrac{\pi}{12} - k \cdot \pi. \end{cases}$

3419. $\begin{cases} x_1 = k \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{4} - k \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{2} + m \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{4} - m \cdot \pi. \end{cases}$

3420. *a)* $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \\ y = \dfrac{\pi}{12} + k \cdot \pi. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} - k \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{\pi}{3} + m \cdot \pi, \\ y_2 = \dfrac{\pi}{2} - m \cdot \pi. \end{cases}$

3421. *a)* $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} - k \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot \pi, \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{3} - m \cdot \pi. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x = \dfrac{1}{6} + k, \\ y = -\dfrac{1}{6} + k. \end{cases}$

3422. $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + (m+k) \cdot \pi, \\ y_1 = \dfrac{\pi}{3} + (m-k) \cdot \pi; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\dfrac{\pi}{3} + (m+k) \cdot \pi, \\ y_2 = -\dfrac{\pi}{3} + (m-k) \cdot \pi. \end{cases}$ Alkalmazzuk a tangens definícióját, ekkor kapjuk a második egyenletből, hogy $4 \cdot \cos x \cdot \cos y = 1$, ha felhasználjuk közben az első egyenletet is. Adjuk össze az új egyenletet az első egyenlettel, kapjuk, hogy $\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y = 1$. Ezután a korábban kapott egyenletből most vonjuk le az első egyenletet, kapjuk, hogy: $\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = -\dfrac{1}{2}$.

Majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket és a kapott új egyenletrendszert már könnyen megoldhatjuk.

3423. $\begin{aligned} x &= (k-n+m)\cdot\pi \\ y &= (n+k-m)\cdot\pi \\ z &= (1+6\cdot n-k-m)\cdot\pi \end{aligned}$. Adjuk össze az első két egyenletet, majd ebből vonjuk le a harmadik egyenletet! Kapjuk, hogy $\sin x+\sin y-\sin z+\sin(x+y+z)=0$.
$(\sin x+\sin y)+(\sin(x+y+z)-\sin z)=0$. Alakítsuk szorzattá a zárójeles kifejezéseket:
$2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}+2\cdot\cos\frac{x+y+z+z}{2}\cdot\sin\frac{x+y+z-z}{2}=0$,
$\sin\frac{x+y}{2}\cdot\left(\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y+2\cdot z}{2}\right)=0$. Alakítsuk szorzattá a zárójeles kifejezést! Kis átalakítás után kapjuk, hogy $\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x+z}{2}\cdot\cos\frac{y+z}{2}=0$. Ebből előbb-utóbb: $x+y=$ $=k\cdot 2\cdot\pi$; $x+z=\pi+m\cdot 2\cdot\pi$; $y+z=\pi+n\cdot 2\cdot\pi$. Oldjuk meg a kapott egyszerű egyenletrendszert!

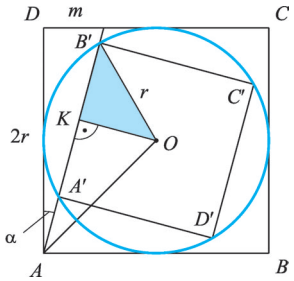
IV

Néhány nehezebb trigonometriai feladat

3424. $\begin{cases} x=0 \\ y=l\cdot 2\cdot\pi \end{cases}$. Gondoljuk meg, hogy $3^x+3^{-x}\le 2$. Alkalmazzuk a negatív kitevőjű hatvány definícióját, szorozzunk a nevezővel, rendezzük nullára és oldjuk meg a 3^x-re másodfokú egyenlőtlenséget! Vegyük észre, hogy teljes négyzetet alakíthatunk ki: $(3^x-1)^2\le 0$, ebből következik, hogy $3^x=1$, azaz $x=0$.

3425. A háromszög oldalai 4; 5; 6 egységnyiek, a szögei $\approx 41{,}4°$; $\approx 55{,}8°$; $\approx 82{,}8°$. Legyen az $n-1$ hosszúságú oldallal szemközti szög x, az $n+1$ hosszúságú oldallal szemközti szög $2\cdot x$, ekkor az n hosszúságú oldallal szemközti szög $180°-3\cdot x$. A szinusztételt alkalmazva $\frac{n+1}{n-1}=\frac{\sin 2x}{\sin x}$, ebből előbb-utóbb $\cos x=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n-1}$. Alkalmazzuk a koszinusztételt! $(n-1)^2=n^2+(n+1)^2-2\cdot n(n+1)\cdot\cos x$. Ebből $\cos x=\frac{n+4}{2\cdot(n+1)}$. Ha összevetjük a $\cos x$-re kapott két egyenletet, akkor azt kaphatjuk a kapott egyenlet megoldása után, hogy $n=5$.

3426.



3426. Legyen K az $A'B'$ szakasz felezőpontja, $OK=\frac{r}{\sqrt{2}}$, $\frac{OK}{OA}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, $r=1$. Ezekből $\alpha=45°-30°\,(=15°)$. $\frac{m}{2\cdot r}=$ $=\operatorname{tg}\alpha$, és így $t=\frac{2\cdot r\cdot m}{2}=2\cdot r^2\cdot\operatorname{tg}\alpha=2\cdot r^2\cdot\frac{\operatorname{tg}45°-\operatorname{tg}30°}{1+\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}30°}=$ $=\ldots=2\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)$.

3427. Nem lehetséges. $AB = c$, $BE = y$, $ED = AE = x$, $BE = y$, $AD = CD = 2 \cdot x$, $CBE\sphericalangle = ABE\sphericalangle = \varphi$. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt az ABC háromszögre: $\frac{AB}{BC} = \frac{x}{3 \cdot x}$, ebből $BC = 3 \cdot c$. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt a BCE háromszögre: $\frac{y}{3 \cdot c} = \frac{x}{2 \cdot x}$, ebből $y = \frac{3}{2} \cdot c$, $t_{ABC} = t_{ABE} + t_{BCE}$, azaz $\frac{c \cdot 3 \cdot c \cdot \sin 2\varphi}{2} = \frac{c \cdot \frac{3}{2} \cdot c \cdot \sin\varphi}{2} + \frac{\frac{3}{2} \cdot c \cdot 3 \cdot c \cdot \sin\varphi}{2}$, ebből előbb-utóbb levezethetjük, hogy $\cos\varphi = 1$, tehát $\varphi = 0$. Ez nem lehetséges.

3428. Legyen $AB = BC = CA = a$. Tegyük fel például, hogy PB a leghosszabb a PA, PB, PC közül. Alkalmazzuk Bretschneider tételét az $ABCP$ négyszögre! $PB^2 \cdot AC^2 = AB^2 \cdot PC^2 + BC^2 \cdot PA^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot PC \cdot PA \cdot \cos(\varphi + 60°)$, ahol $ABC\sphericalangle = 60°$ és $APC\sphericalangle = \varphi$. Az egyenletből kaphatjuk, hogy $PB^2 = PC^2 + PA^2 - 2 \cdot PC \cdot PA \cdot \cos(\varphi + 60°)$. Alkalmazzunk erre egy felső becslést! $PB^2 = PC^2 + PA^2 - 2 \cdot PC \cdot PA \cdot \cos(\varphi + 60°) \le PC^2 + PA^2 + 2 \cdot PA \cdot PC = (PC + PA)^2$. Ebből $PB < PA + PC$. Egyenlőség nem lehet, mert akkor $\cos(\varphi + 60°) = -1$ lenne, de ekkor $\varphi = 120°$ lenne. Ez pedig akkor és csak akkor lenne, ha P rajta lenne a körülírt körön. Keressünk további megoldásokat a feladatra, mert vannak!

3429. $EDB\sphericalangle = 30°$. $EDB\sphericalangle = x$, $BED\sphericalangle = 160° - x$. Alkalmazzuk a szinusztételt a BED háromszögre, majd a BCD háromszögre! (1) $\frac{BD}{BE} = \frac{\sin(160° - x)}{\sin x}$; (2) $\frac{BD}{BC} = \frac{\sin 80°}{\sin 40°}$ és tudjuk, hogy $\sin 80° = 2 \cdot \sin 40° \cdot \cos 40°$ és $BE = BC$. Ezekből kaphatjuk, hogy $\frac{\sin(160° - x)}{\sin x} = 2 \cdot \cos 40°$. Ebből kaphatjuk, hogy $\sin(20° + x) = 2 \cdot \cos 40° \cdot \sin x$. $\sin 20° \cdot \cos x + \cos 20° \cdot \sin x = 2 \cdot (\cos 60° \cdot \cos 20° - \sin 60° \cdot \sin 20°) \cdot \sin x$. Ezt addig alakítsuk, amíg $\cos x = \sqrt{3} \cdot \sin x$, azaz $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nem lesz.

3430. $x = 60°$ az átlók hajlásszöge. Legyen x az átlók hajlásszöge és E az átlók metszéspontja. $ABE\sphericalangle = x - 15°$; $BCE\sphericalangle = 90° - x$; $CDE\sphericalangle = x - 30°$; $DAE\sphericalangle = 105° - x$. Alkalmazzuk a szinusztételt az AEB, BEC, CED, illetve a DEA háromszögre! $\frac{AE}{BE} = \frac{\sin(x - 15°)}{\sin 15°}$; $\frac{BE}{CE} = \frac{\sin(90° - x)}{\sin 90°}$; $\frac{CE}{DE} = \frac{\sin(x - 30°)}{\sin 30°}$; $\frac{DE}{AE} = \frac{\sin(105° - x)}{\sin 75°}$. Szorozzuk össze az egyenletek megfelelő oldalait! Kapjuk, hogy $1 = \frac{\sin(x - 15°)}{\sin 15°} \cdot \frac{\sin(90° - x)}{\sin 90°} \cdot \frac{\sin(x - 30°)}{\sin 30°}$.

$\sin(x - 15°) \cdot \sin(90° - x) \cdot \sin(x - 30°) \cdot \sin(105° - x) = \frac{1}{2} \cdot \sin 15° \cdot \sin 75°$,

$\big(2 \cdot \sin(x - 15°) \cdot \sin(105° - x)\big) \cdot \big(2 \cdot \sin(x - 30°) \cdot \sin(90° - x)\big) = 2 \cdot \sin 15° \cdot \sin 75°$,

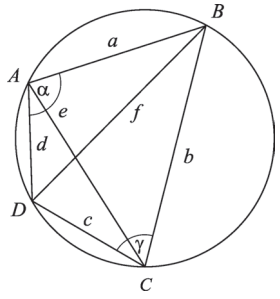
$\big(\cos(2 \cdot x - 120°) - \cos 90°\big) \cdot \big(\cos(2 \cdot x - 120°) - \cos 60°\big) = \frac{1}{2}$,

$\cos^2(2 \cdot x - 120°) - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x - 120°) - \frac{1}{2} = 0$. Oldjuk meg a kapott egyenletet!

IV

IV

3431.



3431. Alkalmazzuk a koszinusztételt kétszer az f átlóra felírva! $f^2 = a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos\alpha$; $f^2 = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos y$, ebből $a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos\alpha = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos y$, $a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos\alpha = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos(180° - \alpha)$, $a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos\alpha = c^2 + d^2 + 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos\alpha$, tehát $\cos\alpha = \dfrac{a^2 + d^2 - c^2 - d^2}{2 \cdot (a \cdot d + c \cdot d)}$.

3432. *a)* Mint tudjuk, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$, mert $\dfrac{\alpha}{2} < 90°$, másrészt $\cos\alpha =$ $= \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2 \cdot (a \cdot d + b \cdot c)}$. Így $1 - \cos\alpha = \ldots = \dfrac{(b + c + a - d)(b + c + d - a)}{2 \cdot (a \cdot d + b \cdot c)}$. Ezekből kaphatjuk, hogy $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{(b + c + d - a)(a + b + c - d)}{a \cdot d + b \cdot c}}$. *b)* Használjuk fel, hogy $\cos\dfrac{\alpha}{2} =$ $= \sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$, ha $\dfrac{\alpha}{2} < 90°$. Az *a)* feladathoz hasonlóan kaphatjuk, hogy $\cos\dfrac{\alpha}{2} =$ $= \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{(a + d + b - c)(a + d + c - b)}{a \cdot d + b \cdot c}}$. *c)* Vegyük figyelembe, hogy $a + b + c + d = 2 \cdot s$; $b + c + d - a = 2 \cdot (s - a)$; $a + c + d - b = 2 \cdot (s - b)$; $a + b + d - c = 2 \cdot (s - c)$; $a + b + c - d = 2 \cdot (s - d)$. Ha ezeket alkalmazzuk az *a)* és a *b)* megfelelő tételeire, akkor kapjuk, hogy $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s - a)(s - d)}{a \cdot d + b \cdot c}}$; $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s - b)(s - d)}{a \cdot d + b \cdot c}}$. Osszuk el egymással a kapott egyenletek megfelelő oldalait! Kapjuk, hogy $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s - a)(s - d)}{(s - b)(s - c)}}$.

3433. Legyen $AB = a$, $BC = b$; $CD = c$ és $DA = d$, $BAD\sphericalangle = \alpha$, $BCD\sphericalangle = \gamma$ az $ABCD$ húrnégyszögben. $t_{ABD} = \dfrac{a \cdot d \cdot \sin\alpha}{2}$; $t_{BCD} = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin\gamma}{2}$. Így $t = t_{ABD} + t_{BCD} =$ $= \dfrac{1}{2} \cdot (a \cdot d + b \cdot c) \cdot \sin\alpha$. Használjuk fel, hogy $\sin\alpha = 2 \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}$! Korábban láttuk, hogy $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s - a)(s - d)}{a \cdot d + b \cdot c}}$ és $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s - b)(s - c)}{a \cdot d + b \cdot c}}$, ezeket felhasználva kapjuk, hogy $t = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$.

3434. Legyen $AB = a, BC = b$; $CD = c$ és $DA = d$, $AC = e, BD = f$, $BAD\sphericalangle = \alpha$, $BCD\sphericalangle = \gamma$ az $ABCD$ húrnégyszögben. (1) $f^2 = a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos\alpha$, (2) $f^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\gamma$. Vegyük figyelembe, hogy $\cos\alpha = -\cos\gamma$. Ezután szorozzuk az (1) egyenletet $b \cdot c$-vel, majd a (2) egyenletet szorozzuk $a \cdot d$-vel, majd adjuk össze a kapott két új egyenletet! Némely egyenletrendezés után innen kaphatjuk, hogy: $f = \sqrt{\dfrac{(a \cdot c + b \cdot d)(a \cdot b + c \cdot d)}{a \cdot d + b \cdot c}}$. Hasonlóan kaphatjuk a másik átló hosszát.

3435. Legyen $AB = a, BC = b;\quad CD = c$ és $DA = d,\ AC = e, BD = f,\ BAD\sphericalangle = \alpha,\ BCD\sphericalangle = \gamma$ az $ABCD$ húrnégyszögben. Ekkor $f = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$. Miért? Az előző feladatban kaptuk, hogy $f = \sqrt{\frac{(a \cdot c + b \cdot d)(a \cdot b + c \cdot d)}{a \cdot d + b \cdot c}}$. Másrészt $\sin\alpha = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$. Használjuk még fel a korábban levezetett $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{a \cdot d + b \cdot c}}$ és $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{a \cdot d + b \cdot c}}$ képleteket. Ezenkívül tudjuk, hogy $t = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. Ezeket felhasználva kaphatjuk, hogy $t = \frac{\sqrt{(a \cdot b + c \cdot d)(a \cdot c + b \cdot d)(a \cdot d + b \cdot c)}}{4 \cdot t}$.

3436. Legyen $\sin\frac{x}{2} \neq 0$, ekkor szorozzuk meg az egyenlőséget ennek a kétszeresével. $2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot S_n = 2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \sin x + 2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \sin 2x + \ldots + 2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \sin nx$. Használjuk fel, hogy $2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = \cos(\beta - \alpha) - \cos(\alpha + \beta)$. Így $2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot S_n =$

$$= \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \ldots + \left(\cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot x\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot x\right)\right) =$$

$= \cos\frac{x}{2} - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot x\right)$, ebből $S_n = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot x\right)}{2 \cdot \sin\frac{x}{2}}$. Már ez is lehet végeredmény, de tovább is fejleszthetjük. Majd alkalmazzuk a koszinuszok különbségére ismert következő képletet: $\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$. Kapjuk, hogy

$S_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1) \cdot x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$. Másrészt gondoljuk meg, hogy ha $\sin\frac{x}{2} = 0$, akkor $S_n = 0$.

3437. Igazoljuk először a (*) összefüggést: (*) $4 \cdot \cos(kx) \cdot \sin^2\frac{x}{2} =$

$= -\cos((k-1) \cdot x) + 2 \cdot \cos(kx) - \cos((k+1) \cdot x)$, mégpedig úgy, hogy az összefüggés jobb oldalából indulunk ki és kétszer alkalmazzuk rá a koszinuszok különbségére vonatkozó azonosságot. Ezután alkalmazzuk a (*) azonosságot $k = 1$-től $k = n$-ig, majd ezeket adjuk össze. $4 \cdot \sin^2\frac{x}{2} \cdot (\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx) = -1 + \cos x + \cos nx - \cos((n+1) \cdot x)$. Ezt alakítsuk tovább! $= -2 \cdot \sin^2\frac{x}{2} + \cos nx - \cos((n+1) \cdot x) =$

$= -2 \cdot \sin^2\frac{x}{2} + \cos nx - \cos(nx + x) = -2 \cdot \sin^2\frac{x}{2} + \cos nx - \cos nx \cdot \cos x + \sin nx \cdot \sin x =$

$= -2 \cdot \sin^2\frac{x}{2} + \cos nx \cdot 2 \cdot \sin^2\frac{x}{2} + \sin nx \cdot 2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$. (Legyen először $\sin\frac{x}{2} \neq 0$.)

IV

Ebből kaphatjuk, hogy $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = -\frac{1}{2} + \cos nx + \frac{\sin nx \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{x}{2} \cdot \cos nx + \sin nx \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} \cdot x\right)}{\sin \frac{x}{2}}$. Ha van kedvünk, akkor mutassuk meg, hogy más alakú végeredmény is lehet, például:

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin nx \cdot \cos((n+1) \cdot x)}{\sin \frac{x}{2}}$. Legyen most $\sin \frac{x}{2} = 0$, ekkor gondoljuk meg, hogy a vizsgált összeg értéke 0.

IV

Néhány „gyakorlatibb” trigonometriai feladat

3438. *a)* London az 51°33′ északi szélességen (és 0° földrajzi hosszúságon) fekszik. *b)* London és ellenlábasának távolsága éppen a Föld átmérője: 12 756 km. *c)* $r \approx 4994{,}94$ km London távolsága a Föld forgástengelyétől. $\frac{r}{R} = \sin 51°33'$, ahol $R = 6378$ km a Föld sugara.

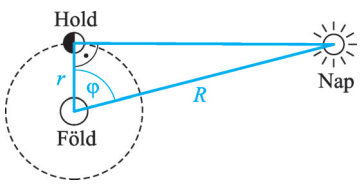
d) $v \approx 416{,}245 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. London sebessége a Föld tengelye körüli forgásban. $v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T}$, ahol $T = 24$ h.

3439. *a)* $\frac{R}{r} \approx 19$-szer távolabb van a Nap a Földtől, mint a Hold a Földtől, Arisztarkhosz szerint. $\frac{r}{R} = \cos\varphi$, ahol $\varphi = 87°$. *b)* $\frac{R}{r} \approx 390$-szer távolabb van a Nap a Földtől, mint a Hold a Földtől a modernebb mérés szerint. Itt $\varphi = 89°51'10''$.

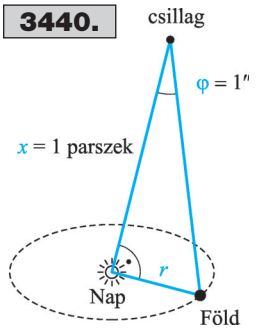
3440. *a)* $x \approx 3{,}094 \cdot 10^{13}$ km 1 parszek. $\frac{r}{x} = \text{tg}\varphi$, ahol r a Nap és a Föld távolsága, $\varphi = 1''$.

b) $\approx 9{,}467 \cdot 10^{12}$ km 1 fényév. *c)* $\approx 3{,}27$ fényév 1 parszek. *d)* $\approx 2{,}7$ parszek $\approx 8{,}83$ fényév.

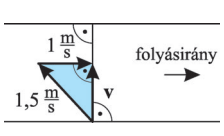
3439.



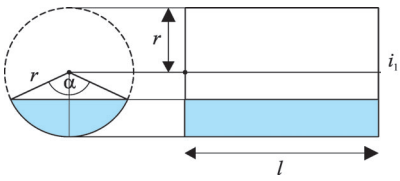
3440.



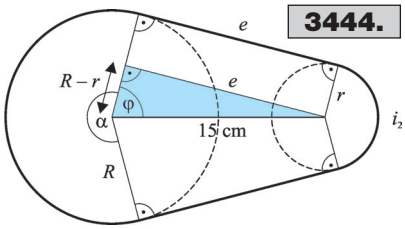
3441.



3443.



3444.



IV

3441. *a)* $\approx 1{,}12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a csónak eredő sebessége. *b)* $\alpha \approx 41{,}81°$ irányba evezzünk, enyhén szembe a folyó folyásirányával. *c)* $\approx 53{,}6$ s az átkelési időnk.

3442. *a)* $\varphi_1 = 180° + k \cdot 360°, k \in Z$ szögeknél lesz a keresztfej a legtávolabb a forgáscentrumtól, és 1,75 m a legtávolabbi távolság. *b)* $\varphi_2 = 0° + k \cdot 360°$ szögeknél van a keresztfej a legközelebb a forgáscentrumtól és 1,25 m a legközelebbi távolság.

c) $x = r \cdot \cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2\varphi} = 0{,}25 \cdot \cos\varphi + \sqrt{2{,}25 - 0{,}0625 \cdot \sin^2\varphi}$ (méter) a keresztfej távolsága a forgáscentrumtól φ szög függvényében.

3443. *a)* $\approx 4{,}305\ \text{m}^3 = 4305$ liter az olajtartály térfogata. *b)* ≈ 1041 liter olaj van a tartályban, ≈ 159 liter a hiány. $\alpha \approx 130{,}56°$, $t_{\text{szelet}} = t_{\text{cikk}} - t_{\text{háromszög}} = \frac{\alpha \cdot r^2 \cdot \pi}{360} - \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2} \approx 0{,}229745\ \text{m}^2$.

$V_{\text{olaj}} = t_{\text{szelet}} \cdot l \approx 1{,}040\,746\ \text{m}^3 \approx 1041$ liter.

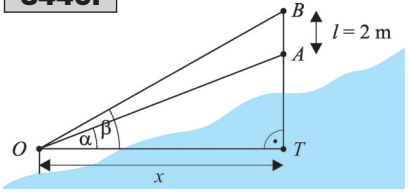
3444. *a)* $e \approx 14{,}82$ cm a két tárcsa közös érintőszakaszainak a hossza. *b)* $i_1 \approx 12{,}07$ cm a nagyobbik tárcsán a tapadási felület hossza. *c)* $i_2 \approx 3{,}4$ cm a kisebbik tárcsán a tapadási felület hossza. *d)* $l \approx 45{,}11$ cm a meghajtószíj hossza.

3445. *a)* $\alpha \approx 106{,}26°$ a keresett szög nagysága, $r = 5$ m. *b)* $A \approx 7{,}48\ \text{m}^2$ a dongaboltozat keresztmetszete. $A = T_{\text{cikk}} - t_{\text{cikk}} = \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot \pi}{360} - \frac{\alpha \cdot r^2 \cdot \pi}{360}$, ahol $R = b + r$. *c)* $V \approx 53{,}86\ \text{m}^3$ a dongaboltozat térfogata. *d)* $m \approx 118{,}5$ tonna a boltozat tömege. Híres dongaboltozatos templomok például a Santa Maria de Naranco templom Ovideo mellett, a St. Sernin templom Toulouseban és a La Madeleine templom (Vézelay). Egy korábbi feladatunkban említettük a lébényi Árpád-kori Szent Jakab templomot, ennek szintén dongaboltozata van, de ez nem az eredeti, mert a Bécs ellen vonuló törökök 1529-ben felgyújtották a templomot és beomlott az eredeti boltozat, 1683-ban másodszor is felgyújtották a törökök egy újabb Bécs elleni támadásnál.

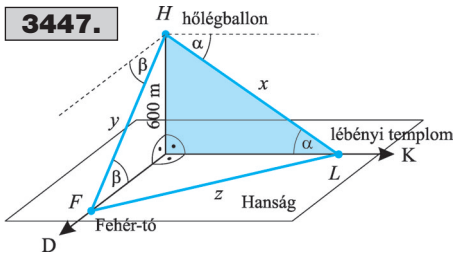
3446. ≈ 124 m a rúd és a teodolit vízszintes távolsága. $\frac{AT}{x} = \text{tg}\,\alpha$, $\frac{BT}{x} = \text{tg}\,\beta$, $l = BT - AT$.

3447. *a)* $x \approx 2{,}86$ km-re vagyunk a lébényi templomtól a hőlégballonnal. *b)* $y \approx 5{,}04$ km a hőlégballon és a Fehér-tó távolsága. *c)* $z \approx 5{,}73$ km-re van egymástól a tó és a templom.

3446.



3447.



IV

3448. *a)* $t_1 = \frac{1}{600} + \frac{k}{50}$ (másodperc), ahol $k \in \mathbf{Z}$, $t_2 = \frac{1}{120} + \frac{l}{50}$ (másodperc), ahol $l \in \mathbf{Z}$, időpontokban lesz a feszültség értéke a maximális feszültség felével egyenlő. $\frac{U_{max}}{2} = U_{max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$. *b)* $t'_1 = \frac{1}{600}$ s, $t'_2 = \frac{1}{120}$ s, $t'_3 = \frac{7}{600}$ s, $t'_4 = \frac{11}{600}$ időpontokban lesz a feszültség abszolútértéke egyenlő a maximális feszültség felével, az első $\frac{1}{50}$ s-ban. *c)* $\approx 66{,}67\%$-ban lesz nagyobb a feszültség abszolútértéke a maximális feszültség felénél. $\Delta t = t'_2 - t'_1$ és $\frac{2 \cdot \Delta t}{T} \cdot 100 \approx 66{,}67\%$, ahol $T = \frac{1}{50}$ s. Érdemes lerajzolnunk a szinuszfüggvény grafikonját.

3449. *a)* $t_1 = \frac{1}{400} + \frac{k}{50}$ (másodperc), ahol $k \in \mathbf{Z}$, $t_2 = \frac{3}{400} + \frac{l}{50}$ (másodperc), ahol $l \in \mathbf{Z}$, időpontokban lesz a feszültség értéke az effektív feszültséggel egyenlő.
$U_{eff} = U_{max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$, $U_{eff} = U_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$. *b)* $t'_1 = \frac{1}{400}$ s, $t'_2 = \frac{3}{400}$ s, $t'_3 = \frac{1}{80}$ s, $t'_4 = \frac{7}{400}$ s időpontokban lesz a feszültség abszolútértéke az effektív feszültséggel egyenlő az első $\frac{1}{50}$ s alatt.

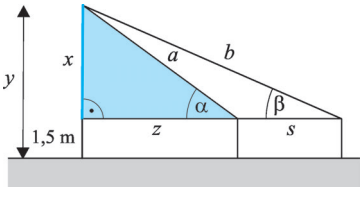
3450. $x \approx 55{,}6$ m. Alkalmazzuk a koszinusztételt!

3451. *a)* 1020 m az Aranyszarvas és a megfigyelő távolsága. *b)* 680 m a spanyol gálya és a megfigyelő távolsága. *c)* ≈ 350 méter az Aranyszarvas és a gálya távolsága. Alkalmazzuk a koszinusztételt! *d)* $\approx 11°9'$-es szögben látja Sir Francis Drake a spanyol hajó és a megfigyelő távolságát. Alkalmazzuk a szinusztételt!

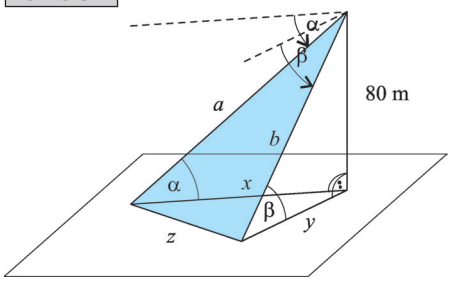
3452. $y \approx 61{,}4$ m magas a torony. Először számítsuk ki a β szöget a koszinusztétel segítségével. $a^2 = b^2 + s^2 - 2 \cdot b \cdot s \cdot \cos\beta$. Kapjuk, hogy $\beta \approx 23{,}78°$. Majd $\frac{x}{b} = \sin\beta$-ból kapjuk x-et. $y = x + 1{,}5$ m.

3453. *a)* $x \approx 2067$ m távolságra van az első mérésnél a hajó a torony aljától. $\frac{80}{x} = \operatorname{tg}\alpha$.
b) $y \approx 1340$ m távolságra van a második mérésnél a hajó a torony aljától. $\frac{80}{y} = \operatorname{tg}\beta$.

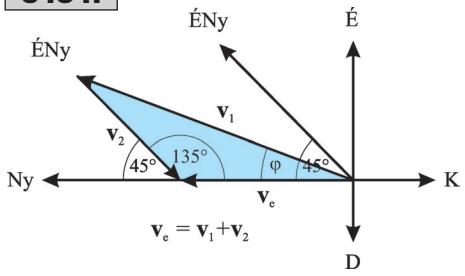
3452.



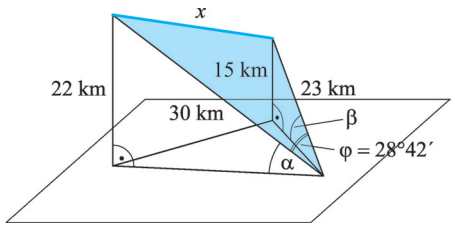
3453.



3454.



3455.



IV

c) $z \approx 813$ m utat tett meg a két mérés között a hajó. $a \approx 2068{,}6$ m és $b \approx 1342{,}4$ m, ezeket egy-egy megfelelő Pitagorasz-tétellel kaphatjuk. Majd alkalmazzuk a koszinusztételt a z távolságra felírva, az a, b és z oldalú háromszögben! *d)* $\approx 8{,}29 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a hajó sebessége.

3454. *a)* 42 perc 40 másodperc idő alatt érne a repülőgép az egyik repülőtértől a másikig. *b)* $\approx 110 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 396 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a repülőgép eredő sebessége a feladatbeli szél esetén. Írjuk fel a koszinusztételt a megfelelő sebességek alkotta háromszögre! $v_1^2 = v_2^2 + v_e^2 - 2 \cdot v_2 \cdot v_e \cdot \cos 135°$, ahol $v_1 = 125 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a repülőgép sebességének nagysága szélcsendben, $v_2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a szél sebességének a nagysága, v_e a repülőgép sebességének nagysága a megadott szél esetén. *c)* $\approx 48{,}5$ perc a repülési idő a megadott szél esetén. *d)* $\varphi \approx 6{,}5°$ szöggel kell oldalra kormányozni a repülőgépet kissé észak-nyugat felé. Alkalmazzuk a szinusztételt! $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin 135°}{\sin \varphi}$.

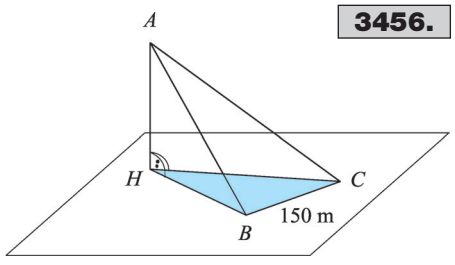
3455. *a)* $\alpha \approx 47°10'$ szöget zár be az észlelési irány a Föld felszínével. *b)* $\beta \approx 40°42'$ szöget zár be a szétesési irány a Föld felszínével. *c)* $x \approx 14{,}78$ km utat tett meg a két mérés között a tűzgömb. Alkalmazzuk a koszinusztételt! $x^2 = 30^2 + 25^2 - 2 \cdot 30 \cdot 23 \cdot \cos 28°42'$. *d)* $v \approx 422 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a tűzgömb átlagos sebessége.

3456. *a)* $BAC\sphericalangle = 57°3'$. *b)* $AB \approx 145{,}9$ m. Alkalmazzuk a szinusztételt! $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin ACB\sphericalangle}{\sin BAC\sphericalangle}$. *c)* $AH \approx 82{,}2$ m az antenna magassága. $\frac{AH}{AB} = \sin ABH\sphericalangle$.

3457. *a)* $\alpha = 37°29'$ és $\delta_1 = 30°30'$. *b)* $AB \approx 647{,}7$ m és $BD \approx 726{,}7$ m. $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ és $\frac{BD}{BC} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta_1}$. *c)* $AD \approx 96{,}9$ m.

$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos(\beta - \beta_1)$.

3456.



3458. *a)* $\alpha = 27°14'$ és $\delta_1 = 26°37'$. *b)* $AB \approx 722{,}6$ m és $BD \approx 666{,}5$ m. $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$, $\frac{BD}{BC} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta_1}$.

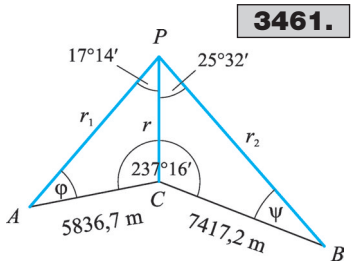
c) $AD \approx 767{,}4$ m.
$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos(\beta + \beta_1)$.

3459. *a)* $BC \approx 1050{,}6$ m, $\frac{BC}{AB} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_3}$. *b)* $CD \approx 1345{,}3$ m, $\frac{CD}{BC} = \frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_5}$. *c)* $CE \approx 1061{,}1$ m, $\frac{CE}{CD} = \frac{\sin\alpha_7}{\sin\alpha_8}$. *d)* $EF \approx 689{,}3$ m, $\frac{EF}{CE} = \frac{\sin\alpha_{10}}{\sin\alpha_{12}}$. *e)* $FG \approx 602{,}6$ m, $\frac{FG}{EF} = \frac{\sin\alpha_{14}}{\sin\alpha_{15}}$.

IV

3460. *a)* $\varphi + \psi = 99°39'$. *b)* $\varphi \approx 25°48'$. $\frac{r}{a} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$ és $\frac{r}{b} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta}$, ezekből $\frac{a \cdot \sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{b \cdot \sin\psi}{\sin\beta}$. S innen $2{,}2066 \cdot \sin\varphi \approx \sin(99°39' - \varphi)$. Majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt az egyenlet jobb oldalára. Ezután osszuk $\cos\varphi$-vel az egyenlet mindkét oldalát. Kapjuk, hogy $\operatorname{tg}\varphi \approx 0{,}4835$. *c)* $r \approx 382{,}17$ m. *d)* $r_1 \approx 835{,}57$ m, $\frac{r_1}{a} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha}$. *e)* $r_2 \approx 140{,}01$ m, $\frac{r_2}{b} = \frac{\sin\gamma_2}{\sin\beta}$.

3461.



3461. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.
a) $PAC\sphericalangle + PBC\sphericalangle = \varphi + \psi = 79°58'$.
b) $PAC\sphericalangle = \varphi = 36°44'$. *c)* $PC = r \approx 11783$ m. *d)* $PA = r_1 \approx$ $\approx 15931{,}7$ m. *e)* $PB = r_2 \approx 16039{,}7$ m.

V. Koordinátageometria

Szakaszt adott arányban osztó pont, súlypont koordinátái

3462. *a)* $x_f=\frac{6+12}{2}=9,\ y_f=\frac{6+2}{2}=4,\ F(9;4)$; *b)* $\left(7;\frac{11}{2}\right)$; *c)* $\left(-\frac{23}{12};\frac{73}{24}\right)$; *d)* $\left(\frac{3}{2\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; *e)* $\left(\frac{a}{2};\frac{c}{2}\right)$.

3463. $\frac{b_1-4}{2}=-1\Rightarrow b_1=2,\ \frac{b_2+6}{2}=-1\Rightarrow b_2=-8,\ B(2;-8)$.

3464. $A_1\left(2;\frac{7}{2}\right),\ B_1\left(\frac{5}{2};\frac{13}{2}\right),\ C_1\left(\frac{3}{2};4\right).\ \overrightarrow{BA}(1;6)\quad \overrightarrow{A_1B_1}\left(\frac{1}{2};3\right)\Rightarrow \overrightarrow{BA}=2\cdot\overrightarrow{A_1B_1}\Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{BA}\parallel\overrightarrow{A_1B_1}$. Hasonlóan $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1},\ \overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1A_1}$.

3465. *a)*
$$\left.\begin{aligned}\frac{a_1+b_1}{2}&=2\\ \frac{b_1+c_1}{2}&=-2\\ \frac{c_1+a_1}{2}&=4\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}a_1+b_1&=4\\ b_1+c_1&=-4\\ c_1+a_1&=8\\ \hline a_1+b_1+c_1&=4\end{aligned}\right\}+\ ;\quad \left.\begin{aligned}\frac{a_2+b_2}{2}&=3\\ \frac{b_2+c_2}{2}&=1\\ \frac{c_2+a_2}{2}&=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}a_2&=5,\\ b_2&=1,\\ c_2&=1.\end{aligned}$$
Innen: $a_1=8, b_1=-4, c_1=0$. $A(8;5),\ B(-4;1),\ C(0;1)$.
b) $(-1;6),\ (7;12),\ (3;-2)$.

3466. $O_1(10;10)$. Ha $O_2(x_2;y_2)$, akkor $\frac{x_2+0}{2}=1,\ \frac{y_2+0}{2}=7\Rightarrow O_2(2;14)$,
$b_1=\frac{10+2}{2}=6,\ b_2=\frac{10+14}{2}=12\Rightarrow B(6;12)$. OB felezőpontja: $F_1(3;6)$, AC felezőpontja $F_2(3;6)$. $\overrightarrow{OB}(6;12),\ \overrightarrow{AC}(4;-2),\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Az átlók merőlegesen felezik egymást.

3467. $M(4;3)\ \overrightarrow{OK}(7;0)$, $+90°$-kal elforgatva $\overrightarrow{OK_1}(0;7)$. $\overrightarrow{OL}(3;-2)$, $-90°$-kal elforgatva $\overrightarrow{OL_1}(-2;-3)$. $\overrightarrow{K_1L_1}(-2;-10),\ \overrightarrow{OM}(5;-1),\ \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{K_1L_1}=0\Rightarrow\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{K_1L_1}$.
$\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{26}$, $\left|\overrightarrow{K_1L_1}\right|=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$, így $\overrightarrow{K_1L_1}=2\cdot\overrightarrow{OM}$.

3468. $A_1\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right),\ \overrightarrow{AA_1}\left(\frac{9}{2};-\frac{3}{2}\right),\ \overrightarrow{BB_1}\left(-6;-\frac{15}{2}\right),\ \overrightarrow{CC_1}\left(\frac{3}{2};9\right)$.

3469. P-n túl meghosszabbítva $P_1(-6;\,4)$, O-n túl meghosszabítva $P_2(3;\,-2)$. Ha $P(a;\,b)$, akkor $P_1(2a;\,2b)$, $P_2(-a;\,-b)$.

3470. $B_1(6;\,12)$, $C_1(16;\,-4)$.

3471. *a)* $AP:PB=2:5 \Rightarrow p_1=\dfrac{5\cdot 3+2\cdot 10}{7}=5,\ p_2=\dfrac{5(-2)+2\cdot 12}{7}=2. \Rightarrow P(5;\,2).$

$AQ:QB=5:2 \Rightarrow Q(8;.\ 8).$ *b)* $\left(\dfrac{32}{7};\,\dfrac{9}{7}\right),\left(\dfrac{31}{7};\,\dfrac{12}{7}\right).$

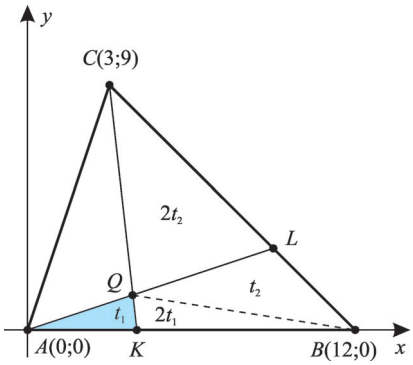
3472. *a)* (3; 2), (4; 6), (5; 10); *b)* $\left(\dfrac{13}{3};\,\dfrac{8}{3}\right),\ \left(\dfrac{17}{3};\,\dfrac{1}{3}\right).$

3473. $\overrightarrow{AB}(2;\,-4),\ \overrightarrow{AB_1}=\dfrac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AB}(3;\,-6),\ \overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB_1},\ \overrightarrow{OB_1}(7;\,-3),\ B_1(7;\,-3).$

Hasonlóan: $A_1(3;\,5)$.

3474. $F_1(2;\,4),\ F_2\left(\dfrac{11}{2};\,0\right),\ \overrightarrow{F_1F_2}\left(\dfrac{7}{2};\,-4\right).$

3475.



3475. Egyenlő magasságú háromszögek területének aránya megegyezik a közös magassághoz tartozó oldalak arányával. Az ABC háromszög területe legyen t.

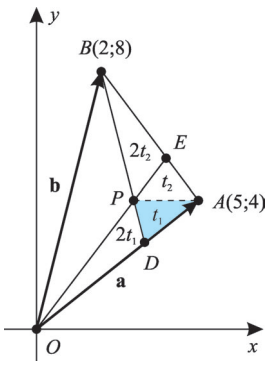
$t_{ABL}=\dfrac{1}{3}t,\ t_{BCK}=\dfrac{2}{3}t.$

$$\left.\begin{aligned} 3t_1+t_2&=\frac{t}{3}\\ 2t_1+3t_2&=\frac{2t}{3}\end{aligned}\right\} \Rightarrow t_1=\frac{t}{21},\ t_2=\frac{4t}{21},\ t_{ABQ}=3t_1=\frac{t}{7},$$

$t_{KBQ}=\dfrac{2t}{21},\ AQ:QL=t_{ABQ}:t_{BLQ}=\dfrac{t}{7}:\dfrac{4t}{21}=3:4,$

$CQ:QK=t_{BCQ}:t_{KBQ}=\dfrac{4t}{7}:\dfrac{2t}{21}=12:2=6:1.$

3476.



3476. Legyen az OAB háromszög területe t.

$t_{AEO}=\dfrac{1}{3}t,\ t_{ABD}=\dfrac{1}{3}t.$

$$\left.\begin{aligned} 3t_1+t_2&=\frac{t}{3}\\ t_1+3t_2&=\frac{t}{3}\end{aligned}\right\} \Rightarrow t_1=t_2=\frac{t}{12}.\ t_{OAP}:t_{AEP}=$$

$=3t_1:t_1=3:1.\ t_{ABQ}=\dfrac{2t}{12},\ OP:PE=3:1,$

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OE}.\ \overrightarrow{OE}=\dfrac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3},\quad \overrightarrow{OP}=\dfrac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{4},$

$\overrightarrow{OP}(3;\,4),\ \left|\overrightarrow{OP}\right|=5.$

3477. *a)* $S(4;\,2)$; *b)* $S\left(\frac{4}{3};\,0\right)$, *c)* $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{3};\,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, *d)* $\left(\frac{11a+b}{18};\,\frac{11a-b}{18}\right)$.

3478. $S_{ABC}(1;\,2)$, $S_{DEF}(7;\,7)$, $\overrightarrow{S_1S_2}(6;\,5)$. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}(18;\,15)$, $3\overrightarrow{S_1S_2}(18;\,15)$.
$\mathbf{s}_1=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$, $\mathbf{s}_2=\frac{\mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{f}}{3}$, $\overrightarrow{S_1S_2}=\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1$. $3\overrightarrow{S_1S_2}=\mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{f}-(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$,
$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CP}=\mathbf{d}-\mathbf{a}+\mathbf{e}-\mathbf{b}+\mathbf{f}-\mathbf{c}$.

3479. Az ABC háromszög súlypontja $S_1\left(\frac{14}{3};\,5;\,0\right)\Rightarrow S\left(5;\,\frac{19}{4};\,4\right)$. A BCD háromszög súlypontja $S_2\left(\frac{19}{3};\,\frac{16}{3};\,\frac{16}{3}\right)\Rightarrow S'\left(5;\,\frac{19}{4};\,4\right)$; $S=S'$.

Általánosan: $\mathbf{s}_1=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$, $\mathbf{s}=\frac{3\mathbf{s}_1+\mathbf{d}}{4}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$.

3480. $C(5;\,-15)$.

3481. $H_1(4;\,0)$, $H_1(8;\,0)$, $K_1(11;\,2)$, $K_2(10;\,4)$, $L_1(5;\,8)$, $L_2(7;\,7)$, $M_1(1;\,3)$, $M_2(2;\,6)$.
M_1K_1 harmadolópontjai: $\left(\frac{13}{3};\,\frac{8}{3}\right)$, $\left(\frac{23}{3};\,\frac{7}{3}\right)$; M_2K_2 harmadolópontjai: $\left(\frac{14}{3};\,\frac{16}{3}\right)$, $\left(\frac{22}{3};\,\frac{14}{3}\right)$;
H_1L_1 harmadolópontjai: $\left(\frac{13}{3};\,\frac{8}{3}\right)$, $\left(\frac{14}{3};\,\frac{16}{3}\right)$; H_2L_2 harmadolópontjai: $\left(\frac{23}{3};\,\frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{22}{3};\,\frac{14}{3}\right)$.

3482. $\overrightarrow{AD}(1;\,3)$, $\overrightarrow{BC}(1;\,3)\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow ABCD$ paralelogramma. $H\left(\frac{26}{3};\,2\right)$. $EF\parallel BC$, EG az ABH háromszög középvonala, ezért $EG=\frac{1}{2}BH=\frac{BC}{3}$, így $FG=\frac{2}{3}BC\Rightarrow BHFG$ paralelogramma, ezért M a BF és GH felezőpontja. Ebből következik, hogy M az AH negyedelőpontja. $M\left(\frac{13}{2};\,\frac{3}{2}\right)$.

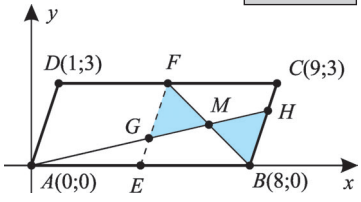
3483. *a)* $\overrightarrow{AB}(3;\,4)$, $\overrightarrow{DC}(3;\,4)\Rightarrow AB\#DC$; *b)* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\left(\frac{1}{2};\,4\right)$; *c)* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}(-6;\,-1)$.

3484. *a)* Az $APQR$ paralelogramma átlói felezi egymást. $A(-2;\,2)$, $B(2;\,-2)$, $C(4;\,4)$.
b) $(5;\,-5)$, $(7;\,-3)$, $(3;\,9)$; *c)* $(8;\,3)$, $(4;\,7)$, $(-2;\,1)$.

3485. $C(-7;\,15)$, $D(2;\,9)$.

3486. A rombusz középpontja $K(1;\,9)$, $\overrightarrow{KD}(4;\,2)$. $\overrightarrow{KA}$ a $\overrightarrow{KD}$ $+90°$-os elforgatottjának kétszerese: $\overrightarrow{KA}(-4;\,8)$. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{OA}(-3;\,17)$.
$A(-3;\,17)$, $C(5;\,1)$.

3482.



3487. $K(1;\ 0)$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}(5;\,4)$, $+90°$-kal elforgatva $\overrightarrow{KB}(-4;\,5)$, $B(-3;\,5)$, $D(5;\,-5)$.

3488. $|AB|=5$, $|AC|=10$, $|BC|=5\sqrt{5}$. Az f_α messe a BC oldalt P-ben, f_β az AC oldalt Q-ban, f_γ az AB oldalt R-ben.

$BP : PC = 5 : 10 = 1 : 2 \Rightarrow P\left(\frac{10}{3}; \frac{17}{3}\right)$, $AQ : QC = 5 : 5\sqrt{5} = 1 : \sqrt{5}$.

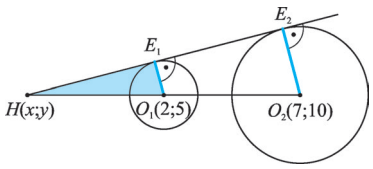
$Q = \left(6 - 2\sqrt{5}; \frac{3\sqrt{5} - 1}{2}\right)$, $AR : RB = 10 : 5\sqrt{5} = 2 : \sqrt{5}$, $R\left(6\sqrt{5} - 8; 8\sqrt{5} - 15\right)$.

3489. Legyen $P(p; 0)$ és $AB : BP = m : n = \lambda$, $\frac{1 \cdot 6 + \lambda \cdot 0}{1 + \lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = 5$, tehát $AB : BP = 5 : 1$, $\frac{5p + 2}{6} = 8 \Rightarrow p = \frac{46}{5}$. $P\left(\frac{46}{5}; 0\right)$. Hasonlóan: $R\left(0; \frac{23}{3}\right)$.

V

3490. $|AB| = 10$. A magasság talppontja T. A befogótétel szerint $AO^2 = AT \cdot AB$. $6^2 = 10 \cdot AT$, $AT = \frac{18}{5}$, $BT = \frac{32}{5}$, $AT : BT = \frac{18}{5} : \frac{32}{5} = 9 : 16$, $T = \left(\frac{96}{25}; \frac{72}{25}\right)$.

3491.



3491. $E_1HO_1\triangle \sim E_2HO_2\triangle$,

$HO_1 : HO_2 = 3 : 7 \Rightarrow 7 \cdot \overrightarrow{HO_1} = 3 \cdot \overrightarrow{HO_2}$,

$\overrightarrow{HO_1}(2 - x; 5 - y)$, $\overrightarrow{HO_2}(7 - x; 10 - y)$.

$7(2 - x) = 3(7 - x) \Rightarrow x = \frac{7}{4}$,

$7(5 - y) = 3(10 - y) \Rightarrow y = \frac{5}{4}$, $H\left(-\frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

3492. AB, BC, CD, DA felezőpontjai rendre: $F_1\left(2; \frac{1}{2}\right)$, $F_2\left(\frac{13}{2}; \frac{15}{2}\right)$, $F_3\left(\frac{5}{2}; 16\right)$, $F_4(-2; 9)$, F_1F_3, illetve F_2F_4 felezőpontjai: $K\left(\frac{9}{4}; \frac{33}{4}\right)$, $L\left(\frac{9}{4}; \frac{33}{4}\right)$. $F_1F_2F_3F_4$ paralelogramma.

3493. Legyen az S súlypont az origó, a súlyponton átmenő egyenes az x tengely. $S(0; 0)$, $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$. A feltétel szerint $a_2 + b_2 + c_2 = 0$.
Ebből $a_2 + b_2 = -c_2$, $|a_2 + b_2| = |-c_2|$.

3494. Az ABC háromszög AB oldalát a B csúcs felé hosszabbítjuk meg, és így tovább. A csúcspontokhoz vezető vektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$, legyen $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$. A keletkezett háromszög csúcsaihoz vezető vektorok $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$.

$$\left.\begin{array}{ll} \overrightarrow{AB_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}); & \mathbf{b}_1 = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ \overrightarrow{BC_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC} = \lambda(\mathbf{c} - \mathbf{b}); & \mathbf{c}_1 = \mathbf{b} + \lambda(\mathbf{c} - \mathbf{b}) \\ \overrightarrow{CA_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{CA} = \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{c}); & \mathbf{a}_1 = \mathbf{c} + \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \end{array}\right\} +$$

$\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$; $\frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1}{3} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} \Rightarrow \mathbf{s}_1 = \mathbf{s} \Rightarrow S = S_1$.

3495. Az olyan háromszögeket kell megkeresni, amelyeknél a súlypont koordinátái különböző eseteket jelölnek az origótól való távolságot tekintve. $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; -1)$, $S(0; 0)$, $|OS| = 0$; $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 0)$, $S\left(0; \frac{1}{3}\right)$, $|OS| = \frac{1}{3}$; $A(-1; -1)$,

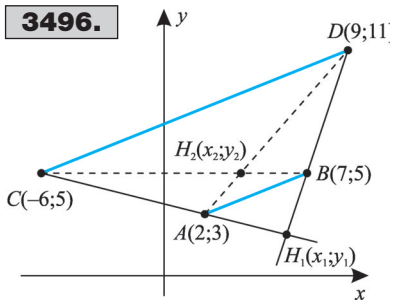
$B(0;\,1),\ C(1;\,0),\ S\left(0;\,\frac{2}{3}\right),\ |OS|=\frac{2}{3}$; $A(0;\,0),\ B(0;\,1),\ C(1;\,0),\ S\left(\frac{1}{3};\,\frac{1}{3}\right),\ |OS|=\frac{\sqrt{2}}{3}$;

$A(0;\,0),\ B(0;\,1),\ C(1;\,1),\ S\left(\frac{1}{3};\,\frac{2}{3}\right),\ |OS|=\frac{\sqrt{5}}{3}$; $A(1;\,0),\ B(1;\,1),\ C(0;\,1),\ S\left(\frac{2}{3};\,\frac{2}{3}\right)$,

$|OS|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ha S koordinátáinak előjelét változtatjuk, a távolság változatlan marad, így értéke a felsorolt 6 lehetőség valamelyike lehet.

3496. $\overrightarrow{AB}(5;\,2)$, $\overrightarrow{CD}(15;\,6)$,
$3\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$. $H_1B:H_1D=AB:CD=1:3$,
$3\overrightarrow{H_1B}=\overrightarrow{H_1D}$. $\overrightarrow{H_1B}(7-x_1;\,5-y_1)$,
$\overrightarrow{H_1D}(9-x_1;\,11-y_1)$, $H_1(6;\,2)$.
$ABH_2\triangle\sim CDH_2\triangle$, $AH_2:H_2D=AB:CD=1:3$.
$3\overrightarrow{AH_2}=\overrightarrow{H_2D}$, $\overrightarrow{AH_2}(x_2-2;\,y_2-3)$,
$\overrightarrow{H_2D}(9-x_2;\,11-y_2)\Rightarrow H_2\left(\frac{15}{4};\,5\right)$.

3496.



3497. $\overrightarrow{AB}(3;\,-1)$, $3\cdot\overrightarrow{AB}(9;\,-3)$ $+90°$-os elforgatottja $\overrightarrow{AD_1}(3;\,9)$, $\overrightarrow{BC_1}(3;\,9)$, $\mathbf{d}_1=\mathbf{a}+\overrightarrow{AD}$, $\mathbf{c}=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC_1}\Rightarrow D_1\left(\frac{9}{2};\,10\right)$, $C_1\left(\frac{15}{2};\,9\right)$, $3\cdot\overrightarrow{AB}$ $-90°$-os elforgatottja: $\overrightarrow{AD_2}=\overrightarrow{BC_2}(-3;\,-9)$, innen $D_2\left(-\frac{3}{2};\,-8\right)$, $C_2\left(\frac{3}{2};\,-9\right)$, $K_1\left(\frac{9}{2};\,5\right)$, $K_2\left(\frac{3}{2};\,-4\right)$.

Megoldható a feladat úgy is, ha $BC=\frac{AB}{3}$.

Két pont távolsága

3498. $|OP_1|=5$, $OP_2=5$, $OP_3=13$, $OP_4=\sqrt{58}$, $OP_5=3$,
$OP_6=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $OP_7=3$, $OP_8=\sqrt{2a^2}=|a|\cdot\sqrt{2}$, $OP_9=\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$.

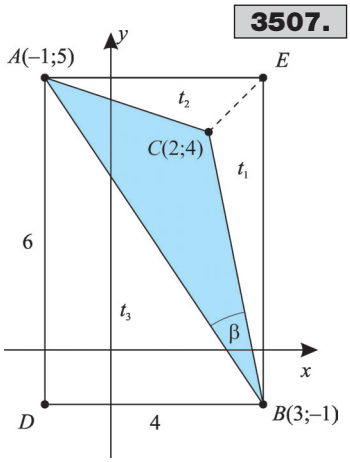
3499. $|\mathbf{a}|=5$; $|\mathbf{b}|=\sqrt{29}$; $|\mathbf{c}|=\sqrt{109}$; $|\mathbf{d}|=\sqrt{85}$.

3500. *a)* $d=5$; *b)* $d=\sqrt{65}$; *c)* $\sqrt{65}$; *d)* $\sqrt{53}$; *e)* $\sqrt{74}$; *f)* $\sqrt{\frac{370}{4}}$; *g)* 1;
h) $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

3501. *a)* $c=5$, $b=10$, $a=5\sqrt{5}$, $k=5+10+5\sqrt{5}=15+5\sqrt{5}=5\left(3+\sqrt{5}\right)$;
b) $10\sqrt{2}+13+\sqrt{29}$; *c)* $4\sqrt{5}+12+4\sqrt{2}$; *d)* $|a|+2|b|+\sqrt{a^2+4b^2}$.

V

3507.



3502. *a)* $|CA| = |CB| = \sqrt{10}$, $|AB| = 4\sqrt{2}$, $F_{AB}(5;\,0)$, $m_c = \sqrt{2}$, $t = \dfrac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 4$ területegység.

b) 6 területegység.

3503. $C(c;\,0)$, $\sqrt{(c-2)^2+1} = \sqrt{(c-6)^2+25} \Rightarrow c = 7$, $C(7;\,0)$, $|AB| = 4\sqrt{2}$, $F_{AB}(4;\,3)$, $m_c = 3\sqrt{2}$, $t = 12$ területegység.

3504. *a)* $\overrightarrow{CA}(2;\,-6)$, $\overrightarrow{CB}(9;\,3)$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$, $|AB| = \sqrt{130}$, $r = \dfrac{AB}{2}$, $t = \dfrac{65\pi}{2}$ területegység.

b) $t = \dfrac{629\pi}{4}$ területegység.

3505. AB felezőpontja: $K(-1;\,2)$, $\overrightarrow{KA}(3;\,-1)$ $+90°$-os elforgatottja $\overrightarrow{KC_1}(1;\,3) \Rightarrow C_1(0;\,5)$, $\overrightarrow{KA}$ $+90°$-os elforgatottja $(-1;\,-3)$, $C_2(-2;\,-1)$.

3506. Legyen $A(12;\,0)$, $B(0;\,5)$, $K_{AB}\left(6;\,\dfrac{5}{2}\right)$, $S\left(4;\,\dfrac{5}{3}\right)$, $|SK| = \sqrt{4+\dfrac{25}{36}} = \dfrac{13}{6}$.

3507. $t_{ADBE} = 6\cdot 4 = 24$, $t_1 = \dfrac{6\cdot 1}{2} = 3$, $t_2 = \dfrac{4\cdot 1}{2} = 2$, $t_3 = \dfrac{6\cdot 4}{2} = 12$.

$T_{ABC} = 24 - (12 + 3 + 2) = 7$ területegység. $\overrightarrow{CA}(-3;\,1)$, $\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{10}$, $\overrightarrow{CB}(1;\,-5)$, $\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{26}$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = -8 = \sqrt{10}\cdot\sqrt{26}\cdot\cos\gamma \Rightarrow \gamma = 119{,}7°$, $\beta = 22{,}3°$, $\alpha = 38°$.

3508. *a)* $T = 159$ területegység.

$k = \sqrt{305} + \sqrt{386} + \sqrt{26} + \sqrt{157} \approx 57{,}74$ egység.

b) $2\sqrt{2}$ területegység.

3509. *a)* $\overrightarrow{AD}(3;\,1)$, $\overrightarrow{BC}(3;\,1) \Rightarrow AD \nparallel BC$ $\overrightarrow{AB}(1;\,-2)$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 1 \neq 0$, tehát paralelogramma. *b)* $\overrightarrow{AB}(5;\,0)$, $\overrightarrow{DC}(3;\,0) \Rightarrow AB \parallel DC$, $|AD| = |BC| = \sqrt{10}$, tehát szimmetrikus trapéz.

c) $\overrightarrow{AC}(-2;\,-4)$, $\overrightarrow{BD}(4;\,-2)$, $|AC| = |BD| = 2\sqrt{5}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$, tehát négyzet. *d)* Négyzet. *e)* Négyzet.

3510. $C(x;y)$, $|AB| = 5$, $|AC| = |BC| = 5$, $|AC|^2 = |BC|^2 = 25$,

$$\left.\begin{array}{r}(x-4)^2+(y-3)^2=25\\ (x-8)^2+y^2=25\end{array}\right\} \Rightarrow\quad C_1\left(\frac{12+3\sqrt{3}}{2};\,\frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right),\ C_2\left(\frac{12-3\sqrt{3}}{2};\,\frac{3-4\sqrt{3}}{2}\right).$$

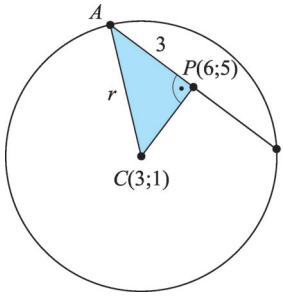
3511. Mivel a kör érinti az x tengelyt, $r = 13$. Ha $P(x;y)$ rajta van a körön, $x^2 + (y+13)^2 = 169$, $P_1(11;\,-6)$ $11^2 + (-6+13)^2 = 121 + 49 \neq 169$, ezért P_1 nem illeszkedik a körre. P_2 illeszkedik a körre.

3512. *a)* $CP^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, $r^2 = CP^2 + 3^2 = 34$, $r = \sqrt{34}$; *b)* $r = 3\sqrt{3}$.

3513. *a)* $P(x;y)$, $AP = BP \Rightarrow AP^2 = BP^2$, $(x-4)^2 + (y-2)^2 = (x+3)^2 + (y-3)^2$, $7x - y = 1$; *b)* $x + 7y = 7$.

3514. A szabályos hatszög középpontja és két szomszédos csúcsa szabályos háromszöget alkot. $\overrightarrow{AB}\left(3;\ 3\sqrt{3}\right)$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\alpha=60°$, $AB=6$. Ezért $K_1(2+6;0)$, $K_1(8;0)$, $K_2\left(5-6;\ 3\sqrt{3}\right)$, $K_2\left(-1;\ 3\sqrt{3}\right)$. A további csúcsok: $\left(11;\ 3\sqrt{3}\right)$ $(14;0)$, $\left(11;\ -3\sqrt{3}\right)$, $\left(5;\ -3\sqrt{3}\right)$, illetve $\left(2;\ 6\sqrt{3}\right)$, $\left(-4;\ 6\sqrt{3}\right)$, $\left(-7;\ 3\sqrt{3}\right)$, $(-4;0)$.

3512.



3515. $PO=PA\ \Rightarrow\ PO^2=PA^2$, $P(x;0)$, $x^2=(x-9)^2+3^2\ \Rightarrow$ $\Rightarrow x=5$, $P(5;0)$.

3516. $P(x;0)$, $AP=BP\Rightarrow AP^2=BP^2$, $(x-2)^2+1^2=(x-6)^2+5^2\Rightarrow x=7$, $P(7;0)$.

3517. $Q(0;y)$, $PQ=15\Rightarrow 5^2+(y+9)^2=225\Rightarrow Q_1\left(0;\ -9+10\sqrt{2}\right)$, $Q_2\left(0;\ -9-10\sqrt{2}\right)$.

3518. Az érintés miatt a kör középpontja $K(2;r)$, ha a sugara r. Ekkor $KA=r$, $(2+4)^2+(r-2)^2=r^2\Rightarrow r=10$, $K(2;10)$.

3519. Mivel $P(4;2)$ az első negyedben van, a kör középpontja $K(r;r)$. $PK=r$, $(r-4)^2+(r-2)^2=r^2\Rightarrow r_1=10$, $r_2=2$, $K_1(10;10)$, $K(2;2)$.

3520. Legyen $P(x;y)$, olyan pont, amelyre $AP\perp BP$. $\overrightarrow{AP}(x+4;\ y-2)$, $\overrightarrow{BP}(x-8;\ y+6)$, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x+4)(x-8)+(y-2)(y+6)=0\ \Rightarrow\ x^2+y^2-4x+4y-12=0$. Ha $y=0$, akkor $P_1\left(2+4\sqrt{3};\ 0\right)$, $P_2\left(2-4\sqrt{3};\ 0\right)$. Ha $x=0$, akkor $Q_1\left(0;\ -2+4\sqrt{3}\right)$, $Q_2\left(0;\ -2-4\sqrt{3}\right)$.

3521. $P(x;0)$ $AP\perp BP$. $\overrightarrow{AP}(x+1;\ -3)$, $\overrightarrow{BP}(x-7;\ -3)$, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x+1)(x-7)+9=0$. $P_1\left(3+\sqrt{7};\ 0\right)$, $P_2\left(3-\sqrt{7};\ 0\right)$.

3522. $P(x;0)$, $\overrightarrow{PA}(x-6;\ -a)$, $\overrightarrow{PB}(x+2;\ -1)$, $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x-6)(x+2)+a=0\Rightarrow$ $\Rightarrow x^2-4x+a-12=0$. Egy megoldás van, ha a diszkrimináns 0. $D=16-4(a-12)=0$, $a=16$. $A(6;16)$, $P(2;0)$.

3523. $B(0;y)$, $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=0$. $\overrightarrow{AB}(6;\ y)$, $\overrightarrow{CB}(-1;\ y+1)$, $-6+y(y+1)=0$. $B_1(0;2)$, $B_2(0;-3)$. A középpontos szimmetriát felhasználva $D_1(-5;-3)$, $D_2(-5;2)$.

3524. $B(0;y)$, $\overrightarrow{AB}(-2;\ y+2)$, $\overrightarrow{CB}(-4;\ y-6)$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=8+(y+2)(y-6)=0\ \Rightarrow$ $\Rightarrow B_1\left(0;\ 2+2\sqrt{2}\right)$, $B_2\left(0;\ 2-2\sqrt{2}\right)$. $D_1\left(6;\ 2-2\sqrt{2}\right)$, $D_2\left(6;\ 2+2\sqrt{2}\right)$.

$|AB_1|=2\sqrt{7+4\sqrt{2}}$, $|B_1C|=2\sqrt{10-4\sqrt{2}}$,

$T_1=4\sqrt{7+4\sqrt{2}\left(10-4\sqrt{2}\right)}=4\sqrt{\left(6+\sqrt{2}\right)^2}=4\left(6+\sqrt{2}\right)$,

$|AB_2|=2\sqrt{7-4\sqrt{2}}$, $|B_2C|=2\sqrt{10+4\sqrt{2}}$, $T_2=4\left(6-\sqrt{2}\right)$.

3525. 4 megoldás van, aszerint, hogy az AB oldal a hosszabb, vagy a rövidebb. Ha $BC=\frac{1}{3}AB$, $\overrightarrow{AB}(9;12)$, $\overrightarrow{BC_1}(-4;3)$, $\overrightarrow{BC_2}(4;-3)$; $\mathbf{c}_1=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC_1}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC_2}$; $C_1(3;19)$,

$C_2(11;13)$. K az AC felezőpontja: $K_1\left(\frac{1}{2};\frac{23}{2}\right)$, $K_2\left(\frac{9}{2};\frac{17}{2}\right)$. Ha $\overrightarrow{BC}=3\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC_3}(-36;27)$, $C_3(-29;43)$, $\overrightarrow{BC_4}(36;-27)$, $C_4(43;-11)$. Így $K_3\left(-\frac{31}{2};\frac{47}{2}\right)$, $K_4\left(\frac{41}{2};-\frac{7}{2}\right)$.

3526. $|AB|=\sqrt{10}$, $|BC|=5$. Legyen $D(x;y)$.

$$\left.\begin{array}{l} AD=AB\Rightarrow AD^2=AB^2\Rightarrow (x-8)^2+(y-5)^2=10 \\ CD=BC\Rightarrow CD^2=BC^2\Rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=25 \end{array}\right\}\Rightarrow D(7;2).$$

$AC=\sqrt{45}$, $BD=\sqrt{20}$, $T=15$ területegység.

V

3527. $\overrightarrow{AC}(9;9)$, $|AC|=9\sqrt{2}$, $T=27=\frac{9\sqrt{2}\cdot BD}{2}\Rightarrow BD=3\sqrt{2}$.

Az AC felezőpontja $F\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{FD}$, illetve $\overrightarrow{FB}$ az $\frac{1}{3}$ $\overrightarrow{FD}$, 90°-os elforgatottja.

$\overrightarrow{FC}\left(\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right)$, $\overrightarrow{FD}\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, $\overrightarrow{FB}\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

$\mathbf{d}=\mathbf{f}+\overrightarrow{FD}\Rightarrow D(-1;1)$

$\mathbf{b}=\mathbf{f}+\overrightarrow{FB}\Rightarrow B(2;-2)$.

3528. A rombusz átlói felezik a rombusz szögeit, tehát az ABC háromszög szabályos. $B(x;y)$,

$AC=\sqrt{20}$, $AD=BC=\sqrt{20}$. $\left.\begin{array}{r}(x-2)^2+(y-4)^2=20\\ x^2+y^2=20\end{array}\right\}\Rightarrow B\left(1+2\sqrt{3};\,2-\sqrt{3}\right)$,

$D\left(1-2\sqrt{3};\,2+\sqrt{3}\right)$.

3529. $(\mathbf{a},\mathbf{j})=(\mathbf{b},\mathbf{j})=\varphi$, $|\mathbf{a}|=2\sqrt{5}$, $|\mathbf{b}|=\sqrt{4+b^2}$, $\mathbf{j}(0;1)$. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}=2\sqrt{5}\cdot 1\cdot\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$,

$\mathbf{b}\cdot\mathbf{j}=\sqrt{4+b^2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=b\Rightarrow 5b^2=4+b^2\Rightarrow b=\pm 1$. Mivel $b>0$, $B(-2;1)$.

3530. $A(x;y)$, $AB=AC=5\ \Rightarrow\ AB^2=AC^2=25$. $\left.\begin{array}{r}(x+1)^2+(y+1)^2=25\\ (x-8)^2+(y-2)^2=25\end{array}\right\}-\Rightarrow$ $A_1(4;-1)$,

$A_2(3;2)$. $BC=3\sqrt{10}$, BC felezőpontja $F\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$, $m=AF=\frac{\sqrt{10}}{2}$, $T=7{,}5$ területegység.

3531. *a)* Legyen $K(u;v)$, $AK=BK$, $AK^2=BK^2$, illetve $AK=CK$, $AK^2=CK^2$.

$(u-1)^2+(v-5)^2=(u-8)^2+(v-2)^2$, illetve $(u-1)^2+(v-5)^2=(u+6)^2+(v+2)^2$.

$v=-\frac{14}{5}$, $u=\frac{9}{5}$, $K\left(\frac{9}{5};-\frac{14}{5}\right)$, $r=\sqrt{\left(\frac{9}{5}-1\right)^2+\left(-\frac{14}{5}-5\right)^2}=\frac{\sqrt{1537}}{5}$;

b) $K\left(-\frac{13}{14};-\frac{9}{14}\right)$, $r=\frac{\sqrt{2210}}{14}$; *c)* $K(-3;-2)$, $r=5$; *d)* $K(3;4)$, $r=5$; *e)* $K\left(-\frac{49}{20};\frac{1}{5}\right)$,

$r=\frac{\sqrt{8177}}{20}$.

3532. Az oldalfelező pontok által meghatározott háromszög hasonló az eredetihez. Köré írt körének sugara fele az eredeti háromszög köré írható körének. $AK = BK$, $AK^2 = BK^2$, illetve $AK = CK$, $AK^2 = CK^2$. $(u+7)^2 + (v+2)^2 = (u+1)^2 + (v-9)^2$, illetve $(u+7)^2 + (v+2)^2 =$
$= (u-5)^2 + (v+3)^2$; $K\left(-\frac{15}{23}; \frac{77}{46}\right)$. $r^2 = AK^2 = \left(7 - \frac{15}{23}\right)^2 + \left(\frac{77}{46} + 2\right)^2 = \frac{113\,825}{4 \cdot 23^2}$. $R \approx 7{,}33$,
$R^2 = 4r^2$, $T = R^2\pi = 4 \cdot r^2\pi = 675{,}18$ területegység.

3533. Ilyen háromszög nem létezik.

3534. $P(x;y)$, $PA = PB \Rightarrow PA^2 = PB^2$, illetve $PC : PD = 2 : 3$, $\frac{PC^2}{PD^2} = \frac{4}{9}$.
$P_1(1;4)$, $P_2(-6;-3)$.

3535. $S(-1;7)$, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 261 + 45 + 162 = 468$, $AS^2 + BS^2 + CS^2 = 89 + 50 + 17 =$
$= 156$. Mivel $3 \cdot 156 = 468$, ezért az állítás igaz. Az általános megoldáshoz válasszuk a koordináta-rendszert úgy, hogy a súlypont az origóba essen.

3536. Legyen az e egyenes az x tengely, $P(x;0)$, $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$, $C(c_1;c_2)$.
A $PA^2 + PB^2 + PC^2 = (x-a_1)^2 + a_2^2 + (x-b_1)^2 + b_2^2 + (x-c_1)^2 + c_2^2 =$
$= 3\left(x - \frac{a_1+b_1+c_1}{3}\right)^2 - \frac{(a_1+b_1+c_1)^2}{3} + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$ kifejezés minimális, ha
$x = \frac{a_1+b_1+c_1}{3}$, $P\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; 0\right)$. P a súlypontnak az x tengelyre eső merőleges vetülete.

3537. Legyen $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$, $P(x;x)$.
$S = x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 + x^2 + (y-1)^2 = 4x^2 + 4y^2 - 2x - 2y + 4 =$
$= 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 2$. $2 \le S \le 4$, $S_{min} = 2$, ekkor P a négyzet középpontjában van,
$S_{max} = 4$, ekkor P a négyzet csúcsaiban van.

Az egyenes egyenletei

3538. *a)* $4x + 3y = 26$; *b)* $2x + y + 2 = 0$; *c)* $-2x + 3y + 8 = 0$;
d) $x + 3y = 0$; *e)* $y = 5$; *f)* $x = -40$; *g)* $x + y = 1$.

3539. *a)* $3 - 2y = 0$; *b)* $\sqrt{3}x - 3y = -2\sqrt{3} - 3$; *c)* $x\sqrt{3} + y = 4\sqrt{3}$; *d)* $x - y = 5$;
e) $x - y = 5$; *f)* $x + y = 8$; *g)* $8x + 20y = 101$; *h)* $x = 4$.

3540. *a)* $3x - 5y = 27 - 30 \Rightarrow 3x - 5y = -3$; *b)* $x - y = -2$; *c)* $x - 3y = 7$;
d) $5x - 4y = 0$; *e)* $9x - 14y = -15$; *f)* $5x + 2y = 6{,}4$; *g)* $x = 0$; *h)* $8x - 3y = -24$;
i) $\mathbf{n}(a-b; b-a)$, $(a-b)x + (b-a)y = 0$, ha $a \ne b$, akkor $x - y = 0$; ha $a = b$, akkor $x = a$, vagy $y = b$, vagy $n_1x + n_2y = (n_1 + n_2)a$. *j)* $3\sqrt{2}x + \left(3\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)y = 6 + 2\sqrt{6}$.

3541. $\overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$, $\mathbf{n}(y_2 - y_1; -x_2 + y_1)$, $(y_2 - y_1)x + (-x_2 + x_1)y =$
$= (y_2 - y_1)x_1 + (-x_2 + x_1)y_1$ rendezve, kiemelve: $(x_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$.
Ha $x_1 = x_2$ és $y_2 \ne y_1 \Rightarrow x = x_1$; ha $x_1 \ne x_2$ és $y_2 = y_1 \Rightarrow y = y_1$.

V

3542. *a)* $A(4;0)$, $B(0;6)$, $\overrightarrow{AB}(-4;\ 6) \Rightarrow \mathbf{n}(3;2)$, $3x+2y=12$; *b)* $4x-3y=-12$; *c)* $6x-5y=30$; *d)* $6x+y=4$; *e)* $3x+5y=4$; *f)* $x+y=a$; *g)* $x-y=a$.

3543. $A(a;0)$, $B(0;b)$, $\overrightarrow{AB}(-a;\ b)$, $\mathbf{n}(b;a)$, $bx+ay=ab$, osszuk el $a\cdot b\neq 0$-val $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

3544. $\alpha=30°, 60°, -45°, 0°$; $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+7$; $y=\sqrt{3}\,x+7$; $y=-x+7$; $y=7$.

3545. *a)* $\mathbf{n}(3;4)$, $P(0;2)$, $\mathbf{v}(-4;3)$, $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$, $\alpha=-36{,}87°$; *b)* $\mathbf{n}(4;-1)$, $P(3;0)$, $\mathbf{v}(1;4)$, $\operatorname{tg}\alpha=4$, $\alpha=75{,}96°$; *c)* $\mathbf{n}(4;-3)$, $P(15;0)$, $\mathbf{v}(3;4)$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{4}{3}$, $\alpha=53{,}13°$; *d)* $\mathbf{n}\left(\sqrt{3};-1\right)$, $P(0;-4)$, $\alpha=60°$; *e)* $3x+4y=125$, $\mathbf{n}(3;4)$, $P(15;20)$, $\alpha=-36{,}87°$; *f)* $\mathbf{n}(1;0)$, $P(4;0)$, $\alpha=90°$; *g)* $\mathbf{n}(0;1)$, $P(0;-3)$, $\alpha=0°$;

3546. *a)* $7-6=1$, P rajta van; *b)* $2\cdot 1-1\neq 3$, P nincs az egyenesen; *c)* rajta van; *d)* egyik sincs rajta; *e)* a $(-2;0)$, $(7;6)$, $(10;8)$ pontok rajta vannak.

3547. P koordinátáit az egyenes egyenletébe helyettesítve $-5-6=a \Rightarrow a=-11$.

3548. *a)* $\left.\begin{array}{l} P_1\in e \Rightarrow 2a+3b=1 \\ P_2\in e \Rightarrow 7a+4b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-\dfrac{1}{13},\ b=\dfrac{5}{13}$; *b)* $a=\dfrac{2}{7},\ b=-\dfrac{1}{14}$;
c) $a=0,\ b=\dfrac{1}{2}$.

3549. A feltétel szerint $y=x \Rightarrow x+3=0$, $x=-3$, $P(-3;-3)$.

3550. $y=\dfrac{15}{11}$, $P\left(\dfrac{30}{11};\dfrac{15}{11}\right)$.

3551. $P(2;1)$, $P_2(-5;-1)$, $P_3(-12;-3)$.

3552. $P_1(x;6)$, $P_2(x;-6)$, $4x+18=6 \Rightarrow x=-3$; $4x-18=6 \Rightarrow x=6$, $P_1(-3;6)$, $P_2(6;-6)$.

3553. $bx+ay=ab$; $4b+2a=ab \Rightarrow b=\dfrac{2a}{a-4}$, $a\neq 4$.

3554. Az átlók egyenlete: $x=0$, $y=0$. $A(5;0)$, $B(0;4)$, $C(-5;0)$, $D(0;-4)$, $4x\pm 5y=20$; $4x\pm 5y=-20$. $A(4;0)$, $B(0;5)$, $C(-4;0)$, $D(0;-5) \Rightarrow 5x\pm 4y=20$, illetve $5x\pm 4y=-20$.

3555. Húzzuk meg az egyeneseket az adott pontokon át. *a)* $A(4;0)$, $B(0;3)$; *b)* $(1;0)$, $(0;3)$; *c)* $\left(\dfrac{1}{2};\ 0\right)$, $(0;2)$; *d)* $(2;0)$, $(0;3)$; *e)* $(5;0)$, $(0;8)$; *f)* $(3;0)$, $(0;3)$; *g)* $(20;0)$, $(0;-8)$.

3556. *a)* $t=24$ területegység; *b)* $t=\dfrac{50}{99}$; *c)* 3 területegység.

3557. $\mathbf{n}(5;3)$, $F(4;9)$; a felező merőleges egyenlete: $5x+3y=47$; $P\left(\dfrac{47}{5};\ 0\right)$, $Q\left(0;\ \dfrac{47}{3}\right)$.

3558. Az ABC háromszög középvonalainak egyenesei felelnek meg.
$A_1(9;-2)$, $B_1(1;3)$, $C_1(4;-3)$; $5x+8y=29$; $B_1C_1(3;-6)$, $2x+y=5$; $x-5y=19$.

3559. Ha $x=0$, $y=2$, ezért a legtávolabbi pont ordinátája 1 lehet. $4x<1001$ miatt $x=250$, $P(250;1)$.

3560. $y=\sqrt{3}\,x$. Ha $x\in\mathbf{R}$, akkor y irracionális.

3561. Az $A(a;0)$, $B(0;b)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow \frac{4}{a}+\frac{3}{b}=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4b+3a=ab$; $a=\frac{4b}{b-3}=4+\frac{12}{b-3}$; b lehetséges értékei: 2; 5; 7.
$b_1=2, a_1=-8$; $b_2=5, a_2=10$; $b_3=7, a_3=7$; $x-4y=-8$; $x+2y=10$; $x+y=7$.

3562. A-ból induló szögfelező: $7x+y=37$. C-ből induló szögfelező:
$\left(3\sqrt{5}+2\right)x+\left(4\sqrt{5}+11\right)y=23\sqrt{5}+82$.
B-ből: $\left(4\sqrt{5}-2\right)x+\left(3\sqrt{5}+11\right)y=14\sqrt{5}-82$.

3563. Tükrözzük az A pontot az y tengelyre $A_1(-2;3)$. $PA+PB=PA_1+PB$, ami akkor lesz minimális, ha P az A_1B egyenesen van. $\overrightarrow{A_1B}(8;-7)$, $\mathbf{n}(7;8)$, $7x+8y=10$, $x=0 \Rightarrow P\left(0;\frac{5}{4}\right)$.

3564. Tükrözzük az A-t az x tengelyre. Az $A_1(1;3)$ pontot kapjuk. $A_1C+CB=AC+CB$, minimális, ha C az A_1B-n van. $\overrightarrow{A_1B}(11;11)$, $\mathbf{n}(1;-1)$, $x-y=4$, $y=0$, $C(4;0)$.

3565. B csúcsot az x tengelyre tükrözve B'-t kapjuk. B' az AC oldalegyenesre illeszkedik. $B'(5;3)$, $\overrightarrow{AB}(2;1)$, $\mathbf{n}(1;-2)$, $x-2y=-1$, $y=0$, $C(-1;0)$.

3566. Az adott egyenes egy pontját $P(4;-1)$-t eltolva $Q(8;-3)$ $\mathbf{n}(3;-4) \Rightarrow 3x-4y=36$.

3567. $(x+4)^2+y^2-\left[(x-2)^2+(y-6)^2\right]=20 \Rightarrow 3x+4y=11$.

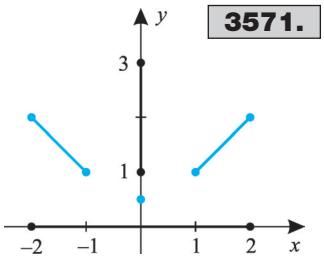
3568. Tükrözzük az y tengelyt a P pontra $\Rightarrow x=6$. $Q(6;0)$. $\overrightarrow{PQ}(3;-7)$, $\mathbf{n}(7;3) \Rightarrow 7x-3y=42$.

3569. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow \frac{6}{a}-\frac{1}{b}=1 \Rightarrow 6b-a=6$, $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $a=3\left(\sqrt{5}-1\right)$.

3570. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow \frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1$ és $\frac{ab}{2}=8$. $3b+a=ab \Rightarrow 3b+a=16 \Rightarrow b(16-3b)=16 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3b^2-16b+16=0$. $b_1=4, a_1=4$; $b_2=\frac{4}{3}, a_2=12$. Innen: $x+y=4$, illetve $x+9y=12$.

3571. $y=x$, ha $x\in[1;2]$, $y=-x$, ha $x\in[-2;-1]$, illetve $P\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

3571.



3572. *a)* $y=\frac{3}{4}x-1$. A keresett egyenes egy pontja
$P(0;-1)$, $m=-\frac{3}{4}$, $y=-\frac{3}{4}x-1$.
b) Tükrözzük pl. a $P(4;2)$ pontot C-re. $\frac{x+4}{2}=1 \Rightarrow x=-2$,
$y=10 \Rightarrow P'(-2;10)$. Mivel $e' \parallel e$, $3x-4y=-46$.

3573. $e: y-4=m(x-7)$; ha $x=-1 \Rightarrow y=4-8m$, $F(-1;4-8m)$. Az e egyenes x tengelyre eső pontja $Q\left(7-\frac{4}{m};0\right)$. F a PQ felezőpontja $\frac{7-\frac{4}{m}+7}{2}=-1 \Rightarrow m=\frac{1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow e: x-4y+9=0$.

3574. $\overrightarrow{AB}\left(-3;\ 3\sqrt{3}\right)$, $\mathbf{n}\left(\sqrt{3};\ 1\right)$, AB: $\sqrt{3}x+y=6\sqrt{3}$. $DE \parallel AB$ $\sqrt{3}x+y=-6\sqrt{3}$, BC: $y=3\sqrt{3}$, EF: $y=-3\sqrt{3}$; $\overrightarrow{DC}\left(3;\ 3\sqrt{3}\right)$, $\mathbf{n}\left(\sqrt{3};\ -1\right)$, $\sqrt{3}x-y=-6\sqrt{3}$, $FA \parallel DC$: $\sqrt{3}\ x-y=6\sqrt{3}$.

3575. *a)* $A_1\left(\frac{9}{2};\ \frac{3}{2}\right)$, $B_1\left(\frac{11}{2};\ \frac{3}{2}\right)$, $C_1(2;\ 4)$. A súlyvonalak egyenlete: $\overrightarrow{AA_1}\left(\frac{3}{2};\ -\frac{17}{2}\right)$, $\mathbf{n}(17;\ 3)$. s_a: $17x+3y=72$, s_b: $x-9y+8=0$, s_c: $4x+3y=20$. A középvonalak: $\overrightarrow{AB}(-2;\ -6)$, $\mathbf{n}(3;\ -1)$, $3x-y=\frac{27}{2}+\frac{3}{2}=15$; $5x+7y=38$; $11x+5y=42$; *b)* $A_1(1;\ -4)$, $B_1\left(4;\ -\frac{3}{2}\right)$, $C_1\left(-1;\ -\frac{1}{2}\right)$. A súlyvonalak: $7x-y=11$, $x-16y=28$, $13x+14y=-6$; A középvonalak: $5x-6y=29$, $9x+4y=-7$, $4x+10y=1$.

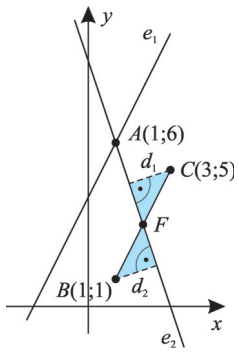
3576. *a)* $P(1;\ -9)$, $Q(7;\ 6)$, $R(3;\ -4)$. $\overrightarrow{PR}(2;\ 5)$, $\overrightarrow{RQ}(4;\ 10)$, $\overrightarrow{RQ}=2\cdot\overrightarrow{PR}$, ezért egy egyenesen vannak. *b)* R a PQ egyenesen van.

3577. $\mathbf{v}_1(b-a;a-b)$, $\mathbf{v}_2(2a-b;-b-a)$. $\frac{2a-b}{b-a}=-\frac{a+b}{a-b}\Rightarrow a=2b$.

3578. $e_1 \parallel BC$ $\overrightarrow{BC}(2;\ 4)\Rightarrow\mathbf{n}\,(2\ -1)$, e: $2x-y=-4$, BC: $2x-y-1=0$, $d_A=\frac{|2\cdot 1-6-1|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\,(\approx 2{,}2\ \text{m})$. Az ábrán látható derékszögű háromszögek egybevágósága miatt e_2 is megfelel. $F(2;\ 3)$, $\overrightarrow{AF}(1;\ -3)$, $\mathbf{n}(3;\ 1)\Rightarrow e_2$: $3x+y=9$, $d_1=d_2=\frac{|3+1-9|}{\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}(\approx 1{,}6\ \text{m})$.

3579. $A\left(-6\sqrt{3};\ -2\right)$, $B\left(6\sqrt{3};\ -2\right)$. A száregyenesek: $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x+4$.

3578.



3580. $k\approx 27{,}43$ egység. $m_b=6$ egység, így $\operatorname{tg}\alpha=\frac{6}{4}$, $\alpha=56{,}3$; $\operatorname{tg}\gamma=\frac{6}{7}$, $\gamma=40{,}6$; $\beta=83{,}1$.

3581. Tükrözzük B-t az x tengelyre: $B_1(-2;\ -3)$. $\overrightarrow{B_1A}(7;\ 7)$, $\mathbf{n}(1;\ -1)$, a beeső fénysugár $x-y=1$. $P(1;\ 0)$, $\overrightarrow{PB}(3;\ -3)$, $\mathbf{n}(1;\ 1)$, a visszavert fénysugár $x+y=1$.

3582. $\gamma=-2$ arányú O középpontú hasonlóság a $B_1(2;\ -4)$ pontot A-ba viszi. $P(0;\ 0)$.

3583. Szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. $y=\frac{3}{2}x$ vagy $y=x+1$, vagy $y=2x+\frac{1}{2}$ egyenesek pontjai elégítik ki a feltételt.

3584. Egyenespárt akkor kaphatunk, ha a bal oldal két lineáris kifejezés szorzata. Ha $\lambda = 4$, akkor $(2x+y)^2 - 2(2x+y) - 3 = 0$, ahonnan $(2x+y-3)(2x+y-1) = 0$, tehát $2x+y = 3$ vagy $2x+y = 1$.

3585. *a)* $\mathbf{n}_1(1; -2)$, $\mathbf{n}_2(3; -2)$, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n} = 3 + 4 = 7$, $|\mathbf{n}_1| = \sqrt{5}$, $|\mathbf{n}_2| = \sqrt{13}$, $7 =$

$= \sqrt{5} \cdot \sqrt{13} \cos(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) \Rightarrow \cos\omega = |\cos \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2| = \left| \dfrac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} \right| = \dfrac{7}{\sqrt{5 \cdot 13}} \Rightarrow \omega = 29{,}74°$

b) 49,4°; *c)* 45°; *d)* 56,3°; *e)* 90°; *f)* 78,7°. *g)* $\mathbf{n}_1(A_1B_2)$, $\mathbf{n}_2(A_2B_2)$, $|\mathbf{n}_1| = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$;

$|\mathbf{n}_2| = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}$, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2$, $\cos\omega = \left| \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right|$.

3586. AC felezőpontja $F_1(5; 1)$, BD felezőpontja $F_2(5; 1)$, ezért a négyszög paralelogramma.

$\overrightarrow{AC}(18; 8) \Rightarrow \mathbf{n}_1(4; -9)$, $\overrightarrow{BD}(12; -8) \Rightarrow \mathbf{n}_2(2; 3)$, $|\mathbf{n}_1| = \sqrt{97}$, $|\mathbf{n}_2| = \sqrt{13}$, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = -19$.

$\cos\omega = \left| \dfrac{-19}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{97}} \right| \Rightarrow \omega = 57{,}6°$.

3587. Ha az egyenesek irányszöge α és β, a két egyenes hajlásszöge $\varphi = \alpha - \beta$, $m_1 = \operatorname{tg}\alpha$, $m_2 = \operatorname{tg}\beta$. $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow \operatorname{tg}\omega = \left| \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$.

3588. *a)* $\alpha = 18{,}43°$, $\beta = 53{,}13°$, $\gamma = 108{,}44°$. *b)* $\alpha = 67{,}6°$, $\beta = 105{,}3°$, $\gamma = 7{,}1°$.

3589. $\omega = 78{,}5°$.

3590. $\omega = 64{,}4°$.

3591. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = -1$, $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$. $\varphi = \beta - \omega$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-1-3}{1-3} = 2$, $y = 2x + 4$.

3592. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{9}$, $m_1 = \operatorname{tg}(\alpha + 45°) = \dfrac{\frac{5}{9} + 1}{1 - \frac{5}{9}} = \dfrac{7}{2} \Rightarrow 7x - 2y = -25$,

$m_2 = \operatorname{tg}(\alpha - 45°) = \dfrac{\frac{5}{9} - 1}{1 + \frac{5}{9}} = -\dfrac{7}{2} \Rightarrow 2x + 7y = 8$.

3593. $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\operatorname{tg}(\alpha + 60°) = \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$,

$\operatorname{tg}(\alpha - 60°) = \dfrac{-1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$. $y = \left(2 + \sqrt{3}\right)x - 5\sqrt{3} - 6$, illetve

$y = \left(2 - \sqrt{3}\right)x + 5\sqrt{3} - 6$.

3594. *a)* $\omega = 72{,}4°$. *b)* 65,2°.

V

3595. $m_1=\frac{3}{4}$, $m_2=-\frac{3}{5}$, $m_3=\frac{4}{5}$, $m_4=-\frac{5}{3}$. $\operatorname{tg}(e_1;\,e_4)=\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{5}{3}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{3}}=-\frac{29}{3}$,

$\operatorname{tg}(e_2;\,e_3)=\dfrac{\frac{4}{3}+\frac{3}{5}}{1-\frac{12}{15}}=\frac{29}{3}$. $\operatorname{tg}(\alpha+\gamma)=0\Rightarrow\alpha+\gamma=180°$.

3596. Ha a csúcsok egész koordinátájú pontok, akkor az oldal négyzete: a^2 pozitív egész $\Rightarrow t=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ irracionális. Másrészt a háromszög befoglalható olyan téglalapba, amelynek oldalai a koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamosak, csúcsai egész számok, így területe is egész. A téglalapnak a szabályos háromszögön kívüli részeinek területe racionális számok, így a szabályos háromszög területe is racionális lenne, ami ellentmondás. Így nem lehet minden csúcs egész koordinátájú.

3597. $x=4+2t$; $y=7-3t$.

3598. A (0, **i**, **j**, **k**) koordináta-rendszerben az egyenes egyenletét egyértelműen meghatározza egy adott $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontja és egy $\mathbf{v}(a; b; c)$ irányvektora. Egy $P(x, y, z)$ pont akkor és csakis akkor illeszkedik a P_0 ponton átmenő **v** irányvektorú egyenesre, ha $P_0P=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ vektor, ahol **r** a P pont és $\mathbf{r}_0$ a P_0 pont helyvektora, párhuzamos a **v** vektorral. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=\lambda\mathbf{v}$ legyen, ahol $\lambda\in\mathbf{R}$. Innen $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\lambda\mathbf{v}$. Az egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x=x_0+\lambda a$; $y=y_0+\lambda b$; $z=z_0+\lambda c$. *a)* $x=1+5\lambda$; $y=-1+\lambda$; $z=2-3\lambda$; *b)* $x=\lambda$; $y=2\lambda$; $z=-\lambda$; *c)* $x=2$; $y=3+\lambda$; $z=4+2\lambda$; *d)* $x=7$; $y=-2$; $z=5+\lambda$.

3599. *a)* $\mathbf{v}(1;\,-3;\,2)$, $A(1;\,2;\,-3)$. $x=1+\lambda$; $y=2-3\lambda$; $z=-3+2\lambda$; *b)* $\mathbf{v}(-2;\,-4;\,4)$, $A(0;\,1;\,3)$. $x=-2\lambda$; $y=1-4\lambda$; $z=3+4\lambda$.

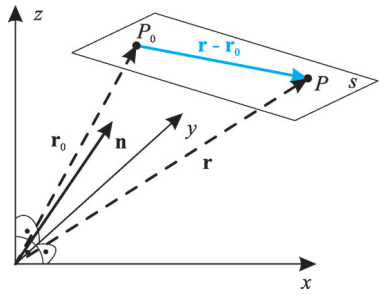
3600. *a)* A $P_0(2;\,-5;\,7)$ pont koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét. Az egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x=2+2\lambda$; $y=-5+3\lambda$; $z=7+6\lambda$. $\mathbf{v}(2;\,3;\,6)$. *b)* $P_0(0;\,-4;\,5)$, $\mathbf{v}(2;\,7;\,4)$; *c)* $P_0(0;\,0;\,0)$, $\mathbf{v}(3;\,5;\,2)$.

3601. $\dfrac{1+3}{4}=\dfrac{y-6}{5}$ és $\dfrac{1+3}{4}=\dfrac{z+1}{2}$. $P_0(1;\,11;\,1)$.

3602. A hajlásszög az irányvektorok hajlásszögével egyenlő. $\mathbf{v}_1(2;\,3;\,1)$, $\mathbf{v}_2(3;\,4;\,5)$.

$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=|\mathbf{v}_1|\cdot|\mathbf{v}_2|\cos\varphi$; $\quad\cos\varphi=\dfrac{6+12+5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{50}}$, $\varphi=29{,}62°$.

3603.



3603. Legyen az s sík egy adott pontja $P_0(x_0, y_0, z_0)$, a P_0 helyvektora $\mathbf{r}_0$. Legyen a sík egyik normálvektora $\mathbf{n}(A; B; C)$ (**n** nem nullvektor!) P_0 és **n** a síkot egyértelműen meghatározzák. Az **r** helyvektorú $P(x, y, z)$ pont akkor és csakis akkor illeszkedik a síkra, ha $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ vektor merőleges az **n** vektorra. Ekkor $\mathbf{n}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$. A felírt skaláris szorzatot kifejezhetjük az **n** vektor és az $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ vektor $(x-x_0; y-y_0; z-z_0)$ koordinátáival: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Innen $Ax+By+Cz+D=0$, ahol $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$. *a)* $A=1$, $B=-1$, $C=2$, $x_0=1$, $y_0=5$, $x_0=-7$. $x-y+2z+18=0$. *b)* $x+y+z-9=0$.

3604. $P_0(2;\,5;\,5)$, $\mathbf{n}(0;\,0;\,1)$, $z-5=0$.

3605. Először meg kell határozni, például az $A(1; 0; 2)$, $B(4; 3; -1)$, $D(5; -2; 4)$ nem egy egyenesre illeszkedő pontok által kifeszített síkot. Képezzük az $\overrightarrow{AB}(3; 3; -3)$ és az $\overrightarrow{AD}(4; -2; 2)$ vektorok vektoriális szorzatát. (Válasszuk egyszerűség kedvéért az $\overrightarrow{AB}$ vektorral egyirányú $(1; 1; -1)$ koordinátájú vektort és az $\overrightarrow{AD}$ vektorral egyirányú $(2; -1; 1)$ koordinátájú vektort.) Ekkor $\frac{\overrightarrow{AB}}{3} \times \frac{\overrightarrow{AD}}{2} = 0 \cdot \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Tehát az ABD síkra merőleges egyik normálvektor koordinátái: $(0; -3; -3)$, illetve $(0; -1; -1)$. Az ABD sík egyenlete az $A(1; 0; 2)$ pont és az $\mathbf{n}(0; -1; -1)$ normálvektor segítségével felírható: $y + z = 2$. Ezt az egyenletet a C csúcs koordinátái is kielégítik, mert $0 \cdot 0 + 3 - 1 = 2$ igaz egyenlőség.

3606. *a)* $\mathbf{n}(2; 5; -4)$, $P(-2; 3; 0)$; *b)* $\mathbf{n}(2; -11; 0)$, $P(20; 3; z)$; $z \in \mathbf{R}$; *c)* $\mathbf{n}(6; 0; 0)$, vagy például $\mathbf{n}^*(1; 0; 0)$, $P\left(\frac{13}{6}; y; z\right)$ $y, z \in \mathbf{R}$.

3607. *a)* A sík normálvektora lehet az $\overrightarrow{AB}$ vektor $\overrightarrow{AB}(-2; -4; 0)$, a sík egyik pontja az AB szakasz felezőpontja: $F(0; 0; 3)$. A sík egyenlete: $x + 2y = 0$. *b)* $\mathbf{n}(-8; -6; -4)$ vagy $\mathbf{n}^*(4; 3; 2)$, a felezőpont $F(-2; 1; 3)$. A sík egyenlete: $4x + 3y + 2z = 1$.

3608. $\overrightarrow{AB}(7; -1; -5)$, $\overrightarrow{AC}(-4; -6; -5)$. $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{n}(-25; 55; -46)$, mert $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$. Itt $a_1 = 7$, $a_2 = -1$, $a_3 = -5$, $b_1 = -4$, $b_2 = -6$, $b_3 = -5$. A sík egyenlete: $-25x + 55y - 46z = 31$.

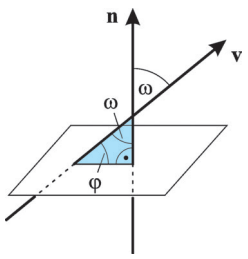
A $D(1; 1; z)$ pontra $-25 + 55 - 46z = 31$, innen $z = -\frac{1}{46}$.

3609. Az egyenesnek a síkkal bezárt szögét azzal a φ szöggel mérjük, amelyet az egyenes a síkra eső merőleges vetületével bezár. (3609. ábra). Az ábra szerint látjuk, hogy ez a φ szög az egyenes irányvektorának ($\mathbf{v}$-nek) és a sík normálvektorának ($\mathbf{n}$-nek) a segítségével kiszámítható! $\varphi = 90° - \omega$ (3609/I.) ábra), ahol ω a $\mathbf{v}$ és az $\mathbf{n}$ vektorok hajlásszöge. ω-t az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ skaláris szorzattal határozzuk meg. $\mathbf{n}(2; 5; 7)$, $\mathbf{v}(3; 4; 2)$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{78}$; $\mathbf{v} = \sqrt{29}$;

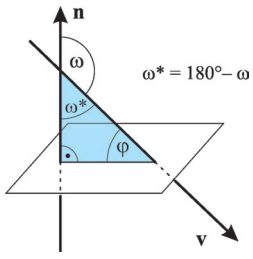
$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 6 + 20 + 14 = 40$, másrészt $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \sqrt{78} \cdot \sqrt{29} \cos\omega$. Innen $\cos\omega = \frac{40}{\sqrt{78} \cdot \sqrt{29}}$.

$\omega = 32{,}75°$, $\varphi = 57{,}28°$. Ha $\cos\omega < 0$, akkor az (3609/II.) ábra szerint ω^*-gal számolunk.

3609/I.



3609/II.



Két egyenes metszéspontja. Pont távolsága egyenestől, síktól

3610. *a)* $(-3; 5)$; *b)* $(4; 8)$; *c)* $\left(\frac{11}{2}; 1\right)$; *d)* $\left(\frac{14}{5}; -\frac{3}{5}\right)$; *e)* $P(2; 5)$; *f)* $(-3; 2)$;

g) $\left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$; *h)* $(2; 4)$; *i)* $x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$, ha $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. Ha $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, akkor nincs megoldás. Ha $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, akkor végtelen sok közös pont van.

V

3611. *a)* $B(-2; 1)$, $A(5; -2)$, $C(3; 5)$,

b) $\left(\frac{12}{11}; -\frac{8}{11}\right)$; $\left(\frac{7}{5}; \frac{1}{5}\right)$; $\left(\frac{16}{9}; -\frac{5}{9}\right)$; *c)* $\left(-\frac{32}{3}; -\frac{55}{13}\right)$; $\left(-\frac{25}{13}; -\frac{11}{13}\right)$; $\left(\frac{60}{37}; -\frac{110}{37}\right)$.

3612. $AC \cap CC_1 \Rightarrow C(12; -6)$, $AC \cap AA_1 \Rightarrow A(2; 8)$, $AA_1 \cap CC_1 \Rightarrow S\left(\frac{10}{3}; 0\right)$.

$\frac{2 + b_1 + 12}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow b_1 = -4$, $\frac{8 + b_2 - 6}{3} = 0 \Rightarrow b_2 = -2$, $B(-4; -2)$.

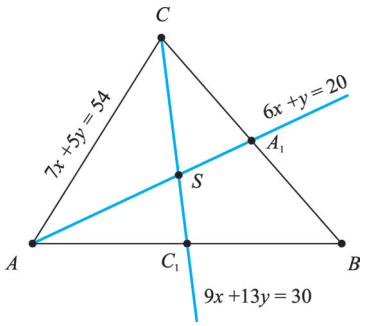
3613. $AB \cap AC = A$, $A(1; 2)$, $AC \cap CC_1 = C$, $C(2; 3)$, $CC_1 \cap AB = C_1$, $C_1(3; 5)$, $\frac{b_1 + 1}{2} = 3$, $\frac{b_2 + 2}{2} = 5$, $B(5; 8)$, BC: $5x - 3y = 1$.

3614. $BB_1 \cap CC_1 = S \Rightarrow S\left(\frac{2}{3}; 2\right)$. AA_1 harmadolópontja: S. $A_1(3; 2)$. Tükrözzük S-t A_1-re: $S^*\left(\frac{16}{3}; 2\right)$, $S^*C \parallel BB_1$ miatt S^*C: $3x + 5y = 26$, $CC_1 \cap S^*C = C \Rightarrow C(2; 4)$. C-t A_1-re tükrözve: $B(4; 0)$.

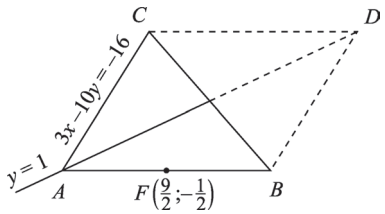
3615. $A(-2; 1)$ A-t F-re tükrözve $B(7; -2)$,

$AC \parallel BD \Rightarrow \mathbf{n}(3; -10)$, $3x - 10y = 41$. $\left.\begin{array}{r} 3x - 10y = 41 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow D(17; 1)$. AD felezőpontja $A_1\left(\frac{15}{2}; 1\right)$, B-t A_1-re tükrözve: $C(8; 4)$.

3612.



3615.



3616. $e_1 \cap e_2 = B(-6; -6)$. S a BB_1 szakasz B_1-hez közelebb eső harmadolópontja: $B_1(6; 9)$, B-t B_1-re tükrözve: $D(18; 24)$. $ABCD$ paralelogramma, $AB \parallel CD$, $m = \frac{1}{3} \Rightarrow CD$: $x - 3y = -54$. $BC \cap CD = C$; $\left.\begin{array}{l} y = 4x + 18 \\ \underline{x - 3y = -54} \end{array}\right\} \Rightarrow C(0; 18)$. BC felezőpontja $A_1(-3; 6)$, AA_1 harmadolópontja S. $\frac{2(-3) + x}{3} = 2$; $\frac{2 \cdot 6 + y}{3} = 4 \Rightarrow A(12; 0)$.

3617. A és B pontok koordinátái kielégítik az adott egyenes egyenletét: $A(2; 4)$, $B\left(\frac{15}{2}; \frac{11}{5}\right)$.

$\frac{2 + \frac{15}{2} + c_1}{3} = 5$, $\frac{4 + \frac{11}{5} + c_2}{3} = 6 \Rightarrow C\left(\frac{11}{2}; \frac{59}{5}\right)$. $AB = 5{,}8$; $BC = 9{,}8$;

$AC = 8{,}5$. $\overrightarrow{AC}(3{,}5; 7{,}8)$, $\overrightarrow{AB}(5{,}5; -1{,}2)$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 3{,}5 \cdot 5{,}5 - 7{,}8 \cdot 1{,}8 = 5{,}21$,

$5{,}21 = 9{,}8 \cdot 7{,}8 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \alpha = 84°$. $\beta = 60°$, $\gamma = 36°$.

3618. B-t tükrözve a szögfelező egyenesére, B_1 az AC egyenesére illeszkedik. BB_1: $\mathbf{n}(1; -2)$, $x - 2y = 1$. $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ \underline{2x + y = 1} \end{array}\right\} \Rightarrow F\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$. BB_1 felezőpontja $F \Rightarrow B_1\left(\frac{11}{5}; \frac{3}{5}\right)$. $\overrightarrow{AB_1}(6; -7)$,

$\mathbf{n}(7; 6)$, AB_1: $7x + 6y = 19$. $\left.\begin{array}{l} 7x + 6y = 19 \\ \underline{2x + y = 1} \end{array}\right\} \Rightarrow C\left(-\frac{13}{5}; -\frac{31}{5}\right)$.

3619. $\left.\begin{array}{l} x + y = 11 \\ \underline{2x - 3y = -18} \end{array}\right\} \Rightarrow$, $C(3; 8)$; $\left.\begin{array}{l} x + z = 11 \\ x - 4y = -19 \end{array}\right\} \Rightarrow B(5; 6)$; $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = -18 \\ x - 4y = -19 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A(-3; 4)$. Az ABC háromszög súlypontja és az oldalfelező pontok által meghatározott háromszög súlypontja azonos. $S\left(\frac{5}{3}; 6\right)$.

3620. *I. megoldás:* Az egyenesek normálegyenlete: $\frac{-2x + y + 2}{\sqrt{5}} = 0$, illetve $\frac{x - 2y + 2}{\sqrt{5}} = 0$;

$\frac{-2x + y + 2}{\sqrt{5}} = \frac{x - 2y + 2}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = x$. *II. megoldás.* Az adott egyenesek és az x tengely meghatározzák az $A(2; 2)$, $B(-2; 0)$, $C(1; 0)$ háromszöget. Az A-tól induló szögfelező $AB : AC$ arányban osztja a BC szakaszt. $AB : BC = 2\sqrt{5} : \sqrt{5} = 2 : 1$,

$BP : PA = 2 : 1, \Rightarrow P(0; 0)$, PA: $y = x$.

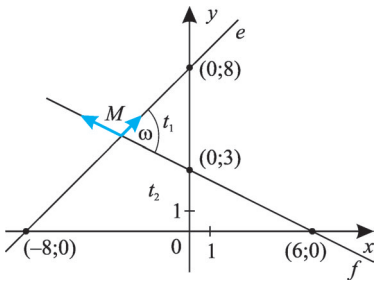
3621. $P(2; 0)$, $Q(0; -2)$.

3622. $M(4; 3)$, $|AM| = 5$ egység.

3623. $e \cap f$: $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 6 \\ \underline{x - y = -8} \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(-\frac{10}{3}; \frac{14}{3}\right)$,

$t_1 = \frac{5 \cdot \frac{10}{3}}{2} = \frac{25}{3}$, $t_2 = \frac{14 \cdot \frac{14}{3}}{2} = \frac{98}{3}$, $t = \frac{25}{3} + \frac{98}{3} = 41$ területegység. $\mathbf{v}_e(-2; 1)$, $\mathbf{v}_f(1; 1)$. $\omega = 71{,}6°$.

3623.



3624. $e_1 \cap e_2$, $A(-6; -6)$. Legyen $P(3; -3)$ az e_1 egy pontja. Határozzuk meg Q-t úgy, hogy H a PQ P-hez közelebbi harmadolópontja legyen. $\frac{q_1+6}{3}=8$, $\frac{q_2-6}{3}=6 \Rightarrow Q(18; 24)$. Q ponton át írjuk fel az e_1-gyel párhuzamos g egyenes egyenletét: $x-3y=-54$. $e_2 \cap g = B$,
$\left.\begin{array}{l} y=4x+18 \\ x-3y=-54 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0; 18)$, BC szakasz C-hez közelebbi harmadolópontja H. $\frac{2c_1+0}{3}=8$, $\frac{2c_2+18}{3}=6 \Rightarrow C(12; 0)$.

V

3625. e_1: $y=\frac{8}{15}x-\frac{7}{3}$; e_2: $y=\frac{1}{2}x-1$; $12{,}4 > \frac{8}{15}\cdot 15{,}2-\frac{7}{3}$ és $12{,}4 > \frac{1}{2}\cdot 15{,}2-1$. P az e_1 és az e_2 fölött van, tehát nincs a háromszögben.

3626. $e_1: y=2x+2$; $e_2: y=-x+2$; e_3: $y=-\frac{3}{5}x+\frac{36}{5}$;

$c^2 > 2c+2$ és $c^2 > -c+2$ és $c^2 < -\frac{3}{5}c+\frac{36}{5}$.

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

$c > 1+\sqrt{3} \cup c < 1-\sqrt{3}$, $c > 1 \cup c < -2$, $-3 < c < 2{,}4$. Így $-3 < c < -2$.

3627. AB egyenlete $y=0$. CD egyenlete $x\sqrt{2}+y\left(2-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$, $AB \cap CD$: $K(1; 0)$; $AK=1$.

3628. $AC \cap AE = A$, $A(0; 5)$. A-t tükrözve K-ra: $D(4; 1)$. $AC \cap CE = C$, $C(1; 0)$, C-t tükrözve K-ra $F(3; 6)$. $CE \cap AE = E$, $E(6; 4)$, E-t tükrözve K-ra $B(-2; 2)$.

3629. A háromszög csúcsai: $A(2; 0)$, $B(8; 0)$, $C(5; 3)$. $t_{ABC}=\frac{6\cdot 3}{2}=9$ területegység. Mindkét keletkező kúp sugara 3, magassága 3. Alkotója: $a=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$, $2P=2r\pi a=18\sqrt{2\pi}$ területegység. $V=2\cdot\frac{3^2\pi\cdot 3}{3}=18\pi$ térfogategység.

3630. *a)* $e_1 \cap e_2 = M$, $\Rightarrow 5x=-17 \Rightarrow x=-\frac{17}{5}$, behelyettesítve: $-\frac{17}{5}+2y+4=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y=-\frac{3}{10}$, $M\left(-\frac{17}{5}-\frac{3}{10}\right)$. e_3-ba behelyettesítve $5\cdot\left(-\frac{17}{5}\right)-7\left(-\frac{3}{10}\right)+6\neq 0$, ezért a három egyenesnek nincs közös pontja. *b)* $e_1 \cap e_3 = M$, $M\left(-3; \frac{1}{2}\right)$ koordinátáit e_2 egyenletébe helyettesítve: $-15+2+13=0$, a három egyenes közös pontja M. *c)* Mindhárom egyenes áthalad az $M(1; 2)$ ponton. *d)* Nincs közös pont.

3631. $e_1: y=x$; $e_2: \frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$; $e_3: x-3y=-4$, $e_1 \cap e_2 = M$, $M(2; 2)$. M koordinátáit e_3 egyenletébe helyettesítve: $2-6=-4$, így mindhárom egyenes áthalad az M ponton.

3632. $s_a: x-4y=-19$; $s_b: x=1$; $C_1(-1; 6)$ $\overrightarrow{CC_1}(-6; 3)$ $\mathbf{n}(1; 2)$; $s_c: x+2y=11$; Mindhárom egyenes átmegy a háromszög $S(1; 5)$ súlypontján.

3633. $A(8; 4)$; $B(4; 1)$; $D(2; 7)$; $O(0; 0)$; $\overrightarrow{OA}(8; 4)$, $\overrightarrow{DB}(-2; 6)$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{DA}=8$,
$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{DB}\right|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$. $\cos\varphi=\frac{8}{4\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}}=\frac{1}{50}$,

$\sin\varphi = \sqrt{1-\frac{1}{50}} = \sqrt{\frac{49}{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$, $t = \frac{OA \cdot DB \cdot \sin\varphi}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}}}{2} = 28$ te.

3634. $Q(x;y)$, $Q_1(-1;4)$, $Q_2(3;2)$.

3635. *a)* $\left.\begin{matrix}3x-y=-2\\ x+2y=3\end{matrix}\right\}$, $M\left(-\frac{1}{7};\frac{11}{7}\right)$. $3x-8y=-13$. *b)* $8x-7y=-9$.

3636. *a)* $\left.\begin{matrix}x-3y=6\\ 4x+y=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow 39x+13y=-6$. *b)* $5x-3y+20=0$.

c) $P\left(-\frac{10}{3};-3\right)$, $Q(2;0)$, $\overrightarrow{PQ}(16;9)$, $9x-16y=18$.

3637. $\left.\begin{matrix}2x-y=-1\\ x-y=-5\end{matrix}\right\} - \Rightarrow x=4,\ y=9,\ M(4;9),\ 4m-9+4=0 \Rightarrow m=\frac{5}{4}$.

3638. $y=2x-\frac{1}{2} \Rightarrow m=2$, $m_1=\operatorname{tg}(\alpha-45°)$, $m_2=\operatorname{tg}(\alpha+45°)$, $m_1=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}45°}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}45°}=\frac{1}{3}$;

$m_2=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}45°}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}45°}=\frac{3}{-1}=-3$, $\mathbf{v}_1(3;1)$, $\mathbf{n}_1=(1;-3)$, $x-3y=-10$; $\mathbf{v}_2(1;-3)$,

$\mathbf{n}_2=(3;1)$, $3x+y=0$.

3639. $\left.\begin{matrix}x+y=b\\ -x+2y=6\end{matrix}\right\} + \Rightarrow 3y=b+6 \Rightarrow y=\frac{b+6}{3}$, $x=\frac{2b-6}{3}$, $P\left(\frac{2b-6}{3};\frac{b+6}{3}\right)$.

$\left.\begin{matrix}x+y=b\\ 5x-y=2\end{matrix}\right\} + \Rightarrow 6x=b+2 \Rightarrow x=\frac{b+2}{6}$, $y=\frac{5b-2}{6}$.

$PQ=1 \Rightarrow PQ^2=1$, $\left(\frac{2b-6}{3}-\frac{b+2}{6}\right)^2+\left(\frac{b+6}{3}+\frac{5b-2}{6}\right)^2=1$,

$\left(\frac{3b-14}{6}\right)^2+\left(\frac{14-3b}{6}\right)^2=1$, $2\left(\frac{3b-14}{6}\right)^2=1$, $\frac{3b-14}{6}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{14}{3}\pm\sqrt{2}$.

3640. $\left.\begin{matrix}5x-4y=0\\ y=-\frac{3}{4}x+b\end{matrix}\right\} \Rightarrow P\left(\frac{b}{2};\frac{5b}{8}\right)$; $\left.\begin{matrix}x-4y=0\\ y=-\frac{3}{4}x+b\end{matrix}\right\} \Rightarrow Q\left(b;\frac{b}{4}\right)$. $PQ=5 \Rightarrow PQ^2=25 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(b-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{4}-\frac{5b}{8}\right)^2=25 \Rightarrow b=\pm 8$.

3641. $e: 3x-5y=6$, $f: 4x+y+6=0$. Az e egyenest tükrözzük az origóra. $P(2;0)$ az e egy pontja, ennek az origóra vonatkozó tükörképe $P_1(-2;0)$, $\mathbf{n}(3;-5)$, $3x-5y=-6$.

$e_1 \cap f$: $\left.\begin{matrix}4x+4y=-6\\ 3x-5y=-6\end{matrix}\right\} \Rightarrow M\left(-\frac{36}{23};\frac{6}{23}\right)$; $\overrightarrow{OM}\left(-\frac{36}{23};\frac{6}{23}\right) \Rightarrow \mathbf{n}(1;6) \Rightarrow x+6y=0$.

3642. Tükrözzük az e egyenest P-re. Az e egy pontja $Q(0;2)$, $Q_1(6;-6)$. $e_1: \mathbf{n}(1;3)$, $Q(6;-6) \Rightarrow x+3y=-12$. $e_1 \cap f = M \Rightarrow M\left(-\frac{3}{7};\frac{27}{7}\right)$, $\overrightarrow{MP}\left(\frac{24}{7};\frac{13}{7}\right) \Rightarrow \mathbf{n}(13;-24)$.

$\mathbf{n}(13;-24)$. A keresett egyenes: $13x-24y=87$.

3643. Vegyünk fel az egyik egyenesen egy P_1 pontot, a másik egyenesen olyan pontokat, amelyekre a feltétel teljesül. A keresett egyenesek a P_1P_2, illetve a P_1P_3 egyenesekkel párhuzamos, az adott ponton átmenő egyenesek.

Legyen $P_1(0;8)$, ekkor $P_2(1;4)$, $P_3(-1;7)$. $\overrightarrow{P_1P_2}(1;-4)$, $\mathbf{n}(4;1)$, $4x+y=23$, $\overrightarrow{P_1P_3}(-1;-1)$, $\mathbf{n}(1;-1)$, $x-y=2$.

3644. Legyen $P_1(0;4)$ az e_1 tetszőleges pontja. A feltételnek megfelelő e_2-n levő pontok: $P_2(-2;7)$, $P_3(2;3)$ A keresett P-n áthaladó egyenesek párhuzamosak P_1P_2-vel, illetve P_1P_3-mal. $\overrightarrow{P_1P_2}(2;-3) \Rightarrow \mathbf{n}(3;2)$, $3x+2y=26$, $\overrightarrow{P_1P_3}(2;-1) \Rightarrow \mathbf{n}(1;2)$, $x+2y=14$.

V

3645 P_1P_2, illetve P_2P_3-nak az y tengelyre eső vetülete 2, ahol P_2 az e_1 egyenesre, P_1, P_3 az e_2 egyenesre illeszkedik. $P_2(-1;2)$, $P_1(8;0)$, $P_3(5;4)$. $\overrightarrow{P_1P_2}(-9;2) \Rightarrow \mathbf{n}_1(2;9) \Rightarrow 2x+9y=102$, $\overrightarrow{P_2P_3}(6;2) \Rightarrow \mathbf{n}_2(1;-3) \Rightarrow x-3y=-24$.

3646. Legyen $P_1(0;4)$ az e_1 egyenes pontja, $P_2(0;7)$, $P_3(-9;1)$ az e_2 pontjai. $\overrightarrow{P_1P_2}(0;3) \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathbf{n}(1;0)$, $x=3$, $\overrightarrow{P_1P_3}(9;3) \Rightarrow \mathbf{n}(1;-3)$, $x-3y=-18$.

3647. Legyen $Q(2;0)$ az egyik egyenes egy pontja. $QP:PQ_1=1:2 \Rightarrow Q_1(2;3)$. Q_1-en áthaladó, az előbbi egyenessel párhuzamos kimetszi a másik egyenesből az M pontot. $\mathbf{n}(1;-1)$, $Q_1(2;3) \Rightarrow x-y=-1$. $\left.\begin{array}{r} x-y=-1 \\ \underline{x+2y=14} \end{array}\right\} - \Rightarrow M(4;5)$, $\overrightarrow{PM}(2;4) \Rightarrow \mathbf{n}(2;-1) \Rightarrow 2x-y=3$.

3648. Legyen Q az e egyenes egy pontja. Meghatározzuk azt a Q_1 pontot, amelyre $QP:PQ_1=3:2$. A Q_1-re illeszkedő $e_1 \parallel e$ egyenes egyenletét felírva meghatározzuk $e_1 \cap f = M$-et. A megoldás a PM egyenes. $Q(2;-3)$, $Q_1\left(\frac{1}{3};\frac{11}{3}\right)$, $e_1: \mathbf{n}(1;1) \Rightarrow x+y=4$.

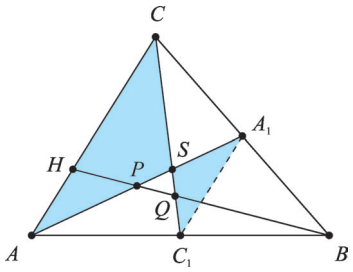
$e_1 \cap f$: $\left.\begin{array}{r} 8x+3y=7 \\ \underline{x+y=4} \end{array}\right\} \Rightarrow M(-1;5)$; $\overrightarrow{PM}(-2;4) \Rightarrow \mathbf{n}(2;1)$, $2x+y=3$.

3649. $AP:PS=3:1$.

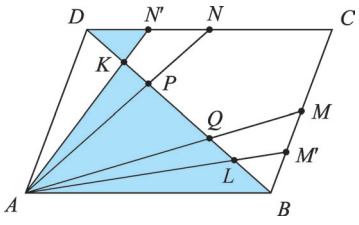
3650. $ABK\triangle \sim DKN'\triangle$, $DN':AB=DK:KB=1:4$, $DK=\frac{1}{5}BD$. $ABP\triangle \sim DNP\triangle$, $DN:AB=DP:PB=1:2$, $DP=\frac{1}{5}BD$. Hasonló módon kapjuk: $BL=\frac{1}{5}BD$, $BQ=\frac{1}{3}BD$.

Így: $PQ=\frac{1}{3}BD$, $KP=\frac{2}{15}BD \Rightarrow$ $DK:KP:PQ:QL:LB=3:2:5:2:3$.

3649.



3650.



3651. $C(c; 9-c)$ ahol $0 < c < 9$.
$R\left(\frac{2c}{3}; \frac{24-c}{3}\right)$, $Q\left(\frac{c+12}{3}; \frac{9-c}{3}\right)$, $K\left(\frac{c}{2}; \frac{9-c}{2}\right)$, $L(3; 3)$, $M\left(\frac{2c+6}{6}; \frac{24-2c}{6}\right)$,
$N\left(\frac{c+12}{6}; \frac{21-c}{6}\right)$. $KL = \sqrt{\left(\frac{c}{2}-3\right)^2 + \left(\frac{9-c}{2}-3\right)^2} = \frac{\sqrt{2c^2-18c+45}}{2}$,
$MN = \sqrt{\left(\frac{c-6}{6}\right)^2 + \left(\frac{3-c}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{2c^2-18c+45}}{6}$. $KL : MN = \frac{1}{2} : \frac{1}{6} = 3:1$.

3652. $AC: 16x + 3y = 48$, a keresett egyenes: $y = m(x+6)$. Ha $x = 0$, $y = 6m \Rightarrow AE = 16 - 6m$.
$AC \cap e: 16x + 3m(x+6) = 48 \Rightarrow x = \frac{48-18m}{3m+16}$. $T_{ABC} = 24$, $T_{AED} = 12$.
$T_{AED} = 12 = \frac{1}{2}(16-6m) \cdot \frac{48-18m}{3m+16} = \frac{6(8-3m)^2}{3m+16} \Rightarrow (8-3m)^2 = 2(3m+16) \Rightarrow$
$\Rightarrow m_1 = \frac{14}{3}$, $m_2 = \frac{2}{3}$. Mivel $AE > 0$, $m_1 = \frac{14}{3}$ nem megoldás. $e: 2x - 3y + 12 = 0$.

3653. $AC = 40$. $B_1\left(4-4\sqrt{2}\,;\, 3+2\sqrt{2}\right)$, $B_2\left(4+4\sqrt{2}\,;\, 3-2\sqrt{2}\right)$.

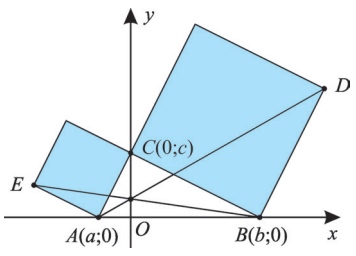
3654. Legyen a rögzített pont $P(a; a)$, Írjuk fel a P-n átmenő $\mathbf{n}(n_1; n_2)$, illetve $\mathbf{m}(m_1; m_2)$ normálvektorú egyenesek egyenletét. Innen:
$A_1\left(\frac{n_1+n_2}{n_1}a;\, 0\right)$, $B_1\left(0;\, \frac{n_1+n_2}{n_2}a\right)$, $A_2\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}a;\, 0\right)$, $B_2\left(0;\, \frac{m_1+m_2}{m_1}a\right)$.
A_1B_2 egyenlete: $\frac{m_1+m_2}{m_2}x + \frac{n_1+n_2}{n_1}y = \frac{n_1+n_2}{n_1} \cdot \frac{m_1+m_2}{m_2}a$,
A_2B_1 egyenlete: $\frac{n_1+n_2}{n_2}x + \frac{m_1+m_2}{m_1}y = \frac{n_1+n_2}{n_2} \cdot \frac{m_1+m_2}{m_1}a$. Az első egyenletet $n_1 \cdot m_2$-vel, a második egyenletet n_2m_1-gyel beszorozva összeadjuk: $x + y = 0$.

3655. $m(x-4) + (3y-1) = 0$ akkor teljesül minden m-re, ha $x - 4 = 0$ és $3y - 1 = 0$. Így $P\left(4; \frac{1}{3}\right)$.

3656. Átalakítva az egyenletet: $(x-2y)m^2 + 3(2x-6y-1)m + (3x-2y+2) = 0$. Minden valós m-re akkor igaz, ha van olyan $(x; y)$ számpár, amely kielégíti a következő 3 egyenletet: $x - 2y = 0$, $2x - 6y - 1 = 0$, $3x - 2y + 2 = 0$. Ez a $P\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

3657.

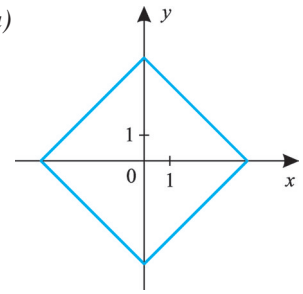
3657. Az átfogóhoz tartozó magasság egyenlete: $x = 0$.
$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ 90°-os elforgatottja $\overrightarrow{BD}(c; b)$.
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{OD}(b+c;\, b)$, $D(b+c;\, b)$. Hasonlóan:
$\overrightarrow{OE}(a-c;\, -a)$, $E(a-c;\, -a)$, $\overrightarrow{AD}(b+c-a;\, b)$,
$\mathbf{n}(b; a-b-c)$, $AD: bx + (a-b-c)y = ab$.
$\overrightarrow{BE}(a-b-c;\, -a)$ $\mathbf{n}(a; a-b-c)$, $BE: ax + (a-b-c)y =$
$= ab$. A két egyenletet kivonva egymásból: $x = 0$ $(a \neq b)$.



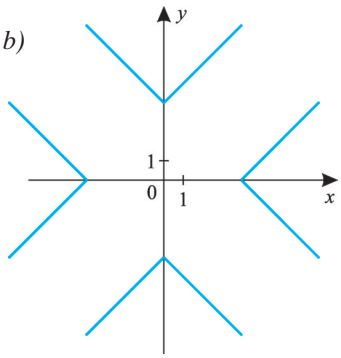
V

3658.

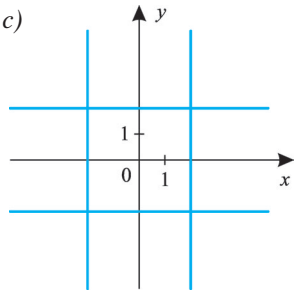
a)



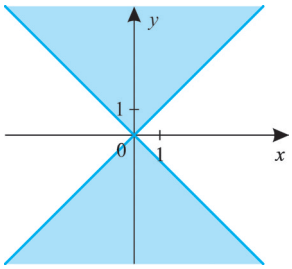
b)



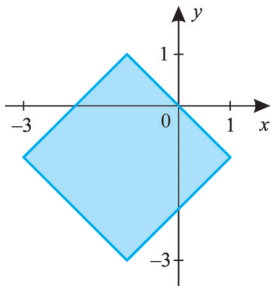
c)



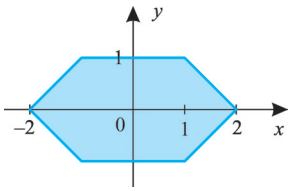
d)



e)



f)

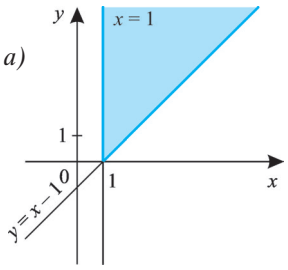


3658. *a)* Ha $P(x; y)$ kielégíti, akkor a $(-x; y)$, $(x; -y)$, $(-x; -y)$ is kielégíti, így az ábra mindkét tengelyre és az origóra is szimmetrikus $x \geq 0,\ y \geq 0 \Rightarrow x + y = 5$. *b)* $|x| - |y| = 4 \vee |x| - |y| = -4$. *c)* Szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. $|x| - 2 = 0 \cup |y| - 2 = 0$, $x = \pm 2 \cup y = \pm 2$. *d)* … *e)* Ha $|x| + |y| \leq 2$-re $\mathbf{v}(-1; -1)$ vektorú eltolást alkalmazunk, kapjuk a megoldást. *f)* Elegendő az első negyedet vizsgálni, mert pl. $(-x; y)$-ra $|-x-1|+|-x+1|+|2y| = |x+1|+|x-1|+|2y|$. Ha $x \geq 1$ és $y \geq 0$, $x - 1 + x + 1 + 2y \leq 4 \Rightarrow x + y \leq 2$. Ha $0 \leq x \leq 1$ és $y \geq 0$, $1 - x + x + 1 + 2y \leq 4 \Rightarrow y \leq 1$.

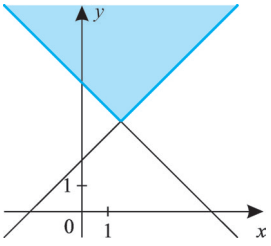
3659. *a)* $x \geq 2 \cap y \geq x - 1$; *b)* $y \geq 5 - x \cap y \geq x + 2 \Rightarrow (x < 1{,}5 \cap -x + 5 \geq y \cap y \geq 3{,}5) \cup$ $\cup\ (1{,}5 < x \cap 3{,}5 \leq y \leq x + 2)$; *c)* $y \leq x \cap y \leq -x \Rightarrow x \leq 0, y \leq x$; $x > 0, y \leq -x$;

3659.

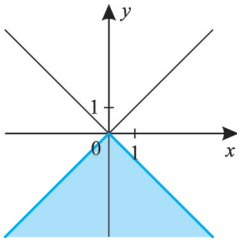
a)



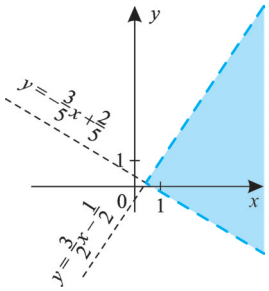
b)



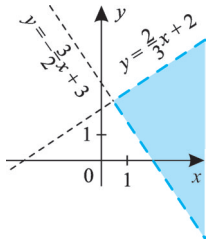
c)



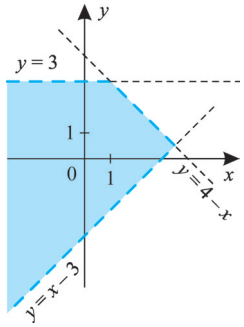
d)



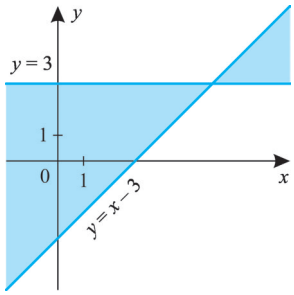
e)



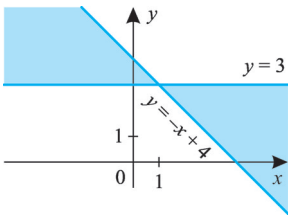
f)



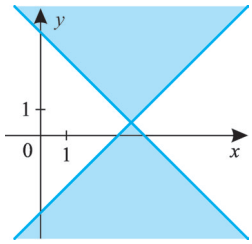
g)



h)



i)



d) $y > -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5} \cap y < \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$; $M\left(\frac{3}{7}; \frac{1}{7}\right)$; $x > \frac{3}{7}$ és $-\frac{3}{5}x + \frac{2}{5} < y < \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$;

e) $y > -\frac{3}{2}x + 3 \cap y < \frac{2}{3}x + 2$; $M\left(\frac{6}{13}; \frac{30}{13}\right)$; $x > \frac{6}{13}$ és $-\frac{3}{2}x + 3 < y < \frac{2}{3}x + 2$;

f) $x \le 1 \cap x - 3 < y < 3 \cup 1 < x < \frac{7}{2} \cap x - 3 < y < -x + 4$. *g)* A szorzat értéke pozitív, ha mindkét tényező pozitív, vagy mindkét tényező negatív; $y \ge 3 \cap y \le x - 3 \cup y \le 3 \cap y \ge x - 3$. Ebből: $x \le 6 \cap x - 3 \le y \le 3$ vagy $x > 6 \cap 3 < y \le x - 3$.

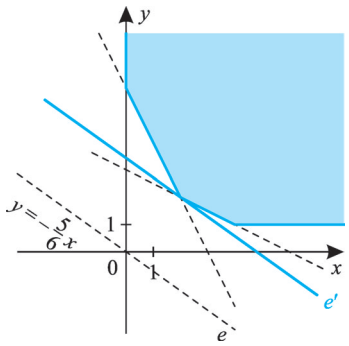
h) Szorzat értéke negatív, ha tényezői ellenkező előjelűek: $y \le 3 \cap y \ge -x + 4 \cup y \ge 3 \cap y \le -x + 4$. Ebből: $x \le 1 \cap 3 \le y \le -x + 4 \cup x > 1 \cap -x + 4 \le y \le 3$.

i) Szorzat értéke negatív, ha tényezői ellenkező előjelűek: $y \le x - 3 \cap y \le -x + 4$ vagy $y \ge x - 3 \cap y \ge -x + 4$. Ebből ha $x \le 3{,}5$, akkor $y \le x - 3 \cup y \ge -x + 4$, ha $x > 3{,}5$, akkor $y \le -x + 4 \cup y \ge x - 3$.

3660. $y \ge -2x + 6$, $y \ge -\frac{1}{2}x + 3$, $y \ge 1$, $x \ge 0$,

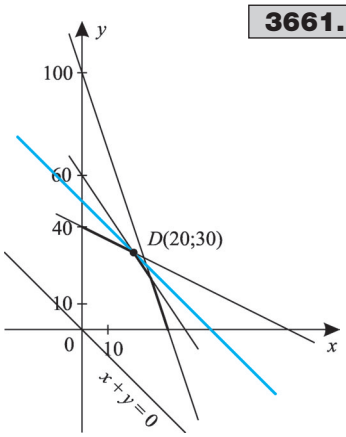
$k = 5x + 6y$, $5x + 6y = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{6}x$. k minimális, ha az e' egyenes áthalad a $P(2; 2)$ ponton. Ekkor $k = 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 22$.

3660.



V

3661.

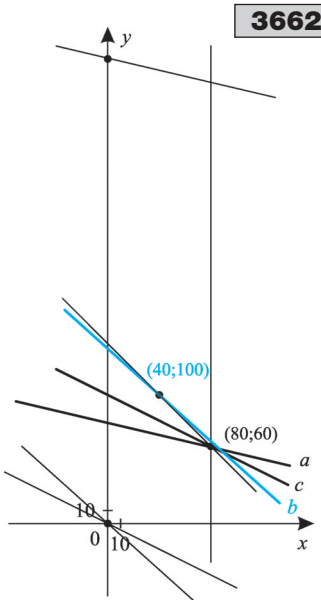


3661. Legyen x darab az A típusú szendvicsből, y db a B típusúból. Ekkor $3x + 2y \le 120$, $3x + y \le 100$, $2x + 5y \le 200$, $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} \le 20$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. Keressük az $x + y = d$ maximumát. Az egyenesek metszéspontjai:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 120 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} &= 20 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 20,\ y = 30;$$

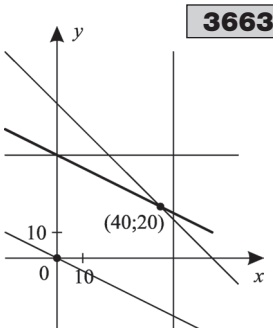
$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 120 \\ 3x + y &= 100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{80}{3},\ y = 20.$$ Az $x + y = 0$ egyenessel párhuzamos egyenest legfeljebb a D pontig tolhatjuk. Így $d_{max} = 20 + 30 = 50$.

3662.



3662. Ha az A típusú ruha elkészítéséhez x perc, a B típusúhoz y perc kell, akkor $x \ge 0$, $y \ge 0$, $3x + 3y \le 420$, $x + 4y \le 440$, $x \le 80$. *a)* $600x + 300y = a$ maximális, ha $x = 80$, $y = 60$, $a_{max} = 66\,000$ Ft; *b)* $4500x + 5000y = b$ maximális, ha $x = 40$, $y = 100$, $b_{max} = 680\,000$ Ft; *c)* $600x + 300y = a$ és $x + y = c$ maximális, ha $x = 80$, $y = 60$. Mindhárom követelményt egyszerre kielégítő program nem létezik.

3663.



3663. Legyen x db A típusú, y db B típusú munkadarab. Ekkor $0 \le x \le 45$, $0 \le y \le 40$, $2x + y \le 100$, $x + y \le 60$. A nyereség: $50x + 100y = a$ maximális, ha $x = 40$, $y = 20$. A maximális nyereség: 4000.

3664. *a)* Állítsuk elő az adott egyeneseket paraméteres alakban. Az első egyenletből $x = 4 + 5t_1$, $y = -3 + 4t_1$, $z = 1 + 2t_1$. A második egyenes paraméteres egyenlete: $x = -3 + 3t_2$, $y = -3$, $z = -1$. A két egyenes pontosan akkor metszi egymást, ha létezik olyan t_1 és t_2, amelyre a

$$\begin{cases} 4 + 5t_1 = -3 + 3t_2 \\ -3 + 4t_1 = -3, \\ 1 + 2t_1 = -1. \end{cases}$$ egyenletrendszernek van megoldása.

A harmadik egyenletből $t_1 = -1$, a második egyenletből $t_1 = 0$, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása. A két egyenes kitérő.

b) A paraméteres egyenletrendszerekből $8 - 5t_1 = 4 + 2t_2$, $4 + 2t_1 = 4 - t_2$, $3t_1 = -4 - 2t_2$. A felírt egyenletrendszernek van megoldása: $t_1 = 4$, $t_2 = -8$. A két egyenes metszi egymást. Az M metszéspont koordinátái: $x = -12$, $y = 8$, $z = 12$. *c)* A két egyenes kitérő.

3665. Az egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x = 1 + 2t$, $y = -2 + 3t$, $z = 2t$. Innen leolvashatjuk az egyenes irányvektorának koordinátáit: $\mathbf{v}(2; 3; 2)$. A sík normálvektorának koordinátái: $\mathbf{n}(1; -1; 2)$. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 3 \neq 0$, az egyenes nem párhuzamos a síkkal, tehát metszi a síkot. t-re felírhatjuk a következő egyenletet:
$(1+2t) - (-2 + 3t) + 2(2t) = 0$. Innen $t = -1$. Az egyenes a síkot az $M(-1; -5; -2)$ pontban metszi.

3666. Az egyenes a síkot az $M(5; 9; -17)$ koordinátájú pontban metszi.

3667. *a)* Az adott síkok normálvektorai $\mathbf{n}_1(3; -2; 1)$, $\mathbf{n}_2(1; -2; 3)$ nem párhuzamosak, azért a síkok sem párhuzamosak, tehát van metszésvonaluk. A metszésvonal $\mathbf{v}$ irányvektora merőleges mindkét sík normálvektorára, azért $\mathbf{v}$-nek választhatjuk a normálvektorok vektoriális szorzatát. $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = -4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, a $\mathbf{v}$ vektor koordinátái: $(-4; -8; -4)$ vagy $\mathbf{v}(-1; -2; -1)$. A metszésvonal egyik pontját úgy kapjuk meg, ha keresünk olyan pontot, amelynek koordinátái mindkét sík egyenletét kielégítik. Legyen például a $z = 0$. Akkor $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$ Innen $x = 2, y = 1$. *b)* A metszésvonal irányvektora: $\mathbf{v}(-1; -2; -1)$, egyik pontja: $P(2; 1; 0)$. A metszésvonal paraméteres egyenlete: $x = 2 - t, y = 1 - 2t, z = -t$, innen $2 - x = \dfrac{1 - y}{2} = -z$.

3668. Oldjuk meg az adott síkok egyenleteiből álló egyenletrendszert.
$M\left(\dfrac{309}{188}; -\dfrac{269}{188}; -\dfrac{123}{188}\right)$.

Párhuzamos és merőleges egyenesek

3669. *a)* $\mathbf{n}_1(1; 2)$, $\mathbf{n}_2(1; 2) \Rightarrow$ párhuzamosak; *b)* párhuzamosak; *c)* $\mathbf{n}_1(1; 2)$, $\mathbf{n}_2(-2; 1)$, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \Rightarrow$ merőlegesek; *d)* $\mathbf{n}_1\left(\sqrt{2}; 1\right)$, $\mathbf{n}_2\left(\sqrt{2}; -2\right)$, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \Rightarrow$ merőlegesek; *e)* $m_1 = -\dfrac{3}{5}$; $m_2 = -\dfrac{3}{5} \Rightarrow$ párhuzamosak; *f)* $m_1 = -\dfrac{2}{3}$ $m_2 = \dfrac{3}{2}$, $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow$ merőlegesek; *g)* $\mathbf{n}_1(4; -5)$, $\mathbf{n}_2(8; -10)$, $\mathbf{n}_2 = 2 \cdot \mathbf{n}_1 \Rightarrow$ párhuzamosak; *h)* $\mathbf{n}_1(5; -6)$, $\mathbf{n}_2(12; 10)$, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \Rightarrow \Rightarrow$ merőlegesek.

3670. *a)* $p = 8$; $\alpha = 76°$. *b)* $p \pm 2\sqrt{6}$; $\alpha = \pm 67{,}8°$. *c)* $p = -\dfrac{2}{15}$; $\alpha = 21{,}8°$. *d)* $p = -\dfrac{10}{9}$; $\alpha = 31°$. *e)* $p_1 = 2$, $p_2 = -\dfrac{2}{3}$. $\alpha_1 = 36{,}9°$; $\alpha_2 = -14°$.

3671. $m_1 = -\dfrac{b}{a}$, $m_2 = \dfrac{b_1}{a_1}$, $m_3 = -\dfrac{b + b_1}{a + a_1}$, $m_1 = m_2 = m_3 \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{b_1}{a_1}$.

3672. $m_1 = -\dfrac{a + 2}{a + 3b + 5}$, $m_2 = \dfrac{a + 2}{2a + b - 2}$. A két egyenes párhuzamos, ha $m_1 = m_2$ és $-\dfrac{3}{a + 3b + 5} \neq -\dfrac{2}{2a + b - 2}$ és $a + 3b + 5 \neq 0$, $2a + b - 2 \neq 0 \Rightarrow -\dfrac{a + 2}{a + 3b + 5} \neq \dfrac{a + 2}{2a + b - 2} \Rightarrow a = -2, b \in \mathbf{R} \setminus \left\{-1; 6; \dfrac{4}{3}\right\}$ vagy $b = -\dfrac{3}{4}(a + 1)$, ahol $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{11}{5}\right\}$, továbbá, ha $\left.\begin{matrix} a + 3b + 5 = 0 \\ 2a + b - 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = \dfrac{11}{5}$, $b = -\dfrac{12}{5}$. Egybeesik a két egyenes, ha $a = -2$, $b = \dfrac{4}{3}$.

3673. *a)* $p = -1$; *b)* $\dfrac{2}{3} \cdot (-p) = -1 \Rightarrow p = \dfrac{3}{2}$; *c)* $p = -1$, *d)* $\mathbf{n}_1(3p + 2; 1 - 4p)$, $\mathbf{n}_2(5p - 2; p + 4)$, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = (3p + 2)(5p - 2) + (1 - 4p)(p + 4) = 0 \Rightarrow p_1 = 0, p_2 = 1$; *e)* $p\,\dfrac{1}{3}$.

3674. *a)* $m = 2$, $\mathbf{n}(2; -1) \Rightarrow 2x - y = 2$; *b)* $3x - 5y = 21$; *c)* $\mathbf{n}(3; 1) \Rightarrow 3x + y = -\frac{85}{12}$; *d)* $\mathbf{n}(4; -3)$, $4x - 3y = 7\sqrt{2}$.

3675. *a)* $m = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$; *b)* $\mathbf{n}(b; a)$, $\mathbf{n}'(a; -b) \Rightarrow ax - by = 0$; *c)* $\mathbf{n}(1; -1) \Rightarrow \mathbf{n}'(1; 1) \Rightarrow$ $\Rightarrow x + y = 7$; *d)* $4x - 3y = 12$; *e)* $2x - 9y = 41$; *f)* $2x + 3y = 5$; *g)* $x = -4$; *h)* $P\left(1; -\frac{17}{3}\right)$, $\mathbf{n}(4; 3) \Rightarrow \mathbf{n}'(3; -4) \Rightarrow 3x - 4y = \frac{77}{3}$.

V

3676. *a)* $\frac{15}{8} = \frac{3}{p} \Rightarrow p = \frac{8}{5}$. Ebből a két egyenes: $15x - 8y = 35$, illetve $15x - 8y = -q$. Két különböző egyenest kapunk, ha $q \in \mathbf{R}\backslash\{-35\}$. *b)* $\frac{15}{8} \cdot \frac{3}{p} = -1 \Rightarrow p = -\frac{45}{8}$, $q \in \mathbf{R}$.

3677. $T(a; b)$.

3678. $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 4a^2 + a = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{4}$; az $a_2 = 0$, nem felel meg a feladat feltételeinek.

3679. *a)* $\overrightarrow{AB}(1; 5) \Rightarrow \mathbf{n}(5; -1) \Rightarrow 5x - y = 0$; *b)* $\mathbf{n} = \overrightarrow{BA}(8; 7) \Rightarrow 8x + 7y = -4$; *c)* $\overrightarrow{AB}(0; 8) \Rightarrow \mathbf{n}(1; 0) \Rightarrow x = 5$, továbbá $\mathbf{n}(0; 1) \Rightarrow y = 3$.

3680. $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}(x - 4; 9) \Rightarrow \mathbf{n}(9; 4 - x)$, $\mathbf{n}'(4; 3)$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 36 + 3(4 - x) = 0 \Rightarrow x = -32$.

3681. $\overrightarrow{AB}(10; y - 4)$, $\mathbf{n}(4; 3)$, $\overrightarrow{AB} \perp \mathbf{n} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n} = 0$, $40 + 3(y - 4) = 0 \Rightarrow y = -\frac{28}{3}$.

3682. $2x - 3y = -11$, $3x + 2y = 16$.

3683. *a)* $e: x - 3y = -1$, $f: x + y = 10$. $e \cap f$: $\left.\begin{matrix} x - 3y = -1 \\ x + y = 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow M(7{,}25;\ 2{,}75)$; $\alpha = 63{,}4°$.

b) e: $13x + 5y = 0$. f: $3x + 2y = -1$. $e \cap f: N\left(\frac{5}{11}; -\frac{13}{11}\right)$; $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 = 13 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 49$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{194}$, $|\mathbf{n}'| = \sqrt{13}$, $49 = \sqrt{194} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \alpha = 12{,}6°$.

3684. *a)* $F_{AB}\left(-2; \frac{19}{3}\right)$. *b)* $F_{AB}\left(\frac{10}{3}; 2\right)$.

3685. *a)* $F(-4; 1)$, $\overrightarrow{AB}(2; 6) \Rightarrow \mathbf{n}(1; 3) \Rightarrow x + 3y = -1$; *b)* $2x - 8y = 17$; *c)* $2x + 1 = 0$; *d)* $y = 6$.

3686. AB felezőmerőlegese: $8x + y = 42$, amelyet a P pont koordinátái kielégítenek, tehát igaz az állítás.

3687. Az AB felezőmerőlegesének és az adott egyenesnek a metszéspontja adja a megálló helyét. AB felezőmerőlegese: $x + y = 7$. $\left.\begin{matrix} x + y = 7 \\ 2x - 3y = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{23}{5}; \frac{12}{5}\right)$. $AM \approx 2{,}3$ km.

3688. Az első egyenes az y tengelyt az $E_1(0; -2)$ pontban, a második egyenes az $E_2(0; -4)$ pontban metszi. $F(0; -3)$. A középpárhuzamos: $5x - 3y = 9$. $P(3; 2)$.

3689. A feladat feltételeinek két egyenes felel meg: $e_1 \parallel PQ$ és $e_2 = AF_{PQ}$. $\overrightarrow{PQ}(12; -6) \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathbf{n}(1; 2) \Rightarrow e_1$: $x + 2y = 17$; $F_{PQ}(3; 2)$, $\overrightarrow{AF}(2; -6) \Rightarrow \mathbf{n}(3; 1) \Rightarrow e_2$: $3x + y = 11$.

3690. *a)* Két ilyen egyenes van: $x - 6y + 59 = 0$, illetve $13x - 2y = 69$. *b)* $4x - 3y + 2 = 0$, illetve $3x - 2y + 1 = 0$.

3691. $\overrightarrow{CB}(5;\ 2)$, $\overrightarrow{CA}(4;\ -10)$, $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = 0 \Rightarrow$ a háromszög derékszögű. Keressünk többféle megoldást is.

3692. $\mathbf{n}(8;5)$. Legyen O az origó, $K(0;8)$ az átfogó felezőpontja. Ekkor $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK} + \mathbf{n} \Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{OC}(8;\ 13)$, $C(8;\ 13)$. $\mathbf{n}'(-5;8)$ az $\mathbf{n}$ 90°-os elforgatottja. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OK} + \mathbf{n}'$, $\overrightarrow{OA}(-5;\ 16)$. $A(-5;16)$. A-t K-ra tükrözve kapjuk a $B(5;0)$ csúcsot. AC egyenlete: $\overrightarrow{AC}(13;\ -3)$, $\mathbf{n}(3;\ 13) \Rightarrow$ $\Rightarrow 3x + 13y = 193$, BC egyenlete: $\overrightarrow{BC}(3;\ 13)$, $\mathbf{n}(13;\ -3) \Rightarrow 13x - 3y = 65$. C csúcsot K-ra tükrözve is megoldást kapuk. Végtelen sok megoldás létezik, mert $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \mathbf{n}$ is megoldást ad, ahol $k \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$.

3693. *I. megoldás:* AM egyenes egyenlete $y - 2 = m(x + 4)$. BM egyenes egyenlete: $y + 6 = -\frac{1}{m}(x - 2)$. $y = mx + 4m + 2 \Rightarrow B(0;\ 4m + 2)$.

$4m + 2 = \frac{2}{m} + 6 \Rightarrow y = -\frac{1}{m}x + \frac{2}{m} + 6 \Rightarrow B\left(0;\ \frac{2}{m} + 6\right)$, $2m^2 + 4m - 1 = 0$.

$m_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{6}}{4} \Rightarrow M_1\left(0;\ 2\left(\sqrt{6} - 1\right)\right)$, $m_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{6}}{4} \Rightarrow M_2\left(0;\ -2\left(\sqrt{6} + 1\right)\right)$.

II. megoldás: $\overrightarrow{BM}(-2;\ y + 6)$. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk B koordinátáit.

III. megoldás: $AM^2 = 4^2 + (y - 2)^2$, $BM^2 = 4 + (y + 6)^2$, $AB^2 = 36 + 64$. Pitagorasz tételét alkalmazva $AM^2 + BM^2 = AB^2$. Az egyenlet megoldásával megkapjuk M koordinátáit.

3694. $x + 3y = 13$.

3695. Az adott pont és az adott befogó egyenes távolsága adja a befogó hosszát, amelyből a kívánt magasság kiszámítható. A befogó egyenlete: $2x + y = 2$. $BC \cap AC = C$; $C(-1;\ 4)$. $AC = 4\sqrt{5}$, $m = 2\sqrt{10}$.

3696. $C\left(\frac{22}{5};\ \frac{6}{5}\right)$.

3697. $A(4;2)$, $B(8;b)$, $C(-2;c)$. $\overrightarrow{CA}(6;\ 2-c)$, $\overrightarrow{CB}(10;\ b-c)$. $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} =$ $= 60 + (2 - c)(b - c) = 0 \Rightarrow c^2 - (b + 2)c + 2b + 60 = 0$. Akkor létezik a feltételnek megfelelő háromszög, ha az egyenletnek legalább egy valós megoldása van, vagyis $D \geq 0$, $D = (b + 2)^2 - 4(2b + 60) \geq 0 \Rightarrow b \geq 2 + 4\sqrt{15}$ vagy $b \leq 2 - 4\sqrt{15}$.

3698. Ha a kocka éle a, akkor a befogók: a és $a\sqrt{2}$. Legyen $A(a;0)$, $B\left(0;\ a\sqrt{2}\right)$, $C(0;0)$.

Ekkor $A_1\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $C_1\left(\frac{a}{2};\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AA_1}\left(-a;\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{CC_1}\left(\frac{a}{2};\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{CC_1} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{CC_1}$.

3699. Legyen $A\left(0;\ a\sqrt{3}\right)$, $B(-a;0)$, $C(a;0)$. $S\left(0;\ \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$. SC felezőpontja $F_1\left(\frac{a}{2};\ \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$.

V

f_1: $\mathbf{n}\left(3; -\sqrt{3}\right)$, $F_i\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) \Rightarrow 3x - \sqrt{3}y = a$, $y = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{3}$. $H\left(\frac{a}{3}; 0\right)$ a BC oldal harmadolópontja. Ugyanígy f_2 egyenletét kielégítik a másik harmadolópont koordinátái.

3700. $A(9; 0)$, $B(-3; -6)$.

3701. Legyen $A(0; a)$, $B(b; 0)$, $C(-b; 0) \Rightarrow D(0; 0)$. $\overrightarrow{AC}(b; a)$, $\mathbf{n}(a; -b)$, AC: $ax - by = -ab$, DE: $bx + ay = 0$. $DE \cap AC = E$; $\left.\begin{matrix} ax - by = -ab \\ bx + ay = 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} /\cdot a \\ /\cdot b \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2x - aby = -a^2b \\ b^2x + aby = 0 \end{matrix}\right| + \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{a^2b}{a^2+b^2} \Rightarrow y = \frac{ab^2}{a^2b^2}$, $E\left(-\frac{a^2b}{a^2+b^2}; \frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)$. $F\left(-\frac{a^2b}{2\left(a^2+b^2\right)}; \frac{ab^2}{2\left(a^2+b^2\right)}\right)$.

$\overrightarrow{EB}\left(\frac{2a^2b + b^3}{a^2+b^2}; -\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)$. $\overrightarrow{FA}\left(\frac{a^2b}{2\left(a^2+b^2\right)}; \frac{2a^3+ab^2}{2\left(a^2+b^2\right)}\right)$. $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{FA} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{EB} \perp \overrightarrow{FA}$.

3702. AT egyenlete $y = 1$. Mivel $BC \perp AT$, BC egyenlete. $x = 16$. Ezért $F(16; 13)$, $B(16; b)$, $C(16; c)$. F a BC felezőpontja: $c = 26 - b$. $AB = BC \Rightarrow b^2 - 34b + 117 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow B_1\left(16; 17 + 2\sqrt{43}\right)$, $C_1\left(16; 9 - 2\sqrt{43}\right)$, $B_2\left(16; 17 - 2\sqrt{43}\right)$, $C_2\left(16; 9 + 2\sqrt{43}\right)$.

3703. P kielégíti a szimmetriatengely egyenletét, tehát $PQ = PR$. QR a háromszög alapja. T legyen az alap felezőpontja. QR: $2x + y = -5$. $QR \cap PT = T$; $T\left(-\frac{16}{5}; \frac{7}{5}\right)$. Az egyenlő szárú háromszög száraihoz tartozó magasságai egyenlők $2 \cdot t_{PQT} = t_{PQR}$, $2 \cdot \frac{QT \cdot PT}{2} = \frac{PQ \cdot m}{2}$,

$QT = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, $PT = \frac{13\sqrt{5}}{5}$, $PQ = \sqrt{41}$. $m \approx 4{,}9$.

3704. $P_1(-10; -11)$.

3705. Mivel PQ párhuzamos az adott egyenessel, PQ felezőmerőlegese metszi ki az egyenesből a keresett pontot. $M(4; -2)$.

3706. *a)* $P\left(-\frac{27}{5}; \frac{12}{5}\right)$. *b)* $P(11{,}5; -14{,}5)$.

3707. *a)* m_b: $x = 2$; $\overrightarrow{BA}(6; -6) \Rightarrow \mathbf{n}(1; -1)$, $C(0; 0)$; m_c: $x - y = 0$; $m_b \cap m_c = M$;

$\left.\begin{matrix} x = 2 \\ x - y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow M(2; 2)$. *b)* $M(-4; -1)$; *c)* $M(4; -16)$; *d)* m_b: $x = 0$; $\overrightarrow{CB} = \mathbf{n}(c; b) \Rightarrow$

$\Rightarrow m_a$: $cx + by = ac$. $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ cx + by = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow M\left(0; \frac{ac}{b}\right)$. *e)* $\overrightarrow{AB}(3; -1)$, m_c: $\mathbf{n}(3; -1)$, $C(3; 5) \Rightarrow$

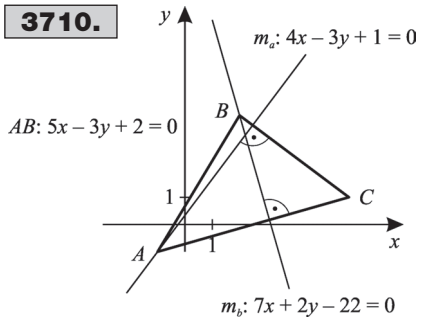
$\Rightarrow 3x - y = 4$; $\overrightarrow{BC}(-1; 4)$, m_a: $\mathbf{n}(1; -4)$, $A(1; 2) \Rightarrow x - 4y = -7$. $m_a \cap m_c = M$;

$\left.\begin{matrix} 3x - y = 4 \,/\cdot 4 \\ x - 4y = -7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{23}{11}$; $y = \frac{25}{11} \Rightarrow M\left(\frac{23}{11}; \frac{25}{11}\right)$.

3708. *a)* $S\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$. A körülírt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. AC felezőmerőlegese: $x + 2y = 4$, AB felezőmerőlegese: $x = 2$. $K(2; 1)$. m_b: $x + 2y = 5$,

$m_c: x = 1$, $M(1; 2)$. $\overrightarrow{MS}\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{SK}\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, ebből: $\overrightarrow{MS} = 2 \cdot \overrightarrow{SK}$, a három pont egy egyenesen van. *b)* $S\left(\frac{5}{2}; 2\right)$, $K(1; 2)$, $M(3; 2) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ a három pont az $y = 2$ egyenletű egyenesre illeszkedik. *c)* $S\left(\frac{13}{3}; 2\right)$, $K\left(4; \frac{7}{4}\right)$, $M\left(5; \frac{5}{2}\right)$, $\overrightarrow{SM} = 2 \cdot \overrightarrow{KS}$. *d)* $S\left(\frac{4}{3}; 6\right)$, $K\left(\frac{13}{4}; \frac{13}{2}\right)$, $M\left(-\frac{5}{2}; 5\right)$, $\overrightarrow{SM} = 2 \cdot \overrightarrow{KS}$.

3710.



3709. Mivel a három nevezetes pont egy egyenesen van, ezért közülük kettő meghatározza az Euler-egyenest. $141x - 35y = 212$.

3710. $AB \cap m_a = A$; $A(-1; -1)$. $AB \cap m_b = B$; $B(2; 4)$. $BC: 3x + 4y = 22$, $AC: 2x - 7y = 5$. $BC \cap AC = C$; $C(6; 1)$.

3711. *a)* $BC: x = 2$, $AC: x - 4y = -14$. $BC \cap AC = C$; $C(2; 4)$. *b)* $C\left(5; -\frac{5}{4}\right)$; *c)* $C(67; -12)$.

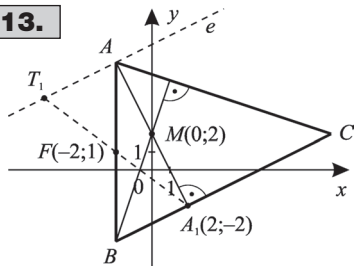
3712. *a)* Az adott pont koordinátái nem elégítik ki egyik magasságvonal egyenletét sem, ezért legyen: $A(3; -4)$; $m_b: 7x - 2y = 1$; $m_c: 2x - 7y = 6$; $AC \perp m_b$, $AC: 2x + 7y = -22$; $AC \cap m_c = C$; $C(-4; -2)$. $AB \perp m_c$, $AB: 7x + 2y = 13$; $AB \cap m_b = B$; $B(1; 3)$. *b)* $B(-2; -1)$, $C(7; -7)$, *c)* $B(-11; -7)$, $C(-0{,}4; 4{,}9)$.

3713. A_1A egyenlete: $2x + y = 2$. T az A_1 F-re vonatkozó tükörképe. $T(-6; 4)$. $TA \parallel CB \Rightarrow$ $\Rightarrow TA$ egyenlete: $x - 2y = -14$. $TA \cap A_1A = A$; $A(-2; 6)$. A-t F-re tükrözve kapjuk a $B(-2; -4)$ csúcsot. $BM \perp AC$, $AC: x + 3y = 16$, $BC: x - 2y = 6$. $AC \cap BC = C$; $C(10; 2)$.

3714. Legyen $C(x_1; y_1)$. Ekkor (1) $2x_1 - 3y_1 = 0$, $S(x; y)$. $\frac{-2 + 1 + x_1}{3} = x \Rightarrow x_1 = 3x + 1$ és $\frac{2 + 0 + y_1}{3} = y \Rightarrow y_1 = 3y - 2$. Behelyettesítve (1)-be, $2(3x + 1) - 3(3y - 2) = 0 \Rightarrow 6x - 9y = -8$, kivéve az egyenesnek azt a Q pontját, amely AB egyenesére illeszkedik, ahol $Q\left(-\frac{1}{6}; \frac{7}{9}\right)$.

3715. $AS: SA_1 = 2: 1 \Rightarrow A_1(9; 0)$. $BC \perp AM$, BC egyenlete: $2x - y = 18$. $AC \perp BM$, $\overrightarrow{BM}(b_1 - 4; b_2 + 2)$, AC egyenlete: $(b_1 - 4)x + (b_2 + 2)y = 0$. BC felezőpontja A_1, innen $b_1 + c_1 = 18$, $b_2 + c_2 = 0$. B koordinátái kielégítik BC egyenletét: $2b_1 - b_2 = 18$, C koordinátái kielégítik AC egyenletét: $(b_1 - 4)c_1 + (b_2 + 2)c_2 = 0$.

3713.



A kapott $\begin{cases} b_1 + c_1 = 18; \\ b_2 + c_2 = 0; \\ 2b_1 - b_2 = 18; \\ (b_1 - 4)c_1 + (b_2 + 2)c_2 = 0 \end{cases}$ egyenletrendszert megoldva kapjuk: $B(12; 6)$, $C(6; -6)$. A feladatnak egy megoldása van.

3716. $x=\frac{31}{11};\quad y=-\frac{45}{11}$.

3717. *a) I. megoldás:* Legyen $A(3;5)$, $C(4;2)$. A négyzet középpontja $K\left(\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$. $\overrightarrow{KC}\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ $+90°$-kal elforgatva $\overrightarrow{KD}\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KD}$, $\overrightarrow{OD}(5;4)$, $D(5;4)$. D-t tükrözve K-ra: $B(2;3)$.

II. megoldás: A keresett B, illetve D pont rajta van AC felezőmerőlegesén, és $KD=KB=KC=KA$. AC felezőmerőlegese: $x-3y=-7$. $KA=KD\Rightarrow KA^2=KD^2\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{10}{4}.\ \left.\begin{array}{r}x^2+y^2-7x-7y+22=0\\ x=3y-7\end{array}\right\}\Rightarrow y^2-7y+12=0,\ y_1=4,\quad y_2=3,$

$D(5;4)$, $B(2;3)$.

b) $\left(\frac{11}{2};\frac{7}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\frac{13}{2}\right)$.

3718. $C(-1;-1)$. $B(-2;6)$. $D(6;0)$.

3719. K-ból AD-re állított merőleges kimetszi AD felezőpontját, F-et. KF egyenlete: $\mathbf{n}(1;2)$, $x+2y=3$. $AD\cap KF=F$; $\left.\begin{array}{r}2x-y=-4\\ x+2y=3\end{array}\right\}\Rightarrow F(-1;2)$. $\overrightarrow{KF}(-2;1)$ $-90°$-kal elforgatva: $\overrightarrow{KE}(1;2)$. $\overrightarrow{KE}=\overrightarrow{FD}$ miatt $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{OD}(0;4)\Rightarrow D(0;4)$. D-t F-re tükrözve: $A(-2;0)$, A-t K-ra tükrözve $C(4;2)$, D-t K-ra tükrözve: $B(2;-2)$.

3720. e_1: $x+2y+1=0$, e_2: $6x-3y=5$, e_3: $2x-y=1$, e_4: $4x+8y+7=0$. $\mathbf{n}_1(1;2)$, $\mathbf{n}_2(6;-3)$, $\mathbf{n}_3(2;-1)$, $\mathbf{n}_4(4;8)$. $\mathbf{n}_1\parallel\mathbf{n}_4$, illetve $\mathbf{n}_2\parallel\mathbf{n}_3$, $\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=0\Rightarrow\mathbf{n}_1\perp\mathbf{n}_2$, illetve $\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{n}_4=0\Rightarrow$ $\Rightarrow\mathbf{n}_3\perp\mathbf{n}_4$. Valóban téglalapot határolnak.

3721. $D(1;2)$. $C(7;-1)$.

3722. AC egyenlete: $y=6$. $AC\cap AB=A$; $A(2;6)$. A-t M-re tükrözve: $C(22;6)$. $AB\perp BC$, BC: $x+3y=40$, $AB\cap BC=B$; $B(4;12)$. B-t M-re tükrözve: $D(20;0)$.

3723. $A(3;3)$. $D(-1;-1)$, $B(1;5)$.

3724. AB egyenlete: $x-3y=-1$. $C\in y=x-1\Rightarrow C(c;c-1)$. $AC=5\sqrt{2}\Rightarrow AC^2=50$, $(c-2)^2+(c-1-1)^2=50\Rightarrow(c-2)^2=25\Rightarrow c-2=\pm5$. $C_1(7;6)$, $C_2(-3;-4)$. $CB\perp AB$, C_1B: $\mathbf{n}(3;1)$, $3x+y=27$. C_2B: $\mathbf{n}(3;1)$, $3x+y=-13$. $AB\cap C_1B=B_1$; $B_1(8;3)$.

$AB\cap C_2B=B_2$; $B_2(-4;-1)$. AC_1 felezőpontja: $K_1\left(\frac{9}{2};\frac{7}{2}\right)$, C_1-t K_1-re tükrözve: $D_1(1;4)$.

AC_2 felezőpontja: $K_2\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$, C_2-t K_2-re tükrözve: $D_2(3;-2)$.

3725. $B(14;4)$. $D(-15;6)$.

3726. BD átló egyenlete $y=x-2$. A-t M-re tükrözve: $C(14;6)$.

Legyen $B(b_1;b_2)$, $b_2=b_1-2$, $\overrightarrow{AB}(b_1;b_1-6)$, $\overrightarrow{CB}(b_1-14;b_1-8)$. $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=0$. $b_1(b_1-14)+(b_1-6)(b_1-8)=0\Rightarrow B_1(12;10)$, $B_2(2;0)$. Mivel $B_1=D_2$ és $B_2=D_1$, a feladatnak egy megoldása van.

3727. A téglalap középpontja: $K\left(\frac{7}{2}, 2\right)$. $AK = \frac{5}{2}$. $AK = BK \Rightarrow AK^2 = BK^2$. Legyen $B(x; y)$, ahol $x = 3y \Rightarrow B(3y; y)$. $\left(3y - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{25}{4}$. Így $B_1(6; 2)$, $B_2\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. B-t K-ra tükrözve kapjuk D-t, $D_1(1; 2)$, $D_2\left(\frac{11}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

3728. Legyenek a téglalap csúcsaihoz vezető helyvektorok rendre: **a, b, c, d**. Ekkor, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB}(3; -1)$, $3 \cdot \overrightarrow{AB}(9; -3)$. $\overrightarrow{AB}$ 90°-os elforgatottja $\overrightarrow{BC_1}(3; 9)$, illetve $\overrightarrow{BC_2}(-3; -9)$. $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b} + \overrightarrow{BC_1}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} + \overrightarrow{BC_2}$, $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a} + \overrightarrow{AD_1}$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{a} + \overrightarrow{AD_2}$, ahol $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{AD_2} = \overrightarrow{BC_2}$. Innen: $C_1\left(\frac{15}{2}; 9\right)$, $C_2\left(\frac{3}{2}; -9\right)$, $D_1\left(\frac{9}{2}; 10\right)$, $D_2\left(-\frac{3}{2}; -8\right)$.

3729. Legyenek a téglalap csúcsaihoz, illetve az adott felezőponthoz vezető helyvektorok rendre **a, b, c, d, e, f**. $\overrightarrow{FE} = (\mathbf{e} - \mathbf{f})\,(9; -3)$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{FE}(3; -1)$. $\frac{1}{3}\overrightarrow{FE}$ $+90°$-kal elforgatva: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}(1; 3)$. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EA}\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. $\mathbf{a} = \mathbf{e} + \overrightarrow{EA} \Rightarrow A(4; 0)$. $\mathbf{d} = \mathbf{f} + \overrightarrow{FD}$, ahol $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{EA}$. Innen $D(-5; 3)$. A-t E-re, D-t F-re tükrözve: $B(3; -3)$, $C(-6; 0)$.

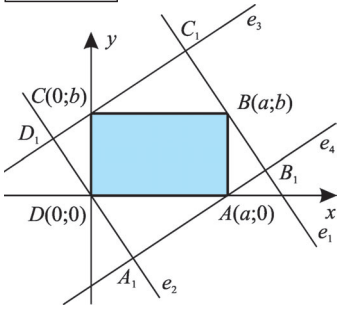
3730. Legyen $A(0; 0)$, $B(b; 0)$, $C(b; a)$, $D(0; a)$. $AP^2 + CP^2 = x^2 + y^2 + (x-b)^2 + (y-a)^2$, $BP^2 + DP^2 = (x-b)^2 + y^2 + x^2 + (y-a)^2$.

3731. Legyen $A(a; 0)$, $B(a; b)$, $C(0; b)$, $D(0; 0) \Rightarrow K\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$. $e_1 \parallel e_2$, $e_3 \parallel e_4$, és $e_1 \perp e_3$, $e_2: y = mx$, $e_4: y = -\frac{1}{m}(x-a)$. $e_2 \cap e_4 = A_1$, $A_1\left(\frac{a}{m^2+1}; \frac{ma}{m^2+1}\right)$. $e_1: y - b = m(x-a) \Rightarrow$ $\Rightarrow y = mx - ma + b$; $e_3: y = -\frac{1}{m}x + b$. $e_1 \cap e_3 = C_1$, $C_1\left(\frac{m^2 a}{m^2+1}; \frac{(m^2+1)b - am}{m^2+1}\right)$.

A_1C_1 felezőpontja $K_1(x_1; y_1)$ $x_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{am^2}{m^2+1} + \frac{a}{m^2+1}\right] = \frac{a}{2}$,

$y_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{(m^2+1)b - am + am}{m^2+1}\right] = \frac{b}{2}$. $K_1\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$.

3731.



3732. Legyen $A(0; 0)$, $B(b; 0)$, $C(b; a)$, $D(0; a)$. A szögfelező egyenlete: $y = x \Rightarrow P(b; b)$. BD egyenlete: $ax + by = ab$. $BD \cap AP = M$; $M\left(\frac{ab}{a+b}; \frac{ab}{a+b}\right)$. AC egyenlete: $ax - by = 0$, $y = \frac{ab}{a+b} \Rightarrow x = \frac{b^2}{a+b}$, $N\left(\frac{b^2}{a+b}; \frac{ab}{a+b}\right)$. $\overrightarrow{DB}(b; -a)$, $\overrightarrow{NP}\left(\frac{ab}{a+b}; \frac{b^2}{a+b}\right)$. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{NP}$.

3733. $A(6;\,6)$ illeszkedik az $x-3y=-12$ egyenletű egyenesre. A-t K-ra tükrözve: $C(2;\,2)$. $DB\perp AC$, BD egyenlete: $x+y=8$. $AB\cap BD=B$; $B(3;\,5)$. B-t K-ra tükrözve: $D(5;\,3)$.

3734. AC egyenlete: $x-y=-2$. BD egyenlete $x+y=4$.

3735. $\overrightarrow{AB}(-a;\,b)$ $-90°$-kal elforgatva $\overrightarrow{AP}(b;\,a)$. $\mathbf{p}=\mathbf{a}+\overrightarrow{AP}$, $(a+b;\,a)$ BP felezőpontja $K\left(\frac{a+b}{2};\frac{a+b}{2}\right)$. $\overrightarrow{CB}(a;\,b)$, $+90°$-kal elforgatva $\overrightarrow{CS}(-b;\,a)$. $\mathbf{s}=\mathbf{c}+\overrightarrow{CS}$, $S(-a-b;\,a)$, SB felezőpontja: $L\left(-\frac{a+b}{2};\frac{a+b}{2}\right)$. Hasonlóan: $M\left(-\frac{a+b}{2};-\frac{a+b}{2}\right)$, $N\left(\frac{a+b}{2};-\frac{a+b}{2}\right)$.

V

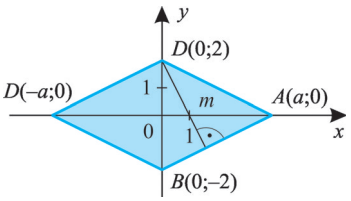
Innen $\overrightarrow{KM}(a+b;\,a+b)$, $\overrightarrow{LN}(-(a+b);\,a+b)$, tehát $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{LN}=0$ és $|\overrightarrow{KM}|=|\overrightarrow{LN}|\Rightarrow$ $\Rightarrow KLMN$ négyzet.

3736. $A(-22;-12)$. $C(4;14)$. $B(-2;-6)$. $D(-16;8)$.

3737. BD átló $x-y=2$. $AC: x+y=9$. $AC\cap BD=K$; $K\left(\frac{11}{2};\frac{7}{2}\right)$. A-t K-ra tükrözve: $C(4;\,5)$.

$a=\sqrt{29}$. $\left.\begin{array}{l}AB^2=29:\\ BD:\end{array}\begin{array}{r}(x-7)^2+(y-2)^2=29\\ x-y=2\end{array}\right\}$ Innen $B(9;\,7)$, $D(2;\,0)$.

3738.



3738. $BD=4$, $AC=2a$, $(a>0)$, $BC=\sqrt{a^2+4}$.

$t=\frac{BD\cdot AC}{2}=BC\cdot m$.

$4a=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2+4}\Rightarrow 3a^2+12=4a^2\Rightarrow a=2\sqrt{3}$.

$A(2\sqrt{3};\,0)$, $C(-2\sqrt{3};\,0)$. AB egyenlete: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$,

BC egyenlete: $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$; CD egyenlete:

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$, AD egyenlete: $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$.

3739. $\overrightarrow{AB}(5;\,2)\Rightarrow\overrightarrow{CD}(5;\,2)$ CD: $2x-5y=-57$, $\overrightarrow{BP}(4;\,12)\Rightarrow\mathbf{n}_{BC}(3;-1)$ BC: $3x-y=12$. $CB\cap CD=C$; $C(9;\,15)$. AC felezőpontja $K\left(5;\frac{19}{2}\right)$, B-t K-ra tükrözve: $D(4;\,13)$. $AB=\sqrt{29}$, $BC=3\sqrt{10}$, innen $k=2(\sqrt{29}+3\sqrt{10})$.

3740. $E\left(\frac{3}{8};\frac{39}{20}\right)$.

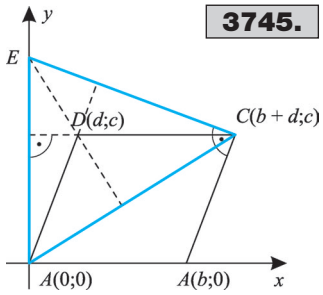
3741. A-t Q-ra tükrözve: $C(3;\,1)$. BQ egyenlete: $2x-y=0$; AB: $x+y=2$. $AB\cap BQ=B$; $B\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$. $AC=2\sqrt{5}$, $BQ=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $BD=\frac{2\sqrt{5}}{3}$, $t=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{3}=\frac{10}{3}$ területegység.

3742. Az AC egyenlete $y=1$. $AB=\sqrt{5}$, $C(c;\,1)$. $BC=\sqrt{(c-1)^2+4}=2\sqrt{5}\Rightarrow$ $\Rightarrow (c-1)^2+4=20\Rightarrow(c-1)^2=16$. $c_1=5$, $c_2=-3$, $C_1(5;\,1)$, $C_2(-3;\,1)$. B-t AC felezőpontjára tükrözve kapjuk a D pontot. Így $D_1(6;\,3)$, $D_2(-2;\,3)$.

3743. $BD = AC = 5\sqrt{5}$.

3744. $E\left(12; \frac{9}{2}\right)$, $F(9; 9)$. AE: $y = \frac{3}{8}x$, AF: $y = x$, BD: $3x + 2y = 30$. $AE \cap BD = P$; $P(8; 3)$, $AF \cap BD = Q$; $Q(6; 6)$. BD harmadolópontjai: $H_1(8; 3)$, $H_2(6; 6)$, tehát $P = H_1$, $Q = H_2$.

3745. CE: $dx + cy = d(d + b) + c^2$, E; $\left.\begin{array}{l} dx + cy = d^2 + db + c^2 \\ \underline{x = 0} \end{array}\right\} \Rightarrow$

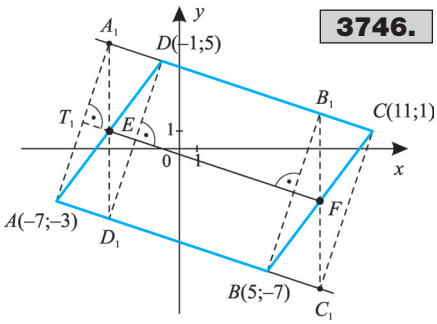


$\Rightarrow E\left(0; \frac{c^2 + d^2 + bd}{c}\right)$. $\overrightarrow{ED}\left(d; -\frac{d^2 + bd}{c}\right)$. $\overrightarrow{AC}(b + d; c)$, $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AC} = bd + d^2 - d^2 - bd = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{ED} \perp \overrightarrow{AC}$. Ha a paralelogramma téglalap, akkor $E = D$. A feladat állítása elemi úton is könnyen belátható. Az ACE háromszögben CD, illetve AD magasságvonalak, metszéspontja D, a háromszög magasságpontja. Így ED a harmadik magasságvonal.

3746. $C(c; 1)$, $D(-1; d)$, $A(-7; 3)$, $B(5; -7)$. $\frac{c - 7}{2} = \frac{-1 + 5}{2} \Rightarrow c = 11 \Rightarrow C(11; 1)$, $\frac{d - 7}{2} = \frac{1 - 3}{2} \Rightarrow d = 5 \Rightarrow D(-1; 5)$. $E(-4; 1)$, $F(8; -3)$, $\overrightarrow{EF}(12; -4) \Rightarrow \mathbf{n}(1; 3)$. EF: $x + 3y = -1$ egyenesre tükrözzük a paralelogramma csúcsait. EF-re merőleges egyenesek normálvektora: $\mathbf{n}(3; -1)$. AT_1: $3x - y = -18$. $AT_1 \cap EF = T_1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x - y = -18 \,/\cdot 3 \\ \underline{x + 3y = -1} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow T_1\left(-\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right)$. A-t T_1-re tükrözve: $A_1(-4; 6)$. A_1-t E-re tükrözve kapjuk a $D_1(-4; -4)$ pontot. Mivel $A_1D_1 \perp$ az x tengelyre, B_1C_1 is merőleges, ezért B_1C_1 egyenlete: $x = 8$. $\overrightarrow{DC}(12; -4) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{n}(1; 3)$, CD: $x + 3y = 14 \Rightarrow B_1(8; 2)$. B_1-et F-re tükrözve: $C_1(8; -8)$.

3747. $\overrightarrow{AB}(8; 4) \Rightarrow \mathbf{n}(1; -2)$, GH egyenlete: $x - 2y = -3$, BC egyenlete: $x = 8$, AD egyenlete $x = 0$. Innen: $G\left(0; \frac{3}{2}\right)$, $H\left(8; \frac{11}{2}\right)$. AB egyenlete: $x - 2y = 0$, DC egyenlete: $x - 2y = -12$, EF egyenlete $x = 5$. Innen: $F\left(5; \frac{5}{2}\right)$, $E\left(5; \frac{17}{2}\right)$. $\overrightarrow{FH}(3; 3) \Rightarrow \mathbf{n}(1; -1)$, FH egyenlete: $x - y = \frac{5}{2}$, $\overrightarrow{AC}(8; 10) \Rightarrow \mathbf{n}(5; -4)$, AC egyenlete: $5x - 4y = 0$, $\overrightarrow{GE}(5; 7) \Rightarrow \mathbf{n}(7; -5)$, GE egyenlete: $7x - 5y = -\frac{15}{2}$. $GE \cap FH = M \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 7x - 5y = -\frac{15}{2} \\ \underline{x - y = \frac{5}{2} \,/\cdot 5} \end{array}\right\} - \Rightarrow$



$\Rightarrow M\left(-10; -\frac{25}{2}\right)$. AC egyenletébe behelyettesítve: $-50 + 4 \cdot \frac{25}{2} = 0$, így mindhárom egyenes átmegy az M ponton.

3748. Tükrözzük a C pontot az AB felezőmerőlegesére. *a)* $F\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB}(-6;7) \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathbf{n}(-6;7)$. A felezőmerőleges f: $-6x+7y=\frac{5}{2}$. $e \perp f$, e: $7x+6y=-1$. $T\left(-\frac{22}{85};\frac{23}{170}\right)$. C-t T-re tükrözve: $D\left(\frac{41}{85};-\frac{62}{85}\right)$. *b)* $D\left(-\frac{23}{13};\frac{2}{13}\right)$; *c)* $D(1{,}2;-6{,}4)$.

3749. *I. megoldás:* $AC=\sqrt{164}=2\sqrt{41}$. $t=\frac{AC\cdot BD}{2}=41 \Rightarrow BD=\sqrt{41}$.

V

$AM:MC=3:2 \Rightarrow M\left(\frac{24}{5};6\right)$. $MC=\frac{2}{5}2\cdot\sqrt{41}=\frac{4}{5}\sqrt{41}$. $MB=\frac{5}{8}MC \Rightarrow \frac{5}{8}\overrightarrow{MC}\left(2;\frac{5}{2}\right)$ $+90°$-os elforgatottja $\overrightarrow{MB}\left(-\frac{5}{2};2\right)$, $-90°$-os elforgatottja $\overrightarrow{MD}\left(\frac{5}{2};-2\right)$. $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MD}$. Innen $B(7{,}3;4)$, $D(2{,}3;8)$.

II. megoldás: $MB=\frac{\sqrt{41}}{2}$, $M\left(\frac{24}{5};6\right)$. B, illetve D az AC-re M-ben állított merőlegesre illeszkedik $\left(4x+5y=\frac{246}{5}\right)$, illetve $\frac{\sqrt{41}}{2}$ egység távolságra van M-től. Így B-t, illetve D-t az

$$\left.\begin{array}{r}\left(x-\frac{24}{5}\right)^2+(y-6)^2=\frac{41}{4}\\ 4x+5y=\frac{246}{5}\end{array}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja.

3750. *a)* Legyen $A(-a;0)$, $B(a;0)$, $M(m;0)$. Ekkor $D(-a;a+m)$, $C(a;a-m)$, CD felezőpontja $F(0;a)$, $\overrightarrow{DC}(2a;-2m) \Rightarrow \mathbf{n}(a;-m)$. CD felezőmerőlegese: $ax-my=-am$. AB felezőmerőlegese: $x=0 \Rightarrow P(0;a)$, ha $m \neq 0$. Ha $m=0$, akkor a két felezőmerőleges egybeesik. *b)* $\overrightarrow{CD}(a;-m) \Rightarrow \mathbf{n}(m;a)$, CD: $mx+ay=a^2$. MN: $\mathbf{n}(a;-m)$, $ax-my=am$. $CD \cap MN=N$;

$$\left.\begin{array}{r}ax-my=am\\ mx+ay=a^2\end{array}\right\} \Rightarrow N\left(\frac{2a^2m}{a^2+m^2};\frac{a^3-a^2m^2}{a^2+m^2}\right).$$

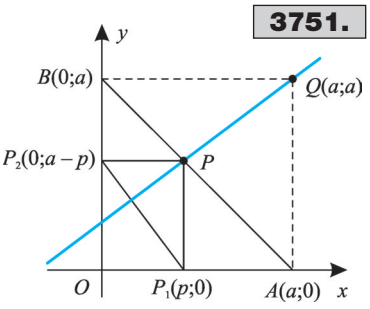
$\overrightarrow{AN}\left(\frac{2a^2m+a^3+am^2}{a^2+m^2};\frac{a^3-a^2m}{a^2+m^2}\right)$;

$\overrightarrow{BN}\left(\frac{2a^2m-a^3-am^2}{a^2+m^2};\frac{a^3-a^2m}{a^2+m^2}\right)$;

$$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BN}=\frac{(2a^2m)^2-(a^3+am^2)^2+(a^3-a^2m)^2}{(a^2+m^2)^2}=$$

$$=\frac{4a^4m^2-4a^4m^2}{(a^2+m^2)^2}=0.$$

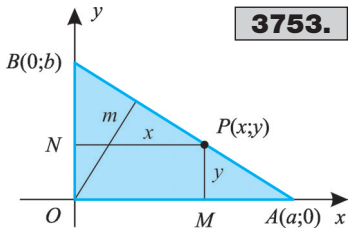
3751.



3751. Legyen $0<p<a$, $P(p;a-p)$, $\overrightarrow{P_2P_1}(p;p-a)$, P-ből P_1P_2-re bocsátott merőleges egyenlete: $px+(p-a)y=$ $=p^2-(p-a)^2 \Rightarrow px+(p-a)y=2pa-a^2$. Bármely p-re $Q(a;a)$, pont koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét.

3752. Legyen O az origó, $K(k_1; k_2)$, $L(l_1; l_2)$, $M\left(\frac{k_1+l_1}{2}; \frac{k_2+l_2}{2}\right)$, $K_1(-k_2; k_1)$, $L_1(l_2; -l_1)$. $\overrightarrow{K_1L_1}[(l_2+k_2);(l_1+k_1)]$. $\overrightarrow{OM}$-nak a $-90°$-os elforgatottja $\left(\frac{k_2+l_2}{2}; -\frac{k_1+l_1}{2}\right)$, ennek kétszerese. $\overrightarrow{K_1L_1}$. Ebből következik, hogy $\overrightarrow{K_1L_1} = 2 \cdot \overrightarrow{OM}$ és $\overrightarrow{K_1L_1} \perp \overrightarrow{OM}$.

3753.



$\left.\begin{matrix} PM^2 + PN^2 = x^2 + y^2 \\ OP^2 = x^2 + y^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow PM^2 + PN^2 = OP^2$, OP^2 akkor minimális, ha $OP \perp AB$. Az OAB háromszög területe: $t = \frac{ab}{2} = \frac{AB \cdot m}{2} \Rightarrow m = \frac{ab}{AB}$, ahol $AB = \sqrt{a^2+b^2}$. Így a keresett minimum: $m = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

3754. Legyen $A(a; 0)$, $B(b; 0)$, $C(0; c)$, $P(x; y)$. $PB^2 + PC^2 = 2 \cdot PA^2 \Rightarrow (x-b)^2 + y^2 + x^2 + (y-c)^2 = 2(x-a)^2 + 2y^2 \Rightarrow (4a-2b)x - 2cy = 2a^2 - b^2 - c^2$, ami egyenes egyenlete.

Pont és egyenes távolsága. Területszámítás

3755. *a)* $\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{9+16} = 5$, $\frac{3x+4y+20}{5} = 0$; *b)* $\frac{6x-8y+15}{10} = 0$; *c)* $\frac{\sqrt{2}\,x + \sqrt{7}\,y - 3}{3} = 0$; *d)* $\frac{x-y+3}{\sqrt{2}} = 0$.

3756. *a)* Az origón átmenő, az adott egyenesre merőleges egyenes egyenlete: $x - y = 0$.

$M: \left.\begin{matrix} x+y=1 \\ x-y=0 \end{matrix}\right\} + \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

$d = MO = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $d = \left|\frac{0 - 2 \cdot 0 + 3}{\sqrt{5}}\right| = \frac{3}{\sqrt{5}}$. *c)* $d = \frac{12}{5}$; *d)* $d = \frac{3}{10}$; *e)* $d = \frac{c}{\sqrt{A^2+B^2}}$;

f) $\frac{x - y + 2^{10}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow d = \frac{2^{10}}{\sqrt{2}} = 512\sqrt{2}$.

3757. $\mathbf{n}(4; 3)$, $A(-2; 15) \Rightarrow m: 4x + 3y = 37$.

$\left.\begin{matrix} 3x - 4y = -16 \,/\cdot 3 \\ 4x + 3y = 37 \,/\cdot 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 9x - 12y = -48 \\ 16x + 12y = 148 \end{matrix}\right\} + \Rightarrow 25x = 100$. $x = 4$, $y = 7$, $M(4; 7)$.

$d = MA = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$.

3758. *a)* $P(1;2)$, $f \perp e$, $f:\ y-2=\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

$M:\ \left.\begin{array}{l} y=-2x+2 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{1}{5};\frac{8}{5}\right)$; $d=MP=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{20}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) $d=\left|\frac{4\cdot(-3)-3\cdot 2-7}{5}\right|=\left|\frac{-25}{5}\right|=5$; *c)* $d=\frac{47}{5}$; *d)* $d=7\sqrt{2}$; *e)* $d=3$;

f) $d=\frac{1}{\sqrt{13}}$; *g)* $d=\frac{8\sqrt{10}}{5}$.

3759. $d=\frac{27\sqrt{10}}{10}$.

3760. Az $A(7;3)$, $B(5;4)$ pontok kielégítik az egyenes egyenletét. Ezért:

$\left.\begin{array}{l} 7a+b=3 \\ 5a+b=4 \end{array}\right\} -\Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{13}{2}$. Innen $y=-\frac{1}{2}x+\frac{13}{2} \Rightarrow x+2y-13=0$.

$d=\left|\frac{2+2(-6)-13}{\sqrt{5}}\right|=\frac{23}{\sqrt{5}}=\frac{23\sqrt{5}}{5}$.

3761. $S(3;5)$, AB egyenlete: $5x-2y=11$. $d=\left|\frac{15-10-11}{\sqrt{29}}\right|=\frac{6}{\sqrt{29}}$. BC egyenlete:

$x-4y=-23$. $d=\left|\frac{3-20+23}{\sqrt{17}}\right|=\frac{6}{\sqrt{17}}$. AC egyenlete: $2x-y=8$. $d=\left|\frac{6+5-8}{\sqrt{5}}\right|=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

3762. $S\left(-\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right)$. m_b egyenlete: $x+2y=8$.

$d=\left|\frac{-\frac{2}{3}+\frac{20}{3}-8}{\sqrt{5}}\right|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3763. $A\ (2;1)$, $B(0;0)$, $C(0;3)$. $m_a=2$; $m_b=\frac{3}{\sqrt{2}}$; $m_c=\frac{6}{\sqrt{5}}$.

3764. $A(-4;6)$, $B(-2;-3)$, $C(4;5)$. $m_a=7$; $m_b=\frac{70}{\sqrt{65}}$; $m_c=\frac{70}{\sqrt{85}}$.

3765. *a)* $A(0;0)$, $B(3;4)$, $C(7;-1)$. $AB=5$, $\overrightarrow{AB}(3;4) \Rightarrow \mathbf{n}(4;-3)$, $4x-3y=0$.

$m_c=\left|\frac{28+3}{5}\right|=\frac{31}{5}$, $t=\frac{5\cdot\frac{31}{5}}{2}=\frac{31}{2}$ területegység. *b)* Foglaljuk az ABC háromszöget a $CPQR$ téglalapba. Ekkor $t=t_{CPQR}-t_{CPB}-t_{BQA}-t_{CRA}$, $t=7\cdot 8-\frac{6\cdot 7}{2}-\frac{2\cdot 6}{2}-\frac{8\cdot 1}{2}=$

$=56-21-6-4=25$ területegység. *c)* 7 területegység.

3766. $d_{p,e}=\dfrac{0+8+5}{\sqrt{20}}=\dfrac{13}{\sqrt{20}}>0$, $d_{Q,e}=\dfrac{2+16+5}{\sqrt{20}}>0\Rightarrow$ a két pont az egyenes ugyanazon oldalán van.

3767. *a)* Válasszuk ki az $A(0;-6)$ pontot a $3x-y=6$ egyenletű egyenesen, és számítsuk ki A távolságát a másik egyenestől. $\mathbf{v}(3;-1)\Rightarrow\mathbf{n}(1;3)$, $x+3y=-18$ a merőleges egyenlete.

$\left.\begin{array}{r}3x-y\quad=8\\ x+3y=-18\end{array}\right\}\Rightarrow M\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{31}{50}\right)$. $d=MA=\sqrt{\dfrac{9}{25}+\dfrac{1}{25}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

b) $P\in e_1$, $P(-5;0)$, $d_{P,e_2}=\left|\dfrac{-5+0-3}{\sqrt{5}}\right|=\dfrac{8}{\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$. *c)* $\dfrac{14\sqrt{5}}{5}$; *d)* $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

3768. A két egyenes távolsága adja a négyzet oldalának hosszát. A $3x-5y=10$ egyenletű egyenes egy pontja: $P(0;-2)$. $d=\left|\dfrac{0-5(-2)-4}{\sqrt{34}}\right|=\dfrac{6}{\sqrt{34}}\Rightarrow\ t=\dfrac{36}{34}=\dfrac{18}{17}$ területegység.

3769. $P(k;l)$, $k,l\in\mathbf{Z}$. $d=\left|\dfrac{3l-4l+4}{5}\right|\in\mathbf{Q}$.

3770. *a)* A $3x+4y+25=0$ egyenletű egyenes egy pontja: $P(-3;-4)$. Az adott egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete: $3x+4y+c=0$. $\left|\dfrac{-9-16+c}{5}\right|=1\Rightarrow|c-25|=5\Rightarrow c_1=30$, $c_2=20$. A keresett egyenesek: $3x+4y+30=0$, $3x+4y+20=0$. *b)* $4x+3y+16=0$, illetve $4x+3y-14=0$. *c)* $x-y-8=0$, illetve $x-y-4=0$.

3771. *a)* $x-y=6$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete $f: x-y+c=0$, $O(0;0)$. $d_{0f}=\left|\dfrac{0-0+c}{\sqrt{2}}\right|=6\Rightarrow|c|=6\sqrt{2}\Rightarrow c=\pm6\sqrt{2}$, $f: x-y\pm6\sqrt{2}=0$. Ha $d=2\sqrt{6}$, akkor $x-y\pm4\sqrt{3}=0$. *b)* $3x+4y+5=0$, illetve $3x+4y+15=0$. *c)* $x+3y+5=0$, illetve $x+3y-5=0$. *d)* $y=x+1\pm3\sqrt{2}$.

3772. Legyen $\mathbf{n}(1;n)\Rightarrow x+ny=-4+3n\Rightarrow\dfrac{x+ny+4-3n}{\sqrt{n^2+1}}=0$. $\dfrac{|4-3n|}{\sqrt{n^2+1}}=4\Rightarrow$

$\Rightarrow n_1=0$, $n_2=-\dfrac{24}{7}\Rightarrow x+4=0$, illetve $7x-24y+100=0$.

3773. Legyen $\mathbf{n}(1;n)\ \Rightarrow\dfrac{x+ny+1-2n}{\sqrt{n^2+1}}=0$, $\left|\dfrac{6+n+1-2n}{\sqrt{n^2+1}}\right|=5\Rightarrow\ n_1=\dfrac{3}{4}\Rightarrow x+\dfrac{3}{4}y=$

$=-1+\dfrac{6}{4}\Rightarrow 4x+3y=2$, $n_2=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow x-\dfrac{4}{3}y=-1-\dfrac{8}{3}\Rightarrow 3x+4y=-11$.

3774. $P(p;0)$, $4x-3y+12=0\Rightarrow\dfrac{4x-3y+12}{5}=0$. $\left|\dfrac{4p+4}{5}\right|=10\Rightarrow\ p_1=\dfrac{19}{2}$, $p_2=-\dfrac{31}{2}$,

$P_1=\left(\dfrac{19}{2};0\right)$, $P_2=\left(-\dfrac{31}{2};0\right)$.

V

3775. Az $A(1;2)$ és $B(3;-5)$ pontoktól egyenlő távolságra a felezőmerőleges pontjai vannak. $f\colon 2x-7y=\frac{29}{2}\Rightarrow 4x-14y=29$. A $2x-y-3=0$ egyenes egy pontja $P(1;-1)$.

e: a $2x-y-3=0$ egyenestől 2 egységre haladó párhuzamos egyenesek. $e\colon 2x-y+c=0$.

$\left|\frac{2+1+c}{\sqrt{5}}\right|=2\Rightarrow |c+3|=2\sqrt{5}$. $c_1=2\sqrt{5}-3$, $c_2=-2\sqrt{5}-3$. $e_1\colon 2x-y=3-2\sqrt{5}$,

$e_2\colon 2x-y=3+2\sqrt{5}$. $e_1\cap f=P_1$; $\left.\begin{array}{r}2x-y=3-2\sqrt{5}\\ 4x-14y=29\end{array}\right\}\Rightarrow P_1\left(\frac{13-28\sqrt{5}}{24};\frac{23+4\sqrt{5}}{12}\right)$;

$e_2\cap f=P_2$; $\left.\begin{array}{r}2x-y=3+2\sqrt{5}\\ 4x-14y=29\end{array}\right\}\Rightarrow P_2\left(\frac{13+28\sqrt{5}}{24};\frac{4\sqrt{5}-23}{12}\right)$.

3776. Ha $N_1=0$, $N_2=0$ a két egyenes normálegyenlete, akkor azon P pontok mértani helye, amelyek a két egyenestől egyenlő távolságra vannak: $N_1^2=N_2^2\Rightarrow (N_1-N_2)(N_1+N_2)=0$. $N_1-N_2=0$, illetve $N_1+N_2=0$ a szögfelezők egyenlete. *a)* $4x+5y-3=0\Rightarrow\frac{4x+5y-3}{\sqrt{41}}=0$,

$5x-4y+10=0\Rightarrow\frac{5x-4y+10}{\sqrt{41}}=0$, $\frac{4x+5y-3}{\sqrt{41}}+\frac{5x-4y+10}{\sqrt{41}}=0\Rightarrow 9x+y+7=0$,

$\frac{4x+5y-3}{\sqrt{41}}-\frac{5x-4y+10}{\sqrt{41}}=0\Rightarrow x-9y+13=0$.

b) $\left(3-\sqrt{5}\right)x+\left(\sqrt{5}-1\right)y-\sqrt{5}=0$, $\left(3-\sqrt{5}\right)x-\left(1+\sqrt{5}\right)y+\sqrt{5}=0$.

c) $4x-2y-5=0$, $-2x-4y+10=0$. *d)* $x+y-8=0$ vagy $x-y+2=0$.

3777. Az egyenes és az x tengely által alkotott szögfelezők egyenlete: $\frac{4x-3y+1}{5}+y=$

$=0\Rightarrow 4x+2y+1=0$, $\frac{4x-3y+1}{5}-y=0\Rightarrow 4x-8y+1=0$. Az egyenes és az y tengely által alkotott szögfelezők egyenlete:

$\frac{4x-3y+1}{5}+x=0\Rightarrow 9x-3y+1=0$, illetve $\frac{4x-3y+1}{5}-x=0\Rightarrow x+3y-1=0$.

3778. AB: $12x-5y=-60$. Mivel AB normálvektora a háromszög belsejébe mutat, ezért a belső pontok távolsága AB-re is, AC-re is pozitív.

AC egyenlete: $y=0$. $\overrightarrow{BC}(9;-12)\Rightarrow\mathbf{n}(-4;-3)$, BC egyenlete: $-\frac{4x-3y+36}{5}=0$.

$f_\alpha\colon\frac{12x-5y+60}{13}=y\Rightarrow 2x-3y+10=0$, $f_\beta\colon\frac{12x-5y+60}{13}=\frac{-4x-3y+36}{5}\Rightarrow$,

$\Rightarrow 8x+y-12=0$, $f_\gamma\colon\frac{-4x-3y+36}{5}=y\Rightarrow x+2y-9=0$. $f_\alpha\cap f_\beta$; $\left.\begin{array}{r}2x-3y=-10\\ 8x+y=12\end{array}\right\}\Rightarrow O(1;4)$

és ez kielégíti f_γ egyenletét. A beírható kör középpontja $O(1;4)$, $r=4$. A belső és külső szögfelezők merőlegesek. $f_{\beta'}\colon\mathbf{n}(1;-8)\Rightarrow x-8y=-96$; $f_{\gamma'}\colon 2x-y=18$. $f_{\beta'}\cap f_{\gamma'}$; $\left.\begin{array}{r}x-8y=-96\\ 2x-y=18\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow P(16;14)$, ez a pont kielégíti f_α egyenletét.

3779. A $P(2;\ 5)$ ponton átmenő egyenes normálvektora legyen $\mathbf{n}(1;\ n)$; egyenlete: $x+ny=2+5n \Rightarrow \dfrac{x+ny-5n-2}{\sqrt{n^2+1}}=0$. $d_{A,e}=2\cdot d_{BE} \Rightarrow$

$$\left|\frac{5+3n-5n-2}{\sqrt{n^2+1}}\right|=2\cdot\left|\frac{-1-5n-2}{\sqrt{n^2+1}}\right| \Rightarrow |-2n+3|=2\cdot|-5n-3| \Rightarrow 2(-5n-3)=-2n+3$$

vagy $2(-5n-3)=2n-3$, ahonnan: $n=-\dfrac{9}{8}$ vagy $n=-\dfrac{1}{4}$. Így e_1: $8x-8y=-29$

vagy e_2: $4x-y=3$.

3780. e_1: $\dfrac{5x-3y-6}{\sqrt{34}}=0$, e_2: $\dfrac{5x-3y-12}{\sqrt{34}}=0$, $P(3;b)$.

$$\left|\frac{5x-3y-6}{\sqrt{34}}\right|=\left|\frac{15-3b-12}{\sqrt{34}}\right| \Rightarrow |3-b|=|1-b| \Rightarrow 3-b\neq 1-b;\quad 3-b=b-1 \Rightarrow b=2.$$

3781. Legyen $\mathbf{n}(1;n) \Rightarrow x+ny=2+5n \Rightarrow \dfrac{x+ny-5n-2}{\sqrt{n^2+1}}=0$,

$$2\cdot\left|\frac{5+3n-5n-2}{\sqrt{n^2+1}}\right|=3\cdot\left|\frac{-1-5n-2}{\sqrt{n^2+1}}\right| \Rightarrow 2|2n-3|=3|5n+3|,$$

$n_1=-\dfrac{3}{19}$, $n_2=-\dfrac{15}{11}$. e_1: $19x-3y=23$, e_2: $11x-15y=-53$.

3782. Mivel $e_1 \parallel e_2$, a keresett pont az adott e: $x+y=6$ egyenletű egyenes és az e_1, e_2, középpárhuzamosának: k-nak a metszéspontja. e_1: $3x-4y=-12$, e_2: $3x-4y=8$, $\left.\begin{matrix}E_1(0;\ 3)\\ E_2(0;\ -2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow K\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)$. k: $3x-4y=-2$. $k\cap e=P$; $\quad P\left(\dfrac{22}{7};\ \dfrac{20}{7}\right)$.

3783. e_1: $\dfrac{2x-y+8}{\sqrt{5}}=0$, e_2: $\dfrac{x-2y-12}{\sqrt{5}}=0$, $P(5;0)$. d_1: $\dfrac{10+8}{\sqrt{5}}=\dfrac{18}{\sqrt{5}}>0$, d_2: $\dfrac{5-12}{\sqrt{5}}=$

$=-\dfrac{7}{\sqrt{5}}<0$, ezért a szögfelező: $\dfrac{2x-y+8}{\sqrt{5}}=-\dfrac{x-2y-12}{\sqrt{5}} \Rightarrow 3x-3y=4$. Az alap egyenese: $\mathbf{n}(1;\ 1) \Rightarrow x+y=5$. A csúcsok: $\left.\begin{matrix}2x-y=-8\\ x+y=5\end{matrix}\right\}+\Rightarrow(-1;\ 6)$; $\quad\left.\begin{matrix}x-2y=12\\ x+y=5\end{matrix}\right\}-\Rightarrow\left(\dfrac{22}{3};\ -\dfrac{7}{3}\right)$;

$\left.\begin{matrix}2x-y=8/\cdot 2\\ x-2y=12\end{matrix}\right\}-\Rightarrow\left(-\dfrac{28}{3};\ -\dfrac{32}{3}\right)$.

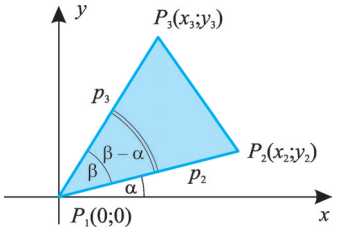
3784. $P'(11;\ -11)$.

3785. A visszavert fénysugár egyenlete: $8x-y=-76$. A beeső fénysugár egyenlete: $4x-7y=-64$.

3786. A visszavert fénysugár: $29x-2y+33=0$.

3787. e: $2x-y=5$. Tükrözzük A-t e-re, a tükörkép legyen A_1. A_1B szakasz a két pont között a legrövidebb. A_1B messe e-t M-ben. Mivel $A_1M=AM$, így M a keresett pont. $M(2;\ -1)$.

3788.



3788. $T=\frac{1}{2}\cdot p_2\cdot p_3\cdot\sin(\beta-\alpha)=$

$=\frac{1}{2}p_2\cdot p_3(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)=$

$=\frac{1}{2}\cdot(p_3\sin\beta\cdot p_2\cdot\cos\alpha-p_3\cos\beta\cdot p_2\cdot\sin\alpha)$.

Mivel $p_3\cdot\sin\beta=y_3$; $p_2\cdot\cos\alpha=x_2$; $p_3\cdot\cos\beta=x_3$;

$p_2\cdot\sin\alpha=y_2$, ezért $T=\frac{1}{2}\left|x_2\cdot y_3-x_3\cdot y_2\right|$.

V

3789. A háromszög területe $t=\frac{1}{2}\left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right|$ ahol $\mathbf{a}(x_2-x_1;\ y_2-y_1;0)$, $\mathbf{b}(x_3-x_1;\ y_3-y_1;0)$, Alkalmazzuk a vektoriális szorzat **i**, **j**, **k** együtthatóinak kiszámítására vonatkozó összefüggést. Ekkor a bizonyítandó területképletet kapjuk.

3790. *a)* $P_1(-2;-1)$, $P_2(6;1)$, $P_3(1;6)$. $t=\frac{1}{2}\left|-2(1-6)+6(6+1)+1\cdot(-1-1)\right|=$

$=\frac{50}{2}=25$ területegység. *b)* 20 területegység. *c)* $A(0;\ 0)$, $B(2;\ 5)$, $C(7;\ -1)$. $\overrightarrow{AC}(7;\ -1)$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{50}$, $\overrightarrow{BC}(2;\ 5)$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{29}$. $14-5=\sqrt{50}\cdot\sqrt{29}\cos\alpha$. $\cos\alpha=\frac{9}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{29}}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sin\alpha=\frac{37}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{29}}\Rightarrow t=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{37}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{29}}=\frac{37}{2}$ területegység. *d)* 3,5 területegység, *e)* $A(4;0)$, $B(-4;0)$, $C(3;8)$. $t=\frac{AB\cdot m_2}{2}=\frac{8\cdot8}{2}=32$ területegység. *f)* 13 területegység.

3791. $m_a=\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. $m_b=\frac{21}{\sqrt{37}}$, $m_c=\frac{21}{5}$.

3792. $A(5;1)$, $B(-2;2)$, $C(c;0)$, $t=10$. $10=\frac{1}{2}\left|5(2-0)-2(0-1)+c(1-2)\right|\Rightarrow$

$\Rightarrow\left|12-c\right|=20$. $c_1=32$, $c_2=-8$; $C_1=(32;0)$, $C_2=(-8;0)$.

3793. $A(-1;-1)$, $B(5;2)$, $AB=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$. $t=15=\frac{AB\cdot m_c}{2}\Rightarrow m_c=2\sqrt{5}$. A harmadik csúcs az AB-vel párhuzamos, A-tól, illetve B-től $2\sqrt{5}$ távolságra levő egyenesen van:

$\frac{x-2y+c}{\sqrt{5}}=0$. $\frac{\left|-1+2+c\right|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}\Rightarrow\left|c+1\right|=10\Rightarrow c_1=9$, $c_2=-11$. e_1: $x-2y+9=0$, e_2: $x-2y-11=0$. A C csúcs a kapott egyeneseken, $P(5;2)$-től 5 egységnyire van. $PC=5\Rightarrow$

$\Rightarrow PC^2=25$. $\left.\begin{matrix}(x-5)^2+(y-2)^2=25\\ x-2y+9=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow C_1(5;\ 7)$, $C_2(1;\ 5)$, illetve $\left.\begin{matrix}(x-5)^2+(y-2)^2=25\\ x-2y-11=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow C_3(9;\ -1)$, $C_4(5;\ -3)$.

3794. $AB=5$, $\frac{5m_c}{2}=8\Rightarrow m_c=\frac{16}{5}$. $\overrightarrow{AB}(4;\ -3)\Rightarrow\mathbf{n}(3;\ 4)$, $3x+4y=12\Rightarrow\frac{3x+4y-12}{5}=0$.

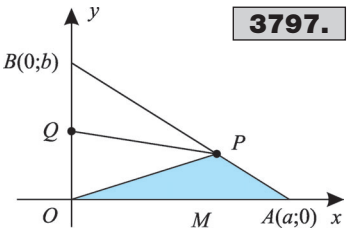
$\left|\frac{3x+20-12}{5}\right|=\frac{16}{5}\Rightarrow\left|3x+8\right|=16\Rightarrow x_1=\frac{8}{3}$, $x_2=-8$. A feltétel miatt $C\left(\frac{8}{3};\ 5\right)$.

3795. *a)* 14,5 területegység; *b)* 39,5 területegység; *c)* 75 területegység; *d)* 30 területegység; *e)* 7 területegység.

3796. $AC = 15$, $BD = 10$; $AB = 5\sqrt{5}$; $AD = 5\sqrt{5}$; $AB = AD$ és $AC \perp BD \Rightarrow$ a négyszög deltoid.

$t = \dfrac{AC \cdot BD}{2} = 75$ területegység.

3797. Mivel $t_{OAP} = \dfrac{1}{3} t_{OAB}$, P az AB szakasz A-hoz közelebb eső harmadolópontja: $P\left(\dfrac{2a}{3}; \dfrac{b}{3}\right)$. $t_{OPQ} = t_{BQP} \Rightarrow$ Q az OB szakasz felezőpontja: $Q\left(0; \dfrac{b}{2}\right)$.



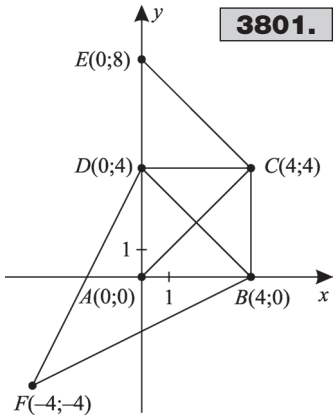
3797.

3798. A háromszög csúcsai: $C\left(0; -10^{-6}\right)$; $B\left(-10^3; 0\right)$; $A\left(10^3; 10^{-6}\right)$. $AC = 10^3$, $m_b = 10^{-6} \Rightarrow t = \dfrac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = \dfrac{1}{2000}$ területegység.

3799. $\left|\dfrac{c}{3}\right| = 1 \Rightarrow c_1 = 3$ $c_2 = -3$. $A(-1; 1)$, $B(1; 2)$, $C_1(3; 0)$. $t = 3$ területegység. $A(-1; 1)$, $B(1; 2)$, $C_2(-3; 0)$ egy egyenesre esnek, ilyen háromszög nem létezik.

3800. Az m_c az y tengely, ezért AB párhuzamos az x tengellyel, egyenlete $y = 9$. AC egyenlete: $y = mx - 7$, $(m > 0) \Rightarrow m_b$: $y = -\dfrac{1}{m} x$. $A\left(\dfrac{16}{m}; 9\right)$; $B(-9m; 9)$. $AB = \dfrac{16}{m} + 9m \geq 2\sqrt{\dfrac{16}{m} \cdot 9m} = 24$, $AB \geq 24$. Minimuma akkor van, ha $\dfrac{16}{m} = 9m \Rightarrow m = \dfrac{4}{3}$. $A(12; 9)$, $B(-12; 9)$, $AB = 24$, $m_c = 16$, $t = 192$ területegység.

3801. *a)* $P \cup Q$, $t_{ABCD} + t_{CDE} = 16 + 8 = 24$ területegység. *b)* $Q \cup R$, $t_{BDF} + t_{AEC} - t_{ADM} = 24 + 16 - 4 = 36$ területegység. *c)* $R \cup P$, $t_{ABCD} + t_{BDF} - \dfrac{1}{2} t_{ABCD} = 24 + 8 = 32$ területegység.



3801.

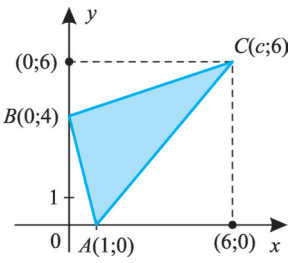
3802. $\overrightarrow{AB}(2; -4) \Rightarrow \mathbf{n}_{AB}(2; 1) \Rightarrow AB \parallel e \Rightarrow m_c = d_{A,e}$.

$d_{A,e} = \left|\dfrac{-3 + 4 - 10}{\sqrt{5}}\right| = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$;

$AB = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

$t = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{\sqrt{5}} \cdot 4\sqrt{5} = 18$ területegység.

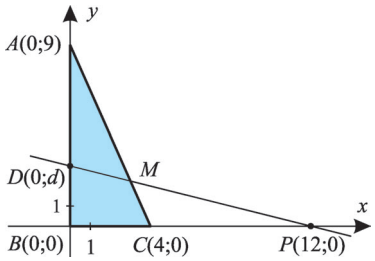
3803. $AB = 4$, AB: $y = 5$, $C(c; 7) \Rightarrow$ C rajta van az $y = 7$ egyenletű egyenesen. $\Rightarrow m_c = 2$, $t \neq 9$. Ilyen háromszög nem létezik. $6c - \dfrac{1 \cdot 4}{2} - \dfrac{2c}{2} - \dfrac{(c-1)6}{2} = 13 \Rightarrow c = 6$.



3803.

V

3806.



3804.
$\frac{1}{2}\left|1\left(q-q^2\right)+(1+d)\left(q^2-1\right)+(1+2d)(1-q)\right|=2001$, $q^2d-2dq+d=4002$, $(q-1)^2d=4002=2\cdot3\cdot23\cdot29$ miatt. $(q-1)^2=1\Rightarrow q=2$ vagy $q=0$, de a feladat feltételeinek ez utóbbi nem felel meg. $q=2$, $d=2001$. $B(4003;\ 2)$, $C(8005;\ 4)$.

3805. A $P(1;\ 6)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete: $y-6=m(x-1)$. A háromszög csúcsai: $\left.\begin{array}{r}x-2y=-4\\ y=0\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad A(-4;\ 0);\quad \left.\begin{array}{r}y=mx-m+6\\ y=0\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad B\left(\frac{m-6}{m};\ 0\right);$

$\left.\begin{array}{r}mx-y=m-6\\ x-2y=-4\end{array}\right\}\Rightarrow C\left(\frac{2(m-4)}{2m-1};\ \frac{5m-6}{2m-1}\right)$. $AB=\frac{m-6}{m}+4=\frac{5m-6}{m}$; $\quad m_c=\frac{5m-6}{2m-1}$;

$\frac{1}{2}\cdot\frac{(5m-6)^2}{m(2m-1)}=\frac{21}{2}\Rightarrow17m^2+39m-36=0$. $m_1=\frac{12}{17}$; $\quad m_2=-3$. A keresett egyenesek: $3x+y=9$, illetve $12x-17y+90=0$.

3806. $AD=9-d$, $0<d<9$, AC: $\frac{x}{4}+\frac{y}{9}=1$; $\quad DP$: $\frac{x}{12}+\frac{y}{d}=1$. $AC\cap DP=M$;

$\left.\begin{array}{r}y=9-\frac{9}{4}x\\ y=d-\frac{dx}{12}\end{array}\right\}\Rightarrow d-\frac{dx}{12}=9-\frac{9x}{4}\Rightarrow x=\frac{2(54-6d)}{27-d}$. $t_{ABC}=18$, $t_{ADM}=9=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(54-6d)}{27-d}\cdot(9-d)\Rightarrow2d^2-33d+81=0$. $d_1=3$; $\quad d_2=13{,}5$, ami nem megoldás. DM egyenlete: $x+4y=12$.

3807. $A(10;\ 0)$; $\quad B(0;\ 20)$; $\quad C(0;\ 0)$. Az átfogóra merőleges egyenes a hosszabbik befogót metszi, egyenlete: $y=\frac{1}{2}x+b$, ahol $0<b<20$. M: $\left.\begin{array}{r}2x+y=20\\ y=\frac{1}{2}x+b\end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{2(20-b)}{5}$.

$t=\frac{1}{2}\cdot\frac{20\cdot10}{2}=\frac{(20-b)\cdot\frac{2}{5}(20-b)}{2}\Rightarrow(20-b)^2=250$.

$b=20-5\sqrt{10}$ a feltétel miatt. A keresett egyenes: $y=\frac{1}{2}x+20-5\sqrt{10}$.

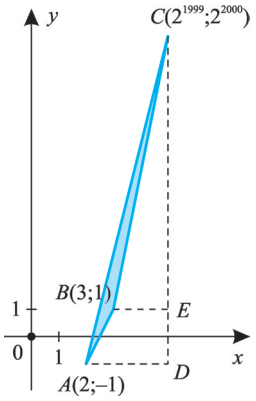
3808. S az AA_1 szakasz harmadolópontja: $\frac{2x+0}{3}=4$, $\frac{2y+6}{3}=6\Rightarrow A_1(6;6)$. $B(b;0)$; A_1 a BC felezőpontja $\Rightarrow C(c;12)$. Az AA_1B háromszög területének a kétszerese az ABC háromszög területe. $t_{ABC}=36$ területegység.

3809. $t_{ABC} = t_{ADC} - t_{BEC} - t_{ADEB} =$

$= \frac{1}{2}\left[\left(2^{2000}+1\right)\left(2^{1999}-2\right) - \left(2^{1999}-3\right)\left(2^{2000}-1\right) - \left(2^{1999}-2+2^{1999}-3\right)\cdot 2\right] =$

$= \frac{1}{2}\left(2^{2000} - 2\cdot 2^{1999} + 5\right) = \frac{5}{2}$ területegység.

3809.



3810. A háromszög harmadik csúcsa $C(c; -c)$. AB párhuzamos az x tengellyel $\Rightarrow m_c = c + 4$. CA messe az x tengelyt A_1-ben, CB pedig B_1-ben. $CA_1B_1\triangle \sim CAB\triangle \Rightarrow \frac{m_1^2}{m^2} = \frac{t_1}{t} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c^2}{(c+4)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{c}{c+4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow c = 4\left(\sqrt{2}+1\right)$. $C\left(4\left(\sqrt{2}+1\right); -4\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$.

3811. Legyen AC irányvektora $\mathbf{v}_1(7; 6)$ $AC: 6x - 7y = -10$. BC irányvektora $\mathbf{v}_2(1; 2)$ $BC: 2x - y = 10$. $AC \cap BC = C$; $C(10; 10)$. $AB = 4, m_c = 6 \Rightarrow t = 12$ területegység. Ha AC irányvektora $\mathbf{v}_2(1; 2) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ AC: $2x - y = 2$. BC irányvektora $\mathbf{v}_1(7; 6) \Rightarrow BC: 6x - 7y = 14$. $C(0; -2)$. Innen $m_c = 6$, $t = 12$ területegység.

3812. $A(0; 6), B(b; 0)$; $AB = 10 \Rightarrow b^2 + 36 = 100$, $b = \pm 8$. $B_1(8; 0), B_2(-8; 0)$. $C_1(10; 11)$. Hasonlóan $C_2(26; 11)$.

$t_{AB_1C_1} = 50$ területegység. $t_{AB_2C_2} = 58$ területegység.

3813. $A(4; 5), S(2; 3), B(b; 0)$ $C(0; c) \Rightarrow B(2; 0), C(0; 4)$. $t = 9$ területegység.

3814. $s_a \cap s_b = S$; $S(1; 1)$. $t_{ABC} = 3 \cdot t_{ABS} = 51$ területegység.

3815. $t_{ABC} = t_{ABCD} - t_{ACD} = \frac{9+8}{2}\cdot 1 - \frac{9\cdot 1}{2} = 4$ területegység. AC: $\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{9x} \\ \underline{x = k} \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{k}{9}$,

$E\left(k; \frac{k}{9}\right)$, $G(k; 1)$, $0 < k < 9$. $t_{CGE} = 2$, $\frac{1}{2}(9-k)\left(1 - \frac{k}{9}\right) = 2 \Rightarrow (9-k)^2 = 36$. $9 - k = \pm 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow k_1 = 3, k_2 = 15$, ami a feltételt nem elégíti ki. Tehát az egyenes: $x = 3$.

3816. $\overrightarrow{AD}(-3; 6)$, $\overrightarrow{AB}(8; 4) \Rightarrow \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$. $AD = 3\sqrt{5}$; $AD = 3\sqrt{5}$.

$t = \frac{4\sqrt{5} + CD}{2}\cdot 3\sqrt{5} = 52{,}5 \Rightarrow CD = 3\sqrt{5}$. $AD = CD$, ezért $\overrightarrow{CD}$ az $\overrightarrow{AD}$ $-90°$-os elforgatottja:

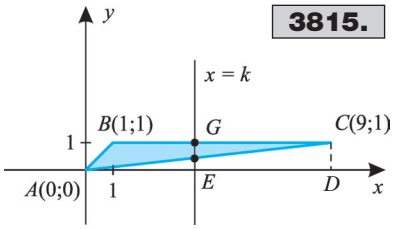
$\overrightarrow{CD}(6; 3) \Rightarrow C(5; 10)$.

3817. $AB = 10$, $\frac{10\cdot m_c}{2} = 40 \Rightarrow m_c = 8$. C rajta van az AB-vel párhuzamos, A-tól 8 egység távolságra levő e egyenesen. e: $\frac{3x - 4y + c}{5} = 0$,

$\left|\frac{3\cdot 6 - 4\cdot 8 + c}{5}\right| = 8 \Rightarrow |c - 14| = 40 \Rightarrow c_1 = 54, c_2 = -26$.

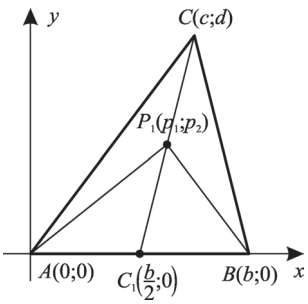
e_1: $3x - 4y + 54 = 0$, e_2: $3x - 4y - 26 = 0$. $C_1(-10; 6)$; $C_2(6; -2)$.

3815.



V

3819.

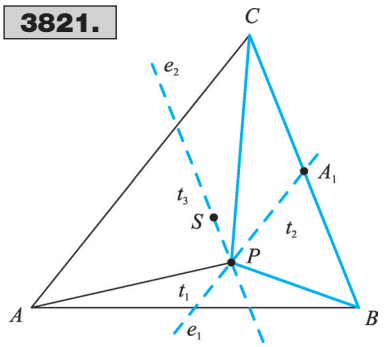


3818. $M\colon \left.\begin{array}{l} y=-\frac{1}{2}x+4 \\ y=mx \end{array}\right\}$. $M\left(\frac{8}{2m+1};\ \frac{8m}{2m+1}\right)$, $N\left(\frac{8}{2m+1};\ 0\right)$. $t_{OMN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{2m+1}\cdot\frac{8m}{2m+1}=\frac{32m}{4m^2+4m+1}=$ $=\frac{32}{4m+\frac{1}{m}+4}$, mert $m>0$. $4m+\frac{1}{m}\geq 2\sqrt{4m\cdot\frac{1}{m}}=4 \Rightarrow$ $\Rightarrow 4m+\frac{1}{m}+4\geq 8 \Rightarrow \frac{32}{4m+\frac{1}{m}+4}\leq 4$. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $4m=\frac{1}{m}\Rightarrow m=\frac{1}{2}$.

3819. $t_{ABP}=t_{BCP}=t_{ACP}=\frac{1}{3}t_{ABC}$. Legyen $P(p_1;p_2)$. $t_{ABC}=\frac{b\cdot d}{2}$, $t_{ABP}=\frac{b\cdot p_2}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{b\cdot d}{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow p_2=\frac{d}{3}$. $\overrightarrow{AC}(c;\ d)\Rightarrow AC\colon dx-cy=0\Rightarrow \frac{dx-cy}{\sqrt{d^2+c^2}}=0$, $m_b=\frac{bd}{\sqrt{d^2+b^2}}$. ACP háromszög P-ből induló magassága: $\frac{1}{3}\cdot\frac{bd}{\sqrt{d^2+b^2}}=\frac{p_1d-p_2c}{\sqrt{d^2+b^2}}\Rightarrow \frac{1}{3}bd=p_1d-\frac{d}{3}\ /\cdot c/\cdot d\neq 0$. $p_1=\frac{c+b}{3}$, $P\left(\frac{b+c}{3};\ \frac{d}{3}\right)$, $S\left(\frac{b+c}{3};\ \frac{d}{3}\right)\Rightarrow P=S$.

3820. $A_1(0;0)$, $B_1(a;a)$, $C_1(a+b;a-b)$, $D_1(b;-b)$. $\overrightarrow{A_1B_1}(a;\ a)$, $\overrightarrow{C_1D_1}(a;\ a)\Rightarrow$ $\Rightarrow A_1B_1\ \#\ C_1D_1\cdot\overrightarrow{A_1D_1}(b;\ -b)$. $\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=ab-ab=0\Rightarrow A_1B_1\perp A_1D_1\Rightarrow A_1B_1C_1D_1$ téglalap. $A_1B_1=a\sqrt{2}$; $A_1D_1=b\sqrt{2}$. $t_{ABCD}=AB$. $t_{A_1B_1C_1D_1}=a\cdot\sqrt{2}\cdot b\cdot\sqrt{2}=2ab$.

3821.



3821. $t_1:t_2:t_3=1:2:3$. Az ABC háromszög területe t. Ekkor: $t_1=\frac{1}{6}t$, $t_2=\frac{1}{3}t$, $t_3=\frac{1}{2}t$. Mivel $t_3=\frac{1}{2}t$, P rajta van az AC-vel párhuzamos középvonalon, $t_2=\frac{1}{3}t$, P rajta van a súlyponton átmenő BC-vel párhuzamos egyenesen. A két egyenes metszéspontja P. $S(7;8)$, BC felezőpontja $A_1(9;12)$, $\overrightarrow{AC}(-3;\ 9)\Rightarrow \mathbf{n}(3;\ 1)$, $e_1\colon 3x+y=39$. $\overrightarrow{CB}(18;\ 6)\Rightarrow \mathbf{n}(1;-3)$, $e_2\colon x-3y=-17$. $P=e_1\cap e_2$: $P(10;\ 9)$.

A kör

A kör egyenlete

3822. *a)* $x^2+y^2=16$; *b)* $4x^2+4y^2=25$; *c)* $16x^2+16y^2=3$; *d)* $4x^2+4y^2=9$.

3823. *a)* $x^2+y^2=16+49$; *b)* $x^2+y^2=5$; *c)* $x^2+y^2=a^2+b^2$.

3824. *a)* $(x-4)^2+(y-5)^2=9$, rendezve $x^2+y^2-8x-10y+32=0$;
b) $x^2+y^2-6x-6y+13=0$; *c)* $x^2+y^2+2x-6y-15=0$; *d)* $x^2+y^2-4x-8{,}25=0$;
e) $x^2+y^2+6y-4=0$; *f)* $x^2+y^2+10x+6y+32=0$.

3825. *a)* $x^2+y^2-8x-6y=0$; *b)* $x^2+y^2+6y-8y=0$; *c)* $x^2+y^2-2ax-2by=0$;
d) $x^2+y^2-10x+4y+3=0$; *e)* $x^2+y^2+4x-6y-10\sqrt{2}-4=0$. (A kör középpontjának koordinátái $C(-2;3)$).

3826. A kör egyenlete: $(x-2)^2+(y-3)^2=25$. Legyen $x=-1$. $y_1=7, y_2=-1$. Az ordináták rendre: $3+\sqrt{21}$ és $3-\sqrt{21}$ $3+2\sqrt{6}$ és $3-2\sqrt{6}$; 8 és -2; 8 és -2; $3+2\sqrt{6}$ és $3-2\sqrt{6}$ $3+\sqrt{21}$ és $3-\sqrt{21}$. Az abszcisszák rendre: $y=1$ esetén $2+\sqrt{21}$ és $2-\sqrt{21}$ $y=0$ esetén $x_1=6$, $x_2=-2$; $y=-5$ esetén nincs megoldás.

3827. *a)* $x^2-6x+y^2+4=0$. *b)* $x^2+y^2-6x-4y+11=0$; *c)* $x^2+y^2+2x-6y-7=0$;
d) $12x^2+12y^2+28x-57y-39=0$.

3828. $x^2+y^2=20$. Belső pont az A, mert $3^2+0^2<20$. A többi pont a körön kívül van, mert például a B pontra $5^2+0^2>20$.

3829. $(x+1)^2+(y-2)^2=25$. Az A pontra $(-3+1)^2+(-2)^2=8<25$, tehát A a körön belül van. C, E, F a körön van, B és D a körön kívül van.

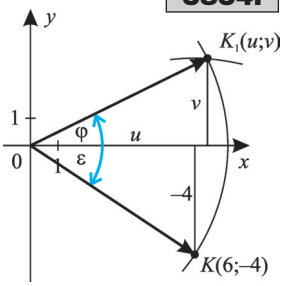
3830. A kör egyenlete: $(x-2)^2+(y-1)^2=4$. $2x-y=\pm\frac{3}{2}$. Ha $y=2x+\frac{3}{2}$, akkor a $3^x+3^{y-\frac{1}{2}}=4$ egyenletben az y helyére $2x+\frac{3}{2}$-et helyettesítve: $3^x+3^{2x+1}=4$ adódik. Innen $x=0$. Ekkor $y=\frac{3}{2}$. A $P\left(0;\frac{3}{2}\right)$ külső pont, mert $(0-2)^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2>4$. Ha $y=2x-\frac{3}{2}$, akkor $(3^x)^2+9\cdot 3^x-36=0$. Innen $x=1$, $y=\frac{1}{2}$. A $Q\left(1;\frac{1}{2}\right)$ pont a kör belső pontja, mert $(1-2)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2<4$.

3831. A kör egyenlete: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$. A $\left(2x-y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ egyenletből $2x-y+\frac{1}{2}=\pm\frac{3}{2}$. Ha $y=2x+2$, akkor az egyenletrendszer gyöke $P(0;2)$, amely a körön kívül van. Ha $y=2x-1$, akkor a megoldás $(1;1)$.

3832. $(x+3)^2+y^2=9$.

3833. $x^2+(y-2)^2=4$.

3834.



3834. Az egybevágósági transzformációknál a sugár hossza nem változik. *a)* $r=6$, $K(6;4)$; *b)* $r=6$, $K(-6;-4)$; *c)* $r=6$, $K(-6;4)$; *d)* Legyen az origó az O pont, a kör középpontja a K pont. Ekkor az OK vektor koordinátái $(6;-4)$. Az eltolt kör K_1 középpontjának koordinátáit az $\overrightarrow{OK}+\mathbf{v}$ vektor koordinátái adják: $K_1(8;-1)$. *e)* $r=6$, $K(1;-5)$;
f) $\overrightarrow{OK}(6;-4)$, 90°-kal elforgatva $\overrightarrow{OK_1}(6;4)$, $r=6$. *g)* $K(-4;-6)$; $r=6$; *h)* $\varphi+|\varepsilon|=60°$, $\operatorname{tg}(\varphi+|\varepsilon|)=\dfrac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}|\varepsilon|}{1-\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}|\varepsilon|}$.

V

$\sqrt{3}=\dfrac{\operatorname{tg}\varphi+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}\operatorname{tg}\varphi}$ egyenletből $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{24-13\sqrt{3}}{3}$ (3834. ábra). $\left|\overrightarrow{OK}\right|=\left|\overrightarrow{OK_1}\right|=\sqrt{52}$. Oldjuk meg az $u^2+v^2=52$ és a $\dfrac{v}{u}=\dfrac{24-13\sqrt{3}}{3}$ egyenletrendszert: $u=3+2\sqrt{3}$, $v=3\sqrt{3}-2$.
A kör egyenlete: $\left(x-3-2\sqrt{3}\right)^2+\left(y-3\sqrt{3}+2\right)^2=36$;
i) $r=12$, $K(12;-8)$; *j)* $r=3$, $K(3;-2)$.

3835. *a)* $(x-1)^2+y^2=1$; *b)* $(x+1)^2+y^2=1$; *c)* $x^2+(y-1)^2=1$; *d)* $x^2+(y+1)^2=1$.

3836. *a)* $K_1(3;5)$, $K_2(3;-5)$, $r=5$.
Két megoldás van: $(x-3)^2+(y-5)^2=25$; $(x-3)^2+(y+5)^2=25$; *b)* $(x\pm5)^2+(y+6)^2=25$;
c) Négy megoldás van: $(x\pm5)^2+(y-5)^2=25$ vagy $(x\pm5)^2+(y+5)^2=25$.

3837. A középpont koordinátái: $K(\pm r;r)$ vagy $K(\pm r;-r)$, a sugár r. Négy megoldás van:
$x^2+y^2\pm2rx-2ry+r^2=0$ és $x^2+y^2\pm2rx+2ry+r^2=0$.

3838. *a)* A középpont koordinátái $(a;2a)$ a sugár $|2a|$.
A kör egyenlete $(x-a)^2+(x-2a)^2=4a^2$; *b)* $K(a;2a)$, $r=|a|$, $x^2+y^2-2ax-4ay+4a^2=0$;
c) A kör sugara: $r^2=a^2+4a^2=5a^2$, Pitagorasz tétele szerint. Egyenlete: $x^2+y^2-2ax-4ay=0$.

3839. *a)* $P(2;9)$. Mivel a kör mindkét tengelyt érinti, a középpontjának koordinátái: $K(r;r)$ és sugara r. A kör egyenlete: $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$. Ekkor $(2-r)^2+(9-r)^2=r^2$. Innen $r_1=5$, $r_2=17$. Két megoldás van: $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ és $(x-17)^2+(y-17)^2=289$.
b) $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ és $(x-15)^2+(y-15)^2=225$; *c)* $(x-10)^2+(y-10)^2=100$ és $(x-2)^2+(y-2)^2=4$; *d)* $\left(x+8+\sqrt{30}\right)^2+\left(y+8+\sqrt{30}\right)^2=\left(8+\sqrt{30}\right)^2$ és $\left(x+8-\sqrt{30}\right)^2+\left(y+8-\sqrt{30}\right)^2=\left(8-\sqrt{30}\right)^2$.

3840. *a)* $K(6;7)$, $r=\left|\dfrac{5\cdot6-12\cdot7-24}{\sqrt{5^2+12^2}}\right|=6$, $(x-6)^2+(y-7)^2=36$;
b) $(x-1)^2+(y-2)^2=\dfrac{32}{37}$.

3841. *a)* $P(9;9)$, $r=5$, $K(u;5)$, $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$. Mivel P rajta van a körön, azért $(9-u)^2+(9-5)^2=5^2$. Innen $u_1=12$, $u_2=6$. Két megoldás van: $(x-12)^2+(y-5)^2=25$ és $(x-6)^2+(y-5)^2=25$. *b)* $(x-5)^2+(y-12)^2=25$ és $(x-5)^2+(y-6)^2=25$.

3842. *a)* Az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenlete: $3x - 11y = 2$. Ha $y = 0$, $x = \frac{2}{3}$. $K\left(\frac{2}{3}; 0\right)$. $r^2 = AK^2 = \frac{325}{9}$. A kör egyenlete: $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{325}{9}$. *b)* $x^2 + \left(y + \frac{2}{11}\right)^2 = \frac{4745}{121}$.

3843. *a)* $\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{85}{9}$; *b)* $x^2 + (y + 8)^2 = 125$.

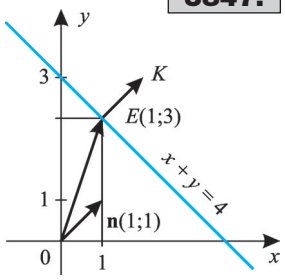
3844. *a)* $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$. *b)* $(x + 6)^2 + (y + 2)^2 = 26$; *c)* $(x + 1)^2 + (y - 11)^2 = 100$; *d)* $\left(x - \frac{85}{12}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{2669}{72}$.

3845. *a)* $P_1(4; -1)$, $P_2(-3; -2)$, a kör (u, v) középpontja illeszkedik a P_1P_2 szakasz felezőmerőlegesére, a $7x + y = 2$ egyenletű egyenesre. $r = |v|$. Felírhatjuk a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{array}{l} 7u + v = 2 \\ (4 - u)^2 + (-1 - v)^2 = v^2 \end{array}\right\}$. Két megoldás van: $u_1 = 1$, $v_1 = -5$, $u_2 = 21$, $v_2 = -145$. A körök egyenletei: $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 25$ és $(x - 21)^2 + (y + 145)^2 = 145^2$. *b)* $\left[x - \left(4 + 2\sqrt{2}\right)\right]^2 + \left[y - \left(5 + 2\sqrt{2}\right)\right]^2 = \left(5 + 2\sqrt{2}\right)^2$ és $\left[x - \left(4 - 2\sqrt{2}\right)\right]^2 + \left[y - \left(5 - 2\sqrt{2}\right)\right]^2 = \left(5 - 2\sqrt{2}\right)^2$; *c)* $(x - 13)^2 + y^2 = 169$ és $(x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 25$.

3846. *a)* Az érintési pont koordinátái: $E(4; 1)$. E-ben az $y = x - 3$ egyenletű egyenesre emelt merőleges egyenlete: $y = -x + 5$. A kör középpontja az $y = -x + 5$ egyenletű egyenes és a $P(0; 4)$, $E(4; 1)$ szakaszt felező merőleges egyenes közös pontja. A felezőmerőleges egyenlete $4x - 3y = \frac{1}{2}$. $K\left(\frac{31}{14}; \frac{39}{14}\right)$, $r^2 = KP^2 = \frac{625}{98}$. A kör egyenlete: $\left(x - \frac{31}{14}\right)^2 + \left(y - \frac{39}{14}\right)^2 = \frac{625}{98}$. *b)* $(x - 2{,}5)^2 + (y + 5{,}5)^2 = 112{,}5$.

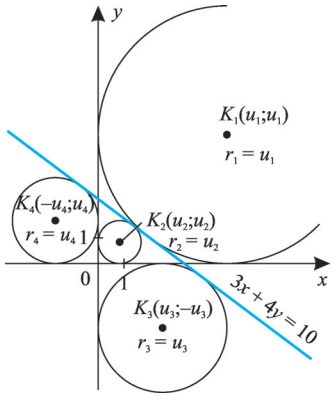
3847. *a)* Az érintési pont koordinátái: $E(1; 3)$, $r = \sqrt{2}$. (3847. ábra). Az $x + y = 4$ egyenletű egyenes normálvektora: $\mathbf{n}(1; 1)$. Az egységvektor: $\mathbf{n}^0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. A kör sugara: $r = \sqrt{2} = \left|\overrightarrow{EK}\right|$. Mivel $\left|\overrightarrow{EK}\right| = \sqrt{2}\mathbf{n}^0$, ezért $\overrightarrow{EK}$ vektor koordinátái: $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = (1; 1)$. A K középpontra $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EK}$, ezért a K pont koordinátái $(1 + 1; 3 + 1)$, $K(2; 4)$. A K-nak E-re vonatkozó tükörképe is megoldás: $K_1(0; 2)$. A körök egyenletei: $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2$ és $x^2 + (y - 2)^2 = 2$; *b)* $x^2 + (y + 4)^2 = 5$ és $(x + 2)^2 + y^2 = 5$.

3847.



3848. *a)* $P_1(-2; 4)$, $P_2(4; 2)$, $r = \sqrt{20}$. A kör $K(u; v)$ középpontja rajta van a P_1P_2 szakasz felezőmerőlegesén, amelynek egyenlete: $y = 3x$. Másrészt $KP_1 = \sqrt{20}$, azaz $(u + 2)^2 + (v - 4)^2 = 20$ és $v = 3u$. Ebből az egyenletrendszerből $u_2 = 0$, $v_1 = 0$, $u_2 = 2$, $v_2 = 6$ adódik. Két megoldás van: $x^2 + y^2 = 20$ és $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 20$;

3854.



b) $(x-8)^2+(y-1)^2=25$ és $(x-1)^2+(y+6)^2=25$;
c) $(x-3)^2+(y-2)^2=10$ és $(x+1)^2+(y-6)^2=10$.

3849. Legyen $e_1: y=2x+14$ és $e_2: y=2x-6$. $e_1 \parallel e_2$ a középpárhuzamos egyenlete: $e: y=2x+4$. Az e_2 egyik pontja $Q(3;0)$. Q pontnak az e_1 egyenestől mért távolsága a keresett kör sugara: $r=4\sqrt{5}$. A kör K középpontjának $(u;v)$ koordinátáira a következő egyenletrendszert írhatjuk fel, felhasználva az adott $P(3;4)$ pont koordinátáit: P rajta van a körön, ezért $(3-u)^2+(4-v)^2=20$, másrészt a kör középpontja illeszkedik az e középvonalra, ezért $v=2u+4$. Az egyenletrendszerből két megoldást kapunk:
$(x+1)^2+(y-2)^2=20$ és $(x-2{,}2)^2+(y-8{,}4)^2=20$.

3850. Vegyük észre, hogy az adott egyenesek párhuzamosak. Két megoldás van:
$x^2+y^2-2x-4y+3=0$ és $x^2+y^2+2x-1=0$.

3851. $r=\dfrac{20}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$. Megoldások: $(x-4)^2+(y-8)^2=80$ és $(x+4)^2+(y+8)^2=80$.

3852. $K(4;4)$, $r=\sqrt{32}$. $(x-4)^2+(y-4)^2=32$.

3853. A háromszög köré írható kör sugara $r=\sqrt{8}$. A $K(1;4)$ pont a háromszög súlypontja is. A BC oldal A_1 felezőpontja az A és a K pont felhasználásával kiszámítható, mert $AK:KA_1=2:1$. $A_1(2;5)$. A BC oldal egyenlete: $x+y=7$, a háromszög köré írható kör egyenlete: $(x-1)^2+(y-4)^2=8$. A BC oldal és a kör közös pontjai adják a szabályos háromszög csúcspontjait: $B\left(2+\sqrt{3};\ \ 5-\sqrt{3}\right)$, $C\left(2-\sqrt{3};\ \ 5+\sqrt{3}\right)$.

3854. Legyen $u_1>0, u_2>0, u_3>0, u_4>0$. Ekkor $r_1=u_1, r_2=u_2, r_3=u_3$ és $r_4=u_4$. Az egyenes normálegyenlete: $\dfrac{3x+4y-10}{5}=0$, ahol az egységvektor $\mathbf{n}^0\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right)$. Alkalmazva a távolságképletet, és figyelembe véve, hogy az egységvektor a K_1,K_2,K_3,K_4 pontokat tartalmazó félsíkba mutat-e, vagy sem, a 3854. ábra alapján felírhatjuk a következő egyenleteket:

$$\frac{3u_1+4u_1-10}{5}=u_1,\quad -\frac{3u_2+4u_2-10}{5}=u_2,\quad \frac{3u_3+4u_3-10}{5}=u_3,\quad -\frac{-3u_4+4u_4-10}{5}=u_4.$$

Innen kapjuk a körök középpontjainak koordinátáit és a körök sugarait. $K_1(5;5)$, $r_1=5$; $K_2\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{5}{6}\right)$, $r_2=\dfrac{5}{6}$; $K_3(2{,}5;-2{,}5)$, $r_3=2{,}5$; $K_4\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right)$ $r_4=\dfrac{5}{3}$.

3855. $K(2;5)$, $r=2$. $(x-2)^2+(y-5)^2=4$.

3856. A Q pont koordinátái: $(0;y)$. Ekkor $PQ=3\sqrt{10}$ a következőképpen írható fel: $9^2+(y-5)^2=90$. Innen $y_1=2, y_2=8$. A $Q_1(0;2)$ és a $P(9;5)$ pontok meghatározta szakasz felezőmerőlegesére, másrészt az $y=2$ egyenletű egyenesre illeszkedik a keresett kör középpontja. A $3x+y=17, y=2$ egyenletrendszerből $K_1(5;2)$, $r_1=5$ adódik. Hasonlóképpen számítható ki a $Q_2(0;8)$ pontban érintő kör középpontjának koordinátái és a kör sugara. $K_2(5;8)$, $r_2=5$. Megoldások: $(x-5)^2+(y-2)^2=25$ és $(x-5)^2+(y-8)^2=25$.

3857. A kör középpontja az AB átfogó szakasz felezőpontja: $K_1\left(\frac{5}{2};\ 3\right)$. Az AC oldal egyenlete: $-3x+4y=7$. A BC befogó egyenes egyenlete: $-4x+3y=-26$. A C csúcs koordinátái: $C(5;\ -2)$. A kör egyenlete: $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{125}{4}$.

3858. $(x-3)^2+(y-4)^2=20$.

3859. Az érintő kör középpontja rajta van az $y=x$ egyenletű egyenesen: $K(x;x)$. K-nak az origótól való távolsága: $OK^2=2x^2$. K az $x=1$ egyenletű egyenestől $|x-1|$ távolságra van. Ekkor $2x^2=(x-1)^2$. Innen $x_1=-1+\sqrt{2}$, $x_2=-1-\sqrt{2}$. Két megoldás van.
$r_1=1-\left(-1+\sqrt{2}\right)=2-\sqrt{2}$, $r_2=1-\left(-1-\sqrt{2}\right)=2+\sqrt{2}$. A körök egyenletei:
$\left[x-\left(-1+\sqrt{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(-1+\sqrt{2}\right)\right]^2=\left(2-\sqrt{2}\right)^2$, $\left[x+1+\sqrt{2}\right]^2+\left[y+1+\sqrt{2}\right]^2=\left(2+\sqrt{2}\right)^2$.

3860. Ábrázoljuk az $y=\frac{5}{2}|x|$ egyenletű egyenest és az $x^2+y^2=9$ egyenletű kört. Két pont felel meg: $P_1(0;\ 1)$, $P_2(0;\ 2)$.

3861. Elegendő a téglalapot az egyik átlójával megfelezni. Megoldás: négyzet, $t=2r^2$.

3862. Az érintési pont: $P(-2;\ 4)$. Az adott egyenes normálvektora: $\mathbf{n}(4;\ -3)$, a normálvektor hossza $|\mathbf{n}|=\sqrt{16+9}=5$. Az egységvektor koordinátái: $\mathbf{n}^0\left(\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$ Ekkor a $\overrightarrow{PK}$ vektor koordinátái: $10\cdot\mathbf{n}^0(8;\ -6)$. $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PK}$ innen $\overrightarrow{OK}(6;\ -2)$. A keresett kör középpontja: $K(6;\ -2)$. Még egy megoldást kapunk, ha K-t a P-re tükrözzük. A körök egyenletei:
$(x-6)^2+(y+2)^2=100$ és $(x+10)^2+(y-10)^2=100$.

3863. *q)*; *s)*; *w)* nem kör egyenlete, *v)* pontkör ($r=0$), a többi kör egyenlete. Vizsgáljuk például a *j)* egyenletét: $x^2+2{,}4x+y^2-3y=2{,}56$. Innen $(x+1{,}2)^2+(y-1{,}5)^2=1{,}2^2+1{,}5^2+2{,}56$. $(x+1{,}2)^2+(y-1{,}5)^2=6{,}25$. $K(-1{,}2;\ 1{,}5)$, $r=2{,}5$; pl.: *c)* $K(0;\ 0)$, $r=\sqrt{20}$; *h)* $K(0;\ 4)$, $r=3$; *k)* $K\left(\frac{5}{2};\ 0\right)$, $r=5$; *l)* $K\left(\frac{3}{4};\ \frac{1}{2}\right)$, $r=4$; *m)* Osszuk el az egyenletet 3-mal. $K\left(\frac{2}{3};\ 1\right)$, $r=\frac{\sqrt{58}}{3}$; *n)* $K\left(\frac{3}{4};\ \frac{5}{4}\right)$, $r=\frac{\sqrt{10}}{4}$; *o)* $K(a;\ 0)$, $r=|a|$; *t)* $K\left(-\frac{a}{2};\ -\frac{b}{2}\right)$, $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

3864. *a)* A $K(-2;\ 1)$ középpontú, $r=\sqrt{5}$ sugarú kör külső pontjainak koordinátái.
b) $(x-1)^2+(y+2)^2=-1$. Ilyen pont nem létezik; *c)* $P(3;\ -4)$ pont; *d)* $(x-y)(x+y-2)=0$. Az $x-y=0$ és az $x+y-2=0$ egyenletű egyenesek pontjainak koordinátái.

3865. *a)* $(x-3)^2+(y+4)^2=25$ és $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ körök egyenletei. $K_1(3;\ -4)$, $r_1=5$, $K_2(-1;\ 1)$, $r_2=1$. K_1K_2 egyenes egyenlete: $5x+4y=-1$. *b)* $17x+8y=11$.

3866. $\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{2A}\right)^2=\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2}$. Szükséges és elégséges, hogy $A\neq 0$ és $B^2+C^2>4AD$ legyen. *a)* $A\neq 0$ és $D=0$; *b)* $A\neq 0$ és $C=0$; *c)* $A\neq 0$ és $B=0$; *d)* Szüksé-

ges és elégséges, hogy $y = 0$ esetén az $AX^2 + BX + D = 0$ egyenletnek pontosan egy gyöke legyen. $B^2 = 4AD$ és $A \neq 0$; *e)* $A \neq 0$ és $C^2 = 4AD$; *f)* $B^2 = 4AD$, $B = C$, $A \neq 0$.

3867. $K(5; 3)$, $r = 5$ $KP = \sqrt{10}$, $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 24 = 0$.

3868. $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = r^2$. Tegyük fel, hogy a $P_1(x_1; y_1)$, és a $P_2(x_2; y_2)$, rácspontok rajta vannak a fenti körön. Ekkor $\left(x_1 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(x_2 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{1}{3}\right)^2$.

V

Innen $x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - \frac{2}{3}(y_1 - y_2) = 2\sqrt{2}(x_1 - x_2)$. Ha $x_1 \neq x_2$, akkor a bal oldal racionális, a jobb oldal irracionális $\sqrt{2}$ miatt! Tehát $x_1 = x_2$. $y_1^2 - y_2^2 - \frac{2}{3}(y_1 - y_2) = 0$, innen $(y_1 - y_2)\left(y_1 + y_2 - \frac{2}{3}\right) = 0$. $y_1 = y_2$, vagy $y_1 + y_2 = \frac{2}{3}$. Utóbbi nem lehetséges, mert $y_1, y_2 \in \mathbf{Z}$. Ellentmondásra jutottunk, ezért igaz a feladat állítása.

3869. $\left(x - \sqrt{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = r^2$. Legyen $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, rácspontok. Ekkor $x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - \frac{2}{3}(y_1 - y_2) = 2\sqrt{5}(x_1 - x_2)$. Innen adódik, hogy $x_1 = x_2$ és $y_1 = y_2$.

3870. Legyen $Q(0; 1)$. Q rajta van az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körön. Tekintsük a Q ponton átmenő $y = mx + 1$ egyenletű egyeneseket.
Az egyenesnek és a körnek közös pontját az $x^2 + y^2 = 1$,
$y = mx + 1$ egyenletekből álló egyenletrendszer gyöke *(i)* adja. $x^2 + (mx + 1)^2 = 1$. Innen $(m^2 + 1)x^2 + 2mx = 0$. $x_1 = 0$, $y_4 = 1$, $x_2 = -\frac{2m}{m^2 + 1}$; $y_2 = \frac{1 - m^2}{m^2 + 1}$. Minden racionális m-re x_2 és y_2 is racionális. A feladat állítása igaz.

3871. *a)* Az x tengely pontjainak második koordinátája 0, az y tengely pontjainak első koordinátája 0. Ha $y = 0$, $M_1(6; 0)$, $M_2(-2; 0)$, ha $x = 0$, $M_3\left(0; 3 + \sqrt{21}\right)$, $M_4\left(0; 3 - \sqrt{21}\right)$;
b) $M_1(1; 0)$, $M_2(-3; 0)$, $M_3\left(0; \sqrt{3}\right)$ $M_4\left(0; -\sqrt{3}\right)$; *c)* $M_1\left(\sqrt{5}; 0\right)$, $M_2\left(-\sqrt{5}; 0\right)$, $M_3(0; 1)$, $M_4(0; -5)$.

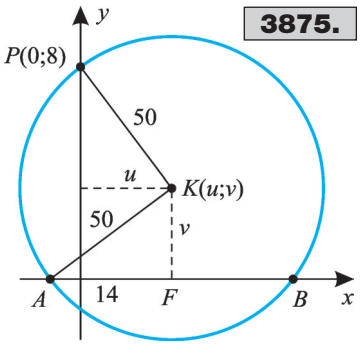
3872. $P_1(2; 0)$, $P_1(-1; 0)$, $Q_1\left(0; \frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right)$, $Q_2\left(0; \frac{5 - \sqrt{33}}{2}\right)$. Legyen az origó az O pont. Ekkor $OP_1 \cdot OP_2 = -2$, $OQ_1 \cdot OQ_2 = \frac{25 - 33}{4} = -2$. Az origó a kör belső pontja. Az origó a P_1P_2 húrt és a Q_1Q_2 húrt két részre osztja. A részek szorzata egyenlő a 11. évfolyamon igazolt tétel szerint.

3873. A húr végpontjai A és B. $AB = 10$. AB felezőpontja legyen F. Ekkor $AF = 5$, $FK = 5$ és $AK = r$. (K a kör középpontja). AFK derékszögű háromszögben $r^2 = 5^2 + 5^2$, $r = 2\sqrt{5}$, $K\left(5; 2\sqrt{5}\right)$. Két megoldás van, a körök egyenletei $x^2 + y^2 - 10x \pm 10\sqrt{2}y + 25 = 0$.

3874. Két megoldás van: $(x-3)^2+(y\pm5)^2=25$.

3875. $AB=28$, $r=50$, $K(u;v)$, $P(0;8)$.
$KF\perp AB$, ezért F pont felezi az AB húrt. $KF=v$. Az AFK derékszögű háromszögben $v^2+14^2=50^2$, innen $v=48$. $KP^2=u^2+(48-8)^2$, $50^2=u^2+40^2$, innen $u=\pm30$. Két megoldás van: $x^2+y^2\pm60x-96y+704=0$.

3875.



3876. $K(3;-3)$, $r=4$, $d=\left|\dfrac{3\cdot3-4\cdot3-2}{5}\right|=1$.

3877. $K_1(4;2)$, $r_1=3$, $K_2(-2;-6)$, $r_2=6$. A keresett kör középpontja $K(1;-2)$, az átmérő: $K_1K_2=10$, $r=5$, egyenlete: $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. A tengelypontok: $\left(1\pm\sqrt{21};\,0\right)$ és $\left(0;\,-2\pm2\sqrt{6}\right)$. A négyszög átlói merőlegesek egymásra és a hosszuk $2\sqrt{21}$ és $4\sqrt{6}$. A négyszög területe: $12\sqrt{14}$ területegység.

3878. A kör átmérője $AB=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$ a sugara $r^2=\dfrac{a^2+b^2-2b+1}{4}$, a középpontja $K\left(\dfrac{a}{2};\,\dfrac{b+1}{2}\right)$, az egyenlete: $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{b+1}{2}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2-2b+1}{4}$. Rendezve a kör egyenletét: (1) $x^2+y^2-ax-(b+1)y+b=0$. Az x tengelyt olyan pontban metszi a kör, amelynek második koordinátája: $y=0$. Ekkor (1) szerint (2) $x^2-ax+b=0$. Ha (2) diszkriminánsa $a^2-4b>0$, akkor valóban a kör olyan két pontban metszi, amelyek abszcisszái (2) valós gyökei.

3879. A középpontok koordinátái: $K_1(3;9)$, $K_2(-5;-7)$. A centrális egyenlete: $y=2x+3$, $\alpha=63{,}43°$.

3880. $K(3;1)$, $r=5$. A négyszög csúcsai: $x=0$, $A(0;5)$, $C(0;-3)$, $y=0$, $B\left(3-\sqrt{24};\,0\right)$, $D\left(3+\sqrt{24};\,0\right)$. $T_1=255$, $T_2=16\sqrt{6}$; $\dfrac{T_2}{T_1}=49{,}9\%$.

3881. $K_1(3;2)$, $r_1=4$, $K_2(-1;4)$, $r_2=4$. $x^2+y^2+2x-8y+1=0$.

3882. A keresett koncentrikus kör egyenlete: (1) $x^2+y^2-4x+2y+k=0$. (1)-nek az x tengellyel való metszéspontjai: $\left(2+\sqrt{4-k};\,0\right)$ és $\left(2-\sqrt{4-k};\,0\right)$. (1) az y tengelyt a $\left(0;\,1+\sqrt{1-k}\right)$ és a $\left(0;\,1-\sqrt{1-k}\right)$ pontokban metszi. A négyszög átlóinak hossza: $2\sqrt{4-k}$ és $2\sqrt{1-k}$ A négyszög területe: $2\sqrt{4-k}\cdot\sqrt{1-k}=6\sqrt{6}$. Innen $k_1=-5$ és $k_2=10$. A feladatnak a $k_1=-5$ felel meg. Megoldás: $(x-2)^2+(y+1)^2=10$.

3883. A kör középpontja az $x-2y=-3$ és az $y=x$, vagy az $x-2y=-3$ és az $y=-x$, egyenletű egyeneseken van. Megoldás: $(x-3)^2+(y-3)^2=20$ és $(x+1)^2+(y-1)^2=80$.

3884. $A=4$, $B=0$ kell legyen. Ekkor $(x-1)^2+\left(y+\dfrac{C}{8}\right)^2=16+\dfrac{C^2}{64}$. Innen $C=\pm24$. Két megoldás van: $(x-1)^2+(y\pm3)^2=25$.

V

3885. *a)* Meg kell oldani a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{array}{l} 1^2+2^2+a+2b=0 \\ (-3)^2+3^2-3a+3b=0 \end{array}\right\}$.
$a=\frac{7}{3}$; $b=\frac{11}{3}$. *b)* $a=\frac{29}{11}$; $b=-\frac{67}{11}$.

3886. *a)* A kör egyenlete $x^2+y^2+ax+by+c=0$ alakú. Ezért $1+1-a+b+c=0$; $16+4+4a+2b+c=0$; $16+16+4a-4b+c=0$ egyenletrendszer gyökei: $a=-4$, $b=2$, $c=-8$. $(x-2)^2+(y+1)^2=13$. A feladatot úgy is megoldhatjuk, hogy kiszámítjuk az ABC háromszögben az oldalfelező merőlegesek közös pontját, azután a kör sugarát.

V

b) $(x-2)^2+(y+3)^2=100$; *c)* $(x-5)^2+(y-4)^2=25$; *d)* $(x-3)^2+\left(y-\frac{13}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$;
e) $(x-4)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{65}{4}$.

3887. A körív olyan kör része, amely áthalad az $A(-40;\,0)$, $B(40;\,0)$, $C(0;\,20)$ pontokon. A kör egyenlete: $x^2+(y+30)^2=50^2$. Ha $x=-30$, $y=10$, ha $x=-20$, $y=15{,}8$; és így tovább, akkor a tartórudak hossza rendre; 10; 15,8; 18,9; 20 méter.

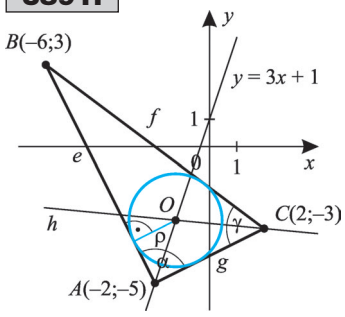
3888. *a)* Először számítsuk ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit: $A(3;\,5)$, $B(-2;\,1)$, $C(5;\,-2)$. A kör egyenlete: $\left(x-\frac{183}{86}\right)^2+\left(y-\frac{83}{86}\right)^2=\frac{63\,017}{3698}$; *b)* $A(2;\,-3)$ $B(-2;\,-1)$, $C(6;\,6)$. $(x-2)^2+(y-2)^2=25$; *c)* $A(-1;\,2)$, $B\left(\frac{13}{3};\,2\right)$, $C\left(-\frac{55}{7};\,-\frac{50}{7}\right)$;
$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y+\frac{50}{7}\right)^2=\frac{40\,000}{441}$.

3889. Az adott egyeneseket jelöljük a következőképpen:
L_1: $x-3y-2=0$; L_2: $7x-y-34=0$; L_3: $x+2y+8=0$. Feltételezve, hogy az egyenesek páronként metszik egymást: (1) $L_1L_2+\lambda L_2L_3+\mu L_3L_1=0$. Ugyanis például az L_1 és L_2 egyenesek metszéspontjának koordinátáira $L_1=0$, $L_3=0$, $L_2L_3=0$ és $L_3L_1=0$. Hasonlóképpen L_2 és L_3, illetve L_3 és L_1 közös pontjai is kielégítik (1) egyenletet. (2) $(x-3y-2)(7x-y-34)+$ $+\lambda(7x-y-34)\cdot(x+2y+8)+\mu(x+2y+8)(x-3y-2)=0$. A (2) másodfokú egyenlet akkor és csakis akkor kör egyenlete, ha az x^2, y^2 együtthatói egyenlők, az xy tag együtthatója 0 és $r^2>0$. Így λ-ra és μ-re felírhatjuk (2) rendezése után a következő egyenletrendszert:
$\left.\begin{array}{l} 9\lambda+7\mu=-4 \\ 13\lambda-\mu=22 \end{array}\right\}$. Innen $\lambda=\frac{3}{2}$; $\mu=-\frac{5}{2}$. Helyettesítsük λ és μ értékét (2)-ben a λ és a μ helyére. Ekkor $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ valóban kör egyenlete. *b)* $7x^2+7y^2-19x+11y-6=0$.
Megjegyzés: Ha a λ és μ paraméterekre kapott egyenletek nem függetlenek egymástól, akkor nincs megoldás. Ekkor az adott egyenesek közül kettő párhuzamos.

3890. A metszéspontok koordinátái: $A(2;\,-3{,}5)$, $B(6;\,-0{,}5)$, $C(2{,}5;\,0)$. A $2x+14y-5=0$ egyenletű egyenes merőleges a $14x-2y-35=0$ egyenletű egyenesre, mert $2\cdot14-14\cdot2=0$!
$r=\frac{AB}{2}=5$ egység.

3891. A csúcsok koordinátái: $A(-2;-5)$, $B(-6;3)$, $C(2;-3)$. A körülírt kör egyenlete: $(x+2)^2+y^2=25$.
Az $A(-2;-5)$ csúcson átmenő belső szögfelező egyenlete: $\frac{2x+y+9}{\sqrt{5}}=\frac{-x+2y+8}{\sqrt{5}}$, innen (1) $y=3x+1$. A C csúcsnál fekvő γ szög szögfelező egyenesének egyenlete:
$\frac{-x+2y+8}{\sqrt{5}}=-\frac{3x+4y+6}{5}$.

3891.



Innen (2) $\left(3-\sqrt{5}\right)x+\left(2\sqrt{5}+4\right)y=-6-8\sqrt{5}$. A beírható kör O középpontjának koordinátáit az (1)–(2) egyenletekből álló egyenletrendszer gyökei adják. $x=-\sqrt{5}+1$ és $y=-3\sqrt{5}+4$. A beírható kör sugara a $\frac{2x+y+9}{\sqrt{5}}=0$ normálegyenlet felhasználásával számítható ki. $\varrho=3\sqrt{5}-1$.

3892. A körök középpontjai: $K_1(0;-6)$, $K_2(11;10)$. A háromszög egyik oldala 6 egység, a hozzá tartozó magasság 11 egység. $t=33$ területegység, a kerület hossza 40,28 egység.

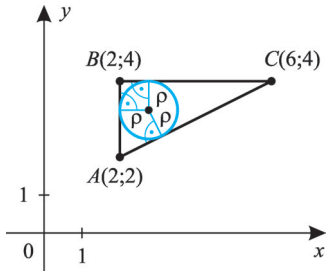
3893. Az ABC háromszög derékszögű, mert $\overrightarrow{AC}(-9;3)$, $\overrightarrow{BC}(2;-6)$ és $2\cdot(-9)+3\cdot(-6)=0$. $t=33$ területegység, $r=\frac{AB}{2}=\sqrt{\frac{65}{2}}$; $k=\frac{65\pi}{2}$ egység.

3894. A háromszög derékszögű. $B\sphericalangle=90°$ (3894. ábra). *a)* 2; 4; $2\sqrt{5}$; *b)* $(4;4)$; $(2;3)$; $(4;3)$; *c)* $S\left(\frac{10}{3};\frac{10}{3}\right)$ *d)* $K(4;3)$; *e)* $M(2;4)$; *f)* A háromszögbe írható kör sugara:
$\varrho=\frac{AB+BC-AC}{2}=3-\sqrt{5}$; $O(2+\varrho;4-\varrho)$, $O\left(5-\sqrt{5};1+\sqrt{5}\right)$.

3895. A B pont koordinátái $(b;0)$, a C pont koordinátái $\left(c;\frac{3}{2}c\right)$. Ekkor $\frac{3}{2}c:2=6$ és $\frac{b+c}{2}=11$. Innen $B(14;0)$, $C(8;12)$. A kör egyenlete: $(x-7)^2+(y-4)^2=65$.

3896. *I. megoldás.* Írjuk fel az ABC háromszög köré írható kör egyenletét és ellenőrizzük, hogy a D pont illeszkedik-e a körre? *II. megoldás.* $\overrightarrow{AB}(1;-7)$, $\overrightarrow{AD}(7;1)$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=7-7=0$, tehát $AB\perp AD$. $\overrightarrow{BC}(8;4)$, $\overrightarrow{CD}(-2;4)$. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=-16+16=0$, tehát $BC\perp CD$. A négy pont az AD átmérő fölé rajzolt körön van.

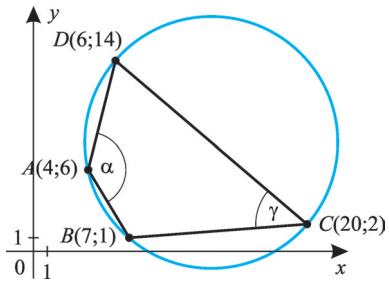
3894.



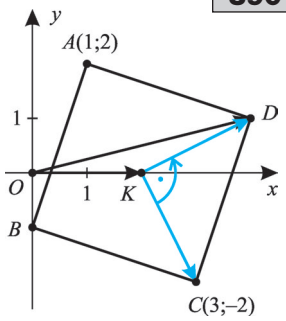
3897. *a)* Az $A(1;-4)$, $B(8;2)$, $C(2;4)$ pontokon átmenő kör egyenlete: $\left(x-\frac{39}{10}\right)^2+\left(y+\frac{3}{10}\right)^2=\frac{2210}{100}$. Legyen $x=0$. Ekkor $y_1=2{,}32$, $y_2=-2{,}92$. Megoldás: $D(0;-2{,}92)$.
b) $D\left(\frac{43+\sqrt{8249}}{16};0\right)$ adódik az $\left(x-\frac{43}{16}\right)^2+y^2=\frac{8249}{256}$ egyenletből.

V

3898.



3901.



3898. A skaláris szorzat segítségével számítsuk ki az α és a γ szögeket $\overrightarrow{AB}(3;-5)$, $\overrightarrow{AD}(2;8)$. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{34}$, $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{68}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6 - 40 = -34$. Másrészt $-34 = \sqrt{34}\cdot\sqrt{68}\cos\alpha$. Innen $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = 135°$. Hasonlóképpen számíthatjuk ki a $\cos\gamma$ értékét. $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma = 45°$. Mivel $\alpha + \gamma = 180°$, azért az $ABCD$ négyszög húrnégyszög.

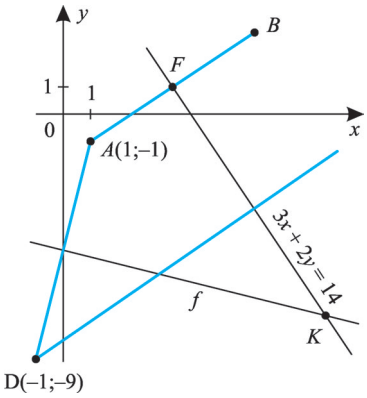
3899. A négyszög ABC pontjain átmenő kör egyenlete: $(x-5)^2 + y^2 = 25$. A $D(1;3)$ pont koordinátái kielégítik a kör egyenletét!

3900. Az ABD pontokon átmenő kör egyenlete: $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 25$. A C pont koordinátái kielégítik a kör egyenletét.

3901. $A(1;2)$, $C(3;-2)$. A négyzet K középpontja az AC szakasz felezőpontja. $K(2;0)$. *(3901. ábra)*. $\overrightarrow{KC}(1;-2)$. Forgassuk el a $\overrightarrow{KC}$ vektort $+90°$-kal. $\overrightarrow{KD}(2;1)$. Ekkor $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KD}$, $D(4;1)$, $B(0;-1)$.

3902. A B csúcs koordinátáit úgy számítjuk ki, hogy az $A(1;-1)$ pontot tükrözzük a $3x + 2y = 14$ egyenletű szimmetriatengelyre. AB egyenes egyenlete: $2x - 3y = 5$. Az AB szakasz F felezőpontjának koordinátáit a $\left.\begin{matrix}3x+2y=14\\2x-3y=5\end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer gyökei adják. $F(4;1)$. $B(7;3)$. A szimmetrikus trapéz köré írható kört egyértelműen meghatározzák az A, B, D pontok. A középpontját a $3x + 2y = 14$ egyenletű egyenes és az AD szakasz f felező merőlegesének közös pontja adja. f egyenlete $x + 4y = -20$. $K(9{,}6;-7{,}4)$, $r^2 = AK^2 = 114{,}92$. A trapéz köré írható kör egyenlete: $(x-9{,}6)^2 + (y+7{,}4)^2 = 114{,}92$.

3902.



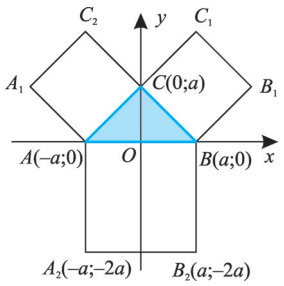
3903. A téglalap B csúcsának koordinátái: $B(-1;-9)$. Ugyanis $\overrightarrow{AD}(-3;1)$, $3\overrightarrow{AD}(-9;3)$. Elforgatva $+90°$-kal kapjuk az $\overrightarrow{AB}$ vektort. $\overrightarrow{AB}(-3;-9)$. Ekkor $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB}(-1;-9)$. A B csúcs koordinátái $(-1;-9)$. A téglalap köré írható kör K középpontja azonos a BD szakasz felező-

pontjával. $K(-1;-4)$, a kör sugara: $r=5$, egyenlete: $k\colon (x+1)^2+(y+4)^2=25$. A B csúcsot tükrözve az A pontra még egy téglalapot kapunk: $B^*(5;9)$. Az AB^*C^*D téglalap köré írható kör egyenlete:

$k_1\colon (x-2)^2+(y-5)^2=25$. A k kör a tengelyeket a $(2;0)$, $(-4;0)$, $\left(0;-4+2\sqrt{6}\right)$, $\left(0;-4-2\sqrt{6}\right)$ koordinátájú pontokban metszi. A k_1 kör a tengelyeket a $(2;0)$, $\left(0;5+\sqrt{21}\right)$, $\left(0;5-\sqrt{21}\right)$, koordinátájú pontokban érinti, illetve metszi. A kimetszett húrok hossza:

$6;\ 4\sqrt{6};\ 2\sqrt{21}$ egység.

3904.



3904. A háromszöget helyezzük el az ábrán látható módon a koordináta-rendszerben. Legyen $A(-a;0)$, $B(a;0)$, ekkor $C(0;a)$. Az ABC háromszög így valóban egyenlő szárú és derékszögű háromszög. A $\overrightarrow{CB}(a;-a)$ $+90°$-kal elforgatva $\overrightarrow{CC_1}(a;a)$. Így az $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CC_1}$ az $\overrightarrow{OC_1}$ és a C_1 koordinátái $(a;2a)$. Hasonló meggondolással kapjuk, hogy $B_1(2a;a)$, a szimmetria miatt $A_1(-2a;a)$, $C_2(-a;2a)$. A szóbanforgó csúcsok az origótól $\sqrt{4a^2+a^2}=a\sqrt{5}$ egység távolságra vannak, és így az $x^2+y^2=5a^2$ egyenletű körön vannak.

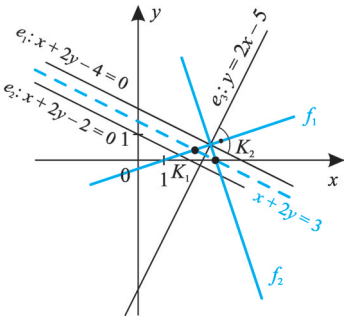
3905. Az egyenesek párhuzamosak. Ebből következik, hogy a kör $(u;v)$ középpontja az $x=5$ egyenletű egyenesre illeszkedik és a sugara $r=3$. A középpont rajta van a $3x-y=6$ egyenletű egyenesen is. Mivel $u=5$, $v=9$. Megoldás: $(x-5)^2+(y-9)^2=9$.

3906. $\left[x-\left(4-2\sqrt{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(4-2\sqrt{2}\right)\right]^2=\left(4-2\sqrt{2}\right)^2$.

3907. Legyen $e_1\colon x+2y-4=0$, $e_2\colon x+2y-2=0$ és $e_3\colon y=2x-5$. $e_1\parallel e_2$, ezért az érintőkör középpontja rajta van a középpárhuzamoson, amelynek egyenlete $k\colon x+2y=3$. Másrészt rajta van az e_1 és e_3 egyenesek által bezárt szögek szögfelezőin. f_1 és f_2 egyenleteit az e_1 és e_3 egyenesek normálegyenleteivel, illetve a $d=\left|\dfrac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ távolságképlettel írhatjuk fel.

f_1 egyenlete: $x-3y=1$. Az f_2 egyenlete: $3x+y=9$. A k_1 kör középpontja a $K_1\left(\dfrac{11}{3};\dfrac{2}{5}\right)$ pont, a sugár $r_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. A k_1 kör egyenlete: $\left(x-\dfrac{11}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{1}{5}$. A k_2 kör K_2 középpontjának koordinátáit a k és f_2 egyenesek metszéspontja adja. $K_2(3;0)$, $r_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. A k_2 egyenlete: $(x-3)^2+y^2=\dfrac{1}{5}$.

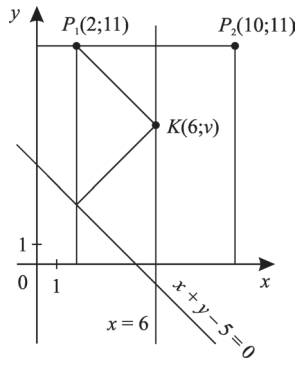
3907.



3908. *a)* Legyen $e_1\colon x-3y=0$, $e_2\colon 3x+y-2=0$ és $e_3\colon x+y=3$. A középpont rajta van az e_1 és e_2 egyenesek szögfelezőin, másrészt az e_3 egyenesen. A szögfelezők egyenletei:

V

3909.



$f_1: x+2y=1$, $f_2: 2x-y=1$. A k_1 kör K_1 középpontjának koordinátái kielégítik az f_1 és e_3 egyenleteket. Innen:

$K_1(5;\ -2)$, a sugár $r_1=\dfrac{11}{\sqrt{10}}$ egység. A k_2 kör K_2 középpontjának koordinátáit az f_2 és e_3 egyenletrendszer gyökei adják. $K_2\left(\dfrac{4}{3};\ \dfrac{5}{3}\right)$, a sugár: $r_2=\dfrac{11}{3\sqrt{10}}$. A körök egyenletei:

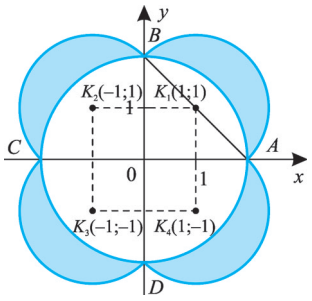
$(x-5)^2+(y+2)^2=12{,}1$ és $\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{3}\right)^2=\dfrac{121}{90}$.

b) $(x-3)^2+(y-1)^2=4{,}5$ és $\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{19}{4}\right)^2=4{,}5$.

3909. A k kör K középpontja rajta van az $x=6$ egyenletű egyenesen, másrészt egyenlő távol van az $x+y-5=0$ egyenletű egyenestől és a $P_1(2;\ 11)$, illetve $P_2(10;\ 11)$ koordinátájú pontoktól. $(KP_1=KP_2)$. A $K(6;\ v)$ pontra felírhatjuk a következő egyenletet:

(1) $\sqrt{(6-2)^2+(v-11)^2}=\dfrac{6+v-5}{\sqrt{2}}$. (1) egyenlet gyökei: $v_1=39$, $v_2=7$. Mindkét gyök megoldás. Az egyik kör középpontjának koordinátái: $(6;\ 7)$, a sugara $\sqrt{32}$ egység, a másik kör középpontja: $(6;\ 39)$, a sugara $\sqrt{800}$ egység.

3910.



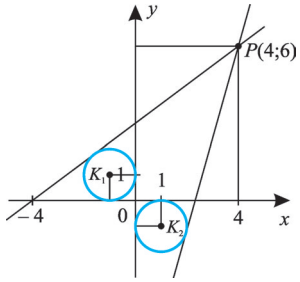
3910. Legyen $x\ge 0$ és $y\ge 0$. Ekkor a kettős egyenlőtlenség a következőképpen írható:

$4\le x^2+y^2\le 2x+2y$. Az $x^2+y^2\ge 4$ egyenlőtlenséget kielégítő $(x;\ y)$ számpárok az origó középpontú 2 egység sugarú körvonal vagy a körön kívül fekvő pontok koordinátái.

Az $x^2+y^2\le 2x+2y$, illetve az $(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$ egyenlettel megadott ponthalmaz az első síknegyedben az $(1;\ 1)$ középpontú, $r=\sqrt{2}$ sugarú körön vagy annak belsejében helyezkedik el. A kettős egyenlőtlenséggel megadott síkidomot az ábrán az I. síknegyedben bevonalkáztuk. Ha $x\le 0$ és $y\ge 0$, akkor a II. síknegyedbeli holdacskát kapjuk. És így tovább. A négy bevonalkázott holdacska egybevágó. Egyik területe:

$$t=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2\pi}{2}-\left(\frac{2^2\pi}{4}-\frac{2\cdot 2}{2}\right)=2.\quad T=4\cdot 2=8 \text{ területegység.}$$

3911.



3911. A $P(4;\ 6)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete: $y=mx+b$ alakú. $6=4m+b$, ezért $y=mx+6-4m$. Az egyenesek normálegyenlete: $\dfrac{mx-y+6-4m}{\sqrt{m^2+1}}=0$. Az ábra alapján állítjuk, hogy két egységsugarú érintőkör létezhet: $K_1(-1;\ 1)$, $r_1=1$, $K_2(1;\ -1)$, $r_2=1$. Ekkor K_1 pontra: (1)

$\left|\frac{-m-1+6-4m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=1$. K_2 pontra: (2) $\left|\frac{m+1+6-4m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=1$. (1) egyenletből $\left(\frac{5-5m}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2=1$. $m_1=\frac{4}{3}$, $m_2=\frac{3}{4}$. A feladat követelményeinek az $m=\frac{3}{4}$ felel meg. Az egyenes egyenlete: $3x-4y+12=0$. A (2)-es egyenletből kapjuk a második megoldást: $y=3{,}56x-8{,}24$.

3912. Az $A(0;0)$, $B(1;2)$, $C(4;0)$ csúcsokon átmenő kör egyenlete: $k:(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{65}{16}$. A kör $K\left(2;\frac{1}{4}\right)$ középpontja a $D(1;-2)$ ponttól $d=\frac{\sqrt{97}}{4}$ egység távolságra van. A keresett kör R sugarát úgy kapjuk, hogy a k kör sugarát, $\frac{\sqrt{65}}{4}$-et a $\frac{\sqrt{97}}{4}-\frac{\sqrt{65}}{4}$ felével megnöveljük. $R=\frac{\sqrt{65}}{4}+\frac{\sqrt{97}}{8}-\frac{\sqrt{65}}{8}=\frac{\sqrt{65}+\sqrt{97}}{8}$.

3913. Helyezzük el az ABC háromszöget a koordináta-rendszerben úgy, hogy a csúcsok koordinátái a következő számpárok legyenek: $A(-a;0)$, $B(a;0)$, $C(c;d)$, ahol $a>0$, $d\neq 0$. Ekkor a $P(x;y)$ pontra $PA^2+PB^2+PC^2=(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2+(x-c)^2+(y-d)^2$. Rendezve: $PA^2+PB^2+PC^2=3\left(x-\frac{c}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{d}{3}\right)^2+2a^2+\frac{8c^2}{9}+\frac{8d^2}{9}\geq 2a^2+\frac{8c^2+8d^2}{9}$.

A négyzetösszeg akkor a legkisebb, ha $x=\frac{c}{3}$, $y=\frac{d}{3}$. Ekkor a P pont az ABC háromszög súlypontja.

3914. Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy a háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A\left(-\frac{c}{2};0\right)$, $B\left(\frac{c}{2};0\right)C(x;y)$ legyen. $(C>0,\ y\neq 0)$. Ekkor $t=\frac{c|y|}{2}$ és $8t=4c|y|$ (t jelenti az ABC háromszög területét.) Az oldalak négyzetösszegére felírhatjuk a következő egyenletet: (1) $c^2+\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2+\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=4c|y|$. Ha $y>0$, akkor (1)-ből $x^2+(y-c)^2=\frac{c^2}{4}$ adódik, ha $y<0$, akkor $x^2+(y+c)^2=\frac{c^2}{4}$. A mértani hely két kör: $K_1(0;c)$, $r_1=\frac{c}{2}$, $K_2(0;-c)$, $r_2=\frac{c}{2}$. Mindkét kör minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez.

3915. Legyen $P(x;y)$. Ekkor $(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2+x^2+(y-6)^2=k^2$. Innen rendezéssel: $x^2+(y-2)^2=\frac{1}{3}\left(k^2-32\right)$ adódik. Ha $|k|<4\sqrt{2}$, akkor a mértani hely üres halmaz. Ha $|k|=4\sqrt{2}$, akkor a mértani hely egy pont: $P(0;2)$. Ha $|k|>4\sqrt{2}$, akkor a mértani hely kör, amelynek középpontja a $(0;2)$ koordinátájú pont, a sugara $\sqrt{\frac{k^2-32}{3}}$ egység. A kör minden pontja megfelel.

3916. A keresett kör középpontja egyrészt rajta van az origó körül rajzolt egységsugarú körön, másrészt az $x+y=5$ egyenletű egyenesre a $P(3;2)$ pontban emelt merőleges egyenesen. A körök egyenletei: $(x-1)^2+y^2=8$ és $x^2+(y+1)^2=18$.

3917. Legyen a szabályos háromszög oldala a hosszúságú. Ekkor a magassága $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy a csúcsok koordinátái a következők legyenek: $B\left(-\frac{a}{2};\ 0\right)$, $C\left(\frac{a}{2};\ 0\right)$, $A\left(0;\ \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. A feladat szerint: $x^2+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2$. Innen rendezéssel az $x^2+\left(y+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$ egyenletet kapjuk. A mértani hely olyan kör, amelynek középpontja a $K\left(0;\ -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ pont, a sugara $\frac{a}{\sqrt{2}}$ egység. A kör minden pontja megfelel.

V

Kör és egyenes kölcsönös helyzete
Kör érintője

3918. *a)* $P_1(3;\ 4)$, $P_2(5;\ 0)$. *b)* $(3;\ 1)$; *c)* Két közös pont van, ha $r>\frac{|a|}{\sqrt{2}}$; egy közös pont van, ha $r=\frac{|a|}{\sqrt{2}}$; nincs közös pont, ha $r<\frac{|a|}{\sqrt{2}}$. *d)* $P_1\left(\frac{r}{\sqrt{m^2+1}};\ \frac{mr}{\sqrt{m^2+1}}\right)$, $P_2\left(-\frac{r}{\sqrt{m^2+1}};\ -\frac{mr}{\sqrt{m^2+1}}\right)$. *e)* Két közös pont van, ha $r>\frac{|b|}{\sqrt{m^2+1}}$ egy közös pont van, ha $r=\frac{|b|}{\sqrt{m^2+1}}$, nincs közös pont, ha $r<\frac{|b|}{\sqrt{m^2+1}}$.

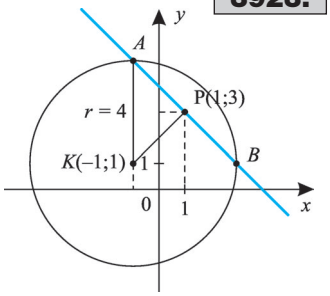
3919. *a)* Két közös pont van. *b)* Két közös pont. *c)* Egy közös ponton van. *d)* Nincs közös pont. $D=-868<0$.

3920. *a)* $(4;\ 2)$ és $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$ *b)* $(0;\ 0)$ és $\left(\frac{1}{5};\ \frac{3}{5}\right)$;
c) $(1{,}9;\ 1{,}45)$ és $(0{,}1;\ 0{,}55)$; *d)* $(3;\ 1)$ és $(-1;\ -3)$; *e)* $(5;\ -6)$

3921. *a)* Két közös pont van: $(5;\ 4)$ és $\left(\frac{9}{13};\ -\frac{32}{13}\right)$. *b)* Egy közös pont van: $(5;\ -1)$. *c)* Az egyenes egyenlete: $4x+3y=25$. Az egyenesnek és az $x^2+y^2=25$ egyenletű körnek egy közös pontja van: $(4;\ 3)$. Az egyenes az $x^2+y^2=36$ egyenletű kört két pontban metszi.
$\left(\frac{20+3\sqrt{11}}{5};\ \frac{15-4\sqrt{11}}{5}\right)$ és $\left(\frac{20-3\sqrt{11}}{5};\ \frac{15+4\sqrt{11}}{5}\right)$.

3922. A húr hossza: $\frac{54\sqrt{13}}{13}$ egység.

3923. A $P(1;3)$ ponton átmenő legrövidebb húr merőleges a KP szakaszra, ahol K az adott kör középpontja, feltéve, hogy P a kör belsejében van. $K(-1;1)$, a sugár $r=4$. $KP=\sqrt{8}<4$, tehát P a körön belül van. Az ábra szerint $AP^2=KA^2-KP^2$, a legrövidebb húr hossza: $AB=4\sqrt{2}$. A húr egyenesének egyenlete: $x+y=4$.



3924. A kör középpontja az AB szakasz felezőmerőlegesére illeszkedik. Ennek egyenlete $7x+y=33$. A középpontja: $K(4;5)$. A sugár $r=AK=5$ egység. A kör egyenlete: $(x-4)^2+(y-5)^2=25$. A C csúcs koordinátáit a kör és az $y-2x=7$ egyenletű egyenes közös pontjai adják. $C_1(1;9)$, $C_2(-1;5)$.

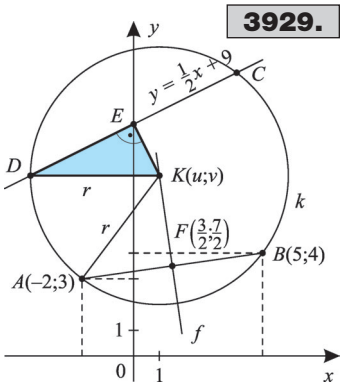
3925. $x^2+y^2+x-7y=0$.

3926. Számítsuk ki a $K(3;7)$ középpontú, $r=5$ egység sugarú kör és az $x+2y=7$ egyenletű egyenes közös pontjainak koordinátáit. $P_1(-1;4)$, $P_2(3;2)$.

3927. Legyen $A(2;5)$, $B(-4;-3)$. Ekkor az átfogó egyenes egyenlete $4x-3y=-7$. Mivel a $T(t;2{,}12)$ illeszkedik az átfogóra, azért $4t-3\cdot 2{,}12=-7$, innen $t=-0{,}16$. Az ABC derékszögű háromszög köré írható Thalész-kör egyenlete: $K(-1;1)$, $r=5$, $(x+1)^2+(y-1)^2=25$. A T ponton átmenő magasságegyenes egyenlete: $3x+4y=8$. $C_1(-4;5)$, $C_2\left(\frac{92}{25};-\frac{19}{25}\right)$.

3928. A kör középpontja az origó, $O(0;0)$, az érintési pont az $E(6;-8)$ pont. A keresett kör középpontja rajta van az OE egyenesen, és az E ponttól 15 egység távolságra van. OE egyenes egyenlete: $4x+3y=0$. $EK=15$ vagyis $(x-6)^2+(y+8)^2=225$. $K_1(-3;4)$, $K_2(15;-20)$, és a sugár $r=15$. Két megoldás van: $(x+3)^2+(y-4)^2=225$ és $(x-15)^2+(y+20)^2=225$.

3929. Az ábra szerint $CD=4\sqrt{5}$. Mivel $KE\perp CD$, ezért $ED=2\sqrt{5}$. A CD egyenes normálegyenlete: $\frac{x-2y+18}{\sqrt{5}}=0$. A k kör $K(u;v)$ középpontjának a CD egyenestől mért távolsága: $d=\left|\frac{u-2v+18}{\sqrt{5}}\right|$. A k kör középpontja rajta van az AB szakasz felezőmerőlegesén, az f egyenesen. f egyenlete: $7x+y=14$, tehát $7u+v=14$. A keresett kör $r=AK$ sugarára felírhatjuk a következő egyenletet: $(u+2)^2+(v-3)^2=r^2$. Másrészt $r^2=KE^2+ED^2$, tehát (1) $(u+2)^2+(v-3)^2=\left|\frac{u-2v+18}{\sqrt{5}}\right|^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2$. A k_1 kör egyenlete: $(x-1)^2+(y-7)^2=25$, a k_2 kör egyenlete $(x-17)^2+(y+105)^2=12\,025$.



3930. Az origón átmenő kör egyenlete: $x^2+y^2+ax+by=0$ alakú. A szögfelező origótól különböző pontja $P(p;\ p)$, ahol $p\neq 0$. Mivel P rajta van a körön, azért $p^2+p^2+ap+bp=0$.

V

$p \neq 0$-val egyszerűsítve: $2p + a + b = 0$, tehát $a + b = -2p$. A körnek a tengelyekkel való metszéspontjai: $O(0; 0)$ és $A(-a; 0)$, illetve $O(0; 0)$ és $B(-b; 0)$. $OA + OB = -(a + b) = 2p$. Tehát a kérdéses összeg csak a P pont megválasztásától függ.

3931. $4x + 3y = 25$.

3932. Az adott kör -5 abszcisszájú pontjai: $P_1\left(-5; \sqrt{11}\right)$, $P_2\left(-5; -\sqrt{11}\right)$. A P_1P_2 pontokban az érintők egyenletei: e_1: $-5x + \sqrt{11}\,y = 36$ és e_2: $-5x - \sqrt{11}\,y = 36$. Írjuk fel a normálvektorok skaláris szorzatát. $6 \cdot 6\cos\varphi = 25 - 11$, $\cos\varphi = \frac{14}{36}$. $\varphi = 67{,}1°$. Mivel a φ nem tompaszög, azért a két érintő hajlásszöge 67,1°.

V

3933. Az érintők metszéspontja $P\left(\frac{50}{7}; -\frac{50}{7}\right)$. $\varphi = 16{,}26°$.

3934. Az érintők egyenletei: $y = 1$, $x = -1$, $y = -1$ és $xx_1 + yy_1 = 1$, ahol $0 < x_1 < 1$. A trapéz csúcsai: $A(-1; -1)$, $B\left(\frac{1 + y_1}{x_1}; -1\right)$, $C\left(\frac{1 - y_1}{x_1}; +1\right)$, $D(-1; 1)$. A B csúcs koordinátáit az $\left.\begin{matrix} xx_1 + yy_1 = 1 \\ y = -1 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer, a C csúcs koordinátáit az $\left.\begin{matrix} xx_1 + yy_1 = 1 \\ y = 1 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer gyökei adják. A trapéz AC átlójának egyenlete: (1) $-2x + \frac{x_1 - y_1 - 1}{x_1}\,y = \frac{x_1 + y_1 - 1}{x_1}$. A trapéz BD átlójának egyenlete: (2) $2x + \frac{x_1 + y_1 + 1}{x_1}\,y = \frac{-x_1 + y_1 + 1}{x_1}$. (1) és (2) egyenlet megfelelő oldalait összeadva $y = \frac{y_1}{x_1 + 1}$ adódik. y értékét behelyettesítve (1)-ben az x helyére és figyelembe véve, hogy $x_1^2 + y_1^2 = 1$, $x = 0$ adódik. $M\left(0; \frac{y_1}{x_1 + 1}\right)$. A nem párhuzamos oldalak érintési pontjai: $P_1(-1; 0)$, $P_2(x_1; y_1)$. A P_1P_2 egyenes egyenlete: $-y_1 x + (x_1 + 1)\,y_1 = y_1$. Ha $x = 0$, akkor $y = \frac{y_1}{x_1 + 1}$, tehát a P_1P_2 egyenes átmegy az M ponton.

3935. *a)* $P(10; 0)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete $y = mx - 10m$. Az m paramétert úgy kell megválasztani, hogy a körnek és az egyenesnek egy közös pontja legyen. Ez akkor teljesül, ha az $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 25 \\ y = mx - 10m \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszerből adódó $x^2 + (mx - 10m)^2 = 25$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0. $\left(1 + m^2\right)x^2 - 20m^2x^2 + 100m^2 - 25 = 0 = 25$ egyenletből a diszkrimináns D: $3m^2 = 1$. Tehát $m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Két megoldás van. Az érintők egyenletei: $x \pm \sqrt{3}\,y = 10$. Az érintési pontok koordinátái: $P_1\left(\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_2\left(\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$. Az érintőszakasz hossza: $5\sqrt{3}$ egység. Az érintők hajlásszögét a normálvektorok segítségével számítjuk ki. $\mathbf{n}_1\left(1; \sqrt{3}\right)$, $\mathbf{n}_2\left(1; -\sqrt{3}\right)$, $|\mathbf{n}_1| = |\mathbf{n}_2| = 2$. $4\cos\varphi = 1 - 3$, $\varphi = 120°$. Az egyenes hajlásszöge hegyesszög: $\omega = 180° - 120°$. *b)* $4x - 3y = 25$, $3x - 4y = 25$, $P_1(4; -3)$, $P_2(3; 4)$, 5 egység, 90°.

c) $y = 4$, $4x - 3y = 20$, $P_1(0; 4)$, $P_2(3{,}2; -2{,}4)$, 8 egység, 53,13°. *d)* $x + 2y = 5$, $2x - y = -5$, $P_1(1; 2)$, $P_2(-2; 1)$, $\sqrt{5}$ egység, 90°.

3936. Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelynek befogói a kör sugara és a $(8; 0)$ pontból a körhöz húzott érintőszakasz. Az átfogó hossza 8 egység. Ekkor $\sin\alpha = \frac{4}{8}$, $\alpha = 30°$, $2\alpha = 60°$.

3937. Az $A(-12; 3{,}5)$ pontból az $x^2 + y^2 = 100$ egyenletű körhöz húzott érintők egyenletei $117x + 44y = -1250$ és $3x - 4y = -50$. A $(12; 10)$ ponton átmenő és az $x^2 + y^2 = 100$ egyenletű kört érintő egyenesek egyenlete $y = 0$, $60x - 11y = 610$. A hiányzó csúcsok koordinátái: $\left(-\frac{10}{3}; 10\right)$, $\left(\frac{10}{3}; -\frac{410}{11}\right)$.

3938. *a)* A $K(0; 0)$ ponton át húzzunk merőleges egyenest a $4x - 2y = 7$ egyenletű egyenesre. Ennek egyenlete: $x + 2y = 0$. Ez az egyenes kimetszi a körből a keresett érintők pontjait. $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 25 \\ x + 2y = 0 \end{matrix}\right\}$. Innen $5y^2 = 25$, $y = \pm\sqrt{5}$; $x = \mp 2\sqrt{5}$. Az érintési pontok koordinátái: $E_1\left(-2\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$, $E_2\left(2\sqrt{5}; -\sqrt{5}\right)$. Az érintők egyenletei: $2x - y = -5\sqrt{5}$ és $2x - y = 5\sqrt{5}$.

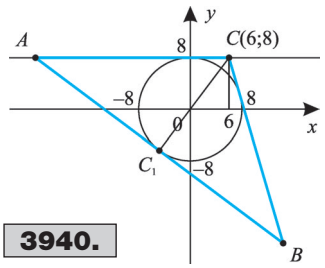
b) $2x - y = 5$; $2x - y = -5$. *c)* $5x - 12y = 169$, $5x - 12y = -169$. *d)* Az $y = 3x - 7$ egyenletű egyenesre merőleges egyenes egyenlete: $x + 3y = b$ alakú. A b értékét úgy kell megválasztani, hogy az egyenesnek a körrel pontosan egy közös pontja legyen. A diszkrimináns: $D = 36b^2 - 40\left(b^2 - 25\right) = 0$, ha $b = \pm 5\sqrt{10}$.

Az érintők egyenletei: $x + 3y = 5\sqrt{10}$ és $x + 3y = -5\sqrt{10}$.

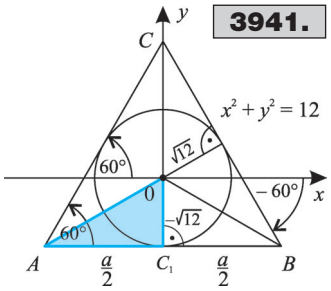
3939. A P pont abszcisszáját a PQO derékszögű háromszög segítségével számíthatjuk ki, ahol O a kör középpontja (az origó). $OQ = 12$, $QP = 35$, $OP^2 = 12^2 + 35^2$, $OP = 37$. Az érintési pont koordinátáit az $x^2 + y^2 = 144$ egyenletű kör és az OP átmérő fölé rajzolt Thalész-kör közös pontjai adják. $E_1\left(\frac{144}{37}; \frac{420}{37}\right)$, $E_2\left(\frac{144}{37}; -\frac{420}{37}\right)$.

Az érintők egyenletei: $12x + 35y = 444$ és $12x + 35y = -444$.

3940. Az alappal szemközti $C(6; 8)$ csúcson és a beírt kör $O(0; 0)$ középpontján átmenő egyenes a beírt kört az alap C_1 felezőpontjában metszi és merőleges az alap egyenesére. Az OC egyenes egyenlete: $y = \frac{8}{6}x$. A C_1 pont koordinátáit az $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 64 \\ y = \frac{8}{6}x \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer gyökei adják: $(4{,}8; 6{,}4)$ és $(-4{,}8; -6{,}4)$. Mivel a kör a háromszögbe írt kör, azért a C_1 koordinátái az ábra szerint $(-4{,}8; -6{,}4)$. Az AB alapegyenes egyenlete: $3x + 4y = -40$. A C pontból a körhöz húzott egyik száregyenes egyenlete: $y = 8$. A csúcs koordinátái: $3x + 32 = -40$ egyenletből $x = -\frac{72}{3} = -24$. A B csúcs koordinátáit megkapjuk, ha az A pontot tükrözzük a C_1 pontra. $B(14{,}4; -20{,}8)$.



3940.



3941. Az AOC_1 háromszögben $\operatorname{tg}30° = \dfrac{|OC_1|}{\left|\frac{a}{2}\right|}$. Innen $|a| = 12$, a szabályos háromszög oldala 12 egység hosszú. Az A csúcs koordinátái $A\left(-6; -2\sqrt{3}\right)$, $B\left(6; -2\sqrt{3}\right)$, $C\left(0; 4\sqrt{3}\right)$. Az oldalak egyenletei: $y = \sqrt{3}\,x + 4\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}\,x + 4\sqrt{3}$, $y = -2\sqrt{3}$.

V

3942. Az adott k kör középpontján át húzzunk merőleges egyenest az adott e egyenesre. Válasszuk ezt az egyenest x tengelynek, az e egyenest y tengelynek. A K kör középpontjának rögzített koordinátái $(u, 0)$, az y tengely változó P pontjának koordinátái $P(0; p)$. A P középpontú kör egyenlete: $x^2 + (y-p)^2 = u^2 + p^2 - r^2$. Innen leolvasható, hogy p-től függetlenül a $Q\left(\sqrt{u^2 - r^2}\,; 0\right)$ rajta van mindegyik körön. 2 megoldás van, ha $u^2 > r^2$, 1 megoldás, ha $u^2 = r^2$, nincs megoldás, ha $u^2 < r^2$.

3943. *a)* $4x + 3y = 35$. (K a kör középpontja, P a kör adott pontja). *b)* $2x - 3y + 9 = 0$; *c)* $3x - 4y + 39 = 0$ és $3x + 4y - 1 = 0$.

3944. Az érintési pontok koordinátái: $E_1(3; 1)$, $E_2(-1; -3)$. Az e_1 érintő normálvektora: $\mathbf{n}_1(5; -1)$, e_2 normálvektora: $\mathbf{n}_2(-1; 5)$. Az érintők egyenletei: e_1: $5x - y = 14$, e_2: $x - 5y = 14$. e_1 és e_2 Q metszéspontjának koordinátái: $Q\left(\dfrac{7}{3}; -\dfrac{7}{3}\right)$.

3945. A kör a tengelyeket a (0; 0), (0; 8), (6; 0) pontokban metszi. Ezekben a pontokban a kör érintőinek egyenletei rendre $x + y = -1$, $x - y = -8$, $x + 2y = 6$. A hajlásszögek az érintők és a tengelyek által beárt szöggel egyenlők: 45°, 45° és 26,56°.

3946. A pálya egyenletét a $P(2; 1)$ pontban a körhöz húzható érintő egyenlete adja: $3x - 4y - 2 = 0$.

3947. A kör középpontjának koordinátái: $K(3; -5)$. A $4x - 3y = 0$ egyenessel párhuzamos körérintők érintési pontjait úgy kapjuk meg, ha a K középponton átmenő, és a $4x = 3y$ egyenesre merőleges egyenesnek és a körnek a közös pontjait határozzuk meg. Az érintési pontok koordinátái: $E_1(11; -11)$, $E_2(-5; 1)$. Az érintők egyenletei: e_1: $4x - 3y - 77 = 0$, e_2: $4x - 3y + 23 = 0$.

3948. Az érintő egyenlete: $y = 3x + b$ alakú. A b-t úgy kell meghatározni, hogy az egyenesnek és a körnek egy közös pontja legyen. Ekkor a kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa: $D = (6b - 46)^2 - 40\left(b^2 - 12b + 45\right)$. $D = 0$, ha $b = -9 \pm \sqrt{2}$. Két érintő létezik. Egyenletük: $y = 3x - 9 \pm \sqrt{2}$.

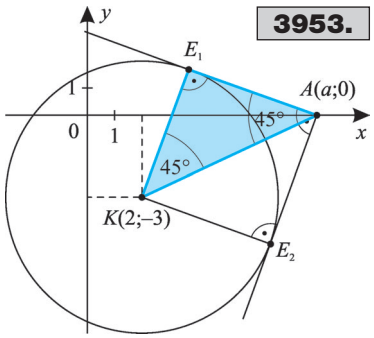
3949. Két érintőt kapunk: $2x + y - 7 = 0$, $2x + y = 3$.

3950. *a)* Az érintő egyenlete: $y = mx$ alakú. m-et úgy kell meghatározni, hogy az $y = mx$ egyenletű egyenesnek az $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$ egyenletű körrel egy közös pontja legyen. Az egyenletrendszer diszkriminánsa: $D = 80m - 84m^2$. $D = 0$, ha $m_1 = 0$, $m_2 = \dfrac{20}{21}$. Két érintőt kapunk. Egyenleteik: $y = 0$ és $20x - 21y = 0$. *b)* $x - 2y + 1 = 0$, $2x - y - 7 = 0$; *c)* $x = 3$, $5x - 12y - 3 = 0$; *d)* $9x + 40y = 258$, $x = 2$.

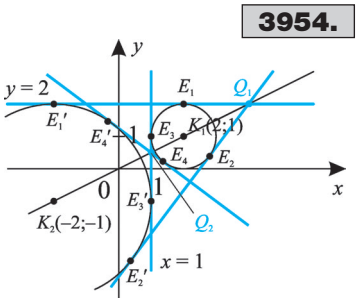
3951. A kör egyenlete: $(x-5)^2+(y+1)^2=16$. A $P_1(0;-1)$ pont a kör $K(5;-1)$ középpontjától 5 egység távolságra van. A P_1 pontból a körhöz húzható érintőszakasz olyan derékszögű háromszögnek a befogója, amelynek átfogója 5 egység, a másik befogó 4 egység. Az érintőszakasz hossza 3. P_2 rajta van a körön, P_3 belső pont. P_4-re $\sqrt{10}$.

3952. Két megoldás van. $P_1(-0{,}4;\ 8{,}8)$, $P_2(6;\ 4)$. Ugyanis a $(-2;\ 0)$ ponton átmenő körérintők egyenlete: $-x+2y=2$, $-11x+2y=22$.

3953. Tekintsük az ábrát. A KA felezi az A-nál fekvő derékszöget. A KAE_1 derékszögű háromszög átfogója $\sqrt{50}$ egység. Így $(a-2)^2+25=50$. Innen $a=2\pm\sqrt{41}$. Két megoldás van. $A_1\left(2+\sqrt{41};\ 0\right)$, $A_2\left(2-\sqrt{41};\ 0\right)$.



3954. *a)* A közös külső és belső érintők átmennek a körök külső, illetve belső hasonlósági pontjain, a Q_1 és a Q_2 ponton. A két kör olyan helyzetű, hogy az egyik külső érintő egyenlete: $y=2$. A Q_1 pont koordinátáit úgy számítjuk ki, hogy először felírjuk K_1K_2 centrális egyenletét $\left(y=\frac{1}{2}x\right)$, azután a Q_1 pont koordinátái egyszerűen adódnak. $Q_1(4;\ 2)$, $Q_2\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$. Ezután kiszámítjuk a Q_1 és a Q_2 ponton átmenő, például az $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ egyenletű kör $y=2$ egyenestől különböző érintőjének egyenletét: $4x-3y=10$. A Q_2 ponton átmenő másik érintő egyenlete: $3x+4y=5$. *b)* A két kör metszi egymást. Csak külső érintőik vannak. Egyenleteik: $3x+4y=75$ és $3x-4y=75$. *c)* Csak közös külső érintők léteznek. Egyenleteik: $x+y=3\left(1\pm\sqrt{2}\right)$.



3955. A közös érintő egyenlete: $x+2y=12$.

3956. A harmadik csúcs rajta van a körön és az AB oldal felezőmerőlegesén. Két megoldás van: $C_1(6;\ 8)$, $C_2(-1{,}5;\ -0{,}5)$.

3957. Az $A(1;\ 1)$ csúccsal szemközti oldal A_1 felezőpontjának koordinátái $A_1(4;\ 7)$. A szabályos háromszög magassága: $AA_1=3\sqrt{5}$ egység. A szabályos háromszög oldala legyen a hosszúságú. $a=6\sqrt{\frac{5}{3}}$. A BC oldal egyenlete: $x+2y=18$. A szabályos háromszög $B(b_1;\ b_2)$ csúcsa rajta van a BC oldal egyenesén, másrészt az A csúcstól $6\sqrt{\frac{5}{3}}$ egység távolságra van. A keresett csúcsok koordinátái: $B\left(4-2\sqrt{3};\ 7+\sqrt{3}\right)$, $C\left(4+2\sqrt{3};\ 7-\sqrt{3}\right)$.

3958. A négyszög csúcsai: A, B, C, D. Az A csúcs koordinátáit a $2x+y=0$, $2x-y+4=0$ egyenesek közös pontja adja. $A(-1;\ 2)$. Az AP átló egyenlete: $y=2$. BD átló egyenlete: $x=1$.

V

A B csúcs koordinátáit az $\left.\begin{matrix} x=1 \\ 2x-y+4=0 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer, a D csúcs koordinátáit az $\left.\begin{matrix} x=1 \\ 2x+y=0 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer megoldása adja. $B(1;\,6)$, $D(1;\,-2)$. Írjuk fel az A, B, D pontokon átmenő kör egyenletét: $(x-4)^2+(y-2)^2=25$. A C csúcs koordinátáit a kör és az AP átló egyenleteiből álló egyenletrendszer gyökei adják. $C(2;\,9)$.

3959. Két megoldás van, mert két érintő húzható. $P_1\left(\frac{3}{5};\,\frac{11}{5}\right)$, $P_2\left(-\frac{7}{5};\,-\frac{9}{5}\right)$.

3960. A $K(5;\,-10)$ középpontú $r=\sqrt{50}$ egység sugarú kör 10 egység hosszúságú húrjai a középponttól $d=5$ egység távolságra vannak. A húrok felezőpontjai egy $(x-5)^2+(y+10)^2=25$ egyenletű körön vannak. Az origón átmenő $y=mx$ egyenletű egyenesek közül azt az egyenest kell kiválasztani, amely érinti az $(x-5)^2+(y+10)^2=25$ egyenletű kört. Az egyik érintő egyenlete $x=0$ (az y tengely). A másik érintő egyenletét az $\left.\begin{matrix} y=mx \\ (x-5)^2+(y+10)^2=25 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszerből adódó diszkriminánsból számíthatjuk ki. $-4m-3=0$, $m=-\frac{3}{4}$. Az $x=0$ egyenletű egyenes az $(x-5)^2+(y+10)^2=50$ egyenletű kört a $P_1(0;\,-5)$ és a $P_2(0;\,-15)$ pontokban, az $y=-\frac{3}{4}x$ egyenletű egyenes a kört a $Q_1(4;\,-3)$ és a $Q_2(12;\,-9)$ pontokban metszi. $P_1P_2=Q_1Q_2=10$ egység.

3961. A kör középpontja rajta van az $y=x$ egyenletű egyenesen, tehát a középpont koordinátái: $u=v$, a sugár $r^2=2u^2$, mert a kör érinti az origóban az $y=-x$ egyenletű egyenest. A középpont r távolságra van az $\frac{x-y+4}{\sqrt{2}}=0$ normálegyenletű egyenestől is. Tehát $\sqrt{2u^2}=\frac{4}{\sqrt{2}}$. Két megoldás van: $(x-2)^2+(y-2)^2=8$, vagy $(x+2)^2+(y+2)^2=8$.

3962. k_1: $\left[x-\left(4\sqrt{2}-4\right)\right]^2+\left[y-\left(4-4\sqrt{2}\right)\right]^2=32\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ és

k_2: $\left[x-\left(-4-4\sqrt{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(4+4\sqrt{2}\right)\right]^2=32\left(3+2\sqrt{2}\right)^2$.

3963. Meg kell keresni az adott körnek azt a pontját, amelyik legközelebb van az AB egyeneshez. Ezt a pontot a $K(8;\,2)$ ponton átmenő, és az AB egyenesre merőleges e egyenes metszi ki a körből. Megoldás $(4;\,-1)$.

3964. A $P(6;\,3)$ ponton átmenő e egyenes egyenlete: $y=mx+3-6m$ alakú. e normálegyenlete: $\frac{mx-y+3-6m}{\sqrt{m^2+1}}=0$. m-et úgy kell meghatározni, hogy $\left|\frac{-2m+1+3-6m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=4$ legyen. Megoldás: $y=3$ és $4x-3y=15$.

3965. $(x-5)^2+(y-7)^2=20$. A ponthalmaz kör, a kör minden pontja hozzátartozik a feltételt kielégítő ponthalmazhoz.

3966. Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsának koordinátái $(0;\,0)$, a C csúcs koordinátái $(p;\,q)$. Az AC átló felezőpontja: $F\left(\frac{p}{2};\,\frac{q}{2}\right)$. F illeszkedik az $x+2y=14$ egyenletű egyenesre, tehát

(1) $\frac{p}{2}+2\cdot\frac{q}{2}=14$. Másrészt C rajta van a körön, ezért (2) $(p-8)^2+(q-5)^2=25$. (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer gyökei adják a C csúcspont koordinátáit. Két megoldás van. $C_1(8;10)$ és $C_2(12;8)$. Az AC_1 átló felezőpontja: $F_1(4;5)$. A paralelogramma B_1 és D_1 csúcsait úgy számíthatjuk ki, hogy felírjuk a KF_1 egyenesre merőleges, és az F_1 ponton átmenő szelő egyenletét. (Ugyanis F_1 felezi a B_1D_1 húrt, ezért a $K(8;5)$ középpontból a húr felezőpontjához húzott szakasz merőleges a húrra.) A szelő kimetszi a körből a B_1 és a D_1 csúcsokat. A szelő egyenlete: $x=4$, B_1 és D_1 koordinátái: $B_1(4;2)$, $D_1(4;8)$. Hasonló meggondolással kapjuk a $C_2(12;8)$ pont felhasználásával a B_2, D_2 csúcsok koordinátáit. $B_2(8;0)$, $D_2(4;8)$. Az $AB_1C_1D_1$ és az $AB_2C_2D_2$ négyszögek valóban paralelogrammák és eleget tesznek a feladat követelményeinek.

3967. Két megoldás van. $P_1(15;3)$, $P_2(8;10)$.

3968. A kör középpontjának koordinátái: $K(u;2u)$, az érintési pont koordinátái $E(5;5)$. Az adott egyenes irányvektora: $\mathbf{v}(-3;4)$, a $\overrightarrow{KE}(5-u;\ 5-2u)$. $\overrightarrow{KE}\perp\mathbf{v}$. $\overrightarrow{KE}\cdot\mathbf{v}=0$. Innen $u=1$. A kör egyenlete: $(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

3969. 4 olyan kör van, amely megfelel a feladat követelményeinek. Ezek közül legkisebb az $A(0;0)$, $B\left(\sqrt{3};\ 0\right)$, $C(0;1)$ csúcsokkal kifeszített háromszögbe írt kör. Ennek a K középpontja rajta van az $y=x$ egyenletű egyenesen, tehát $K(u;u)$, $r=u$. Az adott egyenes normálegyenlete: $\frac{x+\sqrt{3}\ y-\sqrt{3}}{2}=0$. A beírt körre felírhatjuk a következő egyenletet: $\frac{u+\sqrt{3}\ u-\sqrt{3}}{2}=-u$.

A kör egyenlete: $\left(x-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$.

3970. Az oldalak egyenletei: $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$, $x=\frac{9}{2}$. A kerület $9\sqrt{3}$ egység, a terület $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ területegység.

3971. Legyenek a téglalap csúcsainak koordinátái: $A(0;0)$, $B(a;0)$, $C(a;2a)$, $D(0;2a)$. Az E koordinátái: $\left(a;\ \frac{a}{2}\right)$. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

3972. Az origón átmenő érintő egyenlete $y=mx$. Az egyenes akkor érinti a kört, ha az $\left.\begin{matrix}x^2+y^2-8x+12y-12+a=0\\ y=mx\end{matrix}\right\}$ egyenletrendszerből adódó diszkrimináns 0.

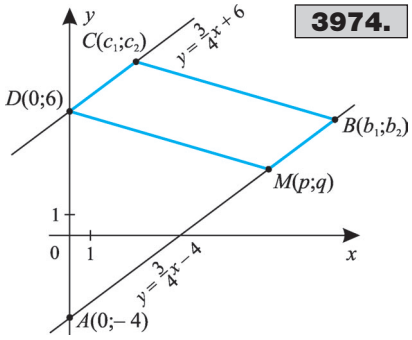
D: $(48-a)m^2-48m+28-a=0$. Két m érték, két érintő van. Ha ezek merőlegesek egymásra, akkor az iránytangenseik szorzata -1.

$m_1\cdot m_2=\frac{28-a}{48-a}=-1$, a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján, $a=38$.

3973. Az $A(5;-1)$ csúccsal szemközti BC oldal A_1 felezőpontja azonos az adott kör $K(1;2)$ középpontjával. Ebből következik, hogy a BC oldal a kör átmérője. Végtelen sok megoldás van.

3974. Tekintsük az ábrát. Az érintőnégyszög egyenlő szárú trapéz, mert két szemközti oldala párhuzamos és a trapéz tengelyesen szimmetrikus. Az alapok összege 20, mert a szárak összege $2\cdot AD=20$ egység. A má-

3974.



sik szár irányvektorát úgy számíthatjuk ki, ha először kiszámítjuk az M pont koordinátáit úgy, hogy $MD = AD = 10$ egység legyen. Az $M(p;\ q)$ pontra $\left.\begin{array}{ll}(1) & q = \frac{3}{4}p - 4 \\ (2) & \sqrt{p^2 + (q-6)^2} = 10\end{array}\right\}$.

(1)−(2) egyenletrendszerből: $p = \frac{48}{5}$, $q = \frac{16}{5}$. A trapéz BC szára párhuzamos az MD szakasszal. MD egyenes irányvektora $\mathbf{v}\left(\frac{48}{5};\ \frac{14}{5}\right)$, illetve $\mathbf{v}_{MD}(24;\ -7)$. Legyen a $B(b_1;\ b_2)$, a $C(c_1;\ c_2)$.

V

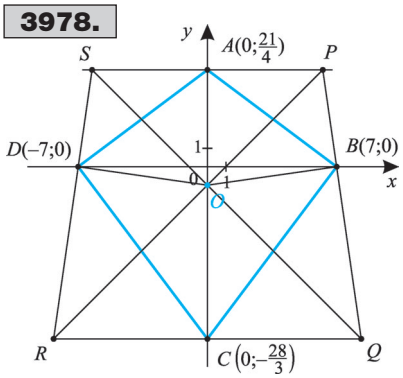
Ekkor B és C koordinátáira felírhatjuk a következő egyenletrendszert: (3) $b_2 = \frac{3}{4}b_1 - 4$; (4) $c_2 = \frac{3}{4}c_1 - 6$; (5) $\sqrt{b_1^2 + (b_2+4)^2} + \sqrt{c_1^2 + (c_2+6)^2} = 20$, mert az érintőnégyszög szemközti oldalainak összege egyenlő és (6) $\frac{b_2 - c_2}{b_1 - c_1} = -\frac{7}{24}$, mert BC egyenes iránytangense egyenlő az MD egyenes iránytangensével. (3)−(6) egyenletrendszer megoldása, mivel $b_1, b_2, c_1, c_2 > 0$, $b_1 = \frac{64}{5}$; $b_2 = \frac{28}{5}$; $c_1 = \frac{16}{5}$; $c_2 = \frac{42}{5}$.

3975. A rajta van a körön, mert a koordinátái kielégítik az adott kör egyenletét. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 169$ egyenletből $K(3;\ 2)$. A C csúcsot úgy kapjuk, hogy az A pontot tükrözzük a K középpontra. $C(-2;\ 14)$. $\overrightarrow{KA}(5;\ -12)$. Elforgatva $\pm 90°$-kal, $B(15;\ 7)$, $D(-9;\ -3)$.

3976. A és B valóban a k: $(x-1)^2 + y^2 = 26$ kör pontjai. Igazoljuk! A C pont koordinátái $(c_1;\ c_2)$. Ekkor (1) $\frac{(c_1+4)^2 + (c_2+1)^2}{(c_1-6)^2 + (c_2-1)^2} = \frac{9}{4}$ és (2) $(c_1-1)^2 + c_2^2 = 26$. Két megoldás van. $C_1(2;\ 5)$, $C_2\left(\frac{50}{13};\ -\frac{55}{13}\right)$.

3977. Az egyenes egyenlete: $y = -2x + 2a$, ahol $a > 0$. Az egyenes érinti az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kört, ha $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Az érintési pont: $E\left(\frac{2\sqrt{5}}{5};\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

3978.



3978. Ábrázoljuk a deltoidot. A beírt kör O középpontja az y tengelyre esik, mert az y tengely szimmetriatengely. Másrészt O rajta van az ABC szög szögfelezőjén.

AB egyenes normálegyenlete: $\frac{3x + 4y - 21}{5} = 0$.

A BC egyenes normálegyenlete: $\frac{4x - 3y - 28}{5} = 0$.

A $O(0;\ v)$ középpontra felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\left|\frac{4v - 21}{5}\right| = \left|\frac{-3v - 28}{5}\right|.$$

A deltoidba írható kör középpontjának koordinátái $O(0;\ -1)$.

Az OB egyenesre merőleges, és a B ponton átmenő egyenes egyenlete: $7x + y = 49$. A P pont koordinátái: $7x + \frac{21}{4} = 49$ egyenletből $P\left(\frac{175}{28}; \frac{21}{4}\right)$, illetve $P\left(\frac{25}{4}; \frac{21}{4}\right)$. A Q pont koordinátái: $Q\left(\frac{25}{3}; -\frac{28}{3}\right)$. A $PQRS$ egyenlő szárú trapéz, ezért $R\left(-\frac{25}{3}; -\frac{28}{3}\right)$, $S\left(-\frac{25}{4}; \frac{21}{4}\right)$. A PR átló egyenlete: $x - y = 1$, az SQ átlóegyenlete: $x + y = -1$. Mindkét átló átmegy az O ponton, mert O koordinátái mindkét egyenletet kielégítik.

3979. Az origónak az $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ egyenletű egyenesre eső merőleges vetülete legyen P. P koordinátái $x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$, $y = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}$ ahol $ab \neq 0$. Ekkor $x^2 + y^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} =$ állandó. A mértani hely origó középpontú kör.

A kör sugarának négyzete $r^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$. A kör tengelypontjai (4 pont) nem tartoznak a mértani helyhez.

Körök kölcsönös helyzete, közös pontjaik meghatározása

3980. *a)* A két körnek egy közös pontja van, érintik egymást a $P(1; 0)$ pontban.
b) $P_1\left(\frac{8 + 5\sqrt{14}}{13}; \frac{\sqrt{14} - 1}{13}\right)$, $P_2\left(\frac{8 - 5\sqrt{14}}{13}; \frac{\sqrt{14} + 1}{13}\right)$, *c)* $(-1; 1)$; *d)* $\left(-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

3981. $P(3; 4)$ az érintési pont. A keresett kör középpontja rajta van az $y = x$ egyenletű egyenesen, mivel mindkét koordinátatengelyt érinti. Ezért $u = v$ és $r = |u|$. A kör egyenlete: $(x - u)^2 + (y - u)^2 = u^2$. Mivel a P pont illeszkedik a keresett körre, azért $(3 - u)^2 + (4 - u)^2 = u^2$. Innen $u = 7 \pm 2\sqrt{6}$. Megoldás: $\left[x - \left(7 \pm 2\sqrt{6}\right)\right]^2 + \left[y - \left(7 \pm 2\sqrt{6}\right)\right]^2 = \left(7 \pm 2\sqrt{6}\right)^2$.

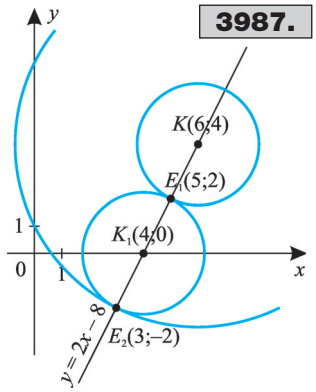
3982. *a)* A körök közös pontjainak koordinátái: $P_1(0; 0)$, $P_2(1; 1)$. A keresett kör $K(u; v)$ középpontjára $KP_1 = KP_2$ és a sugár $r = \sqrt{5}$. $u^2 + v^2 = 5$ és $(u - 1)^2 + (v - 1)^2 = 5$. Két megoldás van: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ és $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$. *b)* A kör középpontja a $(0; 0)$ és az $(1; 1)$ pontokat összekötő szakasz felezőpontja. Megoldás: $x^2 + y^2 - x - y = 0$.

3983. A körök közös pontjainak koordinátái: $P_1(-2; 1)$, $P_2\left(\frac{8}{5}; \frac{14}{5}\right)$. A keresett kör K középpontja az x tengelyen van, tehát a K koordinátái: $K(u; 0)$, másrészt $KP_1 = KP_2$.
$(u + 2)^2 + 1 = \left(u - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{196}{25}$. Innen $u = \frac{3}{4}$, $r^2 = \frac{137}{16}$. A kör egyenlete: $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{137}{16}$.

3984. A két kör közös pontjainak koordinátái: $P_1(2; -1)$, $P_2(1; -2)$. P_1, P_2 és az adott $P_3(2; -2)$ pontok derékszögű háromszöget feszítenek ki. A kör egyenlete:
$x^2 + y^2 - 3x + 3y + 4 = 0$.

3985. $P_1(1; 2)$, $P_2(5; 4)$.

3987.



3986. A keresett kör középpontja $K(u;\ v)$, a sugara $r=1$. Az adott kör középpontjának koordinátái: $K_1(4;\ 2)$ és a sugara $r_1=1$, az adott pont $P(2;\ 1)$. Ekkor $KP=1$ és $KK_1=2$.
(1) $(u-2)^2+(v-1)^2=1$, (2) $(u-4)^2+(v-2)^2=4$. (1)−(2) egyenletrendszer gyökei: $u_1=2, v_1=2$, $u_2=2{,}8$, $v_2=0{,}4$. A keresett körre két megoldást kaptunk. $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ és $(x-2{,}8)^2+(y-0{,}4)^2=1$.

3987. Ha két kör kívülről, vagy belülről érinti egymást, akkor az érintési pontok a középpontokon átmenő egyenesekre illeszkednek. A keresett kör középpontjai; $K(6;\ 4)$, az adott kör középpontja $K_1(4;0)$. A centrális egyenes egyenlete: $y=2x-8$. Ez az egyenes az adott kört két pontban metszi. $E_1(5;\ 2)$, $E_2(3;\ -2)$. A sugarak hossza $KE_1=\sqrt{5}$, $KE_2=\sqrt{45}$ egység. A körök egyenletei: $(x-6)^2+(y-4)^2=5$ és $(x-6)^2+(y-4)^2=45$. Utóbbi kör az adott kört belülről érinti.

3988. Adott kör középpontja $K(-2;\ -2)$, a sugara $r=\sqrt{2}$ egység. A keresett kör középpontja $K(u;\ v)$ a sugara $r=\sqrt{8}$ egység. A K_1 pontnak két feltételt kell kielégítenie. $K_1K=\sqrt{8}+\sqrt{2}$ és $K_1P=\sqrt{8}$.

A keresett kör egyenlete: $(x-1)^2+(y-1)^2=8 \vee \left(x+\frac{47}{13}\right)^2+\left(v-\frac{25}{13}\right)^2=8$.

3989. Az adott körök kívülről érintik egymást, mert a középpontjaik távolsága a sugaraik hosszának összegével egyenlő. $K_1(-2;\ -3)$, $r_1=10$, $K_2(10;\ 6)$, $r_2=5$. $K_1K_2=15$. A keresett kör középpontja rajta van a K_1K_2 egyenesen, másrészt az x tengelyre illeszkedik. K_1K_2 egyenlete: $3x-4y=6$. A K középpont koordinátái $(2;\ 0)$, a sugara $r=\sqrt{4^2+3^2}=5$, az egyenlete $(x-2)^2+y^2=25$.

3990. Az adott kör középpontja $K(-1;\ 2)$, a sugara $r=10$, az adott pontja $P(7;\ 8)$. A keresett kör K_1 középpontjának koordinátái u és v, a sugara $r=|v|$, mert érinti az x tengelyt. K_1 rajta van a KP egyenesen, és $K_1P=r$. A keresett kör egyenlete: $(x-3)^2+(y-5)^2=25$.

3991. A keresett kör K_1 középpontjának koordinátái $K_1(u;\ u)$ és a sugara $r=u$. Felírhatjuk u-ra a következő egyenletet (figyelembevéve, hogy az adott kör középpontja $K(-3;\ -1)$, a sugara $r=5$: $(u+3)^2+(u+1)^2=(5+u)^2$. Innen $u=5$. A keresett kör egyenlete:
$(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

3992. Az adott körök középpontjainak koordinátái: $K_1(0;\ 0)$, $K_2(2;\ 4)$, a sugaraik $r_1=5$, $r_2=4$ egység. A keresett kör középpontja $K(u;\ v)$ a sugara 5 egység; K-ra felírhatjuk a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{array}{rl}(1) & u^2+v^2=100\\ (2) & (u-2)^2+(v-4)^2=81\end{array}\right\}$. $K'(-6{,}09;\ 7{,}92) \vee K''(9{,}99;\ -0{,}12)$.

3993. Az adott körök sugarai megegyeznek. Ezért elegendő meghatározni a $K_1(2;\ 9)$, $K_2(1;\ 2)$ és a $K_3(9;\ 8)$ középpontokon átmenő k kör egyenletét, azután a k kör sugarát 2 egységgel csökkentve, illetve növelve megkapjuk a keresett körök egyenletét.
$(x-5)^2+(y-5)^2=9$ és $(x-5)^2+(y-5)^2=49$.

3994. Két egymást metsző kör hajlásszögét a metszéspontban húzott érintők hajlásszögével definiáljuk. Az adott körök metszéspontjai: $P_1(3{,}2;\ 2{,}4)$, $P_2(3{,}2;\ -2{,}4)$. A P_1 pontbeli érintők

V

egyenletei: e_1: $3{,}2x + 2{,}4y = 16$ és e_2: $-1{,}8x + 2{,}4y = 0$. e_1 normálvektora $\mathbf{n}_1(3{,}2;\ 2{,}4)$, e_2 normálvektora $\mathbf{n}_2(-1{,}8;\ 2{,}4)$. $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ a hajlásszög 90°. P_2 pontban a hajlásszög szintén 90°, mert P_1 és P_2 a centrális egyenesre szimmetrikus pontok.

3995. A keresett kör egyenlete $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$. Mivel a kör átmegy az (1; 0) és a (0; 1) koordinátájú pontokon, azért $u=v$ Ekkor $(1-u)^2+u^2=r^2$, illetve $2u^2-2u+1=r^2$. Másrészt a metszéspont, a $K(u;\ v)$ pont és az adott kör $K_1(-1;\ 0)$ középpontja egy derékszögű háromszög csúcsai, mivel a két kör merőlegesen metszi egymást. Így alkalmazva Pitagorasz tételét: $(u-1)^2+u^2=1+r^2$. A két egyenletből: $u=\frac{1}{4}$, $r^2=\frac{5}{8}$. A keresett kör egyenlete: $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{5}{8}$.

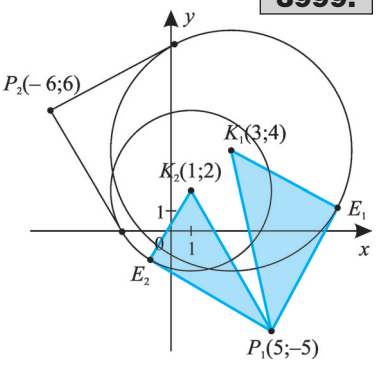
3996. A keresett kör egyenlete: $(x-u)^2+(y-v)^2=9$. A $P(2;\ 3)$ pont rajta van a körön, ezért $(2-u)^2+(3-v)^2=9$.

Az E metszéspont, a $K(u;\ v)$ pont és az $O(0;\ 0)$ pont derékszögű háromszög csúcsai, mert a keresett kör az adott kört derékszögben metszi. Ezért $u^2+v^2=1+9$. A felírt egyenletek megoldásai: $(-1;\ 3)$ és $\left(\frac{41}{13};\ \frac{3}{13}\right)$. Két megoldás van: $(x+1)^2+(y-3)^2=9$ és $\left(x-\frac{41}{13}\right)^2+\left(y-\frac{3}{13}\right)^2=9$.

3997. A $k_1-k_2=0$ valóban egyenes egyenlete: $16x-4y+3=0$. A centrális egyenes egyenlete: $x+4y=37$. A két egyenes merőleges egymásra, mert $1\cdot 16+4\cdot(-4)=0$. A feladat könnyen általánosítható. Legyen a két kör egyenlete: $x^2+y^2=r_1^2$, $(xa)^2+y^2=r_2^2$.

3998. *a)* Oldjuk meg az egyenletrendszert: $\left.\begin{matrix}(1)\quad x^2+y^2=9\\(2)\quad 9-6x-8y=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow x=\frac{27\pm 12\sqrt{91}}{50}$, $y=\frac{9}{8}-\frac{81\pm 36\sqrt{91}}{200}$. A húr hossza $d=\frac{3\sqrt{91}}{5}$ egység. *b)* $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ egység; *c)* $2\sqrt{2}$ egység; *d)* $\frac{2\sqrt{97}}{97}$ egység; *e)* $10\sqrt{2}$ egység.

3999. A keresett P pont koordinátái: $(x;\ y)$. Az adott körök adatai: $K_1(3;\ 4)$, $r_1=6$, $K_2(1;\ 2)$, $r_2=4$, az érintési pontok E_1 és E_2. Ekkor a PK_1E_1 háromszög és a PK_2E_2 háromszög derékszögű. (Az átfogók PK_1 és PK_2.) A következő egyenleteket írhatjuk fel, alkalmazva a Pitagorasz tételét: (1) $(x-3)^2+(y-4)^2=36+49$, (2) $(x-1)^2+(y-2)^2=16+49$. (1)-(2) egyenletrendszer gyökei adják a P pont koordinátáit. $P_1(5;\ -5)$, $P_2(-6;\ 6)$.



4000. A közös húr végpontjainak koordinátáit az $\left.\begin{matrix}x^2+y^2=10\\x^2+y^2-6x-6y+2=0\end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer gyökei adják. $P_1(3;\ -1)$, $P_2(-1;\ 3)$. A húr egyenlete: $x+y=2$. A háromszög területe 2 területegység.

4001. Az adott k kör középpontja $K(-1;\ 2)$, a sugara $r=10$ egység. A keresett k_1 kör középpontja $K_1(u;v)$ a sugara $r=|v|$ mert a kör érinti az x tengelyt. (A sugár merőleges az érintőre). Mivel k_1 érinti a k kört a $P(7;\ 8)$ pont-

ban, azért a K_1 pont rajta van a KP egyenesen. KP egyenlete: $-3x+4y=11$. A k_1 kör egyenlete: $(x-u)^2+(y-v)^2=v^2$. A P pont koordinátái kielégítik a kör egyenletét, a kör $(u;\ v)$ koordinátái kielégítik a KP egyenletét. Ekkor $\begin{matrix}(1) & -3u+4v=11\\ (2) & (7-u)^2+(8-v)^2=v^2\end{matrix}\Big\}$. (1)−(2) egyenletrendszer gyökei: $u_1=3$, $v_1=5$, $u_2=23$, $v_2=20$. A keresett kör egyenlete: (3) $(x-3)^2+(y-5)^2=25$ vagy (4) $(x-23)^2+(y-20)^2=400$. A (3)-as kör belülről a (4)-es kör kívülről érinti az adott kört a $P(7;\ 8)$ pontban.

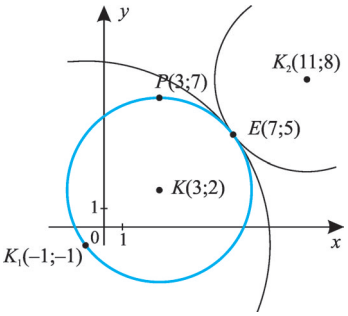
4002. A $K_1(-8;\ 12)$ középpontú és $r_1=10$ egység sugarú kör érinti a $K_2(4;\ -4)$ középpontú és $r_2=10$ egység sugarú kört, mert az $\begin{matrix}(x+8)^2+(y-12)^2=100\\ (x-4)^2+(y+4)^2=100\end{matrix}\Big\}$ egyenletrendszert egyetlen számpár, az $E(-2;\ 4)$ számpár elégíti ki.

A keresett k kör K középpontjának koordinátái $(u;\ v)$, a sugara $r=|v|$, mert a kör érinti az x tengelyt. Másrészt a K pont rajta van a K_1K_2 egyenesen, amelynek egyenlete $4x+3y=4$. A K kör átmegy az $E(-2;\ 4)$ ponton, ezért E koordinátái kielégítik a k kör egyenletét. Két érintőkör van: $(x+14)^2+(y-20)^2=400$ és $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{20}{9}\right)^2=\frac{400}{81}$.

4003. $(x-20)^2+(y-22)^2=400$ és $(x-5)^2+(y-2)^2=25$.

4004. Készítsünk ábrát. A k_1 kör K_1 középpontjának koordinátái $K_1(-1;\ -1)$ a sugara $r_1=10$ egység. A k_2 kör K_2 középpontjának koordinátái $K_2(11;\ 8)$ a sugara $r_2=5$ egység.

4004.

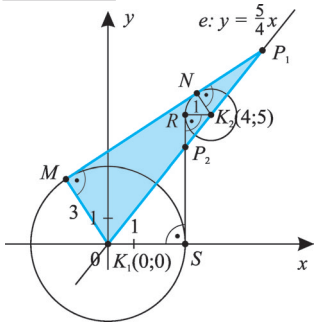


$K_1K_2=15$, a két kör érinti egymást. Az E érintési pont koordinátái $E(7;\ 5)$. A k kör $K(u;\ v)$ középpontja rajta van a K_1K_2 egyenesen és a PE szakasz felezőmerőlegesén, mert k érinti a k_1 kört belülről, a k_2 kört kívülről az E pontban, és átmegy a P ponton. u-ra, v-re felírhatjuk a következő egyenletrendszert: $\begin{matrix}(1) & 3u-4v=1\\ (2) & 2u-v=4\end{matrix}\Big\}$. (1) a PE szakasz felezőmerőlegesének egyenlete, (2) a K_1K_2 egyenes egyenlete. Innen $u=3$, $v=2$, a sugár 5 egység. k egyenlete: $(x-3)^2+(y-2)^2=25$.

4005. Az $(x+3)^2+(y+1)^2=r^2$ egyenletű kör, amely az adott körrel koncentrikus az x tengelyt az $A\left(-3+\sqrt{r^2-1};\ 0\right)$ és a $C\left(-3-\sqrt{r^2-1};\ 0\right)$, az y tengelyt a $B\left(0;\ -1+\sqrt{r^2-9}\right)$ és a $D\left(0;\ -1-\sqrt{r^2-9}\right)$ pontokban metszi, ahol $r>3$. Az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra és a területe:

$\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{2\sqrt{r^2-9}\cdot 2\sqrt{r^2-1}}{2}=8\sqrt{15}$. Innen $r^2=21$. A k kör egyenlete: $(x+3)^2+(y+1)^2=21$.

4006.



4006. Az adott k_1 kör K_1 középpontja az origó, $K_1(0;\ 0)$, a sugara $r_1=3$ egység, a k_2 kör K_2 középpontjának koordi-

nátái $K_2(4;\,5)$, a sugara $r_2 = 1$ egység. $K_1K_2 = \sqrt{41}$ egység. A centrális egyenlete $y = \frac{5}{4}x$. A két körhöz közös érintő a külső, illetve a belső hasonlósági pontból húzható. A külső hasonlósági P_1 pont koordinátái legyenek $(a;\,b)$. P_1-nek az origótól való távolságát a K_1MP_1 és a K_2NP_1 hasonló derékszögű háromszögek segítségével számíthatjuk ki.

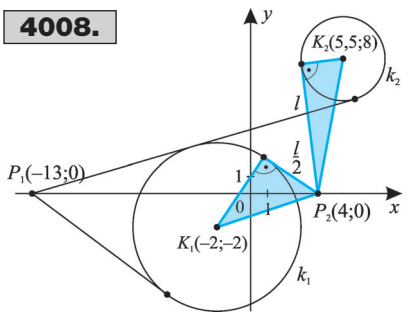
$\frac{K_1P_1}{K_2P_1} = \frac{K_1M}{K_2N} \Rightarrow \frac{\sqrt{41} + K_2P_1}{K_2P_1} = \frac{3}{1}$. Innen $K_2P_1 = \frac{\sqrt{41}}{2}$ és $K_1P_1 = \frac{3\sqrt{41}}{2}$ egység. Ekkor az $(a;\,b)$ koordinátákra a következő egyenletrendszert írhatjuk fel: $b = \frac{5}{4}a$ és $a^2 + b^2 = \left(\frac{3\sqrt{41}}{2}\right)^2$. Innen $a = 6$, $b = \frac{15}{2}$. A K_1SP_2 és a K_2RP_2 hasonló derékszögű háromszögek segítségével számíthatjuk ki a P_2 belső hasonlósági pont koordinátáit. $P_2\left(3;\,\frac{15}{4}\right)$.

4007. Tegyük fel, hogy a $P(a;\,b)$ pontból húzható egyenlő d hosszúságú érintő az adott körökhöz. Ekkor a P pont, a körök $K_1(-3;\,5)$ és $K_2(9;\,2)$ középpontja és az E_1, E_2 érintési pontok a PK_1E_1 és a PK_2E_2 derékszögű háromszögeket feszítik ki. $PE_1 = PE_2 = d$, $K_1E_1 = 3$, $K_2E_2 = 1$. $PK_1^2 = (a+3)^2 + 5^2$, $PK_2^2 = (a-9)^2 + 4$. $d^2 = (a+3)^2 + 5^2 - 3^2$ és $d^2 = (a-9)^2 + 2^2 + 1^2$. Ezekből az egyenletekből $a = \frac{11}{4}$. Az x tengely $\left(\frac{11}{4};\,0\right)$ pontjából húzhatók egyenlő hosszúságú érintők az adott körökhöz. (Az egyenlő érintők $\sqrt{42{,}0625}$ egység hosszúak.)

4008. Jelöljük az x tengely azon P pontjának koordinátáit $(a;\,0)$-val, amelyből a k_1: $\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + (y-8)^2 = 6{,}25$ egyenletű körhöz kétszer olyan hosszú érintő húzható, mint a k_2: $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 25$ körhöz. A P pont a körök középpontjai és az érintési pontok egy-egy derékszögű háromszöget határoznak meg. Legyen a k_1 körhöz húzott érintő hossza l. Ekkor a következő egyenleteket írhatjuk fel Pitagorász tétele szerint: $l = \sqrt{\left(a - \frac{11}{2}\right)^2 + (0-8)^2 - 6{,}25}$, $\frac{l}{2} = \sqrt{(a+2)^2 + (0+2)^2 - 25}$. Két megoldás van. $P_1(-13;\,0)$, $P_2(4;\,0)$.

4009. A keresett k kör $K(u;\,v)$ középpontja rajta van az PQ szakasz felezőmerőlegesén az $x + y = 16$ egyenletű egyenesen. Másrészt $KR = KP + 2 = KQ + 2$. Ennek alapján az $(u;\,v)$ koordinátákra a következő egyenleteket írhatjuk fel: (1) $u + v = 16$, (2) $\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{u^2 + (v-12)^2} + 2$. $K_1(8{,}3;\,7{,}7)$ és $K_2(12{,}3;\,3{,}7)$. A feladatnak a K_1 felel meg. A K_2 középpontú K_2P sugarú körnek az $R(0;\,0)$ pont belső pontja. A keresett kör sugara $KP \approx 11$ méter. A tó átmérője méter pontossággal 22 méter.

4008.



A parabola

A parabola egyenlete

4010. és **4011.** A feladatok megoldását az olvasóra bízzuk.

4012. A parabola egyenlete: $y = \frac{1}{2p}x^2$. Ha a $P_1(x_1;\ y_1)$ pont rajta van a parabolán, akkor $y_1 = \frac{1}{2p}x_1^2$. Válasszunk olyan $P(x;\ y)$ pontot, amely a parabola külső pontja. Húzzunk a P ponton át a parabola tengelyével párhuzamos egyenest. Ez egy $P_1(x_1;\ y_1)$ pontban metszi a parabolát. Ekkor $x = x_1$ és $y < y_1$. Ezért $y_1 = \frac{1}{2p}x_1^2 = \frac{1}{2p}x^2 > y$. Hasonlóan igazolható, hogy ha a $P(x;\ y)$ pont a parabola belső pontja, akkor $\frac{1}{2p}x^2 < y$.

4013. Az (1; 2) pont belső pont, mert $2 > \frac{1}{12}$. A (6; 3) parabolapont, (− 3; 1) belső, a (− 7; 4) külső pont.

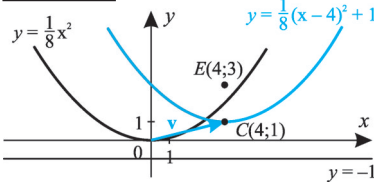
4014. *a)* $y = \frac{1}{2p}x^2$ egyenletbe helyettesítsük be a (12; 6) pontot. Ekkor $6 = \frac{1}{2p}144$. Innen $2p = 24$. Tehát a parabola egyenlete: $y = \frac{1}{24}x^2$. Ha a parabola tengelye az x tengely, akkor az $y^2 = 2px$ egyenletből $36 = 2p \cdot 12$, $y^2 = 3x$. *b)* $y = \frac{1}{4}x^2$, $y^2 = 4x$; *c)* $y = \frac{3}{16}x^2$, $y^2 = -\frac{9}{4}x$; *d)* $y = -\frac{3}{32}x^2$, $y^2 = -\frac{9}{2}x$.

4015. *a)* $y = \frac{1}{16}x^2$; *b)* $y = -\frac{1}{12}x$; *c)* $y = \frac{1}{8}x^2$; *d)* $y = -\frac{1}{32}x$; *e)* $y^2 = 16x$; *f)* $y^2 = -20x$.

4016. *a)* $y^2 = -28x$. *b)* $y = \frac{1}{16}x^2$.

4017. *a)* A parabola paramétere $p = 4$. Az $y = \frac{1}{8}x^2$ egyenletű parabolát eltoljuk a $\mathbf{v}(4; 1)$ vektorral. Az eltolt parabola egyenlete $y = \frac{1}{8}(x-4)^2 + 1$. Innen $x^2 - 8x - 8y + 24 = 0$. (4017. ábra). *b)* $x^2 - 4x + 12y + 4 = 0$; *c)* $x^2 - 6x + 16y - 23 = 0$; *d)* $y^2 - 4y - 6x + 19 = 0$; *e)* $y^2 - 6y - 6x - 6 = 0$; *f)* $x^2 + 2x - 8y + 17 = 0$; *g)* $y^2 - 4y - 16x + 68 = 0$. *h)* Két megoldás van: $x^2 - 16y + 32 = 0$ vagy $x^2 + 16y - 160 = 0$. *i)* Két megoldás van: $y^2 - 4y - 8x + 36 = 0$ vagy $y^2 - 4y + 8x - 60 = 0$.

4017.



4018. *a)* $c = 0$. *b)* A $P(2; 1)$ pont koordinátái kielégítik a parabola egyenletét: $4a + 2b + c - 1 = 0$; *c)* $16a - 4b + c = 0$; *d)* $9a + 3b + c + 2 = 0$.

4019. A parabola tengelypontjának koordinátái: $C(u; 2)$, a paramétere: $p = 3$. Az egyenlete: $y = \frac{1}{6}(x-u)^2 + 2$. Mivel a parabola átmegy a (0; 8) ponton, azért $8 = \frac{1}{6}(-u)^2 + 2$. Innen $u = \pm 6$. Két megoldás van: $y = \frac{1}{6}(x-6)^2 + 2$ vagy $y = \frac{1}{6}(x+6)^2 + 2$.

4020. Két eset lehetséges. A parabola az x tengely pozitív irányában vagy negatív irányában nyílik szét. $2p = 1$, tehát $(y-v)^2 = x-u$ az egyenlete, vagy $(y-v)^2 = -(x-u)$. Figyelembe véve az adott parabolapontok koordinátáit: a következő egyenletrendszereket írhatjuk fel:
(1) $\left.\begin{array}{l}(4-v)^2 = -6-u\\(1-v)^2 = 9-u\end{array}\right\}$ és (2) $\left.\begin{array}{l}(4-v)^2 = -(-6-u)\\(1-v)^2 = -(9-u)\end{array}\right\}$. Az (1)-es egyenletrendszerből $(y-5)^2 = x+7$, a (2)-es egyenletrendszerből $y^2 = -(x-10)$ egyenleteket kapjuk.

4021. *a)* A tengelypont koordinátái (0; v), a parabola egyenlete $(y-v)^2 = -2px$. Az adott pontok koordinátái kielégítik a parabola egyenletét: $\left.\begin{array}{l}(-1-v)^2 = 2p\\(1-v)^2 = -8p\end{array}\right\}$. Innen $v_1 = -3$, $p_1 = 2$, $v_2 = -\frac{1}{3}$, $p_2 = \frac{2}{9}$. Két parabolát kapunk. $(y+3)^2 = -4x$ és $\left(y+\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}x$.

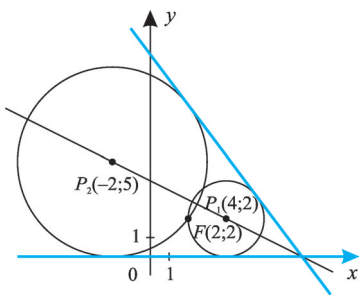
b) $3y = (x-5)^2$ és $(x-1)^2 = \frac{1}{3}y$.

4022. A keresett parabolák egyenletei: $y = (x-6)^2$ vagy $y = \frac{1}{25}(x+6)^2$.

4023. A parabola tengelyesen szimmetrikus. A keresett parabola szimmetriatengelye az $x = 1$ egyenletű egyenes. A parabola átmegy a (2; 0) ponton és ezen pontnak az $x = 1$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképén a (0; 0) ponton is. Felírhatjuk a, b, c-re a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{array}{l}-1 = a+b+c\\0 = 4a+2b+c\\0 = 0\cdot a+0\cdot b+c\end{array}\right\}$. Innen $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$.

4024. A közös fókuszú parabolák vezéregyeneseit úgy kapjuk meg, hogy a parabola definícióját figyelembe véve a P_1 és P_2 pontok körül P_1F és P_2F sugarú köröket rajzolunk, és meghatározzuk ezen körök közös külső érintőit. Az érintők egyik-egyik parabola vezéregyenesét adják. $P_1F = 2$, $P_2F = 5$, $P_1P_2 < P_1F + P_2F$. A két kör metszi egymást. A centrális egyenlete $x + 2y = 8$. Az egyik külső érintő az x tengely, a másik külső érintő egyenlete: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{32}{3}$. Az egyik parabola paramétere 2, a másik parabola paramétere az $F(2; 2)$ pontnak a $4x + 3y - 32 = 0$ egyenletű egyenestől mért távolsága: 3,6 egység.

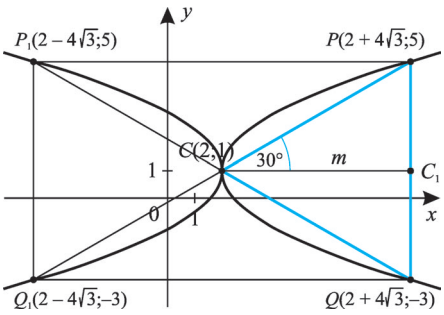
4024.



4025. Mivel mindkét egyenletben az x^2 együtthatója azonos, a két parabola egybevágó (mindkét parabola felfelé nyílik szét). A csúcspontjaik koordinátái: $C_1(2p;\ 2-4p^2)$, $C_2(-p;\ -p^2-4)$. A $\overrightarrow{C_1C_2}$ vektor koordinátái: $(-3p;\ 3p^2-6)$.

$$\left|\overrightarrow{C_1C_2}\right| = \sqrt{(3p)^2 + (3p^2-6)^2} = 3\sqrt{\left(p^2-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}}.$$

4030.



Az eltolásvektor hossza akkor a legkisebb, ha $p^2=\frac{3}{2}$, $p=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. $\left|\overrightarrow{C_1C_2}\right|_{\min}=\frac{9}{2}\sqrt{3}$ egység.

4026. *a)* $x^2-4x-4y=0$; *b)* $y=\frac{2}{9}x^2$; *c)* $y=\frac{1}{2}x^2-2x+5$; *d)* $7x^2-25x+6y+12=0$; *e)* $3x^2-33x-4y+76=0$.

4027. A parabola egyenlete: $(y-v)^2=2p(x-u)$ alakú. Itt $v=0$, $u=-5$ és a $P(0;6)$ pont a parabolára illeszkedik. A parabola egyenlete $5y^2-36x-180=0$.

4028. $ay^2+b^2x-ab^2=0$.

4029. $bx^2+a^2y-a^2b=0$.

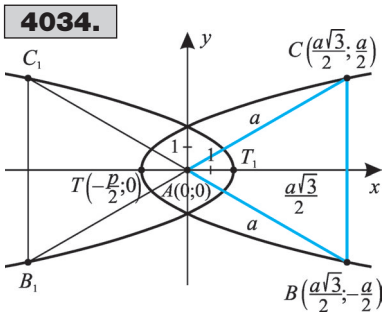
4030. Az ábra szerint a CPQ szabályos háromszög CC_1 magassága $\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ egység. A CP egyenes egyenlete $y-1=\operatorname{tg}30^\circ(x-2)$, illetve $y-1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$. A P pont abszcisszája $2+4\sqrt{3}$, az ordinátája a CP egyenletből $y-1=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2+4\sqrt{3}-2\right)$, $y=5$. A keresett parabola átmegy a $C(2;1)$, $P\left(2+4\sqrt{3};5\right)$ és a $Q\left(2+4\sqrt{3};-3\right)$ pontokon. A parabola egyenlete: $(y-v)^2=2p(x-u)$, ahol $(u;v)$ a C csúcspont (tengelypont) koordinátái. $u=2$, $v=1$. Helyettesítsük a parabola egyenletébe a P pont koordinátáit. Ekkor $(5-1)^2=2p\left(2+4\sqrt{3}-2\right)$. Innen $2p=\frac{4\sqrt{3}}{2}$. A CPQ pontokon átmenő parabola egyenlete: $(y-1)^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}(x-2)$. (Szimmetria miatt a Q pont koordinátái is kielégítik a parabola egyenletét.) Még egy megoldást kapunk, ha a CPQ háromszöget az $x=2$ egyenletű egyenesre tükrözzük. A $C(2;1)$, $P_1\left(2-4\sqrt{3};5\right)$, $Q_1\left(2-4\sqrt{3};-3\right)$ csúcspontokon átmenő parabola egyenlete:

$(y-1)^2=\frac{-4\sqrt{3}}{3}(x-2)$.

4031. Helyezzük el a parabolát a koordináta-rendszerben úgy, hogy a híd tartószerkezetének két végpontja $A(-30;0)$, $B(30;0)$ és a legmagasabb pontja $C(0;15)$ legyen. A parabolaív egyenlete: $y=-\frac{1}{p}x^2+15$. Ekkor $0=-\frac{1}{2p}900+15$, innen $2p=60$. A parabola egyenlete: $y=-\frac{1}{60}x^2+15$, ahol $-30\le x\le 30$. A függőleges tartóvasak hossza méterben rendre: $\frac{55}{12}$; $\frac{25}{3}$; $\frac{45}{4}$; $\frac{40}{3}$; $\frac{175}{12}$; 15, ha az x helyére rendre behelyettesítjük a -25, -20, -15, -10, -5, 0 értékeket. A szimmetria miatt az első öt hosszúság a másik oldalon is érvényes.

4032. A parabola átmegy az $A(0;\ 0)$, $B(36;\ 0)$ és a $C(18;\ 12)$ pontokon, a tengelye párhuzamos az y tengellyel, a tengelypontja a C pont. Az egyenlete: (1) $y = -\frac{1}{2p}(x-u)^2 + v$ alakú, ahol $u = 18$, $v = 12$ és $x = y = 0$. Ezeket az adatokat behelyettesítve az (1)-es egyenletbe $2p = 27$. A röppálya egyenlete:
$y = -\frac{1}{27}(x-18)^2 + 12$, ahol $0 \le x \le 36$.

4034.



4033. Induljon a vízsugár az $A(-1;\ 0)$ pontból és a $B(1;\ 0)$ pontba érkezzen vissza a talajra. $p = \frac{1}{10}$. A parabolaív egyenlete: $y = -\frac{1}{2p}x^2 + v$. Ekkor $0 = -\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)}1 + v$. A vízsugár $v = 5$ méter magasra emelkedik.

4034. Tekintsük az ábrát. A parabola fókusza az $A(0;\ 0)$ pont és a parabola átmegy a $T\left(-\frac{p}{2};\ 0\right)$ tengelyponton és a háromszög $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ -\frac{a}{2}\right)$ és $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2}\right)$ csúcsain. Ekkor a parabola egyenlete: $y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$ alakú. Behelyettesítve a B vagy a C csúcs koordinátáit, p-re a következő egyenletet kapjuk: $p^2 + \left(a\sqrt{3}\right)p - \frac{a^2}{4} = 0$. Innen, mivel $p > 0$, $p = \frac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$ adódik. A parabola egyenlete: $y^2 = a\left(2-\sqrt{3}\right)\left(x + \frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$. Ha a tengelypont $T\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$, akkor az egyenlet: $y^2 = -a\left(2+\sqrt{3}\right)\left(x - \frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

4035. A parabola tengelye az y tengely, az $(r;\ 0)$, $\left(\sqrt{r^2-b^2};\ b\right)$, $\left(-\sqrt{r^2-b^2};\ b\right)$ $(-r;\ 0)$ pontok rajta vannak a parabolán. Egyenlete: $y = -\frac{1}{2p}x^2 + v$ alakú. Legyen $y = 0$, $x = r$, ekkor $r^2 = 2pv$. A $\left(\sqrt{r^2-b^2};\ b\right)$ pont is illeszkedik a parabolára. Ezért $b = -\frac{1}{2p}\left(r^2-b^2\right) + v$. Az $\left.\begin{array}{l} r^2 = 2pv \\ 2pb = b^2 - r^2 + 2pv \end{array}\right\}$ egyenletrendszerből $2p = b$ és $v = \frac{r^2}{b}$. A parabola egyenlete:
$y = -\frac{x^2}{b} + \frac{r^2}{b}$, illetve $x^2 + by - r^2 = 0$.

4036. *a)* $p = 12$, $F(0;\ 6)$, $y + 6 = 0$; *b)* $p = 4$, $F(0;\ -2)$, $y - 2 = 0$; *c)* $p = 3$, $F\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$, $y + \frac{3}{2} = 0$; *d)* $p = \frac{1}{2}$, $F\left(0;\ -\frac{1}{4}\right)$, $y - \frac{1}{4} = 0$; *e)* $p = 2$, $F(0;\ -1)$, $y - 1 = 0$; *f)* $p = 4$,

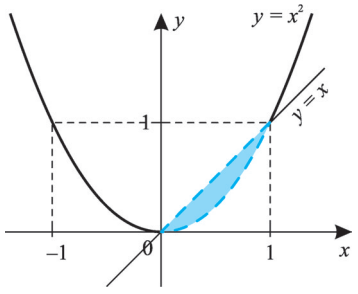
$F(-6;7)$, $y-3=0$; *g)* $p=2$, $F(-1;2)$, $y-4=0$; *h)* $p=6$, $F(0;2)$, $x+6=0$; *i)* $p=2$, $F(0;-7)$, $y+9=0$; *j)* Az egyenlet $y^2=-6\left(x-\frac{2}{3}\right)$ alakban is felírható. Innen $2p=6$, $\frac{p}{2}=\frac{3}{2}$, $F\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2};0\right)$, $F\left(-\frac{5}{6};0\right)$, $x=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}$, $x=\frac{13}{6}$. *k)* $p=3$, $F\left(0;\frac{7}{2}\right)$, $y-\frac{1}{2}=0$; *l)* $p=\frac{1}{2}$, $F\left(0;\frac{7}{4}\right)$, $y-\frac{9}{4}=0$. *m)* A parabola egyenlete: $y=\frac{1}{4}\left(x^2+4x+4\right)+1$, $y=\frac{1}{4}(x+2)^2+1$ alakban is felírható. Hasonlítsuk össze a parabola egyenletét az $y=\frac{1}{2p}(x-u)^2+v$ egyenlettel. $2p=4$, $u=-2$, $v=1$. A tengelypont koordinátái $C(-2;1)$, $F(-2;2)$, a vezéregyenes egyenlete: $y=0$. *n)* $y=-\frac{1}{6}\left(x^2-12x+36\right)-1$, $y=-\frac{1}{6}(x-6)^2-1$. $p=3$, $F\left(6;-\frac{5}{2}\right)$, $y=-1+\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}$. *o)* $(y-1)^2=10(x+2)$ egyenletből $p=5$, $F\left(\frac{1}{2};1\right)$, $x+\frac{9}{2}=0$. *p)* $p=1$, $F\left(4;-\frac{9}{2}\right)$, $y+\frac{11}{2}=0$; *q)* $p=4$, $F(4;4)$, $y-8=0$; *r)* $p=\frac{3}{200}$; $F\left(\frac{3}{400};0\right)$, $x+\frac{3}{400}=0$; *s)* $(y-5)^2=-2\left(x-\frac{49}{2}\right)$ egyenletből $p=1, F(-25;5)$, $y+24=0$; *t)* $p=\frac{1}{10}$; $F\left(8;-\frac{1}{20}\right)$, $y-\frac{1}{20}=0$; *u)* $p=5$; $F\left(-\frac{5}{20};0\right)$, $y+5=0$.

4037. $y=x$, ha $x^2=4(x-1)$. Megoldás: $P(2;2)$.

4038. Az egyenlőtlenség átalakítható: $y>\frac{1}{2}(x-5)^2+9$. Az egyenlőtlenséget a parabola belső (a fókuszt tartalmazó tartomány) pontjainak koordinátái elégítik ki.

4039. A szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0. Tehát $y=x^2$ vagy $x=\pm 1$, vagy $(y-2)(y-3)=0$-ból $y=2$ vagy $y=3$. A ponthalmaz a normál parabola az $x=1$, $x=-1, y=2, y=3$, egyenletű egyenesek pontjainak uniója. Ezen halmaz pontjainak koordinátái és csakis ezek elégítik ki az adott egyenlőtlenséget.

4041.



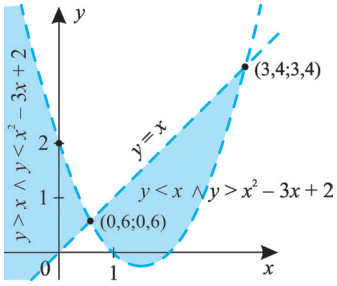
4040. Az egyenlettel ekvivalens az $\left(x^2-y\right)^2=1$, illetve az $x^2-y=\pm 1$ egyenlet. Innen $y=x^2-1$ vagy $y=x^2+1$. Az adott egyenlet az $y=x^2-1$ és az $y=x^2+1$ egyenletű parabolák pontjainak koordinátái elégítik ki.

4041. A megoldást az ábrán látható zárt síktartomány belső pontjainak koordinátái adják.

4042. $(y-x)\left(y-x^2+3x-2\right)<0$, ha *a)* $y<x$ és $y>\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$; *b)* $y>x$ és $y<\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

Az $y = x$, egyenes és az $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ parabola közös pontjainak koordinátái: $x_1 = y_1 = 2\sqrt{2} \approx 3{,}4$ $x_2 = y_2 = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}6$. Az *a) – b)* feltételeket kielégítő pontok halmazát az ábrán vázoltuk.

4042.

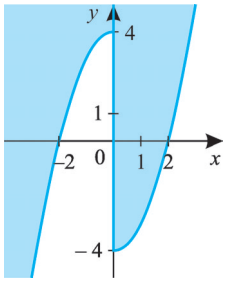


4043. Ha $x \geq 0$, akkor $x^3 - 4x - xy \leq 0$, illetve $x\left(x^2 - 4 - y\right) \leq 0$. Ez az egyenlőtlenség csak úgy teljesülhet, ha $y \geq x^2 - 4$. Ha pedig $x < 0$, akkor $y \geq -x^2 + 4$. A ponthalmazt az ábrán vázoltuk.

4044. Legyen a $Q(x;y)$ pont az $y = x^2$ egyenletű parabola pontja és a $Q_1(x_1;y_1)$ a Q pontnak a $P(1;1)$ pontra vonatkozó tükörképe. Ekkor $\frac{x + x_1}{2} = 1$, $\frac{y + y_1}{2} = 1$. Innen $x = 2 - x_1$, $y = 2 - y_1$. $y = x^2$, tehát $2 - y_1 = (2 - x_1)^2$. $y_1 = -x_1^2 + 4x_1 - 2$. Az $y = x^2$ egyenletű parabola tükörképe az $y = -x^2 + 4x - 2$; $y = -(x - 2)^2 + 2$ egyenletű parabola.

4045. Legyen a $Q(x;y)$ pont az $y = -2x^2 + 4x - 2$ egyenletű parabola pontja a $Q_1(x_1;y_1)$ a Q pont tükörképe. Ekkor $x = 4 - x_1$ és $y = 2 - y_1$. Helyettesítve az adott parabola egyenletébe, és rendezve az egyenletet: $y_1 = 2(x_1 - 5)^2 - 2$. Az $y = -2(x + 1)^2 + 2$ egyenletű parabolát tükrözve a $P(2;1)$ pontra a tükörkép parabola, amelynek egyenlete: $y = 2(x - 5)^2 - 2$.

4043.



4046. Ismeretes, hogy ha a $P(x;y)$ pontot az $y = x$ egyenletű egyenesre tükrözzük, akkor a P pont a $Q(x;y)$ pontba megy át. *a)* Az $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$ egyenletű parabola az $x = \frac{1}{2}y^2 - 4y + 3$ egyenletű görbébe megy át, amely egyenlet a következőképpen is írható: (1) $(y - 4)^2 = 2(x + 5)$. (1) olyan parabola egyenlete, amelynek tengelye párhuzamos az x tengellyel, a tengelypontja $C(-5;4)$, a paramétere 1, a fókuszának koordinátái: $F\left(-\frac{9}{2};4\right)$. *b)* $C(-3;-2)$, $F(-2;-2)$.

4047. A parabola pontjai a következők: $P_1(4\sqrt{2};4)$, $P_2(-4\sqrt{2};4)$, $P_3(4\sqrt{6};12)$, $P_4(-4\sqrt{6};12)$. A lehetséges 4 húr közül 2-2 egyenlő hosszúságú. $P_1P_3 = 8\sqrt{3 - \sqrt{3}}$, $P_1P_4 = 8\sqrt{3 + \sqrt{3}}$.

4048. $P(6;6)$, $F\left(0;\frac{3}{2}\right)$, $PF = \frac{15}{2}$.

4049. $P(6\sqrt{2};6)$, $F(0;3)$, $PF = 9$.

V

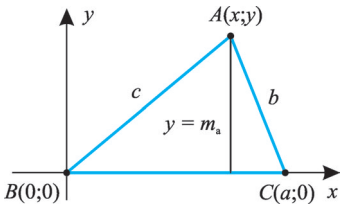
4050. Legyen a keresett kör középpontja O. Az O pont koordinátái: $(x;y)$. Ekkor felírhatjuk a következő egyenletet: $(x-3)^2+(y-2)^2=x^2$, mert a kör sugara $x>0$. Innen rendezéssel: $(y-2)^2=6\left(x-\frac{3}{2}\right)$. A mértani hely olyan parabola, amelynek tengelypontja a $C\left(\frac{3}{2};2\right)$ pont, a tengelye párhuzamos az x tengellyel, fókuszának koordinátái: $F(3;2)$ pont, a paramétere $p=3$. A parabola minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez.

4051. Az adott egyenletet átalakíthatjuk. $y=\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+1-\frac{b^2}{4}$. A csúcspont koordinátái: $C\left(\frac{b}{2};1-\frac{b^2}{4}\right)$. Innen $x=\frac{b}{2}$, $y=1-\frac{b^2}{4}$. Kiküszöbölve a b paramétert $y=1-x^2$. A csúcspontok b-től függően végigfutnak az $y=1-x^2$ egyenletű parabolán, amelynek minden pontja megfelel.

4052. Az adott egyenlet átalakítható. $y=4\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2+2a-2$, ahol $a\in\mathbf{R}$. Innen leolvashatjuk a tengelypont koordinátáit: $x=\frac{a+1}{2}$, $y=2a-2$. Kiküszöbölve az a paramétert $a=2x-1$, $y=4x-4$. A mértani hely egyenes. Az egyenes minden pontja lehet egy-egy parabola csúcsa. Ugyanis, ha $x=\frac{a+1}{2}$, akkor $y=2a-2$. A $C\left(\frac{a+1}{2};2a-2\right)$ az adott egyenletű parabolák csúcsa.

4053. Helyezzük el az ABC háromszöget az ábrán látható módon koordináta-rendszerben. Ekkor (1) $y^2=c^2-b^2$, (2) $b^2=(x-a)^2+y^2$, (3) $c^2=x^2+y^2$. (1) egyenletből következik, hogy $c>b$ és legyen $a>0$. A felírt egyenletekből következik, hogy $y^2=2a\left(x-\frac{a}{2}\right)$, amely egyenlet szerint az A csúcs mértani helye parabola. A paramétere $p=a$, a tengelypontja $T\left(\frac{a}{2};0\right)$, a fókusza $F(a;0)$. Az $\left(\frac{a}{2};0\right)$ pont nem tartozik a mértani helyhez, mert akkor az a csúcs a BC oldalon van, tehát nem keletkezik háromszög.

4053.



A parabola és az egyenes, a parabola és kör kölcsönös helyzete

4054. *a)* Két közös pont van: $P_1(6;6)$, $P_2\left(-2;\frac{2}{3}\right)$. *b)* $P(6;-4)$, *c)* $P_1(1;2)$, $P_2(9;-6)$.

4055. $M_1(6;3)$, $M_2(1;8)$.

4056. $M_1(4;4)$, $M_2(1;-2)$.

4057. $M_1(3;0)$, $M_2(7,5;3)$.

4058. $M_1(1;0)$, $M_2(10;6)$.

4059. Az $y = tx^2 - x + 1$ csak akkor parabola egyenlete, ha $t \neq 0$. Ekkor minden $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$-ra van megoldás, van közös pont, mert a $tx^2 - x + 1 = 2tx - 1$ egyenlet diszkriminánsa: $D = (2t - 1)^2 \geq 0$. Ha $t = \frac{1}{2}$, akkor egy közös pont van. $M(2; 1)$. Ha $t \neq \frac{1}{2}$, akkor $M_1(2; 4t - 1)$, $M_2\left(\frac{1}{t}; 1\right)$. Ha $t = \frac{1}{2}$, akkor $M_1 = M_2$, az egyenes a parabola érintője.

4060. Minden m-re csak egy közös pont van, mert a diszkrimináns 0. Az egyenes érinti a parabolát az $M\left(\frac{1 - 2m}{2}; \frac{1 - 4m}{4}\right)$ pontban.

4061. A $p = x^2 - 4x + 4$ egyenlet gyökei: $a = 2 + \sqrt{p}$, $b = 2 - \sqrt{p}$, ahol $p > 0$. $a^4 + b^4 = 712$, ha $p = 10$, ekkor $a = 2 + \sqrt{10}$, $b = 2 - \sqrt{10}$.

4062. A húr végpontjainak koordinátái: $P_1(9; 18)$, $P_2(4; 12)$. A húr hossza $\sqrt{61}$ egység.

4063. A húr hossza $\frac{5\sqrt{145}}{4}$ egység.

4064. A húr hossza $\sqrt{522}$ egység.

4065. Nyilván $k \neq 0$. A parabola egyenletét az adott pontok rendre kielégítik. Tehát $\left.\begin{array}{r} c = k \\ ak^2 + bk + k = 2k \\ \underline{4ak^2 + 2bk + k = 0} \end{array}\right\}$. Egyszerűsítve $k \neq 0$-val $\left.\begin{array}{ll} (1) & ak + b - 1 = 0 \\ (2) & \underline{4ak + 2b + 1 = 0} \end{array}\right\}$. (1) és (2) egyenletekből $a = -\frac{3}{2k}$, $b = \frac{5}{2}$. Az a, b, c értékeit behelyettesítve az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletbe, $y = -\frac{3}{2k}x^2 + \frac{5}{2}x + k$. A k értékét úgy kell meghatározni, hogy a parabola áthaladjon a $Q(-1; 0)$ ponton. Ez pontosan akkor teljesül, ha (3) $0 = -\frac{3}{2k} - \frac{5}{2} + k$. Oldjuk meg a (3)-as egyenletet: $k_1 = 3$, $k_2 = -\frac{1}{2}$. Ha $k = 3$, akkor $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{2}$, $c = 3$, ha $k = -\frac{1}{2}$, akkor $a = 3$, $b = \frac{5}{2}$, $c = -\frac{1}{2}$.

4066. A fókusz koordinátái: $F\left(0; \frac{9}{4}\right)$, az egyenes egyenlete: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{9}{4}$. A húr végpontjainak koordinátái: $P_1 = \left(\frac{9\sqrt{3}}{2}; \frac{27}{4}\right)$, $P_2 = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{4}\right)$. A húr hossza: 12 egység.

4067. A tengelyponton átmenő egyenesek egyenletei: $y = \sqrt{3}\,x$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$. Ezen egyenesek az $y = \frac{1}{6}x^2$ egyenletű parabolát a tengelyponttól különböző $P_1(6\sqrt{3}; 18)$ és $P_2(-2\sqrt{3}; 2)$ pontokban metszik. A P_1P_2 egyenes egyenlete: $2x - y\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$. Az egyenes az x tengelyt a $Q_1(-3\sqrt{3}; 0)$, az y tengelyt a $Q_2(0; 6)$ pontban metszi.

V

4068. A fókusz koordinátái: $F(0;2)$, a fókuszon átmenő egyenes egyenlete: $y = mx + 2$, amely az adott parabolát a $P_1(4m + 4\sqrt{m^2+1}\,;\, 4m^2 + 4m\sqrt{m^2+1} + 2)$ és a $P_2(4m - 4\sqrt{m^2+1}\,;\, 4m^2 - 4m\sqrt{m^2+1} + 2)$ pontokban metszi.

$P_1P_2 = 10 = \sqrt{(8\sqrt{m^2+1})^2 + (8m\sqrt{m^2+1})^2}$. Innen $m = \pm\frac{1}{2}$.

Két megoldás van: $x - 2y + 4 = 0$, vagy $x + 2y - 4 = 0$.

4069. Számítsuk ki az AB szakasz felezőmerőleges egyenesének a parabolával közös pontjait. Megoldás: $P_1(0;0)$, $P_2(6;12)$.

4070. $M_1(0;0)$, $M_2(4;4)$.

V

4071. A húr végpontjai: $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$. Ekkor $x_1 + x_2 = 10$ és $y_1 + y_2 = 4$. Másrészt M_1 és M_2 parabolapontok, ezért $\left.\begin{matrix}(1)\ x_1^2 = 20y_1\\ (2)\ x_2^2 = 20y_2\end{matrix}\right\}$. (2) és (1) különbsége: $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 20(y_2 - y_1)$. De $x_2 + x_1 = 10$, tehát $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}$, $(x_2 \neq x_1)$, ami a keresett húr meredeksége.

A húr egyenesének (az $(5;2)$ koordinátájú ponton átmenő szelő) egyenlete: $x - 2y - 1 = 0$.

4072. Az előző példa megoldásának gondolatmenetét követve, a keresett szelő egyenlete: $2x - y + 4 = 0$.

4073. Az origón áthaladó egyik oldal egyenesének egyenlete: $y = \sqrt{3}\,x$. Ez az egyenes a parabolát a $(0;0)$, $(4\sqrt{3}\,;12)$ koordinátájú pontokban metszi. A szabályos háromszög csúcsainak koordinátái: $A(0;0)$, $B(4\sqrt{3}\,;12)$, $C(-4\sqrt{3}\,;12)$.

4074. Mivel az y tengely az egyik magasság, azért az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(0;0)$, $B\left(x_1;\frac{1}{8}x_1^2\right)$, $C\left(-x_1;\frac{1}{8}x_1^2\right)$, $x_1 > 0$. A magasságpont $M(0;2)$. Ekkor $\overrightarrow{AB}\left(x_1;\frac{1}{8}x_1^2\right)$, $\overrightarrow{CM}\left(x_1;2 - \frac{1}{8}x_1^2\right)$ és $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM} = 0$, $x_1 = 4\sqrt{5}$.

Az oldalak egyenletei: $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$, $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x$, $y = 10$.

4075. Legyen $A(0;0)$. Az AB oldal egyenesének egyenlete: $y = x\sqrt{3}$. A B és a C csúcsok koordinátái: $B(2p\sqrt{3}\,;6p)$, $C(-2p\sqrt{3}\,;6p)$.

4076. A húrok paraméteres egyenlete: $y = mx + b$, ahol m adott, b változó. Ekkor $3x^2 - mx - 4 - b = 0$. A húrok végpontjai: $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$. x_1 és x_2 a másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 + x_2 = \frac{m}{3}$, a húrok felezőpontjai az $x = \frac{m}{6}$ egyenletű egyenesnek a parabola belsejébe eső pontjai: Ha $m = 4$, akkor $x = \frac{2}{3}$.

4077. $P_1P_2P_3$ háromszög csúcsainak koordinátái: $P_1(-10;10)$, $P_2(15;22{,}5)$, $P_3\left(x;\frac{1}{10}x^2\right)$.

A $P_1P_2P_3$ háromszög területe:

$31\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left|x(22{,}5 - 10) + 15\left(10 - \frac{1}{10}x^2\right) - 10\left(\frac{1}{10}x^2 - 22{,}5\right)\right|$. Rendezés után

$|-x^2+5x+75|=25$. Ha $\frac{5-5\sqrt{13}}{2}\le x\le\frac{5+5\sqrt{13}}{2}$, akkor $-x^2+5x+75=25$. Innen $P_3(-5;2,5)$, $P_3'(10;10)$. Ha $x<\frac{5-5\sqrt{13}}{2}$ vagy $x>\frac{5+5\sqrt{13}}{2}$, akkor $P_3''\left[\frac{5+5\sqrt{17}}{2};\frac{1}{10}\left(\frac{5+5\sqrt{17}}{2}\right)^2\right]$ és $P_3'''\left[\frac{5-5\sqrt{17}}{2};\frac{1}{10}\left(\frac{5-5\sqrt{17}}{2}\right)^2\right]$. A kapott x értékek kielégítik az x-re vonatkozó követelményeket! Így négy megoldás van.

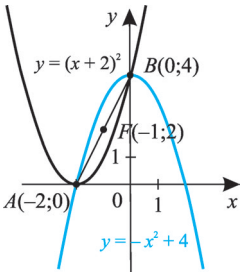
4078. A PTA derékszögű háromszög csúcsainak koordinátái $P(x;x^2)$, $T(x;0)$, $A(4;0)$, ahol $0<x<4$. A PTA háromszög területe: $t=\frac{(4-x)x^2}{2}=2(4-x)\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}$. Alkalmazhatjuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget, mert $4-x>0$, $\frac{x}{2}>0$. $\sqrt[3]{(4-x)\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}\le\frac{4-x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}{3}$, $(4-x)\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\le\left(\frac{4}{3}\right)^3$. A terület legnagyobb értéke $\frac{128}{27}$ és pontosan akkor, ha $4-x=\frac{x}{2}$, $x=\frac{8}{3}$. A keresett P pont koordinátái: $P\left(\frac{8}{3};\frac{64}{9}\right)$.

4079. A C csúcs koordinátái (2,5; 2). A BC egyenes irányszöge 45°, a BC egyenes egyenlete $y=x-0,5$. A B csúcs koordinátái kielégítik az $\left.\begin{array}{l}y=x-0,5\\ \underline{y=x^2-5x+8,25}\end{array}\right\}$ egyenletrendszert. A négyzet keresett csúcsai: $B(3,5;3)$, $D(1,5;3)$, $A(2,5;4)$.

4080. A parabola fókusza $F\left(-\frac{7}{2};-2\right)$, ez a rombusz B csúcsa. Az A csúcs a B csúcstól 5 egység távolságra van és rajta van a parabolán. $\left.\begin{array}{r}\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+(y+2)^2=25\\ \underline{y=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}\end{array}\right\}$. Az egyenletrendszerből az A csúcs koordinátái: $\left(-\frac{\sqrt{19}+7}{2};\frac{5}{2}\right)$. A rombusz K középpontja a parabola tengelyén van, a koordinátái $K\left(-\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$, az AC átló hossza $\sqrt{19}$ egység, a BD átló hossza $2BK=9$ egység. A rombusz területe: $t=\frac{9\sqrt{19}}{2}$ területegység.

4081. Az AB szakasz, mint átmérő fölé rajzolt Thalész-kör egyenlete: $(x-4)^2+(y-1)^2=4$. Ez a kör az $(y-1)^2=x-2$ parabolát az $A(2;1)$ pontban érinti, a $P_1(5;1-\sqrt{3})$ és a $P_2(5;1+\sqrt{3})$ pontokban metszi. $P_1\sphericalangle=P_2\sphericalangle=90°$. Az AP_1BP_2 négyszög területe $4\sqrt{3}$ területegység.

4083.



4082. Legyen a parabola egyenlete $y^2 = 2px$. A csúcson átmenő egymásra merőleges egyenesek egyenletei: $y = mx$ és $y = -\frac{1}{m}x$, $(m \neq 0)$. A húrok végpontjai $P\left(\frac{2p}{m^2}; \frac{2p}{m}\right)$ és $Q(2pm^2; -2pm)$. A PQ húr a parabola csúcsából derékszögben látszik. A PQ egyenes egyenlete: $mx + (m^2 - 1)y = 2pm$. Legyen $y = 0$, akkor $x = 2p$. A húrok egyenesei a $(2p; 0)$ ponton haladnak át az $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ értékétől függetlenül.

4083. *a)* $p \neq 1$. A parabola pontosan akkor érinti az x tengelyt, ha a $(p-1)x^2 - 2px + 4 = 0$ egyenletnek egy gyöke van (a két gyök azonos). $D = (2p-4)^2 = 0$, $p = 2$. Ekkor $A(-2; 0)$. *b)* Alakítsuk át az egyenletet: $y = (p-1)\left(x + \frac{p}{p-1}\right)^2 + 4 - \frac{p^2}{p-1}$. A parabola csúcsa (tengelypontja) az y tengelyen van, ha $\frac{p}{p-1} = 0$. Ekkor $p = 0$, $B(0; 4)$. Ábrázoljuk a $p = 2$, illetve a $p = 0$ értékeknek megfelelő parabolákat (4083. ábra). *c)* Mindkét parabola normál parabola. Az $F(-1; 2)$ pontra valóban szimmetrikusak. *d)* Az A és a B pont.

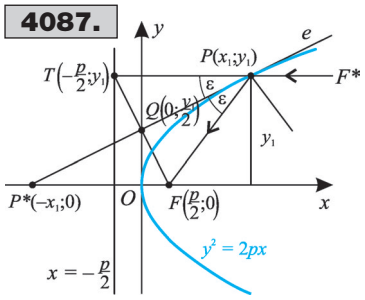
4084. Oldjuk meg az egyenletrendszert: $\left(y = \frac{1}{4a}x^2 \text{ és } y = \frac{1}{m}\left(x - \frac{a}{m}\right)\right)$. A megoldás az $(mx - 2a)^2 = 0$ egyenlethez vezet. Innen $x = \frac{2a}{m}$, vagyis valóban egy közös pont van.

b) Oldjuk meg az egyenletrendszert. Egy megoldás van: $x = \frac{2a}{m}$.

4085. Oldjuk meg az $y = \frac{1}{2p}x^2$ és a $p(y + y_1) = x_1 x$ egyenletekből álló egyenletrendszert, figyelembe véve, hogy $y_1 = \frac{1}{2p}x_1^2$. Ekkor az $(x - x_1)^2 = 0$ egyenlethez jutunk. $x = x_1$, $y = y_1$, tehát valóban egy közös pont van, és az egyenes nem párhuzamos a parabola tengelyével. Az adott pontokban az érintők egyenletei: $2x - 4y = 1$, $x - y = 1$, $6x + 4y + 9 = 0$.

4086. Az egyenes egyenletéből $x = \frac{y_1 y}{p} - x_1$. Helyettesítsük az $y^2 = 2px$ egyenletben az x helyére: $y^2 = 2p\left(\frac{y_1 y}{p} - x_1\right)$, innen $y^2 - 2y_1 y + 2px_1 = 0$. Mivel $(x_1; y_1)$ a parabola pontja, azért $2px_1 = y_1^2$. Így $y = y_1$, $x = x_1$. Tehát a parabolának egy közös pontja van az egyenessel, az egyenes nem párhuzamos az x tengellyel, az $yy_1 = p(x + x_1)$ érintő egyenlete. Ha $x_1 = 0$, akkor $y_1 = 0$. Az érintő egyenlete $x = 0$. *Megjegyzés:* Az $y^2 = 2px$ egyenletű parabola az $y = \frac{1}{2p}x^2$ egyenletű parabolának az $y = x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképe. Tükrözzük az $y = \frac{1}{2p}x^2$ egyenletű parabola $p(y + y_1) = xx_1$ érintőjét az $y = x$ egyenletű egyenesre. Ekkor $p(x + x_1) = yy_1$, mert a $P(x_1; y_1)$ pont tükörképe: $P'(y_1; x_1)$ $(x \to y, y \to x, x_1 \to y_1, y_1 \to x_1)$.

4087.



Az 1, 2, 3 abszcisszájú pontokban az érintők egyenletei rendre: $2x \pm y\sqrt{2} + 2 = 0$, $x \pm y + 2 = 0$, $2x \pm y\sqrt{6} + 6 = 0$.

4087. *a)* Vizsgáljuk az $y^2 = 2px$ egyenletű parabolát. A $P(x_1; y_1)$ pontbeli érintő egyenlete $yy_1 = p(x + x_1)$, a fókuszon átmenő és az érintőre merőleges egyenes egyenlete: $y_1 x + py = \frac{p}{2} y_1$. Ez az egyenes az y tengelyt a $Q\left(0; \frac{y_1}{2}\right)$ pontban metszi. A Q pont rajta van az érintőn, mert $\frac{y_1^2}{2} = px_1$ igaz egyenlőség. *b)* Tükrözzük az $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ pontot a $Q\left(0; \frac{y_1}{2}\right)$ pontra. A T tükörkép koordinátái: $\left(-\frac{p}{2}; y_1\right)$. *c)* A Q pont ordinátája: $\frac{y_1}{2}$. *d)* Az $yy_1 = p(x + x_1)$ egyenletből, ha $y = 0$, akkor $x = -x_1$. $P^*(-x_1; 0)$. Ha a parabola egyenlete $y = \frac{1}{2p} x^2$ és az érintési pont $P(x_1; y_1)$, akkor az érintő az x tengelyt az $M\left(\frac{x_1}{2}; 0\right)$ pontban metszi. PM merőleges az érintőre, az F pontnak az érintőre vonatkozó tükörképe $Q\left(x_1; -\frac{p}{2}\right)$, rajta van a vezéregyenesen. Az érintő az y tengelyt a $(0; -y_1)$ pontban metszi.

4088. A 4087. ábra szerint a PTF háromszög egyenlő szárú háromszög, mert $PQ \perp FT$ és a Q pont felezi az alapot. $PT = PF$, az érintő felezi az FPT szöget. A P pontban az e érintőre állított merőleges felezi az F^*PF szöget. $(F^* P \parallel x)$. Ebből következik a feladat állítása.

4089. Az érintési pontok koordinátái: $P_1\left(\frac{1}{3}; 2\right)$, $P_2(3; 6)$, $P_3\left(\frac{3}{4}; -3\right)$. Az érintők egyenletei: e_1: $2y = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)$, e_2: $6y = 6(x + 3)$, e_3: $-3y = 6\left(x + \frac{3}{4}\right)$. Az érintők által meghatározott háromszög csúcspontjai: $A_1(1; 4)$, $A_2\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $A_3\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. A $P_1P_2P_3$ háromszög területe: $t = \frac{15}{2}$ területegység. Az $A_1A_2A_3$ háromszög területe $t_1 = \frac{15}{4}$ területegység. $t : t_1 = 2 : 1$.

4090. Az egyenes akkor érinti a parabolát, ha $m + 2 = 0$, $m = -2$. Az érintőre a $P(0; 0)$ érintési pontban emelt merőleges egyenlete: $y = \frac{1}{2} x$. A húr hossza: $d = \frac{5\sqrt{5}}{4}$ egység.

4091. Mivel a $P(2; 2)$ pont rajta van a parabolán, azért $2b + c = -2$. Az $y = x$ egyenletű egyenes érinti a parabolát, ha az $x^2 + (b - 1)x + c = 0$ egyenlet diszkriminánsa 0. $b = -3$, $c = 4$.

4092. Legyen $A\left(a; \frac{a^2}{16}\right)$, $B\left(b; \frac{b^2}{16}\right)$. A gyújtópont $F(0; 4)$, a vezéregyenes egyenlete $y = -4$. Az AB egyenes egyenlete: $-\frac{a + b}{16} x + y = -\frac{ab}{16}$. F illeszkedik az AB egyenesre, akkor

V

$ab = -64$. Az A és a B pontbeli érintők egyenletei: $\left.\begin{array}{ll}(1) & \frac{ax}{8} - y = \frac{a^2}{16} \\ (2) & \frac{bx}{8} - y = \frac{b^2}{16}\end{array}\right\}$. (1)−(2) érintők metszéspontja ($a - b \neq 0$): $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{ab}{16}$. De mivel $ab = -64$, azért $M\left(\frac{a+b}{16}; -4\right)$, tehát M valóban a vezéregyenesre illeszkedik.

4093. Az $y = mx$ egyenes pontosan akkor érinti a parabolát, ha az $x^2 - (8+m)x + 16 = 0$ egyenlet diszkriminánsa 0. Ekkor $m_1 = 0$, $m_2 = -16$. Az érintési pontok $P_1(4; 0)$, $P_2(-4; 64)$.

4094. Az origón átmenő, és egymásra merőleges érintők egyenletei: $y = mx$, $y = -\frac{1}{m}x$, ahol $m \neq 0$. Az $y = mx$ egyenes akkor és csakis akkor érintő, ha az $\left.\begin{array}{l}y = ax^2 + bx + c \\ y = mx\end{array}\right\}$ egyenletrendszerhez tartozó diszkrimináns 0. $D_1 = (b-m)^2 - 4ac = 0$. Hasonlóképpen az $y = -\frac{1}{m}x$ érintőre $D_2 = \left(b + \frac{1}{m}\right)^2 - 4ac = 0$. Mindkét feltétel egyszerre teljesül, ha $(b-m)^2 = \left(b + \frac{1}{m}\right)^2$. Innen $2b = m - \frac{1}{m} \cdot \left(m + \frac{1}{m} \neq 0\right)$. $(b-m)^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow b^2 - 2bm + m^2 - 4ac = 0$. Innen az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet diszkriminánsa: $b^2 - 4ac = 2bm - m^2$, $b^2 - 4ac = m\left(m - \frac{1}{m}\right) - m^2$, $b^2 - 4ac = -1$.

4095. $y = 6x - 13$.

4096. $b = -6$, $E(3; 0)$ (Az $y = 2x + 6$ egyenes valóban érintő, mert nem párhuzamos a parabola tengelyével és a parabolával egy közös pontja van).

4097. A parabola egyenlete $y = a(x-u)^2$ alakú. Az érintő egyenlete $y = 4x - 16$. Az érintő az x tengelyt a $Q(4; 0)$ pontban metszi. Ebből adódik, hogy a csúcspont $T(3; 0)$. (4087. feladat). $y = (x-3)^2$.

4098. Az A pontbeli érintő egyenlete: $8x + y = 25$. A csúcsérintő egyenlete: $y = 1$. Az érintő a csúcsérintőt a $P(3; 1)$ pontban metszi. A 4087. feladatra hivatkozva a tengelypont $T(2; 1)$. A parabola egyenlete: $y = a(x-2)^2 + 1$. Mivel az $A(4; -7)$ illeszkedik a parabolára, $y = -2(x-2)^2 + 1$.

4099. Az AB egyenessel párhuzamos érintő érintési pontja adja azt a C pontot, amelyre az ABC háromszög területe a legkisebb. A C csúcs koordinátái: $C\left(\frac{1}{4}; \frac{63}{16}\right)$.

4100. Az $y = 2x + b$ egyenletű egyenes érinti az $y = x^2$ parabolát, ha $b = 1$. Az $y = 2x - 1$ egyenes érinti az $y = -(x-1)^2$ parabolát is a $(0; -1)$ pontban, $d = 0$.

4101. A $P(x_1; y_1)$ pontbeli érintő egyenlete $yy_1 = p(x + x_1)$, az érintőre a P pontban emelt merőleges egyenes egyenlete $y_1 x + py = x_1 y_1 + py_1$. Ha $y = 0$, akkor $x = x_1 + py$, $(y_1 \neq 0)$. A vetület $x - x_1 = p$ = állandó.

4102. A $2x - y = 3$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyenessereg egyenlete $2x - y = b$ alakú. Ezek közül olyan egyenes érinti az $y = x^2$ parabolát, amelynek egy közös pontja van a pa-

rabolával. $b = 1$. A $2x - y = 1$ egyik pontja például a $P(0; -1)$ pont. A P pont a $2x - y - 3 = 0$ egyenestől $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ egység távolságra van. Ennyi a két párhuzamos egyenes távolsága is.

4103. A $P(x_1; y_1)$ pontbeli érintő az x tengelyt a $Q\left(\frac{x_1}{2}; 0\right)$ pontban metszi, feltéve, ha $x_1 \neq 0$. A PQ szakasz felezőpontjának koordinátái: $x = \frac{3x_1}{4}$, $y = \frac{y_1}{2}$. Innen $x_1 = \frac{4x_1}{3}$ és $y_1 = 2y$. De $y_1^2 = x_1^2$, tehát $y = \frac{8}{9}x^2$. A mértani hely az $y = \frac{8}{9}x^2$ egyenletű parabola, kivéve a $(0; 0)$ pontot.

4104. Tegyük fel, hogy az adott egyenes $P(a; a)$ pontjából húzható két egymásra merőleges egyenes az $y = x^2$ parabolához. A P ponton átmenő egyenes egyenlete $y = mx + a - ma$. Válasszuk meg az m-et úgy, hogy ez az egyenes a parabola érintője legyen. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy az $x^2 = mx + a - ma$ egyenlet diszkriminánsa 0 legyen, és követeljük, hogy $m_1 m_2 = -1$ legyen. De $m_1 m_2 = 4a$, tehát $4a = -1$, $a = -\frac{1}{4}$. A keresett P pont koordinátái: $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)$. Vegyük észre, hogy a P pont a parabola vezéregyenesére illeszkedik.

4105. Az adott egyenessel párhuzamos $y = 2x + b$ egyenletű egyenesek közül az $y = 2x + \frac{3}{4}$ egyenes érinti a parabolát a $P\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right)$ pontban. A P pont az $y = 2x - 2$ egyenestől $d = \frac{11\sqrt{5}}{20}$ egység távolságra van.

4106. A $P(x_1; y_1)$ pontbeli $yy_1 = p(x + x_1)$ parabolaérintő az x tengelyt a $Q(-x_1; 0)$ pontban metszi. Szabályos háromszög akkor jöhet létre, ha $y_1 > 0$ esetben a PQ egyenes az x tengellyel 30°-os szöget alkot. $\frac{y_1}{2x_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x_1\right)^2 = 8x_1 \Rightarrow x_1 = 6$. A keresett pont koordinátái: $Q(-6; 0)$. A szabályos háromszög csúcsainak koordinátái: $(-6; 0)$, $\left(0; 2\sqrt{3}\right)$, $\left(0; -2\sqrt{3}\right)$.

4107. $P_1\left(12; 8\sqrt{3}\right)$ és a $P_2\left(\frac{4}{3}; -\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$. Az érintők merőlegesek egymásra.

4108. A normális az x tengelyt az $(x_1 + p; 0)$, az y tengelyt a $\left(0; \frac{y_1}{p}(x_1 + p)\right)$ pontban metszi.

4109. A $P(x_1; y_1)$ ponthoz tartozó érintő az x tengelyt az $A(-x_1; 0)$ pontban, a normális a $B(x_1 + p; 0)$ pontban metszi. Az APB egyenlő szárú háromszög alapjának középpontja a $P_1(x_1; 0)$ pont. Így $x_1 = \frac{-x_1 + x_1 + p}{2} = \frac{p}{2}$. Az érintési pont koordinátái: $P\left(\frac{p}{2}; \pm p\right)$.

4110. A keresett kör áthalad a $P_1\left(\frac{p}{2}; p\right)$ és a $P_2\left(\frac{p}{2}; -p\right)$ pontokon, a középpontjának koordinátái: $K(u; 0)$. A P_1 pontbeli parabolaérintő egyenlete: $y = x + \frac{p}{2}$. A P_1 ponthoz tartozó

V

normális egyenlete: $y = -x + \frac{3p}{2}$. A normális átmegy a kör középpontján, ezért $K\left(\frac{3p}{2}; 0\right)$.

A kör sugara: $KP_1 = r = \sqrt{p^2 + p^2}$, a keresett kör egyenlete: $\left(x - \frac{3p}{2}\right)^2 + y^2 = 2p^2$.

4111. Az egyenes érinti a parabolát, ha nem párhuzamos a tengellyel, és egy közös pontjuk van. Oldjuk meg az $\left.\begin{matrix} y = mx - 2 \\ y = \frac{1}{4}x^2 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszert. Egy közös pont csak akkor van, ha a diszkrimináns 0. $D = 16m^2 - 32 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

V

Két érintő létezik. Az egyenleteik: $y = \sqrt{2}\,x - 2$ és $y = -\sqrt{2}\,x - 2$.

4112. $m = \frac{1}{2}$.

4113. Két közös pont van, ha $b > -\frac{1}{4}$, egy közös pont, ha $b = \frac{1}{4}$, nincs közös pont, ha $b < -\frac{1}{4}$.

4114. $b = 1$.

4115. Az adott egyenessel párhuzamos parabolaérintő egyenlete $y = x + b$. A b paramétert úgy kell megválasztani, hogy az $\left.\begin{matrix} y = -x + b \\ y = \frac{1}{8}x^2 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszernek egy megoldása legyen.

$D = 0$, $64 + 32b = 0$, $b = -2$.

4116. $y = x + 2$.

4117. Az adott egyenesre merőleges egyenessereg egyenlete $y = 2x + b$. $b = -16$. Az érintő egyenlete $y = 2x - 16$.

4118. *a)* $y = 3x + 1$; *b)* Az adott egyenes iránytangense -2, a rá merőleges érintő iránytangense $\frac{1}{2}$. Az érintő egyenlete: $y = \frac{1}{2}x + 6$. *c)* Az adott egyenes iránytangense $m_1 = 2$. Az érintő iránytangense m_2. Ekkor $\operatorname{tg} 45° = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$, $\left|\frac{2 - m_2}{1 + 2m_2}\right| = 1$. Két eset lehetséges. $\frac{2 - m_2}{1 + 2m_2} = 1$, innen $m_2 = \frac{1}{3}$, vagy $\frac{2 - m_2}{1 + 2m_2} = -1$, innen $m_2 = -3$. Ha $m_2 = \frac{1}{3}$, akkor az érintő egyenlete: $x - 3y + 27 = 0$, ha $m_2 = -3$, akkor az érintő egyenlete. $3x + y + 1 = 0$.

4119. A $3x + 4y + 46 = 0$ egyenletű egyenessel párhuzamos parabolaérintő egyenlete: $3x + 4y + 36 = 0$. A két párhuzamos egyenes távolsága adja meg a két ponthalmaz (egyenes és parabola) távolságát. $d = \left|\frac{-36 + 46}{5}\right| = 2$.

4120. *a)* $p = 1$; *b)* $p = 2{,}5$; *c)* Ha $a = 0$, akkor nincs megoldás. Legyen $a \neq 0$.

Ha $b = c = 0$, akkor $p \in \mathbf{R}$, ha $b \neq 0$ és $c \neq 0$, akkor $p = \frac{2ac^2}{b^2}$, ha $b = 0$ és $c \neq 0$ vagy $b \neq 0$ és $c = 0$, akkor nincs megoldás.

4121. A P pont koordinátái: $P(x_1;\ y_1)$, ekkor a Q pont koordinátái: $Q(-x_1;\ 0)$. Pitagorasz tételét alkalmazva $(2x_1)^2 + y_1^2 = 24^2$. Mivel $y_1^2 = 28x_1$, ezért egyszerűsítés után: $x_1^2 + 7x_1 - 144 = 0$. Mivel $x_1 > 0$, azért az egyenletnek csak a pozitív gyöke felel meg. $x_1 = 9$. Ekkor $y_1 = \pm 6\sqrt{7}$. Két érintőt kapunk. $\sqrt{7}\,x - 3y + 9\sqrt{7} = 0$ és $\sqrt{7}\,x + 3y + 9\sqrt{7} = 0$.

4122. $P_1\left(\frac{8}{7};\ 2\right)$, $P_2(14;\ 7)$. Az érintők egyenletei: $y = \frac{7}{8}x + 1$ és $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$. Innen $m_1 = \frac{7}{8}$, $m_2 = \frac{1}{4}$ és $\operatorname{tg}\omega = \left|\frac{\frac{7}{8} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{4}}\right|$, $\omega = 27{,}1°$.

4123. Az $A\left(\frac{8}{7};\ 0\right)$ és a $B(14;\ 0)$ pontok a parabola belső tartományába esnek $F(0{,}875;\ 0)$. Ezekre a pontokra nincs megoldás. Az $A\left(\frac{8}{7};\ 2\right)$ és a $B(14;\ 7)$ pontok rajta vannak a parabolán. Az érintők egyenletei: $y = \frac{7}{8}x + 1$ és $y = \frac{1}{4}x + \frac{14}{4}$; $m_1 = \frac{7}{8}$, $m_2 = \frac{1}{4}$. $\operatorname{tg}\omega = \frac{20}{39}$, $\omega = 27{,}1°$. Az érintők metszéspontja: $M\left(4;\ \frac{9}{2}\right)$.

4124. A fókuszon átmenő $m = \sqrt{3}$ iránytangensű egyenes egyenlete: $y = \sqrt{3}\,x - 3\sqrt{3}$. Ez az egyenes a parabolát a $P_1\left(1;\ 2\sqrt{3}\right)$ és a $P_2\left(9;\ 6\sqrt{3}\right)$ pontokban metszi. A P_1 és a P_2 pontokban a parabola érintőinek egyenlete: $3x + \sqrt{3y} + 3 = 0$ és $3x - \sqrt{3y} + 9 = 0$, $\omega = 60°$.

4125. Az $y = x + b$ egyenletű egyenes érinti az $y = x^2 + 1$ egyenletű parabolát, ha $b = \frac{3}{4}$, az $y^2 = x - 1$ egyenletű parabolát, ha $b = -\frac{3}{4}$. Az $y = x + \frac{3}{4}$ és az $y = x - \frac{3}{4}$ egyenletű egyenesek távolsága: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

4126. *a)* Oldjuk meg az $\left.\begin{matrix}(1) & y = x^2 + x \\ (2) & y^2 - 8y + 12x = 0\end{matrix}\right\}$ egyenletrendszert.

(3) $\left(x^2 + x\right)^2 - 8\left(x^2 + x\right) + 12x = 0$. Rendezve a (3)-as egyenletet: $x\left(x^3 + 2x^2 - 7x + 4\right) = 0$, (4) $x(x-1)\left(x^2 + 3x - 4\right) = 0$. (4) egyenletből: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -4$. A parabolák közös pontjainak koordinátái: $P_1(0;\ 0)$, $P_2(1;\ 2)$, $P_3(-4;\ 12)$.

b) $P_1(2;\ 2)$, $P_2(-1;\ -1)$, $P_3\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$, $P_4\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2};\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$;

c) $P_1(0;\ 0)$, $P_2(1;\ 1)$, $P_3\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $P_4\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$;

d) $P_1(0;\ 0)$, $P_2(1;\ 1)$, $P_3(2;\ 4)$; *e)* $P_1(0;\ 0)$, $P_2(1;\ 1)$, $P_3(2;\ 4)$, $P_4(-3;\ 9)$.

V

4127. *a)* Mivel $y = x^2$, azért $x^4 = 2x$; $P_1(0; 0)$, $P_2\left(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4}\right)$. *b), c)* Nincs közös pont. *d)* $P\left(\frac{p}{4}; \pm\frac{p\sqrt{2}}{2}\right)$.

4128. A parabolák egyenletei: $y^2 = 8x$ és $y^2 = -8x + 16$. $P_1\left(1; 2\sqrt{2}\right)$, $P_2\left(1; -2\sqrt{2}\right)$.

4129. Az adott parabola egyenlete: $y^2 = 10x$. Innen $\frac{p}{2} = \frac{5}{2}$, a vezéregyenes egyenlete $x = -\frac{5}{2}$. A másik parabola tengelypontja: $T\left(\frac{5}{2}; 0\right)$, a fókusza $F\left(-\frac{5}{2}; 0\right)$, a paramétere $p = 10$, egyenlete $y^2 = -20\left(x - \frac{5}{2}\right)$. A közös pontok: $P\left(\frac{5}{3}; \pm\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)$.

4130. A $P(9; 2)$ ponton átmenő egyenessereg paraméteres egyenlete $y - 2 = m(x - 9)$, $y = mx - 9m + 2$, ahol $m \in \mathbf{R}$. Az m értékét úgy kell meghatározni, hogy az $\left.\begin{matrix} y = mx - 9m + 2 \\ 36y = x^2 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása legyen. Az egyenletrendszerhez tartozó diszkrimináns: $D = 36^2 m^2 - 4 \cdot 36(9m - 2) = 0$, ha $m_1 = \frac{2}{3}$, $m_2 = \frac{1}{3}$. Az érintő egyenlete: $2x - 3y - 12 = 0$, vagy $x - 3y - 3 = 0$.

4131. $A(2; -4)$ pontban az érintő egyenlete: $x + y + 2 = 0$, a $(12{,}5; -10)$ pontban az érintő egyenlete: $2x + 5y + 25 = 0$.

4132. *a)* $P(4; \pm 3)$; *b)* $(2; \pm 6)$.

4133. $F(4; 0)$. Az $y^2 = 16x$, $(x - 4)^2 + y^2 = 169$ egyenletrendszerből $P_1(9; 12)$, $P_2(9; -12)$.

4134. $F\left(\frac{9}{8}; 0\right)$. Az $y^2 = \frac{9}{2}x$, $\left(x - \frac{9}{8}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{73}{8}\right)^2$ egyenletrendszerből $P(8; \pm 6)$. A tengelypont $T(0; 0)$. $TP = 10$ egység.

4135. Az $x^2 + y^2 = 9$, $y = ax^2 - 5$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, ha $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{18}$. A parabola egyenlete: $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$; a_2 értéke nem felel meg.

4136. Az $y^2 = 2px$, $(x - 11)^2 + y^2 = 40$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, ha $p = 20$, vagy 2. A feladatnak a $p = 2$ felel meg. $y^2 = 4x$, $E(9; \pm 6)$.

4137. A parabola az x tengelyt az $A(-5; 0)$ és a $B(5; 0)$ pontokban metszi. A keresett kör egyenlete: $x^2 + (y - v)^2 = 13^2$. Mivel a kör átmegy az A és a B pontokon, azért $25 + v^2 = 169$, $v = -12$ ($v = 12$ nem felel meg.) A kör és a parabola közös pontjai $A(-5; 0)$, $C(-12; -17)$, $D(12; -17)$, $B(5; 0)$. Az $ABCD$ négyszög trapéz, a területe: $t = 289$ területegység.

4138. A parabola és a kör közös pontjainak koordinátái: $A(0; 0)$, $B\left(\sqrt{3}; 3\right)$, $C\left(-\sqrt{3}; 3\right)$. Az ABC háromszög területe: $t = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{2} = 3\sqrt{3}$ területegység.

4139. Az $y = -2x$ egyenletű egyenes és az $y = x^2 + 2x$ egyenletű parabola közös pontjai $K_1(0; 0)$, $K_2(-4; 8)$. Két megoldás van: $K_1(0; 0)$, $K_1P = r_1 = \sqrt{13}$, $x^2 + y^2 = 13$. $K_2(-4; 2)$. $K_2P = r_2 = \sqrt{37}$, $(x + 4)^2 + (y - 8)^2 = 37$.

4140. A parabola egyenlete: $y+3=(x-1)^2$. Az $\left.\begin{matrix} y+3=(x-1)^2 \\ (x+2)^2+(y-1)^2=25 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszerből:
(1) $x^4-4x^3-x^2+16x-12=0$. $x=1$ gyöke az (1)-es egyenletnek, ezért $(x-1)\cdot P(x)=0$ alakban írható. $x^4-x^3-3x^3+3x^2-4x^2+4x+12x-12=0$.
Innen $(x-1)x^3-(x-1)\cdot 3x^2-(x-1)4x+12(x-1)=0$.
(2) $(x-1)(x^3-3x^2-4x+12)=0$. Hasonló meggondolással a (2)-es egyenlet is továbbalakítható. $(x-1)(x-2)(x^2-x-6)=0$. A parabolának és a körnek négy közös pontja van. $P_1(-2;\,6)$, $P_2(1;\,-3)$, $P_3(2;\,-2)$, $P_4(3;\,1)$.

4141. A kör egyenlete $(x+2)^2+(y-3)^2=25$. A parabola paramétere $p=\frac{1}{2}$, tengelypontja $T(-2;\,-10)$, az egyenlete $y+10=(x+2)^2$. A kör és egyenes közös pontjai $(1;\,-1)$, $(-5;\,-1)$, $(2;\,6)$, $(-6;\,6)$. A közös pontok trapézt feszítenek ki. A területe: 49 területegység.

4142. A parabola $P(x_1;\,y_1)$ pontbeli érintőjének egyenlete: $x_1x=(y+y_1)$, az érintő normálegyenlete: $\frac{x_1x-3y-3y_1}{\sqrt{x_1^2+9}}=0$. A parabola érintője érinti az $x^2+y^2=16$ egyenletű kört, ha $\left|\frac{x_1\cdot 0-3\cdot 0-3y_1}{\sqrt{x_1^2+9}}\right|=4$. Innen $9y_1^2=16(x_1^2+9)$. De $x_1^2=6y_1$, tehát $3y_1^2-32y_1-48=0$. Mivel $x_1^2=6y_1>0$, azért $y_1=12$ és $x_1=\pm 6\sqrt{2}$. Két közös érintő létezik, az egyenleteik:
$y=\pm 2\sqrt{2}\,x-12$.

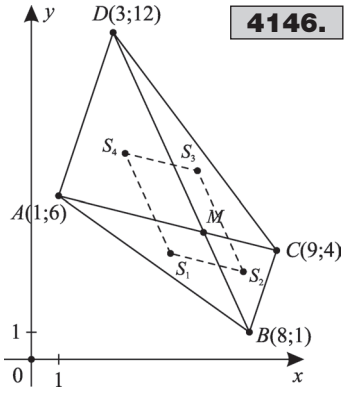
4143. A parabola és a kör metszéspontjai: $P_1\left(2;\,2\sqrt{3}\right)$, $P_2\left(2;\,-2\sqrt{3}\right)$. A P_1 pontban az érintők egyenletei: $2x+2\sqrt{3}y=16$; $2\sqrt{3}y=3(x+2)$. A hajlásszög 70,9°.

4144. A $P(3p;\,0)$ pont körül rajzolt r sugarú körnél az r-et úgy kell megválasztani, hogy az $\left.\begin{matrix} y^2=2px \\ (x-3p)^2+y^2=r^2 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszernek x-re egyetlen gyöke legyen.
$x^2-4px+9p^2-r^2=0 \Rightarrow D=16p^2-4\left(9p^2-r^2\right)=0 \Rightarrow r^2=5p^2$. Ekkor $x=2p$. A háromszög Q, R csúcsainak koordinátái $Q(2p;\,2p)$, $R(2p;\,-2p)$. A PQR háromszög területe: $t=2p^2$.

4145. A téglalap parabolára illeszkedő csúcsainak koordinátái: $\left(x;\,\pm\sqrt{2px}\right)$, ahol $0<x<a$. A téglalap területe: $T=2(a-x)\sqrt{2px}$. Innen $\frac{T^2}{4p}=2x(a-x)(a-x)$. Ha $\frac{T^2}{4p}$ maximális, akkor T is maximális. A három pozitív tényező összege állandó $(2a)$. Ezért a mértani és a számtani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség szerint a szorzatuk akkor maximális, ha a tényezők egyenlők. $2x=a-x$, ha $x=\frac{a}{3}$. A maximális terület: $T_{\max}=\frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2ap}{3}}$.

Vegyes feladatok

V



4146.

4146. Legyen az átlók metszéspontja $M(m_1; m_2)$. Ekkor

$S_1\left(\frac{9+m_1}{3}; \frac{7+m_2}{3}\right)$;

$S_2\left(\frac{17+m_1}{3}; \frac{5+m_2}{3}\right)$; $S_3\left(\frac{12+m_1}{3}; \frac{16+m_2}{3}\right)$;

$S_4\left(\frac{4+m_1}{3}; \frac{18+m_2}{3}\right)$.

$\overrightarrow{S_1S_2}\left(\frac{17+m_1}{3}-\frac{9+m_1}{3}; \frac{5+m_2}{3}-\frac{7+m_2}{3}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{S_1S_2}\left(\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. $\overrightarrow{S_4S_3}\left(\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}\right)\Rightarrow \overrightarrow{S_1S_2} \# \overrightarrow{S_4S_3}$.

4147. e: $x+2y=4$, $g\perp e$, g: $2x-y=3$. $e\cap g=T$; $T(2;1)$.

$2=\frac{5+x_1}{2}$, $1=\frac{7+x_2}{2}\Rightarrow M'(-1;-5)$.

4148. $3x+y=-9$.

4149. $\mathbf{n}(12;5)$, az egyenes egyenlete: $12x+5y=32$. A tengelyeket az $A\left(\frac{8}{3}; 0\right)$, $B\left(0; \frac{32}{5}\right)$ pontokban metszi. AB felezőpontja: $F\left(\frac{4}{3}; \frac{16}{5}\right)$ a köré írt kör középpontja. $S\left(\frac{8}{9}; \frac{32}{15}\right)$.

$|AO|=\frac{8}{3}$; $|AB|=\frac{104}{15}$; $AO:AB=5:13$ Az A-ból induló szögfelező $5:13$ arányban osztja az OB oldalt, így $OT:TB=5:13\Rightarrow T\left(0; \frac{16}{9}\right)$. f_α: $A\left(\frac{8}{3}; 0\right)$, $T\left(0; \frac{16}{9}\right)\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=\frac{16}{3} \\ f_\gamma: y=x \end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow O\left(\frac{16}{15}; \frac{16}{15}\right)$.

4150. $5x+3y=5$.

4151. $M(m; 0)$, $\overrightarrow{AM}(m+4; -4)$, $\overrightarrow{BM}(m-2; 4)$, $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM}\Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=$

$=(m+4)(m-2)-16=0\Rightarrow M_1(4; 0)$, $M_2(-6; 0)$.

4152. $M(-1; 0)$.

4153. $\overrightarrow{AM}\perp BC$, BC: $x+3y=31$; $\overrightarrow{BM}\perp AC$, AC: $x+5y=7$; $AC\cap BC=C$;

$C(67; -12)$.

4154. *a)* $AB=2$, $AC=2\sqrt{5}$; $BC=4$. *b)* $A_1(4; 4)$, $B_1(4; 3)$, $C_1(2; 3)$. *c)* $S\left(\frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right)$;

d) $r=\sqrt{5}$.

4155. *a)* CA: $y=x+1$, DB: $7x+5y=3$, $CA\cap DB=M$; $M\left(-\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.

b) $\omega=80{,}5°$. *c)* $t=42$ területegység. $k=4\sqrt{13}+\sqrt{10}+\sqrt{122}$.

4156. *a)* $\left.\begin{matrix}5x-3y=1\\15x-y=67\end{matrix}\right\}\Rightarrow A(5;\,8);\quad \left.\begin{matrix}5x-3y=1\\5x+y=13\end{matrix}\right\}\Rightarrow B(2;\,3);\quad \left.\begin{matrix}15x-y=67\\5x+y=13\end{matrix}\right\}\Rightarrow C(4;\,-7).$

b) $AB=\sqrt{34}$, $BC=\sqrt{104}$, $AC=\sqrt{226}$. $\overrightarrow{AB}(-3;\,-5)$, $\overrightarrow{AC}(-1;\,-15)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$
$=3+75=78$; $\sqrt{34}\cdot\sqrt{226}\cdot\cos\alpha=78\Rightarrow\alpha=27{,}15°$; $\beta=137{,}73°$; $\gamma=15{,}12°$.

c) $t=\dfrac{\sqrt{34}\cdot\sqrt{226}\cdot\sin 27{,}15°}{2}=20$ területegység.

4157. $A(0;\,0)$; $B(9;\,0)$. $C(2;\,4)$; $t=\dfrac{9\cdot 4}{2}=18$ területegység; $\alpha=63{,}43°$;
$\beta=29{,}74°$; $\gamma=86{,}83°$.

4158. $A(3;0)$, $B(0;9)$, $C(18;0)$, $D(0;-6)$. AD: $2x-y=6$; BC: $x+2y=18$.
$AD\cap BC$: $\left.\begin{matrix}2x-y=6\\x+2y=18\end{matrix}\right\}\Rightarrow M(6;\,6)$, ami kielégíti az $x-y=0$ egyenletű egyenest.

4159. Az adott befogóra a P_2 pont illeszkedik. A P_1-ből az $y=-x+8$ egyenletű egyenesre állított merőleges talppontja adja a keresett csúcsot. $P_3(2;\,6)$.

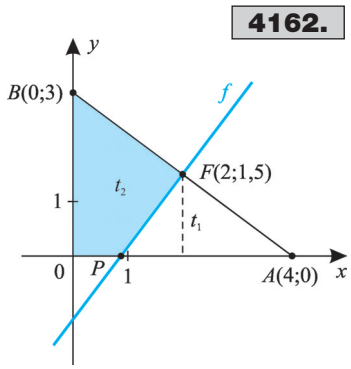
4160. $M(4;\,1)$.

4161. Az azonos t-hez tartozó egyenesek metszéspontja a $2x+3y=5x-7y\Rightarrow 3x-10y=0$ egyenletű egyenesen vannak. Az egyenes minden pontja és csakis ezek a pontok tartoznak a mértani helyhez.

4162. $A(4;0)$, $B(0;3)$, $F\left(2;\,\dfrac{3}{2}\right)$, $f\colon -4x+3y=-\dfrac{7}{2}$,

$P\left(\dfrac{7}{8};\,0\right)$; $t_{OAB}=\dfrac{4\cdot 3}{2}=6$; $t_1=\dfrac{1}{2}\left(4-\dfrac{7}{8}\right)\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{75}{32}$;

$t_2=6-\dfrac{75}{32}=\dfrac{117}{32}$.



4163. $A(2;\,5)$; $B(5;\,1)$. AC: $x-y=1$;
BC: $2x-5y=5$; $AC\cap BC=C$; $C(0;\,-1)$.

4164. $A(0;10)$, $B(8;0)$, $C(x;14)$,
$x>0$; $t=\dfrac{1}{2}\left|0+8(14-10)+x(10-0)\right|=$
$=\dfrac{1}{2}\left|32+10x\right|=\left|16+5x\right|$, $\left|16+5x\right|=36\Rightarrow x=4$.

4165. $A(4;\,3)$; $B(10;\,6)$, $C(6;\,12)$; $D(2;\,5)$. $\overrightarrow{AC}(2;\,9)$; $\overrightarrow{DB}(8;\,1)$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=25$;
$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{85}$; $\left|\overrightarrow{DB}\right|=\sqrt{65}$; $25=\sqrt{85}\cdot\sqrt{65}\cdot\cos\varphi\Rightarrow\cos\varphi=\dfrac{5}{\sqrt{17\cdot 13}}$.

$\sin\varphi=\sqrt{1-\dfrac{25}{17\cdot 13}}=\dfrac{14}{\sqrt{17\cdot 13}}$; $t=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{85}\cdot\sqrt{65}\cdot\dfrac{14}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{13}}=35$ területegység.

4166. $t=\dfrac{1}{2}\left|1\cdot(4-6)+0\cdot(6-0)+c(0-4)\right|=\dfrac{1}{2}\left|-2-4c\right|=\left|1+2c\right|$, $\left|1+2c\right|=13\Rightarrow$
$\Rightarrow c_1=6$, $c_2=-7$.

4167. *a)* $A(-9;-6)$, $B(10;-7)$, $C(6;8)$. $\overrightarrow{AB}(19;-1)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{362}$, $\overrightarrow{AC}(15;14)$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{421}$, $\overrightarrow{BC}(-14;15)$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{241}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=15\cdot 19-14=271$;
$271=\sqrt{421}\cdot\sqrt{362}\cdot\cos\alpha\Rightarrow\alpha=46°$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}==4\cdot 15+15\cdot 14=150$;
$150=\sqrt{421}\cdot\sqrt{241}\cdot\cos\gamma\Rightarrow\gamma=62°$, $\beta=72°$. *b)* $\mathbf{a}(-9;-6)$, $\mathbf{b}(10;-7)$, $\mathbf{c}(6;8)$;
$|\mathbf{a}|=\sqrt{117}$; $|\mathbf{b}|=\sqrt{149}$; $|\mathbf{c}|=10$. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-48=\sqrt{117}\cdot\sqrt{149}\cdot\cos(\mathbf{a};\mathbf{b})\Rightarrow$
$\Rightarrow(\mathbf{a};\mathbf{b})\sphericalangle=111{,}3°$; $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=4=\sqrt{149}\cdot 10\cdot\cos(\mathbf{b};\mathbf{c})\Rightarrow(\mathbf{b};\mathbf{c})\sphericalangle=88{,}1°$;
$(\mathbf{a};\mathbf{c})\sphericalangle=360°-(111{,}3°+88{,}1°)=160{,}6°$.

V

4168. 20 területegység.

4169. $4x-5y=11$.

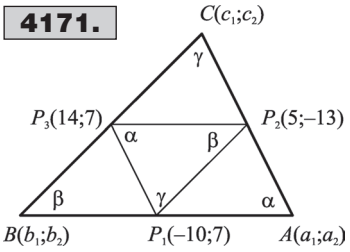
4170. $A(a;0)$, $B(0;b)$, $F\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$, $\mathbf{n}(-a;b)$. Az AB felezőmerőlegese: $f\colon -ax+by=\frac{b^2-a^2}{2}$. Legyen $d\neq 0$ és $A'(a+d;0)$, $B'(0;b+d)$. $\overrightarrow{A'B'}[-(a+d);b+d]$, $F'\left(\frac{a+d}{2};\frac{b+d}{2}\right)$; $A'B'$ felezőmerőlegese: $-(a+d)x+(b+d)y=\frac{(b+d)^2-(a+d)^2}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r} -(a+d)x+(b+d)y=\frac{b^2-a^2}{2}+(b-a)d \\ ax-by=-\frac{b^2-a^2}{2}\end{array}\right\}+\Rightarrow -dx+dy=(b-a)d\,/:d\Rightarrow -x+y=$$

$=b-a$. Az $y=x+b-a$ kifejezést visszahelyettesítve f egyenletébe: $P\left(\frac{a-b}{2};\frac{b-a}{2}\right)$, ami d-től független.

4171. *a)* P_4-re három megoldást kapunk: $A(-19;-13)$, $B(-1;27)$, $C(29;-13)$. Mindhárom paralelogramma területe egyenlő a $P_1P_2P_3$ háromszög területének kétszeresével.
$t=2\cdot\frac{P_1P_2\cdot m_{P_3}}{2}=24\cdot 20=480$ területegység. $P_1P_2=25$, $P_2P_3=\sqrt{481}$, $P_1P_3=24$.
$k_1=2(P_1P_3+P_2P_3)=2\left(24+\sqrt{481}\right)$, $k_2=2(P_1P_2+P_2P_3)=2\left(25+\sqrt{481}\right)$,
$k_3=2(P_1P_2+P_1P_3)=98$. *b)* Egy-egy paralelogramma szöge egyenlő a $P_1P_2P_3$ háromszög valamelyik szögével. Az $AP_1P_3P_2$ paralelogrammában: $\overrightarrow{P_3P_2}(-9;-20)$, $\overrightarrow{P_3P_1}(-24;0)$.

4171.



$-24\cdot(-9)=24\sqrt{481}\cdot\cos\alpha\Rightarrow\alpha=65{,}8°$,
P_2 szög $=180°-65{,}8°=114{,}2°$. A $BP_1P_2P_3$ paralelogrammában: $9(-15)+20\cdot 20=25\sqrt{481}\cdot\cos\beta\Rightarrow\beta=61{,}1°$, illetve $118{,}9°$. $CP_3P_1P_2$ paralelogrammában: $\gamma=53{,}1°$, illetve $126{,}9°$.

4172. *I. megoldás:* AC felezőpontja: $K(2;1)$, $\overrightarrow{KA}(4;-5)$, $2\cdot\overrightarrow{KA}(8;-10)$, $\overrightarrow{KB}(10;8)$, $\overrightarrow{KD}(-10;-8)$. $\mathbf{b}=\mathbf{k}+\overrightarrow{KB}\Rightarrow$
$\Rightarrow\mathbf{b}(12;9)$, $B(12;9)$, $\mathbf{d}=\mathbf{k}+\overrightarrow{KD}\Rightarrow D(-8;-7)$.

II. megoldás: $K(2;1)$, $AC=\sqrt{164} \Rightarrow\Rightarrow KB=\sqrt{164}$. A keresett B, illetve D pontok rajta vannak AC felezőmerőlegesén, K-tól pedig $\sqrt{164}$ egység távolságra vannak.

Így az $\left.\begin{matrix}(x-2)^2+(y-1)^2=164\\ 4x-5y=3\end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer megoldásai adják a keresett csúcsokat.

4173. $AB\cap AD=A$; $\left.\begin{matrix}y=1\\ \underline{4x-3y=1}\end{matrix}\right\}\Rightarrow A(1;1)$, $AB\cap BD=B$; $\left.\begin{matrix}y=1\\ \underline{2x+y=13}\end{matrix}\right\}\Rightarrow B(6;1)$,

$AD\cap BD=D$; $\left.\begin{matrix}4x-3y=1\\ \underline{2x+y=13}\end{matrix}\right\}\Rightarrow D(4;5)$. AC felezőpontja azonos BD felezőpontjával

$\frac{c_1+1}{2}=\frac{6+4}{2}$, $\frac{c_2+1}{2}=\frac{1+5}{2}\Rightarrow C(9;5)$.

4174. $\left.\begin{matrix}ax+by=1\,/\cdot a\neq 0\\ \underline{bx+ay=1\,/\cdot b\neq 0}\end{matrix}\right\}-\Rightarrow (a^2-b^2)x=a-b\Rightarrow x=\frac{1}{a+b}$, $y=\frac{1}{a+b}$.

Az $M\left(\frac{1}{a+b};\frac{1}{a+b}\right)$ pont koordinátái kielégítik az $x-y=0$ egyenletű egyenest.

Ha $a=0$, $b\neq 0$, akkor $\left.\begin{matrix}by=1\\ \underline{bx=1}\end{matrix}\right\}\Rightarrow M_1\left(\frac{1}{b};\frac{1}{b}\right)$. Ha $a\neq 0$, $b=0$, akkor $\left.\begin{matrix}ay=1\\ \underline{ax=1}\end{matrix}\right\}\Rightarrow M_2\left(\frac{1}{a};\frac{1}{a}\right)$,

ekkor M_1, illetve M_2 is kielégítik a harmadik egyenletet. $a=b=0$ nem lehetséges.

4175. Helyezzük el a háromszöget a koordináta-rendszerben úgy, hogy a csúcspontjainak koordinátái: $A(-a;0)$, $B(a;0)$, $C(c;d)$ legyen $(a\neq 0,\ d\neq 0)$. Ekkor az oldalak felezőpontjai: $A_1\left(\frac{a+c}{2};\frac{d}{2}\right)$, $B_1\left(\frac{c-ac}{2};\frac{d}{2}\right)$, $C_1(0;0)$. Az ABC háromszög súlypontja $S\left(\frac{c}{3};\frac{d}{3}\right)$, az $A_1B_1C_1$ háromszög súlypontja $S_1\left(\frac{c}{3};\frac{d}{3}\right)$. Valóban $S\equiv S_1$.

4176. Legyen $A(a;0)$, $B(b;0)$, $C(0;c)(a\neq b,\ c\neq 0)$. Innen $S\left(\frac{a+b}{3};\frac{c}{3}\right)$.

$AB^2+BC^2+CA^2=a^2-2ab+b^2+b^2+c^2+a^2+c^2=2a^2+2b^2+2c^2-2ab$.

$$3\left(AS^2+BS^2+CS^2\right)=3\cdot\left[\left(\frac{b-2a}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{a-2b}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2+\left(\frac{a+b}{3}\right)^2+\left(\frac{2c}{3}\right)^2\right]=$$

$$=3\cdot\frac{6a^2+6b^2+6c^2-6ab}{9}=2a^2+2b^2+2c^2-2ab.$$

4177. e: $3x+4y=16$, f: $3x+4y=1$, $P(5;3)$. Az E pont az e egyenes tetszőleges pontja $E(0;4)$. F az f egyenesen: $F_1\left(1;-\frac{1}{2}\right)$, illetve $F_2(-1;1)$. A keresett egyenes irányvektora:

$\overrightarrow{EF_1}$, illetve $\overrightarrow{EF_2}$. $\overrightarrow{EF_1}\left(1;-\frac{9}{2}\right)\Rightarrow \mathbf{n}(9;2)\ \Rightarrow 9x+2y=51$; $\overrightarrow{EF_2}(-1;-3)\Rightarrow \mathbf{n}(3;-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow 3x-y=12$.

4178. $P_1(-1;4)$; $P_2(3;2)$.

4179. A feladat feltételeinek két egyenes tesz eleget: e_1 átmegy A-n és párhuzamos PQ-val, e_2 átmegy A-n és PQ felezőpontján. e_1: $x+2y=15$, e_2: $3x+y=15$.

4180. $PM:MQ=3:2\Rightarrow m_1=\dfrac{2\cdot(-5)+3\cdot 5}{5}=1;\quad m_2=\dfrac{2\cdot 4+3\cdot 1}{5}=\dfrac{11}{5}.\ M\left(1;\ \dfrac{11}{5}\right).$
$PN:NQ=2:3\Rightarrow N\left(-1;\ \dfrac{14}{5}\right).\ \overrightarrow{MA}\left(3;\ \dfrac{24}{5}\right)\Rightarrow \mathbf{n}(8;-5),\ MA\colon 8x-5y+3=0.\ \overrightarrow{NA}\left(5;\ \dfrac{21}{5}\right)\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{n}(21;-25),\ NA\colon 21x-25y+87=0.$

4181. $3x^2-4y^2+4xy+8x-8y-3=0,\ 3x^2-4y^2+6xy-2xy+9x-x-6y-2y-3=0,$
$x(3x-2y-1)+2y(3x-2y-1)+3(3x-2y-1)=(3x-2y-1)(x+2y+3)=0.$
A ponthalmaz két egyenes. A $3x-2y-1=0$ és az $x+2y+3=0$ egyenletű egyenesek minden pontja és csak ezek a pontok felelnek meg.

V

4182. $\overrightarrow{AB}(30;10)\Rightarrow \mathbf{v}(3;1),\ \mathbf{n}(1;-3),\ AB\colon x-3y=0\Rightarrow T(9;3),\ m_c\colon 3x+y=30.$ A C csúcsot m_c metszi ki az AB Thalész köréből. $K(0;0),\ r=15\Rightarrow x^2+y^2=225.$
$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=225 \\ \underline{3x+y=30} \end{array}\right\}\Rightarrow y=30-3x,\ x^2+(30-3x)^2=225\Rightarrow x^2-18x+65=0.\ C_1(13;-9),\ C_2(5;15).$

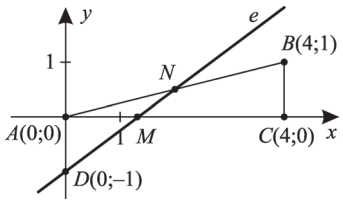
4183. Tükrözzük az A pontot az e egyenesre. A kapott A_1 pontot B-vel összekötve, kimetszi e-ből a keresett P pontot. $T(-2;0)$. A-t T-re tükrözve: $A_1(2;-10).\ \overrightarrow{A_1B}(2;24)\Rightarrow P(3;2).$

4184. $AB\colon y=\dfrac{1}{4}x,\ e\colon y=mx-1,$ ahol $m>\dfrac{1}{4}$. Az x tengely $\cap$-e: $M;\ \left.\begin{array}{l} y=mx-1 \\ \underline{y=0} \end{array}\right\}\Rightarrow$
$\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{m};0\right);\quad AB\cap e=N;\ \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{4}x \\ \underline{y=mx-1} \end{array}\right\}\Rightarrow N\left(\dfrac{4}{4m-1};\ \dfrac{1}{4m-1}\right).\qquad t_{ABC}=\dfrac{4\cdot 1}{2}=2.$
$t_{AMN}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{1}{4m-1}=1\Rightarrow 8m^2-2m-1=0\Rightarrow m_1=\dfrac{1}{2},\ m_2=-\dfrac{1}{4},$ az utóbbi nem megoldás. Az egyenes egyenlete: $x-2y=2.$

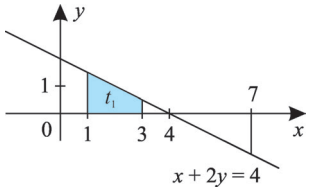
4185. *a)* $t_1=\dfrac{1{,}5+0{,}5}{2}\cdot 2=2$ területegység; *b)* $t_2=\dfrac{3+1{,}5}{2}\cdot 2=4{,}5$ területegység.

4186. *I. megoldás:* $\mathbf{a}(-2;-2),\ \mathbf{b}(4;2);\quad \overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}(6;4),\ \overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}+90°$-os, illetve
$-90°$-os elforgatottja. $\overrightarrow{BC_1}=(-6;9),\ \overrightarrow{BC_2}=(6;-9).\ \mathbf{c}_1=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC_1},\ \mathbf{c}_2=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC_2}\Rightarrow$
$\Rightarrow C_1(-2;11),\ C_2(8;-7).\ \overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{AD_1},\ \overrightarrow{BC_2}=\overrightarrow{AD_2},\ \mathbf{d}_1=\mathbf{a}+\overrightarrow{AD_1},\ \mathbf{d}_2=\mathbf{a}+\overrightarrow{AD_2}\Rightarrow$
$\Rightarrow D_1(-8;7),\ D_2(4;-11).$
II. megoldás: $AB=2\sqrt{13},\ BC=3\sqrt{13}.\ BC\perp AB\Rightarrow BC$ egyenlete: $3x+2y=16,$

4184.



4185.



$(x-4)^2+(y-2)^2=9\cdot 13$. A kapott egyenletrendszert megoldva kapjuk a C_1, illetve C_2 pontot. B-t AC felezőpontjára tükrözve kapjuk D-t.

4187. *a)* $\left.\begin{array}{l} e\colon 4x+7y=15\,/\cdot 2 \\ \underline{f\colon 9x-14y=4} \end{array}\right\}+\Rightarrow M(2;\,1);\quad -x+3y=1.$

b) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. $g\colon bx+ay=ab$. Mivel $M\in g\Rightarrow 2b+a=ab$, $t=4=\frac{ab}{2}\Rightarrow ab=8$;

$2b+a=8$, $a=8-2b$. $b(8-2b)=8\Rightarrow (b-2)^2=0\Rightarrow b=2$, $a=4$. $g\colon x+2y=4$.

c) $\mathbf{v}_1(7;-4)$, $\mathbf{v}_2(14;\,9)$, $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=62=\sqrt{65}\cdot\sqrt{277}\cdot\cos(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\Rightarrow(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\sphericalangle=62{,}48°$.

4188. $\overrightarrow{AB}(4;-3)$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}\Rightarrow\alpha=36{,}9°$, $\beta=90°-36{,}9°=53{,}1°$.

4189. Legyen A merőleges vetülete A_1, B merőleges vetülete B_1.

$\left.\begin{array}{l} e\colon x-y=0 \\ \underline{f\colon x+y=8} \end{array}\right\}+\Rightarrow A_1(4;\,4)$; $\left.\begin{array}{l} e\colon x-y=0 \\ \underline{g\colon x+y=4} \end{array}\right\}+\Rightarrow B_1(2;\,2)$. $A_1B_1=2\sqrt{2}$.

4190. $A(-1;\,0)$; $B(5;\,6)$.

4191. Vezessen A-hoz az $\mathbf{a}(2;3)$, B-hez a $\mathbf{b}(6;6)$, helyvektor. Az $\overrightarrow{AB}(4;\,3)+90°$-kal, illetve $-90°$-kal történő elforgatásával kapjuk $\overrightarrow{AD_1}$-et, illetve $\overrightarrow{AD_2}$-t. $\overrightarrow{AD_1}(-3;\,4)$, $\overrightarrow{AD_2}(3;-4)$. $\mathbf{d}_1=\mathbf{a}+\overrightarrow{AD_1}$, $\mathbf{d}_2=\mathbf{a}+\overrightarrow{AD_2}\Rightarrow D_1(-1;\,7)$, $D_2(5;-1)$. $\overrightarrow{BC_2}=\overrightarrow{AD_2}$, $\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{AD_1}$, $\mathbf{c}_1=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC_1}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}+\overrightarrow{BC_2}\Rightarrow C_1(3;\,10)$, $C_2(7;\,2)$.

4192. $2\cdot AS=1\cdot SB\Rightarrow AS:SB=1:2\Rightarrow S(5;\,1)$.

4193. $AB=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, $t=10=\frac{AB\cdot m_c}{2}\Rightarrow m_c=\frac{20}{5\sqrt{2}}$. $C(c;\,0)$. $\overrightarrow{AB}(7;-1)\Rightarrow\mathbf{n}(1;7)$,

$AB\colon x+7y=12\Rightarrow\frac{x+7y-12}{5\sqrt{2}}=0$. $\frac{|c-12|}{5\sqrt{2}}=\frac{20}{5\sqrt{5}}\Rightarrow|c-12|=20$, $c_1=32$, $c_2=-8$.

$C_1(32;\,0)$, $C_2(-8;\,0)$.

4194. $\mathbf{p}(2;\,4)$, $\mathbf{p}_1(-3;\,0)$, $\mathbf{o}_1=(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)$, $O_1(5;\,4)$.

4195. $CD\colon x+2y=17$, $BC\colon 2x+y=5$.

4196. Legyen a $P(2;-2)$ ponton áthaladó egyenesek egy normálvektora $\mathbf{n}(1;n)$. Ekkor:

$x+ny=2-2n\Rightarrow\frac{x+ny+2n-2}{\sqrt{1+n^2}}=0$, $\frac{|5+2n+2n-2|}{\sqrt{1+n^2}}=3\Rightarrow|4n+3|=3\sqrt{1+n^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow 7n^2+24n=0$, $n=0$ vagy $n=-\frac{24}{7}$. $\mathbf{n}(1;0)$, $P(2;-2)\Rightarrow x=2$; $\mathbf{n}(7;-24)$, $P(2;-2)\Rightarrow$

$\Rightarrow 7x-24y=62$.

4197. Legyen $e_1\colon x+2y=1$, $e_2\colon x+2y=3$. $P\in e_1\Rightarrow P(-1;\,1)$, $Q\in e_2\Rightarrow Q(-1;\,2)$.

$PR:RQ=1:3\Rightarrow R\left(-1;\,\frac{5}{4}\right)$. A keresett egyenes átmegy az R ponton és párhuzamos az adott egyenesekkel: $2x+4y=3$.

4198. $\left.\begin{array}{l} e\colon x+y=1 \\ \underline{f\colon y=-1} \end{array}\right\}+\Rightarrow A(2;-1)$. $AS:SA_1=2:1\Rightarrow A_1\left(-\frac{5}{2};\,\frac{1}{2}\right)$.

Legyen $B \in f \Rightarrow B(b; -1)$, $C \in e \Rightarrow C(c; 1-c)$. BC felezőpontja: A_1: $\frac{b+c}{2} = -\frac{5}{2}$, $\frac{-1+1-c}{2} = \frac{1}{2}$. Innen: $B(-4; -1)$, $C(-1; 2)$. $\overrightarrow{BC}(3; 3) \Rightarrow \mathbf{n}(1; -1)$, BC: $x - y = -3$.

4199. e: $y = x + 1$, f: $y = x - 2$, $P_1(0; 1) \in e$, $P_2(0; -2) \in f$, $Q_1(-1; 0) \in e$, $Q_2(2; 0) \in f$. $P_1P_2 = Q_1Q_2 = 3$, ezért a keresett egyenesek: $x = 0$, illetve $y = 0$.

4200. Legyen $A(1; 2)$, $B(-1; -1)$, f: $2x + y = 1$. Az A pontot f-re tükrözve az A_1 pont a BC oldalegyenesre illeszkedik. A BC és az f egyenesek metszéspontja adja a keresett C csúcsot. $C\left(-\frac{13}{5}; \frac{31}{5}\right)$.

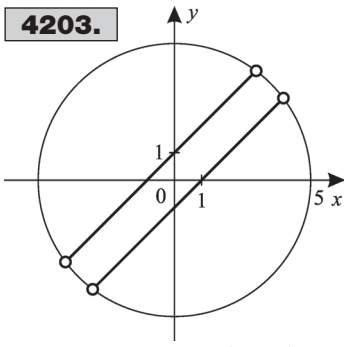
V

4201. $A(1; 1) \in f_\alpha$: $2x - y = 1$. Tükrözzük a B pontot az f_α egyenesre $\Rightarrow B_1 \in AC$. $g \perp f_\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathbf{n}_g(1; 2)$, g: $x + 2y = 13$. $f_\alpha \cap g = T$; $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow T(3; 5)$. Tükrözzük B-t a T-re, $B_1(1; 6)$. Így: $AC = AB_1$: $x = 1$, AB: $3x - 4y = -1$. $C \in AC \Rightarrow C(1; c)$. $t_{ABC} = \frac{AC \cdot m_b}{2} =$ $= \frac{|c-1| \cdot 4}{2} = 5 \Rightarrow |c-1| = \frac{5}{2}$. $c_1 = \frac{7}{2}$, $c_2 = -\frac{3}{2}$, ami nem megoldás; $C\left(1; \frac{7}{2}\right)$.

Innen BC egyenlete: $x - 8y = -27$.

4202. $B(6; 4)$, $e = BC$, $AC \perp BC$, ezért AC: $x - y = -4$. $AC \cap BC = C$; $C(3; 7)$. $AB = 2\sqrt{17}$, $AC = 5\sqrt{2}$, $BC = 3\sqrt{2}$; $\frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot m_c}{2} \Rightarrow m_c = \frac{15}{\sqrt{17}}$.

4203.



4203. $\frac{(x-y)^2 - 1}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} = 0 \Rightarrow \frac{(x - y - 1)(x - y + 1)}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} = 0$.

4204. A bal oldali kifejezés átalakítva. $3x^2 - (8y + 5)x - (3y^2 - 5y - 2) = 0$. Az egyenlet gyöktényezős alakban. $(x - 3y - 1)(3x + y - 2) = 0$. A keresett pontok a két egyenes pontjainak uniója. Mindkét egyenes két-két különböző pontban metszi a koordinátatengelyeket: $P_1\left(\frac{2}{3}; 0\right)$, $P_2\left(0; -\frac{1}{3}\right)$, $P_3(1; 0)$, $P_4(0; 2)$. A $P_2P_3P_4$ háromszög magasságpontja a $P_1\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ pont.

4205. $y - 1 = m(x - 2)$, mert az y tengellyel párhuzamos egyenesek nem elégítik ki a feltételt.

M_1; $\left.\begin{array}{l} y = mx - 2m + 1 \\ y = x + 5 \end{array}\right\} \Rightarrow M_1\left(\frac{2m+4}{m-1}; \frac{7m-1}{m-1}\right)$, $m \neq 1$;

M_2; $\left.\begin{array}{l} y = mx - 2m + 1 \\ y = x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow M_2\left(\frac{2m-3}{m-1}; \frac{1}{m-1}\right)$.

$M_1M_2^2 = \left(\frac{7}{m-1}\right)^2 + \left(\frac{7m}{m-1}\right)^2 = 25 \Rightarrow 12m^2 + 25m + 12 = 0$. $m_1 = -\frac{3}{4}$, $m_2 = -\frac{4}{3}$. A keresett egyenesek: $3x + 4y - 10 = 0$, illetve $4x + 3y - 11 = 0$.

4206. $P_1(x_1;\ y_1)$, $P_2(x_2;\ y_2)$, $Q_1\left(3x_1;\ \frac{y_1}{3}\right)$, $Q_2\left(3x_2;\ \frac{y_2}{3}\right)$. $P_1P_2 = Q_1Q_2 \Rightarrow P_1P_2^2 = Q_1Q_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 = 9(x_2-x_1)^2 + \frac{1}{9}(y_2-y_1)^2$, $\frac{8}{9}(y_2-y_1)^2 = 8(x_2-x_1)^2 \Rightarrow \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)^2 = 9$.

$\overrightarrow{P_1P_2}(x_2-x_1;\ y_2-y_1) \Rightarrow m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$; $m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$. Azok a szakaszok elégítik ki a feladat feltételeit, amelyek meredeksége ± 3.

4207. Az $AEFG$ négyzet csúcsai: $A(0;0)$, $E(4;-4)$, $F(0;-8)$, $G(-4;-4)$. A BE egyenes egyenlete: $-x+3y=-8$, a CF egyenes egyenlete: $-2x+y=-8$, a DG egyenes egyenlete: $3x+y=8$. $BE \cap CF$: $P\left(\frac{16}{5};\ -\frac{8}{5}\right)$. $P \in DG$.

4208. A csúcspontok koordinátái: $A_1\left(-2\sqrt{3};\ 2\right)$, $B_1\left(3;\ -3\sqrt{3}\right)$, $C_1\left(3+2\sqrt{3};\ 2+3\sqrt{3}\right)$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 2\sqrt{13+6\sqrt{3}}$.

4209. Az ABC háromszög súlypontja: $S_1(5;\ 3;\ 0)$. A BCD háromszög súlypontja: $S_2\left(\frac{19}{3};\ \frac{13}{3};\ \frac{4}{3}\right)$. Az ACD háromszög súlypontja: $S_3\left(\frac{13}{3};\ \frac{11}{3};\ \frac{4}{3}\right)$. Az ABD háromszög súlypontja: $S_4\left(\frac{10}{3};\ 2;\ \frac{4}{3}\right)$. $DS_1^2 = (4-5)^2 + (4-3)^2 + 4^2 = 18$, $AS_2^2 = \frac{546}{9}$; $BS_3^2 = \frac{66}{9}$;

$CS_4^2 = \frac{530}{9}$. Az élek hosszának négyzetei: $AB^2 = 40$, $BC^2 = 34$, $AC^2 = 130$, $AD^2 = 48$,

$BD^2 = 24$, $CD^2 = 50$. Ekkor $\frac{1304}{9} : 326 = 4:9$.

4210. $C(1;5)$. Az AB egyenlete: $x+3y=30$. $AB \cap s_c = C_1(3;\ 9)$. A Thalész-kör középpontja: $C_1(3;9)$, a sugara: $r = CC_1 = \sqrt{20}$. Az A és a B csúcsok koordinátáit az

$\left.\begin{matrix}(x-3)^2 + (y-9)^2 = 20 \\ x+3y=30\end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer gyökei adják.

$A\left(3+3\sqrt{2};\ 9-\sqrt{2}\right)$, $B\left(3-3\sqrt{2};\ 9+\sqrt{2}\right)$.

4211. Kössük össze a paralelogramma belsejében vagy az oldalán elhelyezkedő, a csúcsoktól különböző rácspontot a paralelogramma csúcsaival. Ekkor négy vagy három háromszög keletkezik. A $t = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\right|$ területképlet szerint, mivel a háromszögek csúcsainak koordinátái egész számok, $t \geq \frac{1}{2}$. Ebből már következik a feladat igaz állítása.

$T \geq 4 \cdot \frac{1}{2}$, vagy $T \geq 3 \cdot \frac{1}{2}$, $T > 1$.

4212. AC-vel párhuzamos egyenes egyenlete $y = x$. $M(3;\ 3)$, $N\left(\frac{9}{2};\ \frac{9}{2}\right)$. $t_{ABC} = 6$ területegység, $t_{AMNC} = 4{,}5$ területegység.

4213. A négyszög csúcspontjai legyenek: $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$, $D(x_4;\ y_4)$. Ekkor az AB felezőpontja: $F_1\left(\frac{x_1+x_2}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, a BC oldal felezőpontja az F_2, a CD oldal felezőpontja F_3, a DA oldal felezőpontja F_4. Legyen az F_1F_3, felezőpontja P, az F_2F_4 felezőpontja Q. $P\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$, $Q\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$. Innen látható, hogy $P\equiv Q$. Legyen az AC átló felezőpontja E, a BD átló felezőpontja G.

V

$E\left(\frac{x_1+x_3}{2};\ \frac{y_1+y_3}{2}\right)$, $G\left(\frac{x_2+x_4}{2};\ \frac{y_2+y_4}{2}\right)$. Könnyen igazolható, hogy az EG felezőpontja $M\equiv P\equiv Q$.

Megjegyzés: A tétel állítása igazolható úgy is, ha a csúcsok helyvektoraival, az **a**, **b**, **c**, **d** vektorokkal számolunk.

4214. A $P(x;y)$ pont koordinátáira felírhatjuk a következő egyenletet: $(x-4)^2+y^2+20=x^2+(y-2)^2$. Innen $2x-y-8=0$. A mértani hely egyenes, amelynek minden pontja megfelel.

4215. A háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-6;0)$, $B(6;0)$, $C(u;\ -3u+5)$, A súlypont koordinátái: $S(x;\ y)$. Ekkor $x=\frac{u}{3}$, $y=\frac{5-3u}{3}$. Innen $y=\frac{5-9x}{3}$, a súlypont a $9x+3y=5$ egyenletű egyenesen mozog. Nem keletkezik háromszög, ha a C csúcs az x tengelyen van. A $P\left(\frac{5}{9};\ 0\right)$ pont nem tartozik a mértani helyhez.

4216. Az AB egyenes egyenlete $3u+5v=30$. Az átfogó P pontjának koordinátái $\left(u;\ \frac{30-3u}{5}\right)$, ahol $0<u<10$. A téglalap K középpontjának koordinátái $x=\frac{u}{2}$, $y=\frac{30-3u}{10}$, ahol $0<u<5$. A mértani hely pontjainak koordinátái között az $y=\frac{30-3\cdot 2x}{10}$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $3x+5y=15$ összefüggés áll fenn. A mértani hely egyenes szakasz, a szakasz végpontjai nem tartoznak a ponthalmazhoz.

4217. A $K(u;\ v)$ középpont rajta van az $u-v=-2$ egyenesen, másrészt $r=|v|$ és $(u-7)^2+(v-2)^2=v^2$. Megoldás: $(x-3)^2+(y-5)^2=25$ és $(x-15)^2+(y-17)^2=289$.

4218. $(x-3)^2+(y-1)^2=1$, $(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

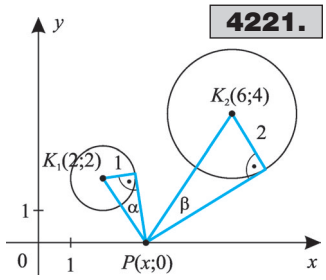
4219. $t\approx 30{,}2$ területegység.

4220. Helyezzük el az $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$ csúcspontokkal adott háromszöget a koordináta-rendszerben úgy, hogy a háromszög S súlypontja az origóban legyen. Ekkor $x_1+x_2+x_3=0$, $y_1+y_2+y_3=0$. A $P(x;\ y)$ pontra (1)
$PA^2+PB^2+PC^2=x_1^2+x_2^2+x_3^3+y_1^2+y_2^2+y_3^3+3\left(x^2+y^2\right)$, mert $x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3=0$. Az (1) összeg akkor minimális, ha $x=y=0$, $P\equiv S$.

4221. A feladat szerint azt követeljük, hogy $\alpha = \beta$ legyen. Ekkor felírhatjuk a következő egyenlőséget:

$$\frac{1}{K_1P} = \frac{2}{K_2P} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2+4} = \frac{4}{(x-6)^2+16}.$$

Két megoldás van. $P_1\left(\frac{10}{3}; 0\right)$, $P_2(-2; 0)$.



4222. Az érintési pontok: $E_1(11; -9)$, $E_2(11; -25)$. Az adott kör középpontja: $K(17; -17)$. Az E_1 pontban érintő kör középpontja rajta van az E_1K egyenesen, amelynek egyenlete: $4x + 3y = 17$. Az érintő kör középpontja $K^*(u; v)$, a sugara $r = |v|$. Felírhatjuk a következő egyenleteket:

$$\left.\begin{aligned} 4u + 3v &= 17 \\ (u-11)^2 + (v+9)^2 &= v^2 \end{aligned}\right\}.$$

Két megoldás van: $(x-8)^2 + (y+5)^2 = 25$; $(x-38)^2 + (y+45)^2 = 2025$. Hasonló meggondolással kapjuk az $E_2(11; -25)$ pontban érintő kör egyenletét. Itt is két megoldás van:

$$(x+64)^2 + (y+125)^2 = 15\,625 \text{ és } \left(x - \frac{58}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{125}{9}\right)^2 = \left(\frac{125}{9}\right)^2.$$

4223. A keresett kör középpontja $K(u; v)$ ahol $v = 8$. A sugár $r = 12 - u$, $OK = 4 + r$, ahol O az origó. Ekkor $\sqrt{u^2 + 64} = 4 + 12 - u$. Innen $u = 6$. Megoldás: $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 36$.

4224. A húr F felezőpontját megkapjuk, ha a $K(4; -2)$ ponton átmenő és az adott egyenesre merőleges egyenes egyenletét felírjuk, azután a két egyenes közös pontját kiszámítjuk. $F\left(1; \frac{11}{2}\right)$.

$R^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + KF^2$. A kör egyenlete: $(x-4)^2 + (y+2)^2 = \frac{171}{2}$.

4225. Mivel $x^2 + y^2 = 1$, ezért $x^2 + xy + y^2 = 1 + xy$. Szükséges, hogy x és y azonos előjelű legyen. Ha $x > 0$ és $y > 0$, akkor $xy \le \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{1}{2}$. $\left(\sqrt{xy} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\,!\right)$.

Tehát $x^2 + xy + y^2 \le \frac{3}{2}$. Egyenlőség akkor van, ha $x = y$; $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4226. A k_1 és k_2 körök metszik egymást, mert $CD = 10 < 2\sqrt{50}$. Az AB húr egyenesének egyenlete: $4x + 3y = 11$; $\overrightarrow{DC}(8; 6)$; $\frac{\overrightarrow{DC}}{2}(4; 3)$. Ebből következik, hogy $DC \perp AB$. Az $ADBC$ négyszög rombusz. $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = AC^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2$; $AB = 10$ egység. $t_{ADBC} = 50$ területegység.

4227. $a = -3$. Az $x - 3y = 7$ egyenes érinti az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletű kört, ha $r^2 = \frac{49}{10}$.

4228. Az adott körök k_1: $x^2+(y-3)^2=3$ és k_2: $(x-1)^2+y^2=1$. $K_1(0;3)$, $r_1=\sqrt{3}$, $K_2(1;0)$, $r_2=1$. $K_1K_2=\sqrt{10}>1+\sqrt{3}$, a két körnek nincs közös pontja. Legyen $P(x;y)$. Az egyenlő hosszú érintőszakaszokra felírhatjuk a következő egyenletet: $x^2+(y-3)^2-3=$ $=(x-1)^2+y^2-1$. Innen e: $x-3y+3=0$. A P pont a kapott egyenesen fut végig. Vegyük észre, hogy $e\perp K_1K_2$.

4229. Az $ABCD$ téglalap csúcsai: $A(1;-4)$, $B(9;12)$, $C(5;14)$, $D(-3;-2)$. Ugyanis $\overrightarrow{AD}(-4;2)$, elforgatva $-90°$-kal $\mathbf{v}(2;4)$. $\overrightarrow{OB}=4\mathbf{v}+\overrightarrow{OA}$, ahol O az origó. $\overrightarrow{OB}(9;12)$. Az $ABCD$ köré írható kör egyenlete: $(x-3)^2+(y-5)^2=85$. Legyen $y=0$, $d_1=4\sqrt{15}$, legyen $x=0$, $d_2=4\sqrt{19}$. Az $\overrightarrow{AD}$ vektort $+90°$-kal elforgatva AB^*C^*D téglalapot kapunk, $d=4\sqrt{15}$.
A kör az x tengelyt nem metszi.

4230. Az adott kör középpontja: $K(0;-2)$, a sugara $r=\sqrt{5}$ egység, $PK=\sqrt{50}$ egység. Az érintőszakasz d hosszára felírhatjuk a következő egyenletet: $d^2=50-5$, $d=3\sqrt{5}$. Az érintési pont koordinátáit az $\left.\begin{array}{r}(x-5)^2+(y-3)^2=45\\ \underline{x^2+y^2+4y=1}\end{array}\right\}$ egyenletrendszer gyökei adják. $E_1(-1;0)$, $E_2(2;-3)$. $E_1E_2=3\sqrt{2}$. Az érintők egyenletei: e_1: $x-2y+1=0$, e_2: $2x-y-7=0$.

4231. A C csúcsot az AB szakasz felezőmerőlegese metszi ki az adott körből. Két megoldás van: $C_1(1;-4)$, $C_2(4;-1)$.

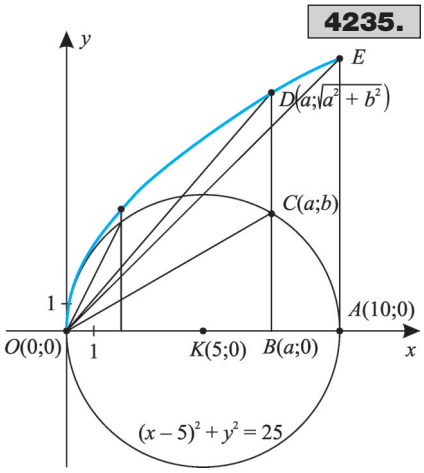
4232. A keresett k kör középpontja rajta van az $x=2$ egyenletű egyenesen és az $E(2;-4)$, $A(10;2)$ pontokat összekötő szakasz felezőmerőlegesén. Az $x=2$, $4x+3y=21$ egyenletrendszer gyökei $K\left(2;\frac{13}{3}\right)$. k egyenlete: $(x-2)^2+\left(y-\frac{13}{3}\right)^2=\frac{625}{9}$, mert $r=\frac{13}{3}+4$.

4233. A P pont koordinátái: $(x;y)$.
Ekkor $(x+4)^2+y^2+(x-8)^2+y^2=80\Leftrightarrow(x-4)^2+y^2=16$. A kör minden pontja megfelel.

4234. Határozzuk meg az $y=\lambda(x-4)$ és az $y=-\frac{1}{\lambda}x$ egyenletű egyenesek M metszéspontjának koordinátáit. Rögtön adódik, hogy a $(0;0)$ és a $(4;0)$ koordinátájú pontok nem lehetnek az $\left.\begin{array}{l}(1)\ y=\lambda(x-4)\\ \underline{(2)\ y=-\frac{1}{\lambda}x}\end{array}\right\}$ egyenletrendszer gyökei. Ugyanis, ha $y=0$, akkor $\lambda=0$, vagy $x=4$. De $\frac{1}{\lambda}$ miatt $\lambda\neq0$. Ha $x=4$, akkor $y=0$ és a (2)-es egyenlet szerint $x=0$ adódna, ami ellentmondás. Feltételezve, hogy $\lambda\neq0$, $x=\frac{4\lambda^2}{\lambda^2+1}$, $y=-\frac{4\lambda}{\lambda^2+1}$. Küszöböljük ki a $\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ paramétert. $x^2+y^2=\frac{16(\lambda^2+\lambda)^2}{(\lambda^2+1)^2}\Rightarrow x^2+y^2=\frac{16\lambda^2}{\lambda^2+1}$. De $\frac{16\lambda^2}{\lambda^2+1}=4x$, tehát $x^2+y^2+4x=0$.
A mértani hely olyan kör, amelynek középpontja a $K(-2;0)$ pont és a sugara $r=2$. $A(0;0)$ és a $(4;0)$ pontok nem tartoznak a mértani helyhez.

4235. Jelöléseinket az ábrán láthatjuk. Legyen $0 \leqq b \leqq 5$, akkor $0 \leq a \leq 10$. A C pont koordinátáira igaz, hogy $(a-5)^2+b^2=25 \Leftrightarrow a^2+b^2-10a=0$. A D pont $(x;y)$ koordinátáira felírhatjuk a következő egyenlőségeket: $x=a$, $y^2=a^2+b^2$. De $a^2+b^2=10a=10x$, tehát $y^2=10x$, ahol $0 \leq x \leq 10$ és $0 \leq y \leq 10$. A mértani hely az $y^2=10x$ egyenletű parabolának az ábrán látható OE íve.

4235.



4236. Az érintő egyenlete $y=mx-4$ alakú. Az egyenesnek egy közös pontja van a parabolával, ha az $mx-4=\frac{1}{4}x^2$ egyenlet diszkriminánsa 0. $m=\pm 2$; $y=\pm 2m-4$.

4237. A $P(-4;-1)$ ponton átmenő egyenessereg egyenlete: $y+1=m(x+4) \Rightarrow$
$\Rightarrow x=\frac{y+1-4m}{m}$. Az egyenes érintő, ha az $y^2=\frac{2(y+1-4m)}{m}$ egyenlet diszkriminánsa 0. Két érintőt kapunk: e_1: $y=\frac{1}{2}x+1$, e_2: $y=-\frac{1}{4}x-2$.

4238. $y_1=(3-a)^2-6(3-a)+10=a^2+1$ és $y_2=(3+a)^2-6(3+a)+10=a^2+1$.

4239. $b=0$, $a=-5$.

4240. Helyettesítsük az $y=ax^2+bx+c$ egyenletben az x és y helyére az adott pontok koordinátáit. A kapott egyenletrendszerből $a=2$, $b=-8$, $c=6$. $y=2(x-2)^2-2$. $F\left(2;-\frac{15}{8}\right)$, a vezéregyenes egyenlete: $y=-\frac{17}{8}$, mert $p=\frac{1}{4}$, $\frac{p}{2}=\frac{1}{8}$ és a tengelypont: $C(2;-2)$.

4241. Oldjuk meg az $\left.\begin{array}{l} y=x^2+2x \\ y=mx \end{array}\right\}$ egyenletrendszert. $x^2+(2-m)x=0$. Egy közös pont van, ha $m=2$. Az $y=2x$ egyenes érinti a parabolát. Ha $m \neq 2$, az egyenes két pontban metszi a parabolát, kivéve az y tengelyt, amely a $(0;0)$ pontban metszi a parabolát. Az $y=-\frac{1}{2}x$ egyenesnek a parabolával két közös pontja van. $O(0;0)$, $M\left(-\frac{5}{2};\frac{5}{4}\right)$, $OM=\frac{5\sqrt{5}}{4}$.

4242. Az $y=mx$ és az $y=4x^2+4$ egyenletekből álló egyenletrendszernek egy megoldása van, ha $m=\pm 8$. Az érintők egyenletei: $y=\pm 8x$. $E_1(-1;8)$, $E_2(1;8)$.

4243. $y=(x+1)^2+c-1$. A tengelypont az $x=-1$ egyenletű egyenesre illeszkedik c értékétől függetlenül. Ha $c=1$, akkor a tengelypont $T(-1;0)$.

4244. A $P(1;1)$ pont koordinátái kielégítik a parabola egyenletét. Innen $b+c=0$, $c=-b$. Az $y=x$ egyenletű egyenes érinti az $y=x^2+bx-b$ parabolát, ha a diszkrimináns $(b-1)^2+4b=0$. $b=-1$, $c=1$.

4245. A parabola az x tengelyt az $A(-3;0)$, $B(3;0)$ pontokban metszi. A kör egyenlete $x^2+(y-4)^2=25$. $C(4;7)$, $D(-4;7)$. Az $ABCD$ trapéz területe: $t=\frac{8+6}{2}\cdot 7=49$ területegység.

4246. A parabola az x tengelyt a $P_1(1;0)$ és $P_2(3;0)$ pontokban metszi. Az érintő iránytangensét az $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ függvény deriváltjával számíthatjuk ki. $f'(x) = -2x + 4$. $f'(1) = 2$ és $f'(3) = -2$. Az érintők egyenletei: e_1: $y = 2x - 2$ és e_2: $y = -2x + 6$. Az $e_1e_2\sphericalangle = 53{,}13°$.

4247. A parabola $P(a; a^2)$ pontjában az érintő iránytangense az $f'(x) = 2x$ függvénnyel számítható ki, $m_1 = 2a$. A PA egyenes iránytangense $m_2 = \dfrac{8 - a^2}{9 - a}$. $\overrightarrow{PA}(9 - a; 8 - a^2)$. A merőlegesség feltétele: $m_1 m_2 = -1$. $2a \cdot \dfrac{8 - a^2}{9 - a} = -1 \Leftrightarrow 2a^3 - 15a - 9 = 0$, $a \neq 9$. Az egyenlet bal oldala szorzattá bontható. $2(a^3 - 27) - 15(a - 3) = 0 \Leftrightarrow (a - 3)(2a^2 + 6a + 3) = 0$. Innen $a_1 = 3$, $a_2 = -0{,}63$, $a_3 = -2{,}36$. A P pontra három megoldás van. $P_1(3;9)$, $P_2(-0{,}63;0{,}40)$, $P_3(-2{,}36;5{,}57)$.

4248. *I. megoldás.* A $P(2;-4)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete az m iránytangenssel kifejezve: $y = mx - 2m - 4$. m-et úgy kell meghatározni, hogy az $\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{8}x^2 \\ y = mx - 2m - 4 \end{array}\right\}$ egyenletrendszernek egy megoldása legyen. A diszkrimináns $D = 64m^2 - 4(16m + 32)$. Az egyenes érinti a parabolát, ha $D = 0$; $m_1 = 2$, $m_2 = -1$. Két érintő húzható: $y = 2x - 8$, vagy $y = -x - 2$. Az érintési pontok koordinátái: $T_1(8;8)$, $T_2(-4;2)$. *a)* Ekkor $2 = \dfrac{-4 + 8}{2}$ igaz állítás. *b)* $F(0;2)$. $PF = \sqrt{40}$, $T_1F = 10$, $T_2F = 4$. Valóban $PF = \sqrt{T_1F \cdot T_2F}$.

II. megoldás. Az érintő iránytangensét az $f(x) = \dfrac{1}{8}x^2$, $x \in \mathbf{R}$ függvény derivált függvényével is meghatározhatjuk. $f'(x) = \dfrac{1}{4}x$. A $T(a; a^2)$ pontban $f'(a) = m = \dfrac{a}{4}$. $\overrightarrow{PT}\left(a - 2; \dfrac{1}{8}a^2 + 4\right)$. A PT érintő iránytangense: $\dfrac{\frac{1}{8}a^2 + 4}{a - 2} = \dfrac{a}{4}$. Innen $a_1 = 8$, $a_2 = -4$. $T_1(8;8)$, $T_2(-4;2)$.

4249. Két érintőt kapunk. $y = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}x - \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} - 1$. Vegyük észre, hogy $m_1 m_2 = -1 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ az érintők merőlegesek egymásra. P a vezéregyenesen van.

4250. Az $y = 3x^2 - 4$ egyenletű parabolát az $y = 2x + b$ egyenletű egyenes két pontban metszi, ha $13 + 3b > 0$. Ekkor a metszéspontok abszcisszái:
$x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{13 + 3b}}{3}$ és $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{13 + 3b}}{3}$. A húr felezőpontjának első koordinátája:
$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{1}{3}$ = állandó. A mértani hely az $x = \dfrac{1}{3}$ egyenletű egyenesnek a parabola belsejébe eső pontjai. Olyan pontok, amelyek második koordinátája $y > 3 \cdot \dfrac{1}{9} - 4$, $y > -\dfrac{11}{3}$.

4251. A $P(u;v)$ ponton átmenő egyenesek paraméteres egyenlete: $y = mx + v - mu$, ahol $m \in \mathbf{R}$ és $u < 0$. Az egyenes érinti a parabolát, ha az $\left.\begin{array}{l} y^2 = 2px \\ y = mx + v - mu \end{array}\right\}$ egyenletrendszernek

egy megoldása van és $m \neq 0$. Az $y = \frac{my^2}{2p} + v - mu$ egyenlet diszkriminánsa 0 kell legyen. (1) $D = 4p^2 - 4m(2pv - 2pum) = 0$. (1) egyenletből $4p \neq 0$-val egyszerűsítve:
(2) $2um^2 - 2vm + p = 0$ adódik. (2) egyenletnek m-re két valós gyöke van, mert a diszkrimináns $4(v^2 - 2pu) > 0$. 0 akkor lenne, ha az $(u; v)$ pont parabolapont lenne, de a P pont a parabola külső pontja, ezért $v^2 > 2pu$. A $P(u; v)$ pontból húzott érintők pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $m_1 m_2 = -1$. A (2)-es egyenletből $m_1 m_2 = \frac{p}{2u}, \frac{p}{2u} = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{p}{2}$. A derékszög csúcsának mértani helye a parabola vezéregyenese.

Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.
A kiadásért felel: Jókai István vezérigazgató
Raktári szám: 16127/II
Felelős szerkesztő: Szloboda Tiborné
Műszaki igazgató: Babicsné Vasvári Etelka
Műszaki szerkesztő: Wéber Andrea
Grafikai szerkesztő: Villám Péter
Terjedelem: 52,91 (A/5) ív
1. kiadás, 2005
Formakészítés: Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Stúdió